Dienstag, 18. Juli 2017

Aufgabe 1. Für jede ganze Zahl $a_0 > 1$ sei die Folge $a_0, a_1, a_2, \ldots$ gegeben durch

$$a_{n+1} = \begin{cases} \sqrt{a_n} & \text{falls } \sqrt{a_n} \text{ ganzzahlig,} \\ a_n + 3 & \text{sonst,} \end{cases} \qquad \text{für alle } n \geqslant 0.$$

Man bestimme alle Werte von a_0, so dass es eine Zahl A gibt, mit $a_n = A$ für unendlich viele Werte von n.

Aufgabe 2. Es sei $\mathbb{R}$ die Menge der reellen Zahlen. Man bestimme alle Funktionen $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, so dass für alle reellen Zahlen x und y gilt

$$f\left(f(x)f(y)\right) + f(x+y) = f(xy).$$

Aufgabe 3. Ein Jäger und ein unsichtbarer Hase spielen in der euklidischen Ebene ein Spiel. Der Ausgangspunkt A_0 des Hasen und der Ausgangspunkt B_0 des Jägers sind gleich. Nach $n-1$ Runden des Spiels befinden sich der Hase im Punkt A_{n-1} und der Jäger im Punkt B_{n-1}. Die n-te Runde des Spiels besteht aus drei Schritten in der angegebenen Reihenfolge:

(i) Der Hase bewegt sich unsichtbar zu einem Punkt A_n, so dass der Abstand zwischen A_{n-1} und A_n genau eins ist.

(ii) Ein Ortungsgerät meldet dem Jäger einen Punkt P_n. Die einzige Garantie, die das Ortungsgerät dem Jäger gibt, ist, dass der Abstand zwischen P_n und A_n höchstens eins ist.

(iii) Der Jäger bewegt sich sichtbar zu einem Punkt B_n, so dass der Abstand zwischen B_{n-1} und B_n genau eins ist.

Ist es immer möglich, egal wie sich der Hase bewegt und egal welche Punkte das Ortungsgerät meldet, dass der Jäger seine Bewegungen so wählen kann, dass der Abstand zwischen ihm und dem Hasen nach 10^9 Runden höchstens 100 ist?

Arbeitszeit: 4 Stunden und 30 Minuten
Bei jeder Aufgabe können 7 Punkte erreicht werden.

Mittwoch, 19. Juli 2017

Aufgabe 4. Es seien R und S verschiedene Punkte auf einem Kreis Ω, so dass RS kein Durchmesser ist. Es sei ℓ die Tangente an Ω in R. Der Punkt T liegt so, dass S der Mittelpunkt der Strecke RT ist. Ein Punkt J ist auf dem kleineren Bogen RS von Ω so gegeben, dass der Umkreis Γ des Dreiecks JST die Gerade ℓ in zwei verschiedenen Punkten schneidet. Es sei A derjenige gemeinsame Punkt von Γ und ℓ, der näher an R liegt. Die Gerade AJ schneidet Ω in einem weiteren Punkt K.

Man beweise, dass die Gerade KT den Kreis Γ berührt.

Aufgabe 5. Gegeben sei eine ganze Zahl $N \geqslant 2$. Eine Gruppe von $N(N+1)$ Fußballspielern, von denen keine zwei gleich groß sind, steht in einer Reihe. Pelé möchte $N(N-1)$ Spieler so aus dieser Reihe entfernen, dass eine neue Reihe von $2N$ Spielern verbleibt, in der die folgenden N Bedingungen gelten:

(1) Niemand steht zwischen den beiden größten Spielern.

(2) Niemand steht zwischen dem drittgrößten und dem viertgrößten Spieler.

$\vdots$

(N) Niemand steht zwischen den beiden kleinsten Spielern.

Man zeige, dass dies immer möglich ist.

Aufgabe 6. Ein geordnetes Paar (x, y) ganzer Zahlen heißt *teilerfremder Gitterpunkt*, wenn der größte gemeinsame Teiler von x und y eins ist. Für eine gegebene endliche Menge S teilerfremder Gitterpunkte beweise man, dass es eine positive ganze Zahl n und ganze Zahlen a_0, a_1, $\ldots$, a_n gibt, so dass für alle (x, y) in S gilt:

$$a_0x^n + a_1x^{n-1}y + a_2x^{n-2}y^2 + \cdots + a_{n-1}xy^{n-1} + a_ny^n = 1.$$