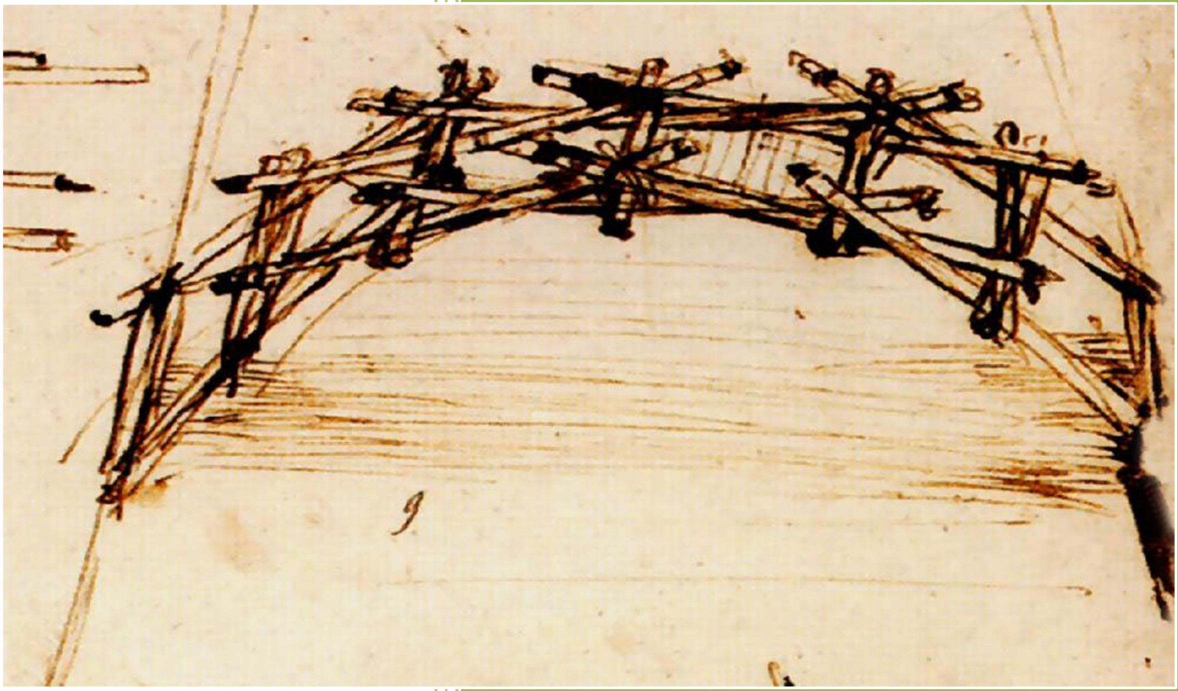
9. Dezember 2009

Die Leonardo-Brücke



Seminar aus Mathematik:

Mathematik zum Anfassen

Leiter der LV:

Ao.Univ.-Prof. Dr.phil. **Bernd Thaller** und

Mag.rer.nat. Prof. **Ingrid Guggenberger**

Blümel Marianne
Packer Straße 23
8583 Edelschrott
Matr.Nr.: 0512955
Stud.R. 190 406 445

Inhaltsverzeichnis

Bau der Leonardo-Brücke

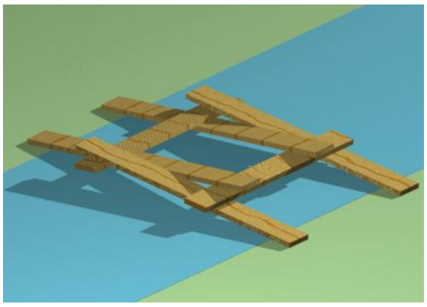
“... Brücken, mit denen der Feind verfolgt und in die Flucht geschlagen werden kann, ...
... Brücken, die Feuer und Kampfhandlungen standhalten und bequem gehoben und gesenkt werden können. ...“

(Aus Leonardo da Vincis Bewerbungsschreiben an Ludovico da Sforza, Herzog von Mailand, 1483)

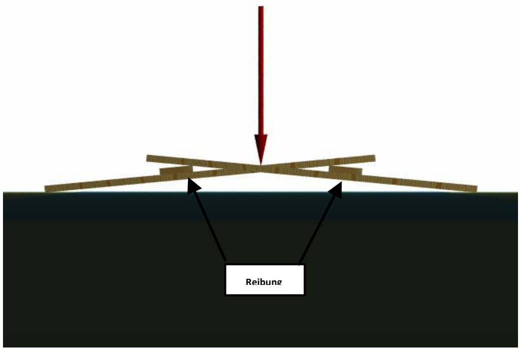
Eine Leonardo-Brücke ist eine Brücke, benannt nach dem italienischen Künstler und Erfinder Leonardo da Vinci (1452-1519), die aus gleichen Holzteilen zusammengesetzt ist und sich selbst trägt. Die Brückenteile sind so zusammengefügt, dass keine Fixiermittel wie Dübel, Schrauben, Nägel oder Seile benötigt werden.

Ursprünglich war die Brücke als transportable Konstruktion aus Rundstäben und Seilen entwickelt worden. Sie sollte dem Militär helfen, schnell Hindernisse zu überwinden.

Die kleinste Brücke kann aus sechs Hölzern gebaut werden. Jede größere Brücke erhält man, indem die Brücke modular mit jeweils vier Brettern erweitert wird. Dies geht so lange, bis die äußeren Bretter zu steil werden und abrutschen.



Physikalisches Prinzip



Dieses Bauprinzip verwendet den sogenannten „Selbsthemmungsmechanismus“, bei dem das System sich selbst bei Belastung verfestigt.

Ohne die Querhölzer könnte man das System nur mit Seil oder Nägeln stabilisieren.

Der Selbsthemmungsmechanismus des Systems hängt von der aneinander Haftung der Hölzer ab, also der Reibung. Je rauer die Hölzer, desto besser für die Festigkeit des Brückenbogens, denn ein Rutschen der Hölzer wird so verhindert.

Weitere Beispiele für solch selbsttragende Konstruktionen sind der Verschlussprinzip (Vier-Laschenverschluss von Umzugkartons) und das steinerne Kellergewölbe.

Mathematische Hintergründe und Anwendung in der Schule

Allgemein

Was bringt der Bau der Leonardo-Brücke den Kindern in der Schule?

- Einfache physikalische Prinzipien der Mechanik und Statik lassen sich bildhaft vermitteln und entdecken.
- Die Begeisterung für geschichtliche Hintergründe lässt sich wecken
- Darüber hinaus kann durch den gemeinschaftlichen Bau der Leonardo-Brücke auch die Zusammenarbeit der Schüler untereinander gefördert werden
- Weitere Fähigkeiten die geschult werden:
  - Konzentrationsfähigkeit
  - Sorgfalt
  - Feinmotorik
  - Räumliches Vorstellungsvermögen
  - Ausdauer
  - Selbstständigkeit wird gefördert

Einbettung in die einzelnen Schulstufen

Unterstufe

1. Klasse

In der Unterstufe sollte dieses Ausstellungsobjekt eher im praktischen Sinne auseinander genommen werden. Eine Aufgabenstellung wäre:

Wie viele Brettchen braucht man für eine Brücke mit 3, 4, 5, 6, … usw. Brückengliedern?

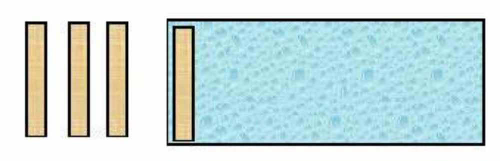
Lösung: Ausgang 1. Brückenglied 6 Brettchen, jedes weitere Brückenglied 4 Brettchen.

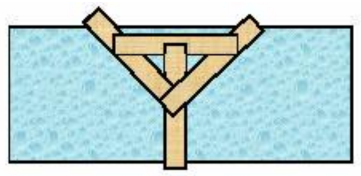
Ein weiteres Beispiel dieser Art ist folgendes:

Grabenüberquerung mit 4 Brettern

Überbrückung eines Grabens mit nur vier gleichlangen Brettern, welche gerade etwas kürzer als die Breite des Baches bzw. Grabens sind; was könnte man tun?

Lösung:





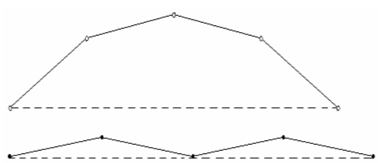
2. Kasse

Je nach Altersgruppe und Fortgeschrittenheit der Klasse kann man auch schon nach einer expliziten Formel fragen.

$4n - 2$ *bei n Brückengliedern*

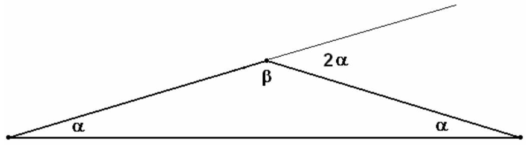
Durch konkretes Bauen sollen die Schüler die Lösung für folgendes Problem finden:

Haben zwei kleinere Brücken die gleiche, längere oder kürzere Spannweite als eine einzelne Brücke mit gleich vielen verwendeten Baustäben?



Mittels einer idealisierten Brücke mit zwei Gliedern kann man einfache Dreieckswinkelberechnungen durchführen:

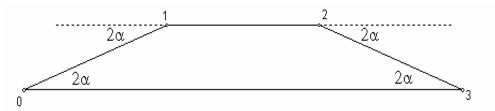
z.B.: Öffnungswinkel β sei gegeben.
Knickwinkel α ist zu berechnen
180°-β = 2 α



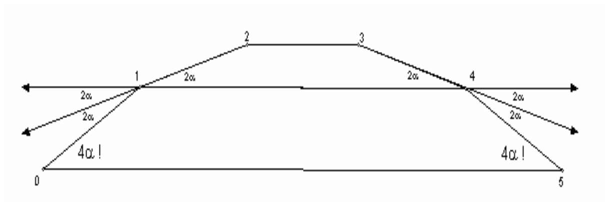
Der Knackpunkt bei dieser Aufgabe ist, dass die Schüler erkennen sollen, dass sie ein gleichschenkeliges Dreieck vor sich haben.
Die Schüler sollten auch erkennen dass α und β durch die Bauweise steuerbar sind.

3. Klasse

Brückenuntersuchung bei n Brückengliedern:
Anfangssteigung der Brücke muss immer größer sein, aber wie verhält sie sich bei einer unterschiedlichen Anzahl von Brückengliedern?
Steigung für 2 Glieder: $\gamma_2= \alpha$
Steigung für 3 Glieder: $\gamma_3= 2\alpha$



➔ Vermutung: $\gamma_n= (n-1)\alpha$



5 Glieder: $\gamma_5= 4 \cdot \alpha$

Weiters sind einige Zeichnerische Aufgaben in dieser Schulstufe möglich z.B.:

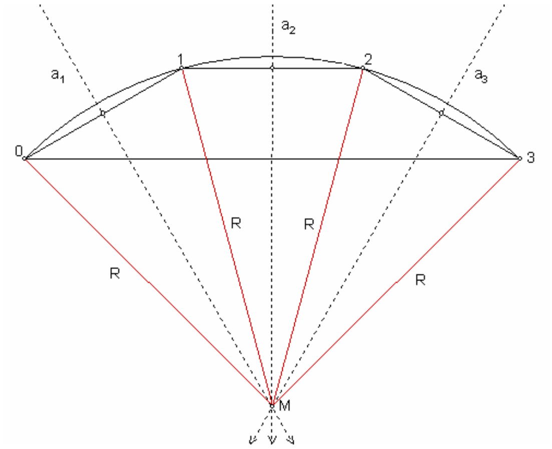
- *Mit gegebener Spannweite und Öffnungswinkel β ist die Leonardo-Brücke mit gegebener Anzahl an Brückengliedern zu zeichnen.*
- *Wenn Spannweite und β gegeben sind, welche Anzahl an Brückengliedern sind möglich bzw. sinnvoll.*

4. Klasse

Wiederholung und eventuell Neueinführung von diversen Winkelsätzen und das Arbeiten mit Kreisen wird dadurch geübt.

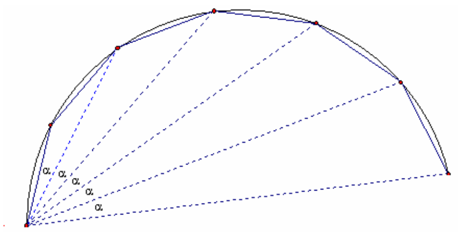
eventuelle Fragestellung:

Liegen die Eckpunkte der vereinfachten Leonardo-Brücke auf einem Umkreis?



Mittels Umfangswinkelsatz folgt:

$\gamma_n = (n-1)\alpha$



Der Umfangswinkelsatz sagt folgendes aus:

Jeder Umfangswinkel ist nach dem Kreiswinkelsatz halb so groß wie der Mittelpunktswinkel (auch Zentriwinkel).

Also müssen alle Umfangswinkel gleich groß sein.

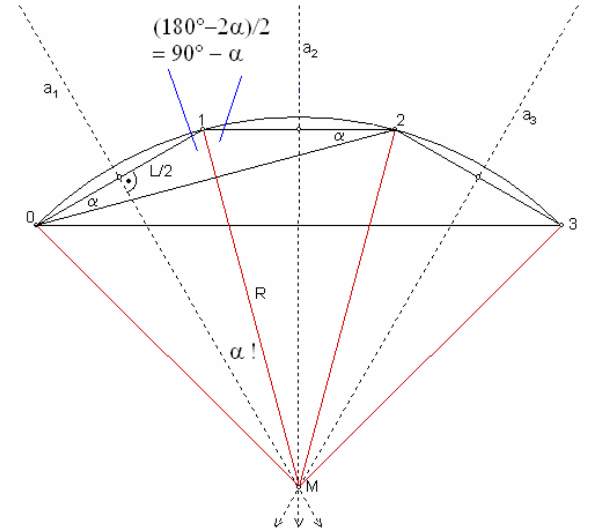
Oberstufe

5. Klasse

Laut Lehrplan wird in diesem Jahrgang die Trigonometrie eingeführt und somit soll das Durchführen von Berechnungen an Rechtwinkeligen und allgemeinen Dreiecken, Figuren und Körpern geübt werden.

Somit kann man z.B. folgendes berechnen:

Radius des Umkreises



Aus:

$$\sin\alpha = \frac{L}{2R}$$

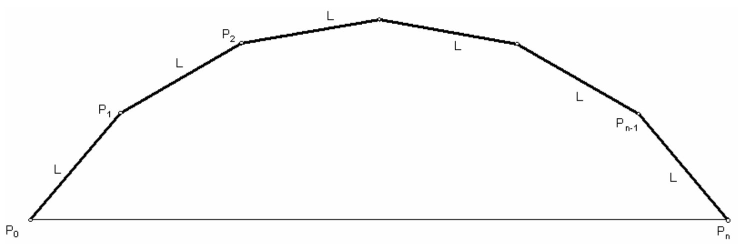
Folgt:

$$R = \frac{L}{2\sin\alpha}$$

6. Klasse

Hier kann man wie im Lehrplan vorgesehen die Leonardo-Brücke mittels Koordinaten berechnen.

Spannweite der Brücke soll als x-Koordinate dargestellt werden, die Höhe der Brücke als y-Koordinate. Der Koordinatenursprung soll der Punkt P_0 (0/0) sein.



Weiters kann man in dieser Schulstufe die optimale Anzahl an Brückengliedern berechnen lassen. Dabei werden die Winkelregeln wiederholt.

Den Schülern sollte bewusst sein, dass der Gesamtzentriwinkel der Brücke: $n \cdot 2\alpha$ ist. Für eine optimale Anzahl $:= n_{opt}$ sollte der Gesamtzentriwinkel möglichst nahe an 180° liegen: $n_{opt} \cdot 2\alpha \approx 180°$

Es gibt genau einen Wert n_{opt} der dies erfüllt:

$$180° - \alpha \leq n_{opt} \cdot 2\alpha \leq 180° + \alpha$$

Wenn man dies nach n_{opt} auflöst erhält man:

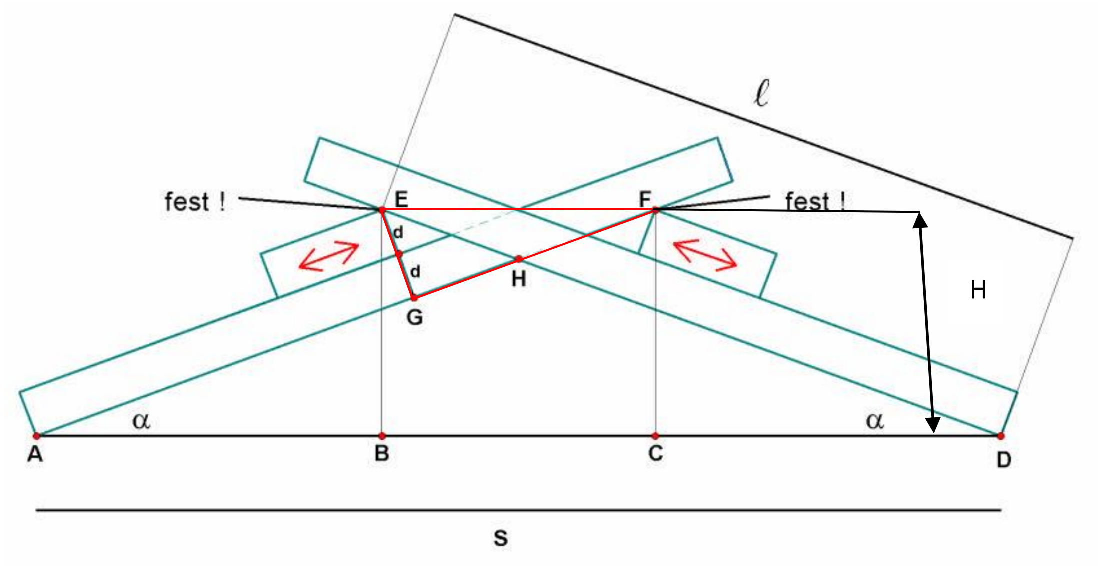
$$\frac{90°}{\alpha} - \frac{1}{2} \leq n_{opt} \leq \frac{90°}{\alpha} + \frac{1}{2}$$

Somit folgt, dass $n_{opt} = \left[\frac{90°}{\alpha} \pm \frac{1}{2}\right]$.

Alle weiteren höheren Schulstufen

In den höheren Klassen braucht man nicht mehr mit der vereinfachten Darstellung arbeiten. Ab jetzt kann man auch die Querbalken und die Dicke der verwendeten Hölzer berücksichtigen.

Wiederum kann man allerdings die Spannweite des Brückenbogens berechnen. Betrachten wir die eingliedrige Brücke:



Die Spannweite S der Brücke berechnet sich aufgrund der Symmetrie des Aufbaus aus:

$$S = \overline{AD} = \overline{AC} + \overline{BD} - \overline{BC} = 2 \cdot \overline{AC} - \overline{EF}$$

Das Dreieck EGF ist ein Rechtwinkeliges Dreieck mit der kleinen Kathete 2d und der Hypotenuse $\overline{EF}$. Somit ergibt sich:

$$\sin\alpha = \frac{2d}{\overline{EF}} \quad \rightarrow \overline{EF} = \frac{2d}{\sin\alpha}.$$

Das Dreieck ACF ist ebenfalls rechtwinkelig, hier gilt:

$$\cos\alpha = \frac{\overline{AC}}{\ell} \;\rightarrow\; \overline{AC} = \ell \cdot \cos\alpha$$

Daher ergibt sich aus der obigen Spannweitenformel:

$$S = 2 \cdot \overline{AC} - \overline{EF} = 2 \cdot \ell \cdot \cos\alpha - \frac{2d}{\sin\alpha}$$

Eine weitere Aufgabenstellung, die z.B.: ab der 7. Klasse bearbeitet werden kann ist das Berechnen der maximalen Spannweite S bei der eingliedrigen Brücke.

Hierfür benötigt man die 1. und die 2. Ableitung der Funktion $S = S(\alpha)$.

$$S'(\alpha) = 2\left(\frac{d\cos\alpha}{\sin^2\alpha} - \ell\cdot\sin\alpha\right)$$

$$S''(\alpha) = -2\left(\frac{2d\cdot\cos^2\alpha}{\sin^3\alpha} + \ell\cdot\cos\alpha + \frac{d}{\sin\alpha}\right)$$

Mögliche Extremstellen findet man unter den Nullstellen der 1. Ableitung:

$S'(\alpha) = 0$

Wenn man nun die erste Ableitung umformt:

$$\frac{\mathrm{d}\cdot\cos\alpha}{\sin^2\alpha} - \ell\cdot\sin\alpha = 0 \quad\rightarrow\quad d\cdot\cos\alpha = \ell\cdot\sin^3\alpha \quad\rightarrow\quad \frac{d}{\ell} = \frac{\sin^3\alpha}{\cos\alpha} = \tan\alpha\cdot\sin^2\alpha$$

Für alle sinnvollen Winkel α gilt auf jeden Fall, dass $\alpha \in\ ]0°, 90°[$. Damit gilt für alle möglichen Extremstellen:

$$\begin{aligned}
S''(\alpha) &= -2\cdot\left(\frac{2d\cdot\cos^2\alpha}{\sin^3\alpha} + \ell\cdot\cos\propto + \frac{d}{\sin\alpha}\right)\\
&= -2\cdot\left(\frac{2d\cdot\cos^2\alpha}{\frac{d}{\ell}\cdot\cos\alpha} + \ell\cdot\cos\alpha + \frac{d}{\sin\alpha}\right)\\
&= -2\cdot\left(2\cdot\ell\cdot\cos\alpha + \ell\cdot\cos\alpha + \frac{d}{\sin\alpha}\right)\\
&= -2\cdot\left(3\cdot\ell\cdot\cos\alpha + \frac{d}{\sin\alpha}\right)\\
&= -2\,\frac{3\cdot\ell\cdot\cos\alpha\cdot\sin\alpha + d}{\sin\alpha} < 0
\end{aligned}$$

Das heißt, alle Winkel, die die Gleichung $\tan\alpha \cdot \sin\alpha = \frac{d}{\ell}$ erfüllen, ergeben eine Maximale Spannweite S.

Die Höhe H kann im rechtwinkeligen Dreieck ACF berechnet werden aus:

$$\sin\alpha = \frac{H}{\ell} \quad \rightarrow \quad H = \ell \cdot \sin\alpha$$

Die Mathematische Betrachtung der zweigliedrigen Brücke kann sich auch weiterhin mit allen Eigenschaften der Brücke beschäftigen, d.h. dass weiterhin die Dicke der Brückenstäbe beachtet werden kann und dass man eine Unterscheidung zwischen der wahren Hölzchenlänge macht und jener Länge die tatsächlich tragend ist.

Für die Betrachtung von mehrgliedrigen Brücken wird wiederum die vereinfachte Brücke verwendet. In Klassen wo ein Zugang zu Computern gegeben ist, könnte man hier die Berechnungen mit einem algebraischen Programm durchführen.

Lebenslauf eines Universalgenies

Leonardo da Vinci (*1452, ✝ 1519)

Leonardo da Vinci wurde geboren in Anchiano bei Vinci, einem kleinen Ort ca. 30 km von Florenz entfernt, am 15. April 1452 als unehelicher Sohn des Notars Piero und der Magd Caterina. Sein voller Name war Leonardo di ser Piero da Vinci (Leonardo des Herrn Piero von Vinci). Als uneheliches Kind verwendete er selbst nur seinen Vornamen, auch beim Signieren seiner Werke, und seine uneheliche Geburt verhinderte eine vollwertige Schulausbildung. Dies führte den von Natur aus höchst neugierigen Leonardo dazu, sein stetig wachsendes Wissen weitgehend autodidaktisch anzureichern.

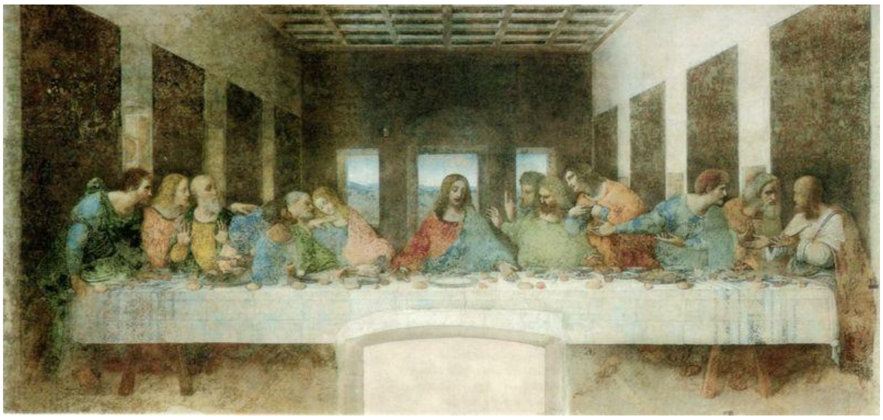
Sein Vater erkannte früh das Talent zur Bildenden Kunst und schickte ihn 1468 in die Werkstatt von Andrea di Michele Cione mit Künstlernamen Andrea del Verrocchio, dem in dieser Zeit bedeutendsten Florentiner Bildhauer und Maler, wo auch Sandro Botticelli gelernt hat. Dort erlangte der Lehrling sehr schnell fortgeschrittene Fertigkeiten und übernahm bald einen großen Teil der malerischen Aufgaben.

Um 1477 verließ Leonardo, nachdem er sich bereits einen Namen als Maler gemacht hatte, die Werkstatt Verrocchios und erlangte weitere Aufträge. In dieser Zeit fand er auch die Unterstützung des Florentiner Stadtherren Lorenzo de Medici.

Alsbald begründeten seine Werke einen Ruhm, der weit über Florenz hinaus reichte. So folgte Leonardo 1487 dem Ruf an den Hof von Ludovico Sforza, dem Regenten und späteren Herzog von Mailand, dem er sich auch als Ingenieur für Kriegswaffen und Festungstechnik anbot. Wegen der bevorstehenden Kämpfe zwischen Mailand und Venedig hat Leonardo in seinem Empfehlungsschreiben an den Herzog ausführlich und detailliert seine Fähigkeiten und Erfindungen in der Militärtechnik erwähnt.

In der Zeit in Mailand fertigte Leonardo auch die beiden Fassungen der "Madonna in der Felsengrotte" und sein zur damaligen Zeit wohl bedeutendstes Werk, das Abendmahl. Das war als Leonardo etwa 40 Jahre alt war und davon fast zehn Jahre für den Mailänder Hof tätig gewesen war. Er bekam von Ludovico Sforza den Auftrag, ein Bild für die Stirnwand des Refektoriums der Konventskirche von Santa Maria delle Grazie in Mailand zu malen.

Das bereits während der Entstehung von vielen Künstlern bewunderte Bild „Das letzte Abendmahl“ (Cenacolo), ein Wandgemälde mit den Maßen von 8,8 m x 4,6 m, entstand in den Jahren 1494 bis 1498. Es stellt den Moment dar, in dem Jesus seinen Jüngern mitteilt, dass einer von ihnen ihn in wenigen Stunden verraten würde. Das Bild ist bis heute Gegenstand vieler Legenden.



In Mailand freundete er sich mit dem Mathematiker Luca Pacioli an, der erstmals die heute übliche doppelte Buchführung beschrieb. Dieser lehrte Leonardo Grundlagen der Mathematik, welcher sich mit Illustrationen für Paciolis Werk "Divina proportione" (Göttliche Proportionen) revanchierte, welches sich mit dem Goldenen Schnitt befasste.

Aufgrund der politischen Umwälzungen durch den Einmarsch der Truppen des französischen Königs Ludwigs XII. in Mailand siedelte sich Leonardo um 1500 in Florenz an.

Nachdem Leonardo da Vinci im Jahre 1503 kurzzeitig in den Dienst Cesare Borgias als Militär-Ingenieur getreten war und Norditalien bereist hatte, folgte er 1506 dem Ruf des französischen Befehlshabers Marschall Charles d'Amboise und ging wieder ins inzwischen von Frankreich besetzte Mailand, wo er seine Tätigkeit als Hofmaler und Ingenieur für Ludwig XII. aufnahm.

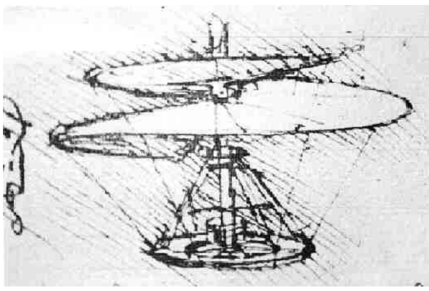
Nach dem erneuten Wechsel der Herrschaft in Mailand fand Lenoardo 1513 bei Papst Leo X. in Rom eine neue Anstellung. Er begann das Gemälde "Johannes, der Täufer" und intensivierte seine anatomischen Studien, wurde dabei jedoch durch einen Spitzel des Vatikan behindert.

Nach dem Tod Ludwigs XII. traf Leonardo Franz I., den neuen König von Frankreich. Dieser war vom Künstler derart angetan, dass er ihm eine Heimstatt in Frankreich anbot. Leonardo siedelte ins Schloss Cloux bei Amboise über, dessen Besitz ihm zusammen mit einer üppigen Pension übertragen wurde. Dort lebte, arbeitete und forschte er bis zu seinem Tode.

Gestorben ist Leonardo da Vinci im Schloss Cloux (dem heutigen Clos Lucé) bei Amboise an der Loire am 2. Mai 1519 und fand seine letzte Ruhestatt in der Kapelle Saint-Hubert im Schloss von Amboise.

Einige seiner Erfindungen und Skizzen, die bis heute erhalten geblieben sind, wurden im Codex Atlanicus gebunden überliefert. 1119 Seiten umfasst dieses Werk und zeigt, mit was sich dieses Genie sein Leben lang beschäftigte:

Kriegsmaschinen: Armbrüste, Panzer, Katapulte, Kanonen etc.
Hydraulische Systeme: Kanäle, Schwimm- und Tauchgerät, Boote, Wasserkraft
Flugmaschinen: Flügeltypen, Vogelflug, Hubschrauber, Fallschirm
Mechanik: Produktionsmaschinen, Getriebe, Federn und Ketten



aber auch mit Optik, Energieanwendung etc.

Quellenangabe

Prof. Schwupp: Wunderbare Statik
Online im Netz: http://www.physikanten.de/dox/1632.2Tkbx.H.1.De.php

Onlineportal Wikipedia
Online im Netz: http://de.wikipedia.org/wiki/Leonardo_da_Vinci

Humenberger Hans, 2007: Die Leonardo Brücke, Mathematische und praktische Aktivitäten rund um die Leonardo Brücke-
Online im Netz: http://wwwmath.uni-muenster.de/didaktik/veranstaltungen/istron/humenberger.pd

Bundesministerium für Unterricht, 2000 AHS-Lehrplan im Bundesgesetzblatt (BGBl. II Nr. 133/2000)
Online im Netz:
http://www.bmukk.gv.at/schulen/unterricht/lp/lp_ahs_unterstufe.xml

Bau der Leonardo Brücke und dessen Hintergrund
Online im Netz: http://fachschaften.gymnasium-koenigsbrunn.eu/Mathematik/Bilder/Leonardo_Bruecke_HG.pdf