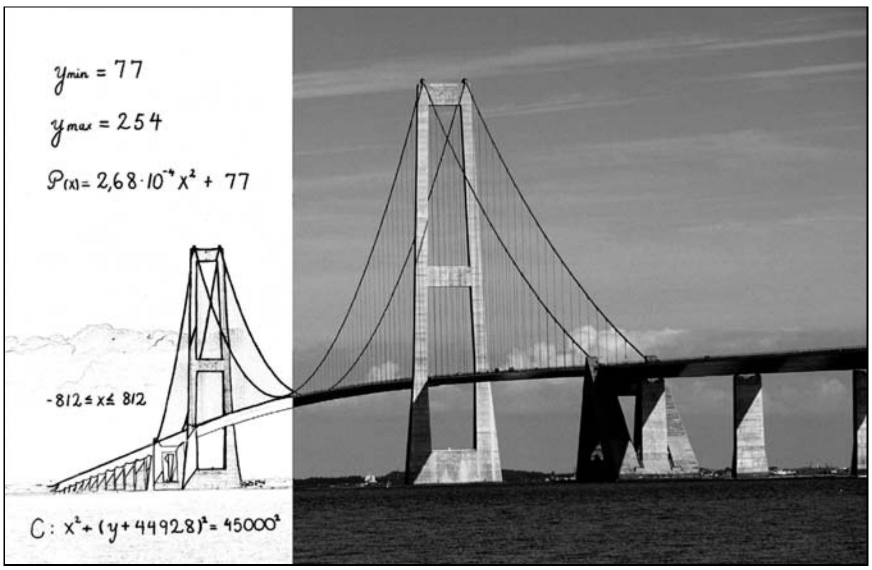
Wenn Seile fremde Lasten tragen

von Dr. Markus Köcher, Calw

Parabel versus Kettenlinie

Immer, wenn ich in Schulbüchern im Abschnitt über Parabeln Abbildungen von Hängebrücken sah, dachte ich, daß die Schüler „angeschmiert" würden. Das Tragseil hängt gar nicht in Form einer Parabel, dachte ich empört, und man dürfe doch nicht unehrlich sein, nur um ein schönes motivierendes Bildchen bieten zu können.

Deshalb war ich erstaunt, als ich unter `www.mathematik.de` folgenden Ausschnitt eines Plakats sah, das zum „World Mathematical Year 2000" einlud:



Darauf ist die größte Hängebrücke Europas abgebildet, die Storebælt-Brücke mit 1624 m maximaler Spannweite, welche zwischen den dänischen Inseln Fyn und Sjælland den Großen Belt überbrückt. Neben dem Bild findet man nun tatsächlich die Gleichung einer Parabel $P(x) = 2,68 \cdot 10^{-4}\, x^2 + 77$, die offensichtlich den Verlauf der Tragseile beschreiben soll.

Ich hätte dagegen eine Kettenlinie erwartet, also eine Funktion des Typs $f(x) = \frac{1}{a} \cosh(a(x + b)) + c$, die bekanntlich den Verlauf frei hängender

Ketten, Kabel und Seile beschreibt, wie in vielen Lehrbüchern, beispielsweise in [4], nachgewiesen wird. Daß sich das Seil einer viel komplexeren Anordnung mit einer einfachen Parabel beschreiben lassen sollte, erschien mir unrealistisch. Da irrte ich mich aber, wie sich zeigen wird. Es gelten nämlich folgende Gesetzmäßigkeiten:

1. Seil unter Eigengewicht:
Wenn ein Seil an zwei Punkten befestigt und nur der Schwerkraft ausgesetzt ist, nimmt es die Form einer Kettenlinie an, das heißt, seine Kurve folgt einer Funktion des Typs

$$y(x) = \frac{1}{a} \cosh\left(a(x+b)\right) + c.$$

2. Seil unter konstanter Linienlast:
Wenn ein Seil an zwei Punkten aufgehängt ist und entweder sehr schwach durchhängt oder eine relativ große Last trägt, die in geringen konstanten Abständen am Seil befestigt ist, nimmt es näherungsweise die Form einer Parabel an, das heißt, seine Kurve folgt näherungsweise einer quadratischen Funktion des Typs

$$y(x) = \frac{1}{2} a\, x^2 + bx + c.$$

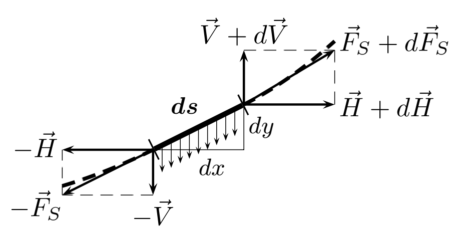
Die Seile, Ketten und Kabel werden dabei als ideal biegsam (keine Steifigkeit) und dehnstarr (keine Dehnbarkeit in Zugrichtung) angenommen.

Herleitung und Lösung der Differentialgleichungen

Wir leiten die Gleichungen in beiden Fällen her, um den Unterschied genau erkennen zu können. Die Darstellung folgt überwiegend [1] und [6].

1. Seil unter Eigengewicht

Um die zugehörige Gleichung aufstellen zu können, schneidet man aus dem Seil ein infinitesimal kleines Stück der Länge ds heraus:



Man erkennt zunächst, daß die horizontalen Komponenten der Seilkraft an beiden Enden gleich groß sein müssen, weil auf das Seilelement keine horizontale Kraft einwirkt:

$$dH = 0 \quad \Longrightarrow \quad H = const. \tag{1}$$

Außerdem gilt $y' = \frac{dy}{dx} = \frac{V}{H}$, woraus $V = H \cdot y'$ und wegen (1)

$$V' = H \cdot y'' \tag{2}$$

folgt.

Am oberen Ende des Seilelements muß nun zusätzlich zu V die vertikal gerichtete Gewichtskraft dV des Seilelements ausgeglichen werden. Wenn $q = \varrho\, g\, A_S$ die Gewichtskraft des Seils pro Länge angibt (Dichte ϱ, Seilquerschnitt A_S), dann gilt

$$dV = q \cdot ds.$$

Zusammen mit $ds = \sqrt{(dx)^2 + (dy)^2} = \sqrt{1 + y'^2} \cdot dx$ ergibt sich hieraus $dV = q \cdot \sqrt{1 + y'^2} \cdot dx$, also

$$V' = \frac{dV}{dx} = q \cdot \sqrt{1 + y'^2}. \tag{3}$$

(2) und (3) ergeben zusammen die gesuchte Differentialgleichung

$$\boxed{y'' = \frac{q}{H} \cdot \sqrt{1 + y'^2}.} \tag{4}$$

Setzt man $a = \frac{q}{H}$, so erhält man durch die Substitution $p = y'$

$$p' = \frac{dp}{dx} = a \cdot \sqrt{1 + p^2}.$$

Integration nach x und Variablensubstitution auf der linken Seite ergibt

$$\int \frac{dp}{\sqrt{1 + p^2}} = \int a\; dx,$$

woraus mit $(\operatorname{arsinh} x)' = \frac{1}{\sqrt{1+x^2}}$ gerade $\operatorname{arsinh} p = a \cdot (x + b)$ folgt, also

$$p = \sinh(a \cdot (x + b)).$$

Die Resubstitution $y' = p$ dieser Gleichung liefert

$$y' = \frac{dy}{dx} = \sinh(a \cdot (x + b)),$$

woraus man nach einer weiteren Integration

$$\int dy = \int \sinh(a \cdot (x + b))\, dx$$

und wegen $(\cosh x)' = \sinh x$ unter Berücksichtigung der inneren Ableitung $y - c = \frac{1}{a} \cdot \cosh(a \cdot (x + b))$ erhält. Als Lösung der Differentialgleichung (4) ergibt sich also

$$\boxed{y(x) = \frac{1}{a} \cdot \cosh(a \cdot (x + b)) + c} \tag{5}$$

mit $a = \frac{q}{H}$ und den Integrationskonstanten b und c.

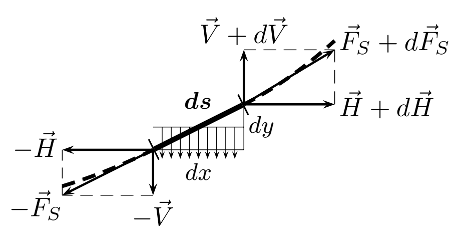
Bemerkungen

In [1], [2] und [4] wird die Lösung des zugehörigen Randwertproblems bei gegebener Seillänge L ausführlich dargestellt.

H. Schupp bietet in [3] übrigens einen Lösungsweg für die Differentialgleichung (4), der sich auch für eine Doppelstunde in der gymnasialen Oberstufe im Anschluß an die Unterrichtseinheit Expontentialfunktionen eignet.

2. Seil unter konstanter Linienlast

Auch hier schneidet man wieder ein infinitesimal kleines Stück aus dem Seil heraus:



Die Gleichungen (1) und (2) aus dem 1. Fall bleiben mit unveränderter Begründung gültig.

Die Rechnung vereinfacht sich, wenn man die Belastung durch das Eigengewicht des Seils vernachlässigt, weil es durch eine relativ große konstante

Last überlagert wird, die in geringen, in x-Richtung festen Abständen am Seil befestigt ist. Dann hängt die Kraft dV, welche die am Seilelement angehängte Last an seinem oberen Ende ausgleichen muß, nur noch von dx und nicht wie im ersten Fall von der Länge ds des Elements ab:

$$dV = q_0 \cdot dx$$

führt nun auf die einfache Gleichung

$$V' = \frac{dV}{dx} = q_0, \tag{6}$$

wenn q_0 die konstante Kraft angibt, die in geringen, festen Abständen am Seil ansetzt. (Derselbe Lastfall liegt auch bei einem Seil unter Eigengewicht vor, das nur sehr schwach durchhängt, weil sich dann ds und dx annähern. In diesem Fall ist q_0 die näherungsweise konstante Kraft des Eigengewichts.) Aus (2) und (6) ergibt sich unmittelbar die zugehörige Differentialgleichung

$$\boxed{y'' = \frac{q_0}{H}.} \tag{7}$$

Setzt man wieder $a = \frac{q_0}{H}$, liefert zweimalige Integration sofort die Lösung

$$\boxed{y(x) = \frac{1}{2} a\, x^2 + bx + c} \tag{8}$$

mit den Integrationskonstanten b und c.

Bemerkungen zur Genauigkeit

Nun ist dies zunächst nur eine Näherung. Bei einer Hängebrücke kann man weder von schwachem Durchhang noch von einem Tragseil ausgehen, dessen Gewicht zu vernachlässigen wäre — die Stahlseile der Storebælt-Brücke haben schließlich einen Durchmesser von knapp 85 cm. Inzwischen kann man aber die statischen Berechnungen mit Hilfe komplexer Konstruktionssoftware ohne Näherungsannahmen durchführen. Dabei ergeben sich nur sehr geringe Abweichungen von der Rechnung mit Näherungsannahmen. Die Tragseile einer Hängebrücke verlaufen also mit großer Genauigkeit parabelförmig. Die Abweichungen seien geringer als jene, die man durch nicht exakt bekannte Belastungen, Fertigungsungenauigkeiten etc. ohnehin nicht vermeiden kann — schreibt Prof. Dr. Jürgen Dankert von der Hochschule für Angewandte Wissenschaften Hamburg in einer E-Mail an den Verfasser. Bei den Berechnungen dürfe das Eigengewicht der Tragseile nicht vernachlässigt, es könne aber zur konstanten Linienlast q_0 hinzugeschlagen werden.

Das heißt natürlich nicht, daß die Statik einer Hängebrücke einfach zu beherrschen wäre. Die Berechnungen z. B. der Windbelastungen und der Belastungen im Kollisionsfall, vor allem aber der Belastungen während des Bauprozesses sind extrem aufwendig!
Grundsätzlich derselbe Lastfall wie bei einer Hängebrücke ist übrigens bei einer Bogenbrücke gegeben, bei der Vertikalstreben in konstantem Abstand die Last der Fahrbahn auf den Brückenbogen ableiten. Auch hier verläuft der Bogen annähernd parabelförmig.

Ein (Gedanken)experiment

Wenn man ein leichtes Kunststoffseil unter Wasser befestigt, dann erfährt es an jedem Punkt eine konstante Auftriebskraft, welche die geringe Gewichtskraft überlagert. Das Seil beschreibt also näherungsweise einen Parabelbogen nach oben! Man fülle ein längliches Aquarium. . .

Literatur

[1] Jürgen und Helga Dankert: *Technische Mechanik*. 3. Auflage. Teubner, 2004. Vgl. Kap. 11, S. 143–152.

[2] J. L. Meriam, L. G. Kraige: *Engineering Mechanics. Volume 1: Statics.* Fifth Edition. Wiley, 2003. Vgl. Art. 5/8, S. 283–296.

[3] Hans Schupp, Heinz Dabrock: *Höhere Kurven*. BI, 1995. Vgl. Abschnitt 7.3.4, S. 260–263.

[4] Wolfgang Walter: *Gewöhnliche Differentialgleichungen*. 5. Auflage. Springer, 1993. Vgl. § 11 VIII, S. 107–109.

[5] René Grothmann: Projekt über die Kettenlinie für die Schule: `http://mathsrv.ku-eichstaett.de/MGF/homes/grothmann/Projekte/Kettenlinie/`

[6] Andreas Lindner: Interaktives Lernprojekt für Schüler: `http://teacher.eduhi.at/alindner/Dyn_Geometrie/kettenlinie/` [exzellente Realisierung, funktioniert am besten mit Firefox]

[7] Bernd Nebel: Informationen über die Storebælt-Brücke: `http://www.bernd-nebel.de/bruecken/3_bedeutend/storebaelt/storebaelt.html`

[8] Das Plakat mit der Storebælt-Brücke auf `www.mathematik.de`: `http://www.mathematik.de/mde/information/wasistmathematik/wasistmathematik.html`