

# Unendliche Weiten

Dies sind die Abenteuer ...

... eines Kinderspiels? H5?.....Treffer!!!

Ja, genau: Schiffeversenken!  
von Prof. Dr. Peter Gritzmann

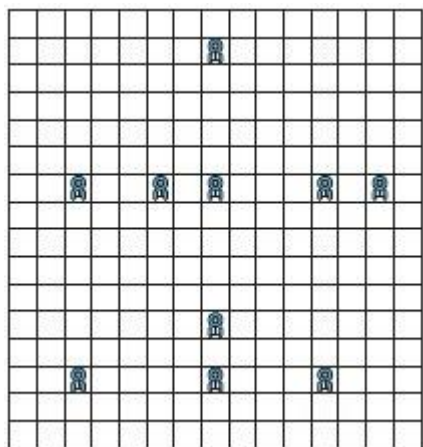


Abb. 2: Anordnung der Raumflotte

In seiner klassischen Variante platzieren zwei Spieler jeweils Schiffe auf ihrem "Gitterkästchen-Spielfeld", natürlich ohne deren Position dem Gegner zu verraten (Abbildung 2). Das Ziel besteht darin, die gegnerischen Schiffe durch gezielte Fragen nach Schiffspositionen aufzuspüren.

Ohne weitere Informationen müssen in dem abgebildeten Beispiel im schlimmsten Fall alle 15 x 16 Felder überprüft, also 240 Fragen gestellt werden. (Na ja, wenn man weiß, wieviele Schiffe platziert wurden, weiß man natürlich spätestens nach der 239. Frage, ob das letzte Feld besetzt ist.) Das Aufspüren der Schiffe vereinfacht sich allerdings wesentlich, wenn wir "Sensoren" einsetzen dürfen und "Radarinformationen" zur Verfügung haben. Nehmen wir an, zu Beginn des Spiels teilen sich die beiden Spieler mit, wie viele Raumschiffe in den

einzelnen (horizontalen) Zeilen und (vertikalen) Spalten des Plangitters liegen. Solche Varianten sind nicht neu; tatsächlich findet man sie bisweilen in Rätselcken von Tageszeitungen.

Abbildung 3 gibt zu jeder Zeile und Spalte die Zahl der sich darin befindenden Raumschiffe der Flotte an; die Einträge 0 sind der Einfachheit halber weggelassen.

Kann man mit Hilfe dieser Sensordaten bereits alle gegnerischen Schiffe aufspüren? Wie gesagt, die konkreten Positionen der Schiffe des Gegenspielers sind ja nicht bekannt, bekannt sind nur die in Abbildung 3 zusammengefassten Informationen.

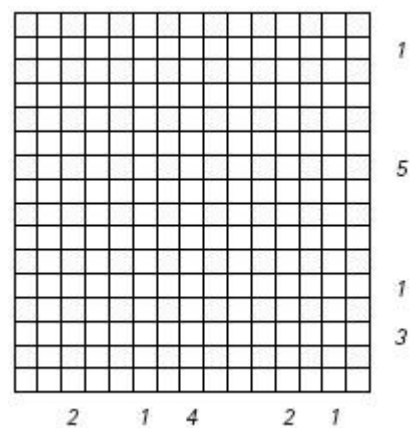


Abb. 3: Reichen die Sensordaten zur Bestimmung der genauen Position der gegnerischen Flotte?

Bestimmen also die gegebenen Daten die Position des gesamten Flottenverbandes bereits vollständig? Versuchen wir, die Informationen auszuwerten! Die Zeilen und Spalten des Spielplans, die unsere Sensoren als "leer" ausweisen, enthalten keine Raumschiffe und können für die Positionsbestimmung gestrichen werden. Das Problem reduziert sich dadurch auf ein wesentlich kleineres "Plangitter".

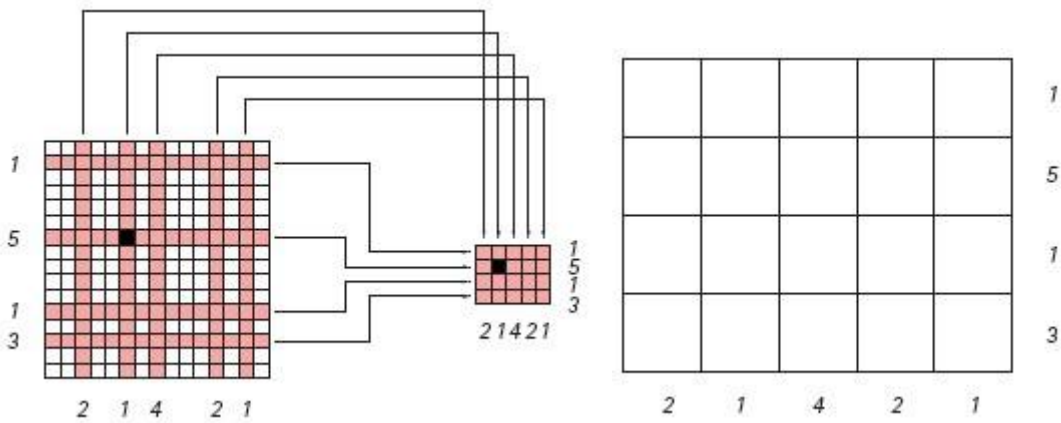


Abb. 4: Reduktion des Problems; jede nach den Radarinformationen überhaupt nur mögliche Position eines Schiffes im Ausgangspunkt entspricht genau einer Position im kleineren Problem. (So korrespondieren etwa die beiden schwarz gefärbten Felder.)

Um die Position des Flottenverbandes zu bestimmen, brauchen wir also nur das kleine Problem von Abbildung 5 zu lösen. Die Lösung im ursprünglichen Spielplan erhalten wir dann durch Übertragung der Feldinhalte ("Schiff oder kein Schiff") des reduzierten Spielplans in die zugehörigen Zellen des ursprünglichen. An dem kleinen Problem erkennt man sehr deutlich, wie viele Informationen durch die Radardaten gegeben sind.

So besagt etwa die 5 in der zweiten Zeile, dass alle fünf möglichen Positionen für Raumschiffe auch besetzt sein müssen. Das gleiche gilt für die dritte Spalte; hier sind vier potenzielle Kandidatenplätze vorhanden, und vier Raumschiffe müssen platziert werden.

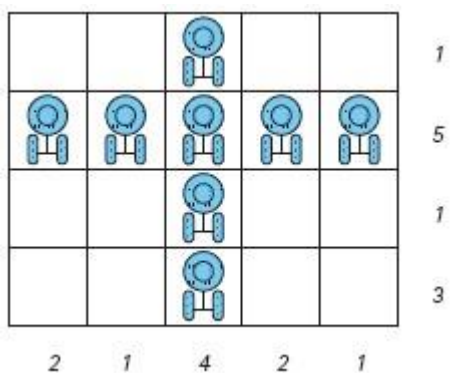


Abbildung 6 enthält die bislang gezogenen Schlüsse. Nun erkennt man aus der 1 in der zweiten Spalte, dass die in dieser Spalte noch nicht besetzten Positionen tatsächlich frei bleiben müssen. Ein Raumschiff ist bereits vorhanden, und mehr dürfen es in der zweiten Spalte auch nicht sein. Gleiches gilt für die fünfte Spalte, ebenso für die erste und dritte Zeile.

Abb. 6: Wo liegt die Raumflotte: erste Schritte.

Die letzte Zeile muss nun drei Raumschiffe enthalten; eines davon ist bereits identifiziert, und zwei Positionen sind ausgeschlossen. Von den fünf möglichen Plätzen kommen also nur noch die beiden freien Positionen in Frage, und diese müssen Raumschiffe enthalten (Abbildung 8).

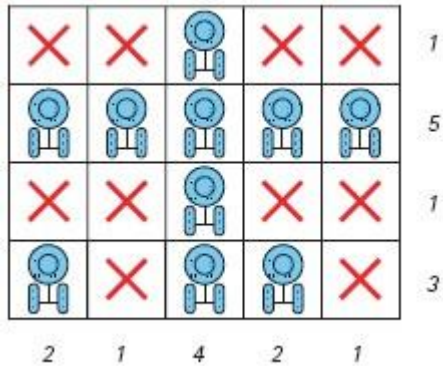


Abb. 8: Vollständige Enttarnung der Raumschiff-Flotte.

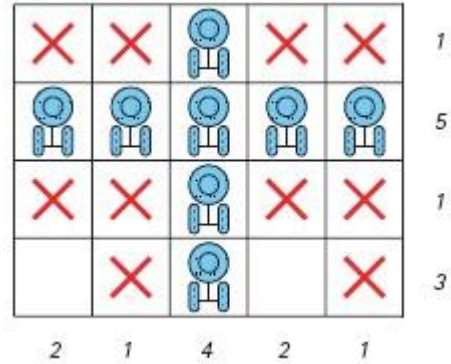


Abb. 7: Wo liegt die Raumschiff-Flotte: Fortsetzung.

Hiermit ist die genaue Lage des Flottenverbandes aus Abbildung 2 bestimmt. Die gegebenen Radarinformationen reichen also aus, die Position aller zehn Raumschiffe zu ermitteln. Ist das immer so? Nehmen wir einen anderen Flottenverband und die zugehörigen Radardaten.

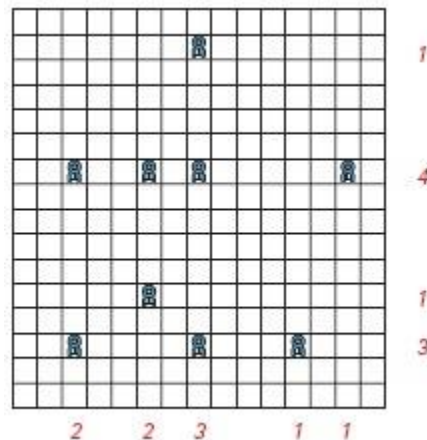


Abb. 9: Ein anderer Flottenverband.

Die beiden Sätze von Radarinformationen im ersten und zweiten Beispiel unterscheiden sich nur wenig. Mal ist in einer Zeile oder Spalte ein Schiff weniger oder ein Schiff mehr vorhanden, in den meisten Fällen stimmen die neuen Daten aber mit den alten überein. Anders als in dem vorherigen Beispiel ist die in Abbildung 9 angegebene Lösung aber nicht die einzig mögliche Anordnung des Flottenverbandes, die mit den Radardaten übereinstimmt. Abbildung 10 zeigt,

wie eine andere Lösung dadurch entsteht, dass man vier blaue durch vier rote Raumschiffe auf anderen Positionen ersetzt; und das sind keineswegs alle Möglichkeiten.

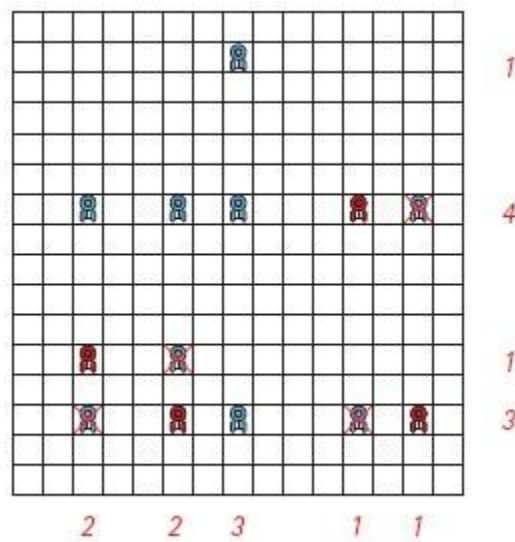


Abb. 10: Eine weitere Lösung.

Anders als vorher kann man den unbekanntem Flottenverband nur unter Verwendung der Sensordaten jetzt nicht mehr vollständig enttarnen. Das geben die Daten einfach nicht her. Im Sinne einer optimalen Spielstrategie für das "Schiffeversenken unter Radarbedingungen" ist die Aufteilung der zehn zur Verfügung stehenden Schiffe entsprechend der roten Radarinformation also erheblich günstiger als entsprechend der schwarzen, denn hier ist es dem Gegner nicht möglich, direkt auf die Position eines jeden einzelnen Raumschiffs zu schließen.

Bei gegebenen Sensordaten stellen sich somit folgende Fragen: Bestimmen die Randsummen das "Bild", d.h. die Position der Raumschiffe eindeutig? Wie groß ist die Anzahl der "Lösungen"? Natürlich wird man seine eigenen Raumschiffe so positionieren wollen, dass die Radardaten die Position möglichst wenig festlegen, d.h. die Anzahl der möglichen Lösungen möglichst groß ist. Schließlich: Kann man eine bzw. alle Lösungen effizient berechnen?

Es wird Sie vielleicht erstaunen, dass bisher keine "einfache Formel" bekannt ist, die Anzahl der möglichen Lösungen für gegebene Randdaten zu berechnen. Aber warum auch? Schiffeversenken ist ja nur ein Kinderspiel.

Wirklich? Was, wenn die Raumschiffe feine Kalkablagerungen in der Brust wären, die als Vorstufen von Brustkrebs identifiziert werden müssen, und unsere Sensordaten einfach Röntgenaufnahmen wären?



Bei "Bildgebenden Verfahren" in der Medizin wie der Computertomographie liegen tatsächlich ebenfalls Informationen darüber vor, was sich "auf einzelnen Röntgenstrahlen" befindet. Wie beim Schiffeversenken sind auch hier die eigentlich interessanten Objekte verdeckt, nur aggregierte Informationen sind vorhanden, messbar als Abschwächung der Röntgenstrahlen nach Durchtritt durch das Gewebe. Hieraus kann man die "Gesamtgewebedichte" längs des Röntgenstrahls bestimmen, nicht aber, wo denn genau was ist. Wie bei den Raumschiffen: Die Anzahl der Schiffe in einer Zeile sagt uns noch nicht, wo sich die Schiffe genau befinden. Im Kinderspiel mag das von strategischem Vorteil sein, aber in der Chirurgie?

Natürlich werden bei medizinischen Anwendungen nicht nur zwei, sondern viele Hundert "Aufnahmen" gemacht. Aber die Fragen bleiben die gleichen. Bestimmen die Daten das "Bild", d.h. das relevante Körpergewebe eindeutig oder wenigstens annähernd exakt? Schließlich muss man bei chirurgischen Eingriffen sicher sein, dass sie auch wirklich notwendig sind ("Artefakte" der bildgebenden Verfahren sollte man nicht operieren!) und an der richtigen Stelle durchgeführt werden.

Das Beispiel des Schiffeversenkens unter Radarnebenbedingungen ist also lediglich eine "diskrete" Variante der Computertomographie. Aber es kommt noch besser: Das Problem der Diskreten Tomographie ist tatsächlich ein ganz aktuelles Forschungsgebiet der Mathematik. Nein, nicht weil Mathematiker gerne nutzlosen Spielereien auf den Grund gehen, sondern weil dieses Problem wichtig ist für die Nanotechnologie. Die Raumschiffe sind jetzt die Atome (etwa eines Chips), und ihre genaue Position im Kristallgitter muss bestimmt werden. Die Sensordaten erhält man aus wenigen Aufnahmen der Hochauflösenden Transmissionselektronenmikroskopie.

Anders als bei der Computertomographie liegen hier also atomare Strukturen zugrunde; Abbildung 12 zeigt etwa die von Silizium, das ja bekanntlich in der Halbleitertechnologie von zentraler Bedeutung ist.

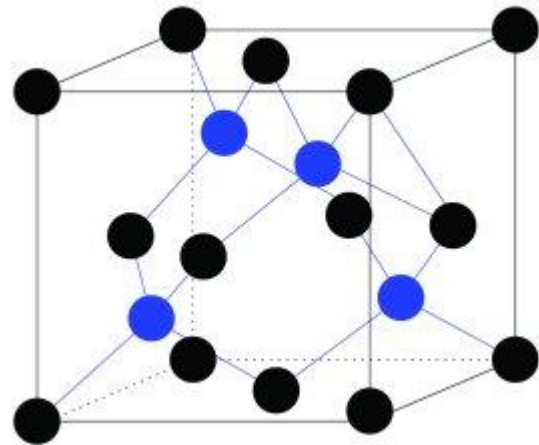
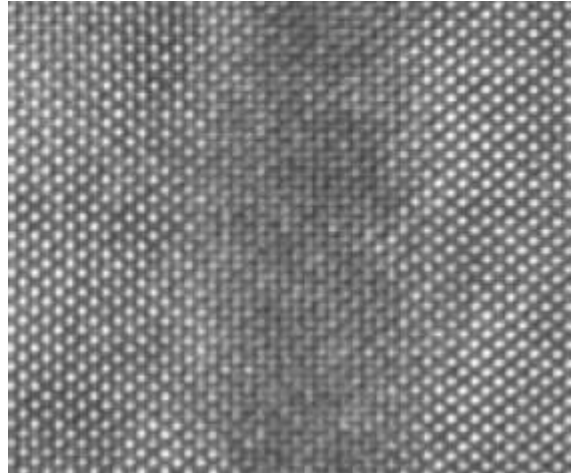


Abb. 12: Silizium.

Mit Hilfe modernster Aufnahme- und Analysetechniken erhält man prinzipiell Bilder wie in Abbildung 13.

Man erkennt mit bloßem Auge einen Unterschied in der "Textur" der Abbildung; tatsächlich entspricht dieser einer Änderung der Silizium/Germanium Konzentration, und man kann diese Konzentration aus der Aufnahme quantifizieren. Wo sich aber genau welche Atome befinden, kann man der Aufnahme nicht entnehmen. Wie beim Schiffeversenken hat man also wieder nur aggregierte Informationen zur Verfügung: für jede der durchgeführten elektronenmikroskopischen Aufnahmen die "ungefähre" Anzahl der Atome pro Atomsäule parallel zur Aufnahme-richtung. Und wie



bei der Raumflotte besteht die Aufgabe in der Rekonstruktion des zugrunde liegenden Objekts. Natürlich sind physikalische Messungen nicht 100-prozentig korrekt, d.h. die Daten sind fehlerbehaftet. Beim Schiffeversenken löst man dieses Problem sehr einfach: Ertappt man den Gegner beim Mogeln, so hat dieser das Spiel verloren! In der Elektronenmikroskopie muss man sich mit dieser Frage auseinandersetzen.

Abb. 13: Aufnahme eines SiGe-Profiles auf aromarem Niveau.

Dennoch: Unendlichen Weiten treffen Nanostrukturen! Typischerweise wird "Schiffeversenken" wahrlich nicht mit Mathematik in Verbindung gebracht. Wenn dieses Spiel im Mathematikunterricht auftritt, dann vermutlich eher unter der Bank als an der Tafel. Und trotzdem, seine Varianten beschäftigen die mathematische Forschung - beliebig schwierig, aber interessant und nützlich.

Professor Dr. Peter Gritzmann,  
TU München.