



„Six lanes . . .“ (Foto: Initiative PRO Winterreifen)

Was denkt der Mathematiker im Stau?

Notizen aus der MATHEON-Lounge
von Günter M. Ziegler

Von LKW-Maut auf Landstraßen ist zur Zeit die Rede, und außerhalb der Wahlkampfzeiten auch von PKW-Maut. Das soll Geld bringen, bietet aber auch die Chance, Verkehrsflüsse zu steuern. Aber kann man Verkehrsflüsse steuern? Und – bringt das was? Ließe sich der morgendliche Berufsverkehr „mit mehr Mathematik“ vermeiden? Solche Fragen hat der Numeriker Christof Schütte im Rahmen des zweiten „Lounge-Gesprächs“ des MATHEON¹ dem Optimierer Rolf Möhring gestellt. Möhring, Mathematikprofessor an der TU Berlin und derzeit Präsident der Mathematical Programming Society, beschäftigt sich mit Simulierung, Steuerung und Optimierung von Verkehrsflüssen.

Im Stau

There's six lanes of traffic
Three lanes moving slow . . .
Telegraph Road, Mark Knopfler 1982

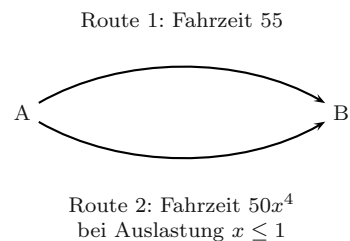
Wer täglich morgens und abends im Berufsverkehr im Stau steht, hat genug Zeit, über Alternativen nachzudenken. Man kann alternative Routen ausprobieren, vielleicht sogar längere Routen über Nebenstraßen, man kann versuchen, etwas früher oder später zu fahren. Was hilft's? Nicht viel. Mag schon sein, dass viele geschickt den Stau im Berufsverkehr vermeiden, viele andere schaffen das aber offenbar nicht.

Doch in den Verkehrsnetzen ist durchaus noch „Luft drin“, sagt Rolf Möhring. Der morgendliche Berufsverkehr ist ein typisches *Nash-Gleichgewicht*: Jeder einzelne wählt „für sich“ die optimale (schnellste) Route, kann also keine Verbesserung erreichen, wenn nicht die anderen auch umplanen. Eine solche Lösung heißt auch „lokales Optimum“. Das muss deshalb noch lange kein „Systemoptimum“ sein: wenn viele oder sogar alle eine andere Route nehmen würden, könnte die durchschnittliche Fahrzeit deutlich günstiger ausfallen.

Theoretisch wie praktisch gilt aber: Es gibt durchaus bessere Lösungen, die aber erfordern, dass mehrere Fahrer ihre Route ändern.

Hier ist ein ganz einfaches Modell dafür: Von A nach B gebe es nur zwei alternative Routen, die von vielen Fahrern genutzt werden. Route 1 hat eine Fahrzeit von 55, während die der Route 2 belastungsabhängig ist, etwa $50x^4$, wenn ein Bruchteil $x \leq 1$ der Fahrer die Route 2 nehmen wollen – das heißt, wenn 90 % der Fahrer die Route 2 nehmen, dann haben alle diese eine Fahrzeit von $50(0,9)^4 \approx 32,8$.

Vermutlich wird sich da ein Gleichgewicht einspielen, in dem alle ($x = 1$) die Route 2 nehmen, mit Fahrzeit 50. Wenn aber zehn Prozent der Fahrer bereit wären, die längere Route 1 zu fahren, so wäre die *mittlere* Fahrzeit $0,1 \cdot 55 + 0,9 \cdot 32,8 \approx 35$. Das heißt: Wenn nur 10 % der Fahrer bereit wären, die etwas längere Route zu fahren, dann verkürzte sich die durchschnittliche Fahrzeit „für alle“ um 30 %.



¹ MATHEON ist das DFG-Forschungszentrum „Mathematik für Schlüsseltechnologien“ in Berlin.

Ist das realistisch? Ja, sagt Rolf Möhring. Solche Fragen kann man etwa für den Berufsverkehr im Berliner Straßenverkehr beantworten: Das entsprechende Modell hat ca. 35 000 Kanten. Die Berechnung des Gleichgewichts bereitet keine großen Schwierigkeiten. Es zeigt, dass man gegenüber dem Nash-Gleichgewicht eine substantielle Einsparung in der mittleren Reisezeit erzielen kann,

- wenn einzelne bereit sind, dafür auch längere Fahrzeiten in Kauf zu nehmen, und
- wenn alle Fahrer bereit sind, sich an zugewiesene Routen zu halten.

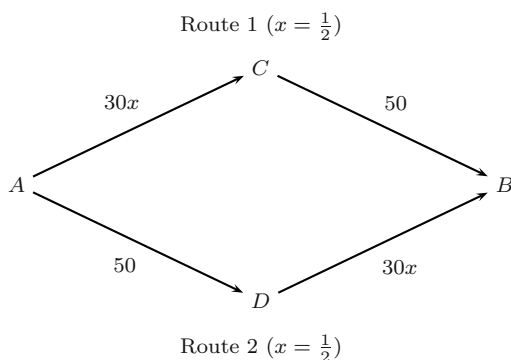
Die erste Annahme mag nicht realistisch klingen: Aber man kann immer noch substantielle Verbesserungen erzielen, wenn man garantiert, dass niemand mehr als, z. B., eine drei Prozent höhere Reisezeit in Kauf nehmen muss.

Die zweite Annahme ist für den Auto-Individualverkehr natürlich *nicht* realistisch: Autofahrer lassen sich natürlich keine Routen „zuweisen“ (vom Navigationssystem des Bordcomputers vielleicht, aber nicht vom Zentralrechner eines Verkehrsoptimierungssystems ...).

Das Braess-Paradoxon

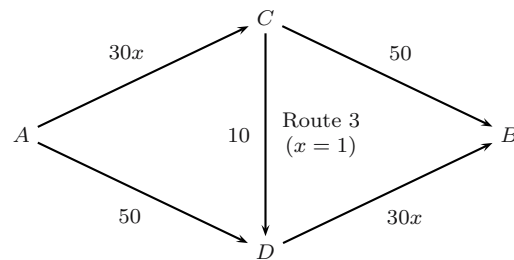
Wer Verkehr steuern will, kann also nicht Routen zuweisen, er muss anders steuern – und da fallen einem primär Mautsysteme ein, aber eben auch straßenbautechnische Be- und Entschleunigungsmaßnahmen.

Dabei hat der Verkehrsplaner mit interessanten Paradoxa zu kämpfen, wie dem *Braess-Paradox*, das von dem Bochumer Mathematiker Dietrich Braess 1968 publiziert wurde: Es ist im Allgemeinen nicht richtig, dass eine zusätzliche „schnelle Straße“ das Gesamtnetz schneller macht.



Wir schauen uns das wieder im Modell an, mit zwei Routen von A nach B, über C bzw. D. Route 1 hat eine Fahrzeit von $30x + 50$, wenn ein Anteil $x \leq 1$ der Fahrer sie nutzen. Route 2 hat eine Fahrzeit von $50 + 30x$ bei Auslastung x . Im Nash-Gleichgewicht wird auf beiden Routen $x = 0,5$ sein: Wer die Route wechselt, macht sie langsamer, verschlechtert also

seine Lösung. Die mittlere Fahrzeit in dieser Lösung ist offenbar $0,5 \cdot 30 + 50 = 65$.



Jetzt wird eine neue, zusätzliche Schnellstraße von C nach D eröffnet, mit Fahrzeit 10 – und plötzlich wird es für alle günstiger, diese zu nutzen. Es stellt sich ein neues Nash-Gleichgewicht ein, in dem alle die Route 3 nehmen, von A über C und D nach B. Die Fahrzeit $30x + 10 + 30x$ dafür wird mit $x = 1$ zu 70, also schlechter als vorher, *für alle!* Aber zurückwechseln will jetzt auch keiner mehr, weil die ursprünglichen Routen ja jetzt die Fahrzeit $1,0 \cdot 30 + 50 = 80$ haben.

Und das ist nicht nur pure Theorie: Man denke nur an Autobahnstückchen, die so „gut angenommen“ werden, dass der Zu- und Abfahrtsverkehr plötzlich alles blockiert ...

„Was ist ein gutes Netz?“ lautet eine Leitfrage des Matheon für die Application Area B „Traffic and Telecommunication Networks“

Hamburger Hafen

Rolf Möhring und seine Mitarbeiter arbeiten zur Zeit intensiv an der Steuerung der Containerverladeanlage im Hamburger Hafen. Dies ist eine gigantische Anlage, in der auf einer Kailänge von 1400 Metern täglich mehrere tausend Container transportiert und verladen werden. Dies machen sogenannte Automated Guided Vehicles (AGVs), die fahrerlos arbeiten – denen man also durchaus von einem Zentralrechner aus genau sagen kann, wann und auf welcher Route sie fahren sollen. Dies ist also ein System mit vollständiger Information, und mit vollständiger Kontrolle: Deshalb zeigen hier mathematische Methoden ihre Kraft.

Bisher „rechnen“ Möhring und Mitarbeiter hier nur neue Fahraufträge einzeln relativ zu bereits festgelegten Routen – sie hoffen, aber bald auch mit dem Gesamtsystem arbeiten zu können.



HHLA Container-Terminal Altenwerder (Foto: Hamburger Hafen und Lagerhaus AG, <http://www.hhla.de/>)

Zukunft?

Counting the cars on the New Jersey Turnpike
America, Paul Simon 1968

Verkehrskontrolle und Verkehrssteuerung sind ein Thema der Zukunft. Nicht umsonst studieren große Automobilkonzerne wie DaimlerChrysler und BMW riesige Verkehrssimulationsmodelle, in die volle Straßennetze, verschiedene Fahrer- und Fahrzeugtypen, Verzögerungen und Strategien, Staus, Berufsverkehr und Freizeitfahrer und auch andere Verkehrsmittel einbezogen sind.

Warum interessiert die das? Weil die Automobilkonzerne ein großes Interesse daran haben, dass auch in zehn Jahren noch Verkehr *fließt*, und nicht die Verkehrssysteme und Straßennetze unter Überlast zusammenbrechen.

Und was können die Mathematiker dazu beitragen? Vielleicht ist die größte Herausforderung die realistische Behandlung von dynamischen Flüssen – also nicht nur die Berechnung und Steuerung von Gleichgewichtszuständen zu Haupt- und Nebenverkehrszeiten, sondern die Übergänge, wenn das System in Bewegung ist.

Zur Behandlung von dynamischen Flüssen reicht die klassische Netzwerkfluss-Theorie, die auf Ford und Fulkerson (1962) zurückgeht, nicht aus – eine Theorie der dynamischen Flüsse und ihrer Planung und Steuerung ist gerade im Entstehen. Dabei mischen Rolf Möhring und seine Arbeitsgruppe kräftig mit.

Das große Ziel dabei heißt „Optimieren statt Simulieren“.

Adresse der Autoren

Prof. Günter M. Ziegler (TU Berlin)
unter Mitarbeit von
Prof. Rolf H. Möhring (TU Berlin)
Prof. Christof Schütte (FU Berlin)
DFG-Forschungszentrum MATHEON
TU Berlin, MA 3-1
Straße des 17. Juni 136
10623 Berlin
ziegler@math.tu-berlin.de
moehring@math.tu-berlin.de
schuette@math.fu-berlin.de

Quellen und weitere Informationen

Der Klassiker der Netzwerkfluss-Theorie ist
L.R. Ford and D.R. Fulkerson, *Flows in Networks*, Princeton University Press 1962.

Das moderne Lehrbuch dazu ist
R. K. Ahuja, Th. L. Magnanti & J. B. Orlin, *Network flows*, Prentice Hall 1993.

Die Originalquelle für das Braess-Paradoxon ist
D. Braess, Über ein Paradoxon aus der Verkehrsplanung, *Unternehmensforschung* 12 (1968), 258–268 (1968), <http://homepage.ruhr-uni-bochum.de/Dietrich.Braess/paradox.pdf>

Informationen zum MATHEON-Projekt unter
<http://www.math.tu-berlin.de/coga/projects/matheon/B8/>

Informationen zur Routenplanung
<http://www.math.tu-berlin.de/coga/projects/traffic/routeguidance/>
<http://www.math.tu-berlin.de/coga/projects/traffic/agvrouting/>
<http://www.math.tu-berlin.de/coga/publications/techreports/2002/Report-754-2002.html>