

Hin und her zwischen den Dimensionen

Ein Modell zur Perspektive und Bildbeschreibung

Norbert Helderemann, Karl Heinrich Hofmann und Richard Münder

Von Dimension 3 zu Dimension 2

Der mathematisch fundierte Abstieg von der Anschauung des dreidimensionalen Raumes zu der Darstellung auf einer Fläche durch die Zentralperspektive war eine der grossen kunsthistorischen Leistungen der Renaissance. Dies wird in vielen Quellen dargestellt, so etwa in [3] und in dem kürzlich erschienenen umfangreichen Werk von K. Andersen [1], das eben von Benno Artmann ausführlich und sachkundig besprochen worden ist [2]. In dieser Zeitschrift ist die Handhabung der Perspektive durch die Maler der Frührenaissance im Quattrocento mit der Betrachtung eines Altarbildes des in die Marken expatriierten Venezianers Carlo Crivelli als ein Beispiel der „angewandten Mathematik in der Renaissance“ von K. H. Hofmann eingehend besprochen worden [4], sowohl vom kunsthistorischen als auch vom mathematischen Standpunkt aus, mitsamt allen Kuriositäten, die es gerade in diesem Gemälde zu entdecken gibt. (Eine einseitige Reproduktion des Originals wurde in [4] abgedruckt. Die nachstehend wiedergegebene Abbildung 1 erinnert an die Gesamtkomposition.)

Die Realitatsfrage

Die Topografie des Bildes, also das auf dem Gemälde gezeigte Umfeld, in welches das theologische Anliegen des Verkundigungsaltars gestellt ist, wird vom Maler mit großer Sorgfalt, mit spürbarer Liebe zum akribischen Detail und mit einer bei ihm bekannten Neigung für Anekdotisches dargestellt, so dass der Beschauer sich wohl fragen darf, in welchem Umfang hier ein realistisches Stadtpanorama dargestellt wird. Der Katalog der Londoner National Gallery, in welchem dem Bild die Nummer 739 zugewiesen wird, formuliert: „The details of No. 739, although impossibly rich, are

not merely invented; [...]“ und begründet diese Aussage im Detail. In [4] schreibt Hofmann vorsichtig:

Die zentralen Ereignisse spielen auf einer Bühne mit den Kulissen einer Stadtlandschaft, die als eine etwas symbolische Ansicht des Renaissance-Ambiente der Stadt Ascoli gelten darf.

Im Hinblick auf die in [4] diskutierte Funktion des Bildes ist dies immerhin eine nicht von der Hand zu weisende Hypothese – aber eben eine Hypothese. So harrt nach aller Vertiefung in die Einzelheiten der perspektivisch durchkonstruierten Darstellung des dortigen Umfelds immer noch die folgende Frage auf eine begründete Antwort:

Gibt das Londoner Verkundigungsaltaarbild von Carlo Crivelli aus Ascoli Piceno die realistische Szene einer (möglicherweise lokalen und zeitgenössischen) Stadtlandschaft wieder? (Realitatsstreue)

Im Folgenden wird in dem höchst konkreten Verfahren eines Modellbaus dargelegt, dass dies für die globale Topografie der im Gemälde dargestellten Stadtlandschaft eher nicht anzunehmen ist.

Von Dimension 2 zu Dimension 3

Da bei der Zentralprojektion des 3-dimensionalen Raumes auf eine Ebene durch Identifikation von Punkten gleichsam eine Dimension verloren geht, muss man einen Parameter festlegen, wenn man aus der Projektion auf das Urbild mathematisch Rückschlüsse zieht. Die Maler der Frührenaissance geben dem Betrachter durch Wiedergabe einer Bodenkachelung („pavimento“) oder dergleichen Information an die Hand, die eine solche Parameterfestlegung nahelegt.

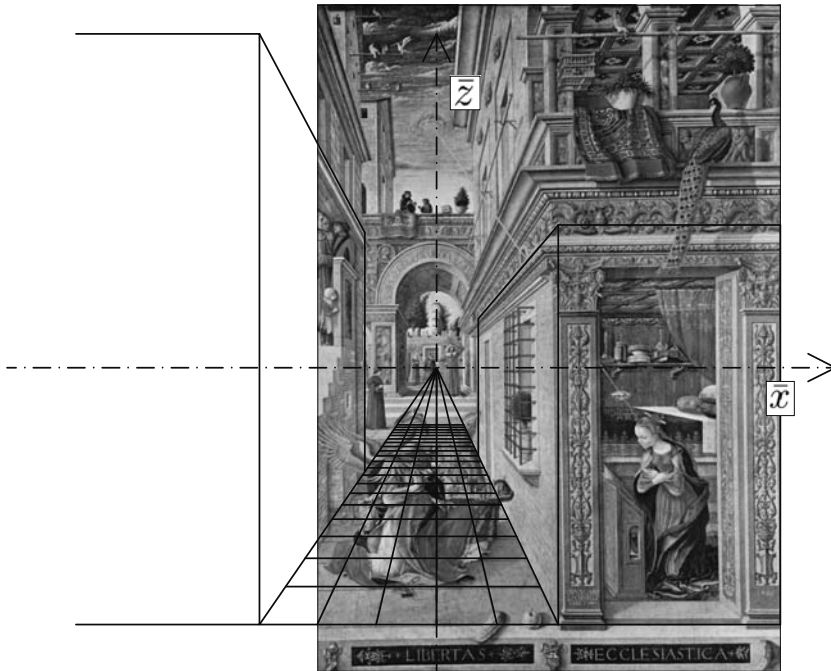


Abbildung 1. Das Bild und sein Koordinatensystem

Nach der Festlegung dieses Parameters lässt sich nun aus der uns allein gegebenen 2-dimensionalen Zentralprojektion das abgebildete Stück der 3-dimensionalen Topografie rekonstruieren. Dies ist ja mindestens teilweise in [4], S. 31f., geschehen. Indessen gewinnen wir aus der Zahlenreihe eines Koordinatensatzes, ja selbst aus einem Grund- und Aufriss eines Teils des abgebildeten Umfelds nur sehr bedingt die Anschauung, mit der wir auf die Frage nach der Realitätstreue eine begründete Antwort geben können. Was fehlt, ist eine echt 3-dimensionale Anschauungshilfe.

Das Modell

Hier kommt der neue Aspekt dazu. In seinen an der Hochschule Ostwestfalen-Lippe unterrichteten Grundkursen der Ingenieurmathematik hat N. Helder mann über die in [4] dargestellte Geometrie und ihre Methoden mehrfach vorgetragen. Schließlich bietet das besprochene Bild eine gut geeignete Vorlage zum Studium der Zentralperspektive, die in den Fächern

CAD, Design und Konstruktion eine wesentliche Rolle spielt. Dieser Kurs wird auch von angehenden Ingenieuren der Holztechnik besucht. Also lag der Gedanke nahe, die Topografie des Crivellischen Altarbildes als Modell in Holz nachzubauen. Dipl. Ing. (FH) Richard Mündler, bis vor Kurzem Student in einer dieser Vorlesungen, sah in dieser Aufgabe eine Herausforderung und fertigte eine Diplomarbeit [5] an, in welcher insbesondere der Bau eines Holzmodells mit den aus der Zentralprojektion errechneten exakten Proportionen der Topografie des Bildes gefordert war. So begann Mündler mit der Datenerfassung und der Berechnung der dreidimensionalen Koordinaten markanter und definierender Punkte der 3-dimensionalen Anlage des abgebildeten Raums aus ihren Projektionen im perspektivischen Bild und rekonstruierte damit zunächst die mathematisch formulierte Topografie im 3-dimensionalen Raum.

Es war ihm bei der Erstellung eines Holzmodells hilfreich, dass er eine Tischlerausbildung bis zum Gesellenbrief abgelegt hatte. Im

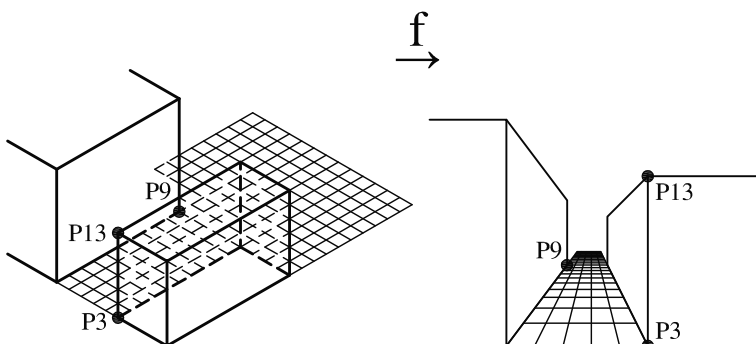


Abbildung 2. Datenerfassung im Schrägbild und der Zentralprojektion



Abbildung 3. Gesamtansicht des Modells

Folgenden stellen wir dieses Modell vor. Die Ansichten wurden von der Fotografin Sarah Brüscke aus Roßdorf bei Darmstadt aufgenommen und digital bearbeitet. Sie benutzte für die Aufnahmen eine Nikon D70S; Angaben über die technischen Details folgen später.

Modell und Realitätsfrage

Zunächst vermitteln die fotografischen Aufnahmen einen Gesamteindruck des Modells.

Wir sehen, dass die 3-dimensionale Rekonstruktion des Verkündigungsbildes anschaulich den Befund stützt, dass uns in der vom Maler gewählten Komposition der Nahbereich, in den das biblische Geschehen verlegt wird, in allen seinen Ausmaßen vergrößert vorkommt, während der Hintergrund, also etwa der Bereich von dem im Mittelgrund gezeigten Triumphbogen rückwärtig sehr verkleinert erscheint. Die prunkvollen Dekorationen der vordergründigen Architekturen lassen deren Ausmessungen grandioser erscheinen als sie „in Wirklichkeit“ sind. Darauf hatte Hofmann in [4] auf S. 32 schon aufmerksam gemacht; das Modell bestätigt dies in anschaulicher Weise. Umgekehrt sind die „Realdimensionen“ der Gebäude im Hintergrund geradezu gigantisch. Münder errechnete unter der Annahme, dass die Seitenlänge einer quadratischen Fliese des *pavimento* 0,5 m beträgt, für diese Bauwerke eine Höhe von 35 m und gab diese Proportionen in dem Modell treu wieder. Selbst wenn man einräumt, dass in manchen italienischen Städten der Renaissance turmhohe Gebäude – und in der Tat

Türme beträchtlicher Höhe – nicht selten sind (San Gimignano ist ein den Touristen bekanntes Beispiel!), legt das Modell zweifellos erhebliche Bedenken gegen die Realitätstreue der Crivellischen Komposition nahe. Bestärkt werden diese Zweifel durch die erstaunliche Massivität der den Hintergrund abschließenden Zinnenmauer; das ursprüngliche Bild vermittelt hier den Eindruck eines viel kleineren Mauerwerks. Die erste Schlussfolgerung aus der durch das Modell ermöglichten Betrachtung ist also diese:

Während die von Crivelli wiedergegebene Gesamtkomposition in ihrer Zentralperspektive (im Wesentlichen) korrekt konstruiert ist, und zunächst den Eindruck einer „abgebildeten“ realen Topografie vermittelt, ist die Crivellische Komposition jedoch schwerlich ein Abbild einer realen Stadtanlage mit einer Architektur von realistischen Ausmaßen.

Und wieder zurück von Dimension 3 zu Dimension 2

Die Berechnung 3-dimensionaler Koordinaten der in die Bildebene projizierten Punkte erlaubt auch die Bestimmung der 3-dimensionalen Koordinaten des Augenpunktes ([4], [5]).

Dieser ist im Modell durch eine stabile Drahtkonstruktion wohl markiert, wie man in der Abbildung 3 erkennt. Diese Markierung muss es im Prinzip erlauben, das Modell von diesem Punkt aus zu fotografieren, wobei speziell seine Ausleuchtung die auf dem Bild angegebene Beleuchtung möglichst genau nachahmen sollte. Gelänge dies, so ergibt sich hieraus die Probe aufs Exempel der erarbeiteten Analyse und Berechnungen durch den Vergleich der fotografischen Aufnahme mit dem Original. Insbesondere erhofft man sich eine Antwort auf die folgende Frage:

Gibt das Modell die vom Künstler imaginierte oder wiedergegebene Realität treu wieder? Welche Abweichungen stellt man gegebenenfalls fest? Wie unzweideutig hat der Künstler in seiner perspektivischen Darstellung ein Stück der dreidimensionalen Welt kodiert? (Die Kodierungsfrage)

Die Aufnahmetechnik

Durch die Fotografie kommt zu den Technologien der Mathematik, der historischen Bildanalyse und dem Modellbau eine weitere Technologie mit ihren eigenen Problemen und Möglichkeiten hinzu. Erstens ist ein Weitwinkelobjektiv mit extrem kurzer Brennweite erforderlich, um bei den relativ kleinen Dimensionen des Modells und der unmittelbaren Nähe des Augenpunktes zu den abgebildeten Gegenständen eine Ablichtung zu gewinnen, bei der das Zentrum des Objektivs möglichst nahe an den Au-

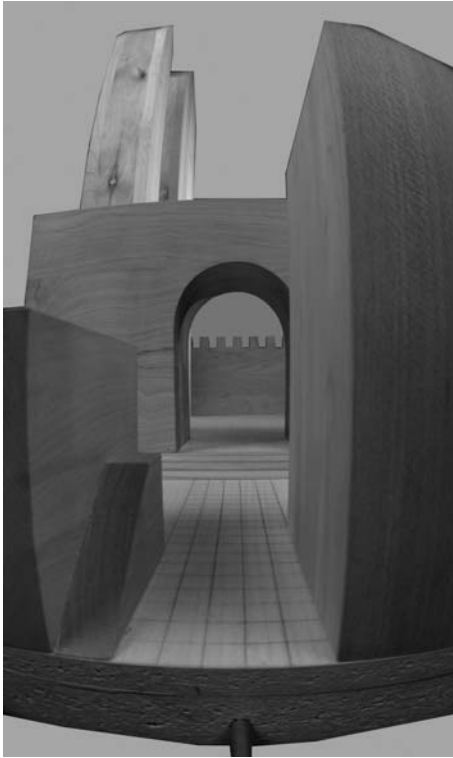


Abbildung 4. Die Schlüsselfotografie



Abbildung 5. Die elektronisch manipulierte Fotografie

genpunkt angesetzt ist. Hier wurde mit einem Objektiv Sigma Zoom 28–80 mm mit der Einstellung 28 mm und einem Macro-Vorsatz „Kallimar Delux Super Wide Macro 0,42X AF“ gearbeitet, was einer Brennweite von 11,8 mm entspricht. Die Projektion auf die Filmebene ist dann freilich alles andere als eine einfache Zentralprojektion, und so bietet die Originalaufnahme von Sarah Brüscke einen Anblick des Modells in einem gekrümmten Raum (Abbildung 4). Dem Mathematiker aber zeigen sich die Raumordnungsbeziehungen dabei gänzlich unverfälscht. Was die moderne digitale Fototechnik leisten kann, bewies die Fotografin mit der Abbildung 5, für welche sie nicht nur die Krümmungen entzerren, sondern mit Hilfe der Software Photoshop auch die Diskrepanzen so retuschieren konnte, dass das Bild mit der Originalvorlage zur Deckung gebracht werden kann. Insoweit ist diese Abbildung vorzüglich geeignet, die Modellrekonstruktion mit der Originalvorlage zu vergleichen, denn man ist bei der Heranziehung der elektronisch retuschierten Fotografie nicht durch die hochdekorativen Details der Originalvorlage abgelenkt.

Der Vergleich zwischen Originalvorlage und Modell

Durch den Vergleich von Abbildung 4 und Abbildung 5 sind wir in der Lage, einige kritische Anmerkungen zu der Modellrekonstruktion und einige Antworten zu der Kodiungsfrage zu geben.

- (a) Das linke Haus im Vordergrund wurde nur bis zum ersten Gesims in der Originalvorlage rekonstruiert und fällt daher im Modell zu niedrig aus. Das rechte Haus im Vordergrund wurde über das erste Gesims hinaus bis zum zweiten Gesims in voller Höhe rekonstruiert, nicht aber das linke. In der Originalvorlage geben die Konturen der beiden Häuser nach hinten einen geringeren Ausschnitt der Sichtbarkeit frei als im Modell.
- (b) In der Originalvorlage des Gemäldes ist die Hinterkante des linken Nachbarhauses hinter dem Treppenvorbau klar sichtbar. Im Modell bleibt sie hinter dem Treppenvorbau unsichtbar. Es fragt sich daher, ob im Modell die Tiefe des Nachbarhauses zu knapp angesetzt ist.
- (c) Die Position des Gebäudes, welches in der Originalvorlage den Taubenschlag zeigt und im Modell als das vordere unter den beiden hohen Gebäuden rekonstruiert wurde, bleibt selbst unter den Verfassern kontrovers. Heldermann und Münster sind sich darin einig, dass dieses Gebäude hinter dem Triumphbogen lokalisiert sein muss, wie es das Modell zeigt. Hofmann sieht es als einen Taubenschlag auf dem vorderen linken Gebäude. Er argumentiert dabei mit der Größe der gemalten Tauben im Bild, die mit ihrer zu großen Entfernung vom Augenpunkt, die das Modell fordert, nicht vereinbar sei. Eine plausibel geschätzte Ent-

fernung Augenpunkt–Tauben (von ca. 9 m) würde gut zu der Hypothese passen, dass der Taubenschlag dem linken vorderen Haus aufgesetzt ist. Auch die elektronische Retusche der Fotografie stützt eher diese Hypothese. Die Kontroverse zeigt, dass die vorliegende Konstruktion des Modells Bedenken nicht ausschließt. Bei der Projektion eines realen oder imaginierten dreidimensionalen Raumstückes geht notwendigerweise Information verloren, selbst wenn die perspektivische Darstellung noch so konsequent durchgehalten wird.

Es sind Alternativen zum beschriebenen Modell denkbar. Rein von der Geometrie her gesehen sind nach einer Projektion verschiedene Interpretationen denkbar, die sich in möglichen Varianten einer dreidimensionalen Rekonstruktion manifestieren, wie etwa hier in der Positionierung des architektonischen Elementes des Taubenschlages.

Alles in allem gibt aber das Modell die Topografie der Originalvorlage wieder und vermittelt uns einen Eindruck von dem Stück dreidimensionaler Welt, das sich der Maler bei seiner Anwendung der neuen Technologie in der Malerei, der Zentralperspektive, vorgestellt hat. Gleichzeitig zeigt es anschaulich, dass eine korrekte geometrische Konstruktion nicht notwendig eine Realität wiedergeben muss, sei sie beobachtet oder imaginiert.

In dem von uns bearbeiteten Beispiel eines Altarbildes von 1486 wird ein Modellbau besonders sinnfällig, weil das Bild selbst schon ein Modell enthält, ein Modell der Stadt Ascoli, das der Schutzheilige der Stadt, Sankt Emygdus ([4], [5]), dem Erzengel Gabriel präsentiert. Wäre jenes Modell freilich so massiv gebaut gewesen wie unseres, dann hätte es selbst ein sehr kräftiger Bischof nicht so elegant auf seinem Knie balancieren können.

Literatur

- [1] Andersen, K., "The Geometry of and Art. The History of the Mathematical Theory of Perspective from Alberti to Monge", Springer 2007, xxxvii+812pp.
- [2] Artmann, B., Buchbesprechung von [1], Mathematische Semesterberichte **55** (2008), 87–106.
- [3] Field, J. V., "The Invention of Infinity", Oxford University Press, 1997, xii+250 pp.
- [4] Hofmann, K. H., *Angewandte Mathematik in der Renaissance, Crivellis Verkündigung mit St. Emidius*, Mitteilungen der Deutschen Mathematiker Vereinigung, Heft 4/2000, 26–33.
- [5] Münder, R., „Die kunsthistorische Entwicklung der perspektivischen Zeichnung, dargestellt am Bild ‚Verkündigung Mariä‘ von Carlo Crivelli“, Diplomarbeit an der Fachhochschule Lippe und Höxter, 2008.



Abbildung 6. Die Verfasser vor dem Modell

Adressen der Autoren

Prof. Dr. Karl Heinrich Hofmann
Fachbereich Mathematik

Technische Universität Darmstadt
Schlossgartenstraße 7

64289 Darmstadt

hofmann@mathematik.tu-darmstadt.de

Prof. Dr. Norbert Helderemann
Fachbereich Produktion und Wirtschaft
Hochschule Ostwestfalen-Lippe
Liebigstraße 87

32657 Lemgo

norbert.helderemann@hs-owl.de

Dipl.-Ing. Richard Münder
Institut für Fertigungstechnik
und Qualitätssicherung

Otto-von-Guericke-Universität

Universitätsplatz 2

39106 Magdeburg

richard.muender@ovgu.de

Norbert Helderemann ist Professor an der Hochschule Ostwestfalen-Lippe und Verleger von elf mathematischen Zeitschriften und zahlreichen Reihen und Monografien.

Karl Heinrich Hofmann ist Professor Emeritus an der Technischen Universität Darmstadt und Adjunct Professor of Mathematics an der Tulane University in New Orleans. Neben anderen Verlagen ist er dem Helderemann Verlag als Herausgeber und Verfasser seit Langem verbunden.

Richard Münder entstammt einer in Klepzig (Wiesenburg/Mark) bei Potsdam seit 1776 ansässigen und heute mittelständigen Tischlerei und studierte in Lemgo Holztechnik im Ingenieurwesen; er erwarb den Grad eines Diplomingenieurs (FH) am 11. 4. 2008 mit einer von Helderemann betreuten und von Hofmann als Zweitgutachter begleiteten Diplomarbeit.