

Der Bundeswettbewerb Mathematik

Herausforderung für Schülerinnen und Schüler in drei Runden

Hanns-Heinrich Langmann

Was bewegt eine Schülerin/einen Schüler dazu, sich freiwillig fast drei Monate lang mit vier unterschiedlich schwierigen Aufgaben aus verschiedenen Gebieten der Elementarmathematik zu beschäftigen, die gefundenen Lösungen zu Papier zu bringen und von den kritischen Augen einer Wettbewerbsjury begutachten zu lassen? Auf diese Frage ist eine Reihe von Antworten denkbar: Ein besonderes Interesse an Mathematik. Die Freude an originellen, nicht unbedingt schulüblichen Aufgaben. Die Neugier auf unbekannte mathematische Sachverhalte und Gebiete. Eine Vorliebe, schwierige Probleme zu lösen und die Herausforderungen, die damit verbunden sind, zu meistern. Der Wunsch, die eigenen mathematischen Fähigkeiten zu erproben, weiterzuentwickeln und eine Bestätigung des eigenen mathematischen Könnens zu erhalten.

Rückblende ins Jahr 1970: Anfang Oktober treffen sich in Stuttgart Mathematiklehrer und -professoren sowie Vertreter der Kultusbehörden, um ein Konzept für einen bundesweiten Mathematikwettbewerb für Schülerinnen und Schüler zu beraten. Initiator dieses Treffens ist der Stifterverband für die Deutsche Wissenschaft. Die Runde ist sich schnell einig, der Wettbewerb erhält den Namen *Bundeswettbewerb Mathematik*. Bei der inhaltlichen Ausgestaltung fällt die Entscheidung für einen Hausaufgabenwettbewerb in zwei Runden von steigendem Schwierigkeitsgrad, der mit einem mathematischen Fachgespräch in der dritten Runde abgeschlossen wird. Neben organisatorischen Überlegungen sprechen für diese Konzeption vor allem fachliche Gründe: Aufgrund der relativ langen Bearbeitungszeit in den ersten beiden Runden kommen auch umfangreiche und komplexe Aufgabenstellungen infrage. An die Klarheit der Gedankenführung und die Vollständigkeit sowie Verständlichkeit der Lösungsdarstellung können strenge Maßstäbe angelegt werden. Die lange und intensive Beschäftigung mit den gestellten Problemen fördert die Erweiterung der mathematischen Fertigkeiten und die Vertiefung des mathematischen Wissens. In dem Fachgespräch der letzten Runde schließlich können Fähigkeiten – wie z. B. in einem Problembereich mathematische Strukturen zu erkennen und diese angemessen zu formulieren - überprüft werden, die einen guten Mathematiker auszeichnen, die sich aber nicht bereits im erfolgreichen Lösen mathematischer Probleme zeigen. Im November 1970 startet der erste Wettbewerbslauf. Mit gut 1.500 Teilnehmerinnen und Teilnehmern stößt er auf Anhieb auf eine erfreulich hohe Resonanz.

Was hat die Initiatoren bewogen, einen solchen Wettbewerb ins Leben zu rufen? Nicht nur vor dem Hintergrund des Mangels an Mathematiklehrkräften war für sie die

frühzeitige Förderung des mathematischen Nachwuchses von zentraler Bedeutung und ihnen deshalb ein besonderes Anliegen. Im Bundeswettbewerb Mathematik sahen sie ein gut geeignetes Instrument, um bei Schülerinnen und Schülern Freude an der Mathematik zu wecken und wach zu halten. Mit anspruchsvollen, zugleich aber auch anspruchsvollen Aufgaben würde der Wettbewerb sie anregen, sich eine Zeit lang intensiv mit Mathematik zu beschäftigen, war die Überzeugung der Initiatoren. Mathematisch Interessierten würde so die Möglichkeit geboten, ihre Fähigkeiten zu erproben und weiterzuentwickeln. Sie würden erfahren, dass man zur Lösung mathematischer Probleme Ausdauer und Durchhaltevermögen mitbringen muss. Schließlich könnten sie eine Bestätigung des eigenen mathematischen Könnens erhalten.

Damit waren die Ziele formuliert, die der Bundeswettbewerb Mathematik bis heute verfolgt. Er versteht sich als ein den Schulunterricht ergänzendes Angebot. Seine Aufgaben lassen sich, abgesehen von wenigen Ausnahmen, mit dem in der Schule vermittelten Wissen lösen. Trotzdem liegen die zu lösenden Probleme in ihrer Art eher außerhalb der unterrichtsüblichen Mathematik. Teilweise greifen sie auch Themen auf, die im Schulunterricht aus Zeitgründen nur noch knapp (manchmal auch gar nicht mehr) behandelt werden können.

Seit vierzig Jahren wird der Bundeswettbewerb Mathematik nun jährlich im Dezember ausgeschrieben. Alle Schulen in Deutschland und deutsche Schulen im Ausland, die zur allgemeinen Hochschulreife führen, erhalten dann die Ausschreibungsunterlagen. In den ersten beiden Runden werden je vier Aufgaben gestellt; sie müssen in etwa zwei Monaten in Hausarbeit selbstständig gelöst und schriftlich ausgearbeitet werden. In der ersten Runde ist Gruppenarbeit zugelassen. Alle Preisträgerinnen und Preisträger der ersten Runde sind berechtigt, an der zweiten Runde teilzunehmen. Die ersten Preisträgerinnen und Preisträger dieser zweiten Runde haben sich für die Teilnahme an der dritten Runde qualifiziert. In dieser dritten Runde wiederum, auch *Kolloquium* genannt, werden die Bundessiegerinnen und -sieger ermittelt.

Der Bundeswettbewerb Mathematik ist kein Konkurrenzwettbewerb. Die Gesamtzahl seiner Preisträgerinnen und Preisträger ist in keiner der Runden von vornherein festgelegt. Auch die Verteilung auf die einzelnen Preisstufen unterliegt keiner Einschränkung.

Herzstück des Bundeswettbewerbs Mathematik sind seine Aufgaben. Besonderes Merkmal des Wettbewerbs ist die Tatsache, dass alle Teilnehmenden die gleichen Aufgaben bearbeiten, die sich in ihren Anforderungen an den



Die Bundessieger 2009 des Bundeswettbewerbs Mathematik wurden am 20. April 2010 in der Generali Deutschland Holding AG ausgezeichnet. Es gratulierten: Hanns-Heinrich Langmann, Leiter der Geschäftsstelle Bundesweite Mathematik-Wettbewerbe Bildung und Begabung e. V. (links oben), Karl Fegert, Vorsitzender der Korrekturkommission/Bundeswettbewerb Mathematik (links unten), Gernot Stroth, Vorsitzender des wissenschaftlichen Beirats/Bundeswettbewerb Mathematik (rechts oben), Christoph Schmallenbach, Vorstandsmitglied der Generali Deutschland (rechts unten). (Photo: Generali)

Klassen 9 bis 12/13 orientieren. „Schöne“ und für den Wettbewerb geeignete Aufgaben findet man in der elementaren Zahlentheorie, der Graphentheorie, der Kombinatorik, der Algebra und vor allem der Elementargeometrie. Dabei heißt geeignet: Die Aufgaben lassen sich möglichst kurz und einprägsam formulieren. Von der Fragestellung oder dem Ergebnis her sind sie interessant, vielleicht auch überraschend. Ihre Hauptanforderung stellen sie im heuristischen Bereich. Sie lassen knappe, überschaubare Lösungen zu. Sie decken insgesamt als Paket einen nicht zu schmalen Bereich der Elementarmathematik ab.

Die Wettbewerbsaufgaben unterscheiden sich von den meisten der in der Schule gestellten Probleme prinzipiell: Ihre Lösung gelingt in der Regel nicht auf Anhieb befriedigend, selbst wenn alle benötigten mathematischen Vorkenntnisse vorhanden sind. Die erfolgreiche Bearbeitung erfordert eine längere und intensive Beschäftigung mit dem Problem und seinem mathematischen Umfeld. Häufig hilft das Studium der allgemeinen Theorie weiter, in die das spezielle Problem eingebettet ist, und es muss hierfür Fachliteratur herangezogen werden. Auf diese Weise können die Teilnehmenden einen Einstieg in mathematische Denk- und Arbeitsweisen finden.

Von zentraler Bedeutung ist eine faire und möglichst transparente Korrektur und Bewertung der Wettbe-

werbsarbeiten. Das Korrekturverfahren des Bundeswettbewerbs Mathematik ist dreistufig und besteht zunächst aus einer Erst- und Zweitkorrektur aller Arbeiten. Den Abschluss bilden die Drittkorrektursitzungen. In diesen Sitzungen wird in allen Fällen, in denen Erst- und Zweitkorrektor in ihrem Urteil nicht übereingestimmt haben, über die endgültige Preiseinstufung entschieden. An der Korrektur sind jährlich rund 200 Mathematikerinnen und Mathematiker beteiligt, die aus der Schule, der Universität und der Wirtschaft kommen und ihre Arbeit zum größten Teil ehrenamtlich leisten. Unterstützung bei den Korrekturen ist dem Bundeswettbewerb Mathematik immer herzlich willkommen.

Gedankenführung und Klarheit der Darstellung gehen neben der mathematischen Richtigkeit der Lösung wesentlich in die Bewertung der einzelnen Arbeit ein, nicht aber in gleichem Maße die Beherrschung der mathematischen Fachsprache. Eine Arbeit wird mit einem ersten Preis ausgezeichnet, wenn die Lösungen zu allen vier Aufgaben ohne Mängel sind. Sind alle vier Aufgaben grundsätzlich richtig gelöst, enthalten die Lösungen aber unwesentliche Fehler oder kleinere Darstellungsmängel, wird ein zweiter Preis vergeben. Ein dritter Preis wird zuerkannt, wenn alle vier Aufgaben bearbeitet wurden, die Bearbeitung aber größere Mängel aufweist.



Lisa Li, Münster/Westfalen, viermalige Bundessiegerin

Szenenwechsel: Die dritte Runde, das Kolloquium. In ihr geht es nicht mehr um das Lösen von Aufgaben, im Gegenteil: Die Teilnehmenden verbringen zusammen mit dem Auswahlausschuss, der paritätisch mit Mathematikerinnen und Mathematikern aus der Universität und der Schule besetzt ist, zwei Tage in einer Tagungsstätte. Während dieser Zeit führt jeder Teilnehmer und jede Teilnehmerin ein etwa einstündiges Gespräch mit je einem Mitglied des Auswahlausschusses. In diesem Gespräch geht es überwiegend um Mathematik und mathematische Fähigkeiten, die über das erfolgreiche Lösen von Problemen hinausreichen. Am Ende des Kolloquiums bestimmt der Auswahlausschuss auf der Basis des Verlaufs der einzelnen Gespräche die Bundessiegerinnen und -sieger. Diese werden mit Beginn eines Studiums in die Studienstiftung des deutschen Volkes aufgenommen.

Der Bundeswettbewerb Mathematik will für mathematisch interessierte Schülerinnen und Schüler eine Herausforderung sein. Bisher haben sich fast 62 000 Schülerinnen und Schüler der Herausforderung gestellt, fast 30 000 von ihnen wurden mit einem Preis ausgezeichnet und 640 schafften es ganz an die Spitze, sie wurden Bundessieger bzw. Bundessiegerin. Was für die Teilnehmenden den Reiz am Problemlösen ausmacht, hat Lisa Sauer-

Bundeswettbewerb Mathematik: Zeitlicher Ablauf

| | |
|------------------|--|
| 1. Runde | |
| Dezember | Ausschreibung, Versand der Unterlagen an die Schulen, Veröffentlichung der Aufgaben auf der Webseite des Wettbewerbs |
| Bis Ende Februar | Bearbeitung der Aufgaben |
| 1. März | Einsendeschluss |
| 2. Runde | |
| Bis Ende Mai | Korrektur und Preisfestsetzung |
| Anfang Juni | Mitteilung der Korrekturergebnisse |
| Anfang Juni | Aufgabenstellung, Versand direkt an die Teilnahmberechtigten |
| Bis Ende August | Bearbeitung der Aufgaben |
| 1. September | Einsendeschluss |
| Bis Ende Oktober | Korrektur und Preisfestsetzung |
| Anfang November | Mitteilung der Korrekturergebnisse |
| Dezember | Regionale Preisverleihungen |
| 3. Runde | |
| Anfang Februar | Kolloquium |

mann, fünfmalige Bundessiegerin und sehr erfolgreiche IMO-Teilnehmerin, in dem Film zur IMO 2009 treffend ausgedrückt: „Das Tolle an den Aufgaben ist einfach, dass sie sozusagen so kleine „Häppchen-Mathematik“ sind – und wer isst nicht schon gerne Häppchen?“

Aufgabenbeispiele

Man stelle die Zahl 2008 so als Summe natürlicher Zahlen dar, dass die Addition der Kehrwerte der Summanden die Zahl 1 ergibt.

(Aufgabe 2, 1. Runde 2008)

Ein kreisförmiges Spielbrett sei in n Sektoren ($n \geq 3$) eingeteilt, von denen jeder entweder leer oder mit einem Spielstein besetzt ist. Die Verteilung der Spielsteine wird schrittweise verändert: Ein Schritt besteht daraus, dass man einen besetzten Sektor auswählt, seinen Spielstein entfernt und die beiden Nachbarsektoren „umpolt“, d. h. einen besetzten Sektor leert und einen leeren Sektor mit einem Spielstein besetzt.

Für welche Werte von n kann man in endlich vielen Schritten lauter leere Sektoren erzielen, wenn anfangs ein einziger Sektor besetzt ist?

(Aufgabe 4, 1. Runde 2000)

Es seien a, b, c die Seitenlängen eines Dreiecks mit $a \leq b \leq c$. Mit $t(a, b, c)$ werde das Minimum der Quotienten $\frac{b}{a}$ und $\frac{c}{b}$ bezeichnet. Bestimme alle Werte, die $t(a, b, c)$ annehmen kann.

(Aufgabe 1, 2. Runde 2010)

In einem spitzwinkligen Dreieck ABC seien H_a und H_b die Fußpunkte der von A bzw. B ausgehenden Höhen; W_a und W_b seien die Schnittpunkte der Winkelhalbierenden durch A bzw. durch B mit den gegenüberliegenden Seiten.

Man beweise: Im Dreieck ABC liegt der Inkreismittelpunkt I genau dann auf der Strecke H_aH_b , wenn der Umkreismittelpunkt U auf der Strecke W_aW_b liegt.

(Aufgabe 4, 2. Runde 2002)

Zehn Ecken eines regelmäßigen 100-Ecks seien rot und zehn andere blau gefärbt.

Man beweise: Unter den Verbindungsstrecken zweier roter Punkte gibt es mindestens eine, die genauso lang ist wie eine der Verbindungsstrecken zweier blauer Punkte.

(Aufgabe 1, 2. Runde 2001)

Der Bundeswettbewerb Mathematik wird gefördert vom Bundesministerium für Bildung und Forschung und dem Stifterverband für die Deutsche Wissenschaft. Träger ist die Bildung & Begabung gemeinnützige GmbH.

Dipl.-Math. Hanns-Heinrich Langmann,
Bundeswettbewerb Mathematik,
Bildung und Begabung gemeinnützige GmbH,
Kortrijker Straße 1, 53177 Bonn
langmann@bundeswettbewerb-mathematik.de
www.bundeswettbewerb-mathematik.de