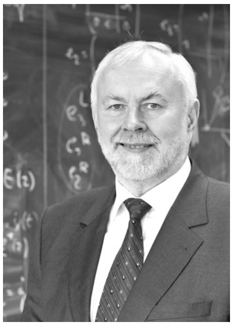

Diskrete Mathematik und ihre Anwendungen:
Auf dem Weg zu authentischem Mathematikunterricht

Martin Grötschel[1] und Brigitte Lutz-Westphal[2]

Abstract

- Mathematics Subject Classification: 97-01, 97 D 50, 97 C 90
- Keywords and Phrases: Authentischer Mathematikunterricht, diskrete Mathematik, Modellierung, mathematische Anwendungen
  Classroom mathematics, discrete mathematics, modelling, applied mathematics

Der Mathematikunterricht in Schulen lebt unter anderem davon, immer wieder neue Impulse zu bekommen und aufzunehmen. Wir haben in den vergangenen Jahren daran gearbeitet, Themen der modernen angewandten Mathematik, insbesondere aus der angewandten diskreten Mathematik, für den Unterricht an Schulen zugänglich zu machen. In diesem Artikel wollen wir einen Einblick in diese Arbeit geben. Wir legen dar, auf welchen Vorstellungen von Mathematikunterricht die erarbeiteten Konzepte basieren und aus welchen Gründen wir die Themen für geeignet halten, einen solchen Unterricht zu realisieren.

The teaching of mathematics has to be renewed by fresh ideas from time to time. In the last years we have tried to make topics of modern applied mathematics, especially from applied discrete mathematics, accessible for the classroom. In this paper we give an overview of our work in progress. We explain our general ideas on teaching mathematics and we discuss why the topics we have chosen are suitable for an application oriented teaching approach.

Eingegangen: 13. 05. 2008

[1] TU Berlin, Zuse-Institut Berlin, MATHEON, groetschel@zib.de
[2] Hochschule Vechta, MATHEON, brigitte.lutz-westphal@uni-vechta.de

DMV
JAHRESBERICHT DER DMV

1 Moderne angewandte Mathematik für den Schulunterricht

Das heutige Leben ist durchdrungen von komplexen Technologien, die in vielen Fällen erst in den letzten Jahren entstanden und in diesem Sinne modern sind. Ohne Kommunikationsnetze, Internet, Mobilfunk, Logistik, Verkehrstechnik, medizinische Apparate, etc. könnte die heutige Gesellschaft nicht funktionieren. Fast alle dieser Technologien haben einen hohen Mathematikanteil. Der „normale Bürger“ weiß davon nichts, der Schulunterricht könnte dem ein wenig abhelfen. Einige mathematische Aspekte dieser Technologien sind einfach und sogar spielerisch intuitiv zugänglich. Solche Anwendungen, die zusätzlich noch der Lebensumwelt der Schüler zugehören, können dazu genutzt werden, die mathematische Modellierung, also die mathematische Herangehensweise an die Lösung praktischer Fragen, anschaulich zu erläutern. Gerade in der diskreten Mathematik können hier, quasi „nebenbei“, mathematische Theorien erarbeitet und Teilaspekte (Definitionen, Fragestellungen, einfache Sachverhalte) durch eigenständiges Entdecken der Schüler entwickelt werden. Wir beginnen mit einigen Beispielen.

1.1 Mobilfunk und Graphenfärbung

Das Färben von Landkarten hat zu der Frage nach der minimalen Zahl von Farben geführt, mit denen man die Knoten eines Graphen so färben kann, dass zwei benachbarte Knoten verschieden gefärbt sind. Landkartenfärben ist vielleicht heute nicht mehr so spannend wie die Mobilfunkerei. Fast jede/r Schüler/in hat ein Handy, und die durchaus vorhandene technische Neugier junger Menschen kann man dazu nutzen, einige mathematische Aspekte des Mobilfunks lebensnah zu erläutern. Ein Beispiel hierfür ist die Kanalzuweisung im GMS-Mobilfunk. Jeder deutsche Mobilfunkanbieter verfügt über rund hundert Kanäle, die er seinen rund 15.000 Antennen so zuweisen muss, dass sich die Antennen gegenseitig nicht stören. Zwei „nah beieinander“ liegende Antennen stören sich, wenn sie auf demselben Kanal senden. Die einfachste Version dieses Problems kann man als Knotenfärbungsproblem (Farbe entspricht Kanal) formulieren. Führt man Interferenzwerte und Kanalabstände ein, so kommt man sehr schnell zu anschaulich klaren und praxisnahen Fragen der Kanalzweisung, die derzeit Gegenstand der Forschung, aber Schülern durchaus zugänglich sind und für die Schüler u.a. heuristische Lösungsalgorithmen entwickeln können. Daten von konkreten Praxisproblemen stehen im Internet zur Verfügung, u.a. im FAP web (`http://fap.zib.de/problems`). Nebenbei bemerkt: In diesem Zusammenhang bieten sich in höheren Klassen Abstecher zur Kryptographie und zur Codierungstheorie an, das sind Themen, die mit Zahlentheorie, Algebra und theoretischer Informatik verknüpft sind und die man ebenfalls in Unterrichtseinheiten umsetzen kann, die mathematische Theorie und Lebensumwelt verbinden.

1.2 Wege finden

Die Suche nach optimalen Wegen: Ein abwechslungsreicheres Anwendungsfeld gibt es kaum. Wie komme ich mit öffentlichen Verkehrsmitteln am besten von zu Hause zur Schule oder einem zentralen Punkt der Stadt? In allen Städten bieten heute die Nahverkehrssysteme im Internet „Routenplaner" an, die schnellste Wege berechnen. Schüler nutzen diese (speziell in Großstädten wie Berlin) intensiv, beispielsweise bei der Planung ihrer Freizeitaktivitäten. Die Algorithmen hierzu sind einfach und eignen sich sehr gut für die selbständige Erarbeitung im Unterricht. Aber was ist überhaupt der beste Weg: der kürzeste, der schnellste, der bequemste (wenig umsteigen), der preiswerteste? Dieselbe Frage stellt sich, wenn das Auto der Familie ein Navigationssystem hat und der beste Weg zum Ziel gesucht wird. Hier kann man wunderbar über Modellierung, Zielkonflikte etc. diskutieren und z. B. die Dispositionszentrale der örtlichen Verkehrsbetriebe besuchen, um einen Eindruck von der enormen Komplexität der Aufgaben im ÖPNV zu bekommen. Die Disponenten werden dann gerne erläutern, wie schwierig es ist, einen guten Fahrplan zu erstellen, die Umläufe von Bussen zu planen und Busfahrer gut einzusetzen. Weniger komplexe Versionen dieser Aufgaben kann man wiederum im Unterricht behandeln. Wie viele Umsteigemöglichkeiten gibt es am Bahnhof Berlin-Alexanderplatz? Wie beschreibt man die Abbiegemöglichkeiten am Ernst-Reuter-Platz graphentheoretisch? Und dann kann man sich mit Flugreisen beschäftigen, der Wegeplanung für die Müllabfuhr, den Postboten oder den Zeitungsausträgern, Varianten, die manchmal schwierig und manchmal einfach zu lösen sind. Zusätzlich kann man dann, wenn es der zeitliche Rahmen und die Leistungsstärke der Klasse erlauben, in die Informatik eintauchen, das Problem angemessener Datenstrukturen zur Speicherung von Graphen, Laufzeiten von Algorithmen oder sogar Grundzüge der Komplexitätstheorie erarbeiten. Dies sind reizvolle Themen, die bei Spezialveranstaltungen für besonders motivierte Schüler auf großes Interesse gestoßen sind.

1.3 Logistik

Wie kommt der Joghurtbecher in den Kühlschrank und der Bleistift in die Schultasche? Was bedeutet „just in time" im Automobilbau? Hier geht es um Flüsse in Netzwerken und die Beschreibung zeitkritischer Prozesse. Natürlich ist die Komplexität dieser Anwendungen zu groß für die Behandlung im Schulunterricht, aber die Bewegungen eines Bediengerätes für ein Hochregallager lassen sich mühelos graphentheoretisch deuten. Eine Besichtigung eines Logistikzentrums oder eines großen Warenlagers kann den Schülern einen Eindruck von der Welt der Güterversorgung geben, und hier ist überall Mathematik am Werk, die für Schülerinnen und Schüler sichtbar gemacht werden kann. Fragen der Reihenfolgeplanung (z. B. bei der Maschinenbelegung) sind kombinatorischer und/oder graphentheoretischer Natur und sind sehr gut für einen anwendungsnahen Unterricht geeignet.

1.4 Leiterplatten und Chips

Jeder, der einmal ein Fernsehgerät, einen Laptop oder ein Mobilfunkgerät geöffnet hat, sieht dort eine Vielzahl von Leiterplatten und Chips. Unzählige mathematische Aufgaben sind beim Entwurf und der Produktion dieser Geräte zu lösen. Wie platziere ich die Komponenten auf einem Chip, wie lege ich die Verbindungen zwischen den Komponenten (Verdrahtung)? Wie bohre ich die Löcher möglichst schnell in die Leiterplatte, wie kann ich die Anzahl der benötigten Löcher minimieren, etc.? Für vereinfachte Leiterplatten und Chips kann man Verdrahtungsprobleme graphentheoretisch analysieren. Das schnelle Bohren von Löchern führt auf ein Travelling-Salesman-Problem (das klassische Problem der kombinatorischen Optimierung). Die Minimierung der Anzahl der Löcher kann man auf ein Max-Cut-Problem zurückführen und stößt dabei auf interessante Aspekte der Graphentheorie.

Es ist natürlich klar, dass die volle Komplexität der oben skizzierten Fragestellungen nicht im Schulunterricht dargestellt werden kann, aber viele der angesprochenen konkreten Probleme lassen sich so vereinfacht aufarbeiten, dass sie für Schülerinnen und Schüler mathematisch behandelbar sind[1], gleichzeitig jedoch die Lebensnähe erhalten bleibt. Viele erfolgreiche Versuche dieser Art kann man in dem seit sechs Jahren durchgeführten Wettbewerb „mathematischer Adventskalender“ (`www.mathekalender.de`) des DFG-Forschungszentrums MATHEON finden. Die Aufgaben dort sind keinesfalls nur aus der diskreten Mathematik, es werden auch Differentialgleichungen und Stochastik behandelt. Eine Auswahl der Aufgaben ist in [2] zu finden.

2 Authentischer Mathematikunterricht

Moderne Anwendungen von Mathematik, wie beispielsweise die im ersten Abschnitt skizzierten, sollen den Mathematikunterricht bereichern und können insbesondere in Verbindung mit einer speziellen methodischen Herangehensweise dazu beitragen, einen neuen Blick auf Mathematik zu vermitteln[2]. Zunächst erläutern wir, welche übergeordneten Vorstellungen und Ziele wir mit einem solchen Mathematikunterricht verfolgen.

Es gibt zahllose Forderungen an die Intentionen und Ziele von Mathematikunterricht. Jede davon betont andere Schwerpunkte. Die Diskussion über die Ziele des Mathematikunterrichts wurde in den letzten Jahren durch die Einführung von Bildungsstandards und der damit verbundenen Kompetenzorientierung des Unterrichts neu belebt und erweitert.

Der Beitrag des Faches Mathematik zur Bildung wird in den 2003 in Deutschland in Kraft getretenen „Bildungsstandards im Fach Mathematik für den Mittleren Schulabschluss“ durch folgende Liste von Grunderfahrungen, die der Unterricht ermöglichen soll, charakterisiert.

„Mathematikunterricht trägt zur Bildung der Schülerinnen und Schüler bei, indem er ihnen insbesondere folgende Grunderfahrungen ermöglicht, die miteinander in engem Zusammenhang stehen:

- technische, natürliche, soziale und kulturelle Erscheinungen und Vorgänge mit Hilfe der Mathematik wahrnehmen, verstehen und unter Nutzung mathematischer Gesichtspunkte beurteilen,
- Mathematik mit ihrer Sprache, ihren Symbolen, Bildern und Formeln in der Bedeutung für die Beschreibung und Bearbeitung von Aufgaben und Problemen inner- und außerhalb der Mathematik kennen und begreifen,
- in der Bearbeitung von Fragen und Problemen mit mathematischen Mitteln allgemeine Problemlösefähigkeit erwerben."

Weiter wird die „aktive Auseinandersetzung" mit der Materie gefordert, „selbstständiges Lernen", das „individuelle Lernwege und Lernergebnisse" berücksichtigt, Orientierung an den Lernprozessen und Lernergebnissen der Schülerinnen und Schüler und nicht allein an der Fachsystematik. „Schülerinnen und Schüler sollen auf diese Weise Mathematik als anregendes, nutzbringendes und kreatives Betätigungsfeld erleben […]" (alles [14], S. 9).

Die veränderte, kompetenzorientierte Perspektive auf die Unterrichtsziele hat nicht nur Auswirkungen auf die Unterrichsmethodik. Die Bildungsstandards gewähren dadurch, dass sie lediglich „zentrale Ziele und Konzepte eines Faches" benennen ([13], S. 18.), eine gewisse inhaltliche Freiheit. Diese Freiheit äußert sich beispielsweise darin, dass einige Bundesländer in Kerncurricula verbindliche Inhalte festschreiben, die aber nicht die gesamte Unterrichtszeit füllen, so dass hier individuelle Möglichkeiten für die inhaltliche Ausgestaltung des Unterrichts entstehen.

Die verstärkte Konzentration auf die Förderung von bestimmten Kompetenzen der Schülerinnen und Schüler hat die inhaltliche Diskussion allerdings etwas in den Hintergrund treten lassen. Die in den vergangenen Jahren entwickelten standardorientierten Lehrpläne der einzelnen Bundesländer beschäftigen sich zum Großteil auf der Basis des traditionellen Inhaltskanons mit der Umsetzung der Kompetenzförderung. Moderne Inhalte oder neue Aspekte traditioneller Inhalte kommen eher zu kurz.

Vor diesem Hintergrund soll hier ein Beitrag zur Diskussion über inhaltliche Unterrichtsziele geleistet werden. Insbesondere wird dabei eine Betonung auf den Bezug zur mathematischen Forschung gelegt. Die zentrale Forderung an Mathematikunterricht ist dabei, dass er authentisch in verschiedener Hinsicht sein soll.

Authentischer Mathematikunterricht umfasst:

1. eine authentische (= persönlich ansprechende und herausfordernde, echte mathematische Erfahrungen ermöglichende) Begegnung und Auseinandersetzung der Schülerinnen und Schüler mit dem Stoff,
2 Authentizität (= fachliche Angemessenheit) der im Laufe der unterrichtlichen Erarbeitung verwendeten mathematischen Methoden und
3. authentische (= ein zeitgemäßes Bild von Mathematik vermittelnde) Inhalte in realen oder realistischen Kontexten.

Diese drei Punkte haben insbesondere Einfluss auf zwei Dimensionen von Unterricht: die Tätigkeiten der Schülerinnen und Schüler und die fachlichen Inhalte.

Ziele eines authentischen Unterrichts sind:

- einen Bezug zwischen der persönlichen Erlebniswelt und mathematischem Denken und Handeln herzustellen,
- mathematische Denk- und Arbeitsweisen durch eigenes Tun zu entdecken und kennenzulernen,
- das individuelle mathematische Handlungsrepertoire zu erweitern,
- Mathematik als lebendige Wissenschaft in ihren Anwendungen zu erleben,
- einen Einblick in die mathematische Forschung zu bekommen.

Diese Thesen entwickeln die von Alexander Israel Wittenberg (in [20], 1963) und Hans-Joachim Vollrath [18], 2001) ausgearbeiteten Theorien weiter[3]. Vollrath definiert ([18], S. 26): „Ein Unterricht, der zuverlässige Erfahrungen mit Mathematik vermittelt, soll *authentisch* genannt werden.“ Solch ein Unterricht habe drei grundlegende Fragen zu beantworten ([18], S. 26): Was ist Mathematik? Wie entsteht Mathematik? Was kann man mit Mathematik anfangen?

Einen ähnlichen Ansatz gibt es in den Niederlanden. Dort wird aufbauend auf den Theorien Hans Freudenthals, der Mathematik als eine menschliche Tätigkeit hervorhob (im Gegensatz zur Mathematik als fertiges, zu lernendes Produkt), die „Realistic Mathematics Education“ (RME) seit den 70er Jahren fortentwickelt[4]. Dabei steht „realistic“ nicht unbedingt für realitätsgetreue Anwendungen, sondern bezieht sich, ebenso wie in der Theorie des authentischen Mathematikunterrichts, vor allem auf die Art der Auseinandersetzung der Schülerinnen und Schüler mit den Inhalten.

Bereits in den frühen 60er Jahren machte Alexander Israel Wittenberg sich für einen (damals noch nicht so benannten) authentischen Mathematikunterricht stark ([20], S. 50/51):

> „Im Unterricht muss sich für den Schüler eine *gültige Begegnung* mit der Mathematik, mit deren Tragweite, mit deren Beziehungsreichtum vollziehen; es muß ihm am Elementaren ein echtes Erlebnis dieser Wissenschaft erschlossen werden. Der Unterricht muß dem gerecht werden, *was Mathematik wirklich ist*. Diese Zielrichtung muss die Auseinandersetzung mit der konkreten Gestaltung des Unterrichts leiten.“

Seine Forderungen beziehen sich also nicht nur auf eine bestimmte Methodik oder bestimmte Inhalte, sondern auf beides zugleich, was diesen Ansatz gegenüber vielen anderen auszeichnet, die entweder vorwiegend die Methodik oder vorwiegend die Inhalte bzw. die Sequenzierung der Inhalte im Blick haben.

Auch Freudenthal plädiert für eine ähnliche Ausrichtung des Unterrichts, wenn er schreibt ([5], S. 126): „[…] wie die Struktur im Großen der zu unterrichtenden Mathematik zu verstehen wäre: Sie ist nicht starres Gerüst, sondern sie entsteht und vergeht mit der sich im Lehrprozess entwickelnden Mathematik. […]. Das im Großen Strukturierende soll […] erlebte Wirklichkeit sein; nur so konnten wir beziehungsvolle Mathematik unterrichten; nur so konnten wir sicher sein, daß der Schüler sich die Mathematik, die er lernt, einverleibt; nur so konnte die Anwendbarkeit der gelernten Mathematik gewährleistet werden.“

Authentischer Mathematikunterricht bedeutet, authentische Erfahrungen mit mathematischen Fragen, Inhalten und Methoden zu ermöglichen, und zwar anhand von „authentischer Mathematik". Damit ist gemeint, für den Unterricht Inhalte auszuwählen, die widerspiegeln, was heute (aber nicht nur heute) die Wissenschaft Mathematik ausmacht. Aktuelle Forschungsrichtungen und Anwendungen sind ebenso einzubeziehen wie bewährte Anwendungsthemen und klassische Inhalte, die dem mathematischen Basiswissen zuzuordnen sind. Keinesfalls kann „authentisch" bedeuten, stets nur mit realen Daten zu arbeiten. Die Datenmengen sind meist viel zu groß für eine unterrichtliche Behandlung, abgesehen davon, dass man sie in vielen Fällen gar nicht von den Unternehmen erhalten kann. Dies trifft auch auf einige der eingangs genannten Anwendungsbeispiele zu. Sie müssen vereinfacht werden, behalten aber ihre Authentizität, indem sie problemorientiert aufbereitet werden und somit zwar häufig nicht mit realen Daten, aber dennoch in einem realistischen Kontext von den Schülerinnen und Schülern bearbeitet werden.

3 Unterricht über Wegeoptimierung

Die von uns gewählten „klassischen" Themen der kombinatorischen Optimierung, wie das Kürzeste-Wege-Problem, das Travelling-Salesman-Problem oder das Chinesische-Postboten-Problem lassen sich in einem problemorientierten erforschenden Unterricht erarbeiten, wie zahlreiche Unterrichtsversuche in verschiedenen Schulen und Klassenstufen gezeigt haben.[5] Die initiale Fragestellung ist kurz und sofort verständlich, das Arbeitsmaterial leicht zu beschaffen. Spezielle mathematische Vorkenntnisse sind für die Erarbeitung nicht notwendig, da das benötigte Fachwissen im Rahmen des Problemlöseprozesses aufgebaut werden kann und soll.

Weil eine einzige Frage, z. B. „Wie komme ich optimal zum Ziel?", ausreicht, um das Thema sehr umfassend zu erschließen, kann hier auch gut mit Lerntagebüchern gearbeitet werden.[6] Als Unterrichtsmaterial dienen U-Bahnstreckennetze oder Stadtplanausschnitte oder nach einem Erkundungsausflug erstellte schematische Pläne von Bahnhöfen o. Ä.

Der Unterricht kann so gestaltet werden, dass zunächst der Prozess der mathematischen Modellierung im Vordergrund steht, was hier bedeutet, passende Graphen zu finden und sich für eine bestimmte Modellierungstiefe zu entscheiden (siehe Abb. 1). Auch wenn diese Modellierung auf den ersten Blick vielleicht trivial erscheinen mag, so kann sie, gerade wenn ein Straßennetz mittels eines Graphen modelliert werden soll, viele wichtige Aspekte des Modellierungsprozesses bewusst machen. Insbesondere der Aspekt, dass Modellieren bedeutet, zahlreiche (nicht eindeutig vorgegebene) Entscheidungen zu treffen, kommt hier stark zum Tragen: Werden alle Fahrspuren einer Straße, alle Fahrtrichtungen oder Abbiegemöglichkeiten einzeln berücksichtigt? In dieser Phase des Unterrichts wird zunächst noch gar nicht mit Fachbegriffen der Graphentheorie gearbeitet, wohl aber bereits mit den entsprechenden Objekten.

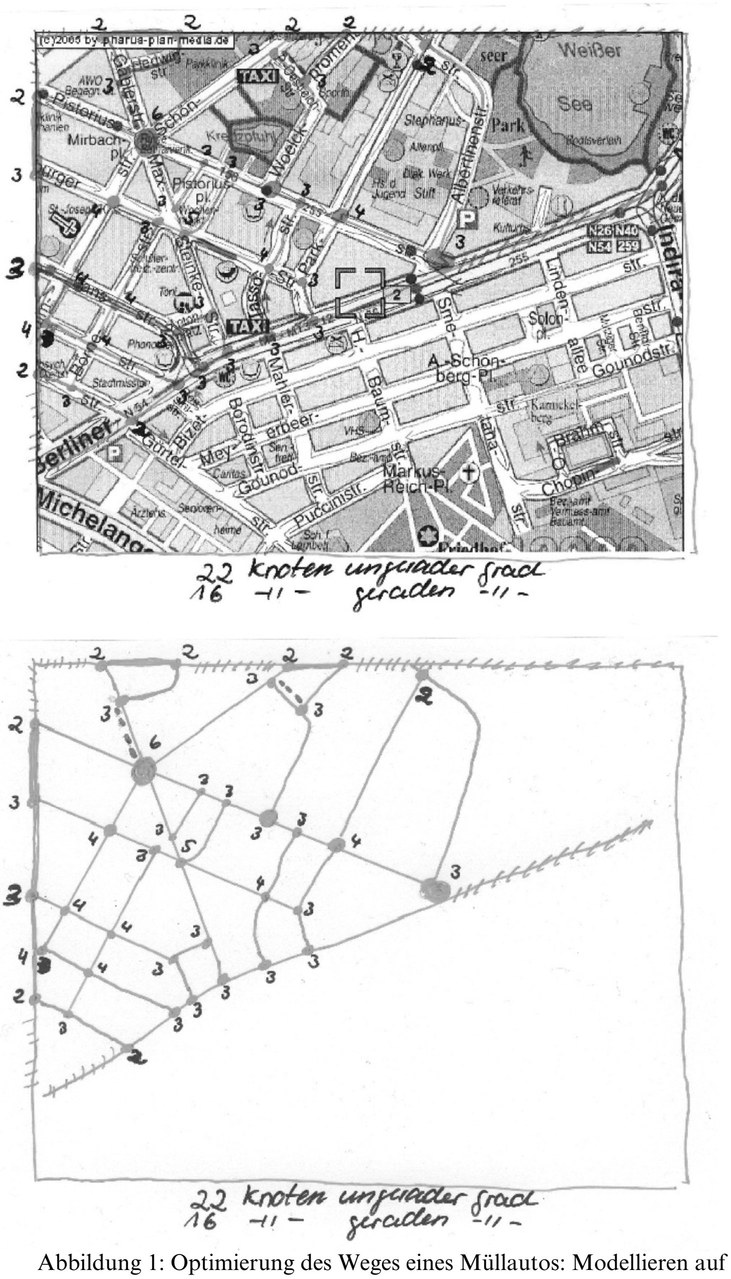

Abbildung 1: Optimierung des Weges eines Müllautos: Modellieren auf Folie hilft beim Übergang vom Stadtplan (Realmodell) zum mathematischen Modell (Schülerin LK 13, Wieland-Herzfelde-Gymnasium Berlin-Weißensee).

Ausgehend von dem zunächst intuitiven und visuell orientierten Umgang mit diesen, von der Realität stark abstrahierten mathematischen Objekten können in einer zweiten Unterrichtsphase präzise Definitionen und Grapheneigenschaften experimentell und selbstständig erarbeitet werden (siehe Abb. 2). Durch die konsequente Problemorientierung des Unterrichts werden keine Definitionen und Begriffe „auf Vorrat" erarbeitet. Sie werden dann thematisiert, wenn sie im Rahmen des Problemlöseprozesses benötigt oder bereits intuitiv verwendet werden. Somit ergibt der konkrete Unterrichtsverlauf erst, welche dies sind. In einer dritten Phase (die nicht unbedingt zeitlich nach der zweiten Phase kommen muss) können die Grundideen für die entsprechenden Graphenalgorithmen erarbeiten werden (ein Beispiel findet sich in Abb. 3). Diese Algorithmen können von den Schülern selbst gefunden und erprobt werden.[7]

Abbildung 2: Skizzenblatt eines Schülers der 11. Klasse (Herder-Oberschule Berlin-Charlottenburg): Auf der Suche nach einem Graphen mit genau fünf Knoten mit ungeradem Grad.

Alle Phasen des Unterrichts werden durch selbstständige Erarbeitung und längere Zeitabschnitte des freien Experimentierens und des Austausches mit den Mitschülern geprägt. Im Wechsel damit gibt es nach Bedarf Plenumsphasen, in denen Erarbeitetes zusammengetragen und gegenseitig abgeglichen wird oder in denen kurze Lehrervorträge zu dem jeweiligen Zeitpunkt benötigte Fakten (z. B. Begriffsnamen oder neue Impulse für die Weiterarbeit) präsentieren. Die Rolle der Lehrerin oder des Lehrers ist dabei meist die eines Moderators des Lern- und Erarbeitungsprozesses, der individuelle Hilfen und Denkanstöße geben kann, aber nicht vorschreibt, wie der Weg zur Lösung auszusehen hat.

Es ist uns bewusst, dass viele der derzeit unterrichtenden Lehrerinnen und Lehrer in ihrem Studium weder Graphentheorie noch Optimierung kennengelernt haben und dass an vielen Universitäten auch heute noch Anwendungsorientierung (oft aus Zeitgründen) eher vernachlässigt wird. Aber die Zeiten ändern sich. Uns sind viele Lehrerinnen und Lehrer sowie Lehramtsstudierende begegnet, die Themen und Herangehensweisen der skizzierten Art mit Begeisterung aufgenommen und umgesetzt haben.[8] Durch Fortbildungsmaßnahmen scheint es uns nach den bisherigen Erfahrungen und Rückmeldungen der Teilnehmerinnen und Teilnehmer durchaus möglich, die für diese Art von Unterricht erforderlichen Kompetenzen zu vermitteln.

Kürzeste Wege mit der U-Bahn

Eigenschaften an den Stationen:

0 := freie Station
a := Anwesenheit an der Station
b := geplante Anfahrt
c := schon besuchte Stationen

Algorithmus:

1. Anfangs hat A (Anfangsstation) die Eigenschaft a und alle anderen Stationen die Eigenschaft 0.
2. Zuerst alle, zu auf a geschalteten, benachbarten Stationen mit der Eigenschaft 0 auf b schalten und die Verbindungen speichern.
3. Dann alle Stationen mit der Eigenschaft a auf c schalten.
4. Danach alle Stationen mit der Eigenschaft b auf a schalten.
5. Falls B (Endstation) die Eigenschaft a hat ist dieser Weg der kürzeste, wenn das nicht der Fall ist Schritte 2. – 5. wiederholen.

Abbildung 3: Eine ausgeklügelte Formulierung der Breitensuche eines Schülers der Klasse 11 (Herder-Oberschule Berlin-Charlottenburg).

4 Didaktische Stoffanalyse

Eine ausführliche didaktische Analyse der Inhalte und die Rückmeldungen aus dem Unterricht haben bestätigt, dass das Themengebiet der kombinatorischen Optimierung sich zur Verwirklichung eines authentischen Mathematikunterrichts gut eignet.

- Es finden sich darin leicht zugängliche Problemstellungen aus der Lebenswelt der Schülerinnen und Schüler, die eine authentische Begegnung mit Mathematik direkt ermöglichen.

- Die spezifischen mathematischen Methoden knüpfen an ein im Alltag erworbenes Handlungsrepertoire an und bleiben durch ihre oftmals algorithmische Struktur auch bei wachsender Komplexität für Schülerinnen und Schüler erfassbar.
- Die algorithmischen Methoden sind handlungsorientiert und können von den Schülerinnen und Schülern eigenständig handelnd entdeckt werden.
- Es lassen sich in sich abgeschlossene Themenkomplexe finden, die nicht hierarchisch aufgebaut sind, so dass ein freies Entdecken durch die Schülerinnen und Schüler ohne vorgegebene Reihenfolge möglich ist. Die Leitlinie des Optimierens bildet aber dennoch einen roten Faden für die Erarbeitung.
- Die grundlegenden Begriffe können von den Schülerinnen und Schülern während ihrer Auseinandersetzung mit der Problemstellung erschlossen werden.
- Die Objekte, mit denen vorwiegend hantiert wird, Graphen, sind in ihrer Darstellung sowohl handlich (durch ihre einfache Definition) als auch äußerst flexibel. Dadurch kann ohne Einschränkungen experimentiert werden. Vermutungen und Beweisideen können so selbständig erarbeitet werden.
- Die Themen haben sowohl einen starken Anwendungsbezug als auch eine direkte Anknüpfung an aktuelle Forschungsthemen. Sie haben Verbindungen zur theoretischen Informatik und verkörpern gleichzeitig ein mathematisches Fachgebiet von wachsender Bedeutung.

Einige ausgewählte Stichpunkte aus der obigen Liste werden im Folgenden näher erläutert.[9]

4.1 Leichte Zugänglichkeit

Die kombinatorische Optimierung zeichnet sich durch eine besonders leichte Zugänglichkeit aus, wie Erfahrungen im Unterricht belegen. Woran kann man diese leichte Zugänglichkeit konkret festmachen, um den Blick auch für andere Themen mit dieser Eigenschaft zu schärfen?

„Betrachtet man das Entstehen von Mathematik, dann sind im Denken des Menschen zunächst gewisse Grundvorstellungen vorhanden, die auf grundlegende mathematische Begriffe führen.“ (Vollrath [18], S. 28) Aus dieser Aussage kann geschlossen werden, dass ein mathematisches Gebiet umso leichter zugänglich ist, je näher seine Grundbegriffe alltäglichen Grundvorstellungen sind.

Viele neue Begriffe, die bei der Arbeit mit Graphen vorkommen, können direkt aus der Anschauung heraus gebildet werden. „Knoten“ und „Kante“ werden zunächst mit den Objekten assoziiert, die man zeichnet. Später erst werden diese Begriffe abstrakter gefasst, wenn es um Datenstrukturen für Graphen geht. „Nachbar“ ist ein ganz natürlicher Begriff für miteinander verbundene Knoten. Hier kommt die alltägliche Grundvorstellung dem mathematischen Begriff sehr nahe. Ebenso greifen „Kantengewicht“ oder „Kantenlänge“ Alltagsvorstellungen auf. Andere Begriffe entstehen aus dem Handeln heraus. Der graphentheoretische Begriff „Kreis“ beispielsweise wird problemlos akzeptiert, wenn er aus der Tätigkeit des Wegefindens und Kantenanmalens heraus gefunden wird. „Kreis“ bedeutet dann: eine Figur, die entsteht, wenn man Kanten nacheinander abläuft oder mit dem Stift abfährt, so dass man am Ende wieder dort ankommt, wo man angefangen hat. Es bleibt dabei noch herauszuarbeiten, dass es sinnvoll ist, keine Kreise zuzulassen, die sich selbst überkreuzen, denn diese lassen sich problemlos in überkreuzungsfreie Kreise zerlegen.

Der Begriff „Weg“ z. B. knüpft schon vom Begriffsnamen her an Alltagsvorstellungen an. Der graphentheoretische Gehalt des Begriffs entspricht auch weitgehend alltäglichen Vorstellungen. Hier kann man insbesondere den Blick für Präzision bei Definitionen schärfen. Darf ein Weg beim Startpunkt enden? Darf ein Weg einen Knoten zweimal berühren (und damit einen Kreis enthalten)? Darf eine Kante gar zweimal oder häufiger durchlaufen werden? Wann ist so etwas aus Anwendungssicht sinnvoll? Soll man eine „saloppe“ Definition eines Weges wählen, die alle diese Fälle enthält oder weitere Begriffe wie einfacher Weg, Pfad, Tour, Kette, Kantenzug etc. einführen, um die unterschiedlichen Formen von „Wegen“ präziser zu fassen? Überlegungen dieser Art helfen ungemein, einen besonderen Wert der Mathematik herauszuarbeiten: Genauigkeit.

Gerade deshalb, weil viele graphentheoretische Begriffsbildungen sehr nahe an den vorhandenen Grundvorstellungen liegen, ist ein mathematisches Präzisieren der Begriffe so gut möglich und auch notwendig. Die Alltagsvorstellung hilft dabei, zunächst überhaupt eine Vorstellung zu entwickeln. Im Sinne eines authentischen Mathematikunterrichts kann an diese Vorstellung angeknüpft werden. Und es kann während der Problembearbeitung immer wieder überprüft werden, ob der Begriff in seiner Bedeutung weiter präzisiert werden muss, ob Einschränkungen oder Erweiterungen nötig sind oder unbemerkt vorausgesetzt werden.

Neben dem „natürlichen“ intuitiven Zugang zu den Grundbegriffen begründet sich die leichte Zugänglichkeit der kombinatorischen Optimierung noch in einigen weiteren Faktoren, beispielsweise: die Nähe der Anwendungen zum Alltag, die Modularität des Stoffes, der hohe Aufforderungscharakter, die Eignung von Graphen zum Experimentieren sowie das algorithmische Arbeiten mit alltagsnahen Grundtätigkeiten (vgl. [12]).

4.2 Anwendungsbezug/Alltagsbezug

Die kombinatorische Optimierung ist aus Anwendungsfragen heraus entstanden und besitzt eine Fülle konkreter Anwendungen. Bereits das Königsberger Brückenproblem von Leonhard Euler zeigt, wie aus einer angewandten Fragestellung heraus mathematische Theorie entwickelt wurde. Viele Anwendungen für die klassischen Themen der kombinatorischen Optimierung wie Routenplanung, Optimierung von Touren der Müllabfuhr oder von Rundreisen sind unmittelbar verständlich, weil sie innerhalb des Erfahrungshorizontes von Schülern liegen. Eine Identifikation mit den Problemstellungen ist möglich, da sie Alltagsfragen aufgreifen, die jeden betreffen. Vermutlich hat jeder schon einmal versucht, einen optimalen Weg zu finden, etwa auf dem Weg zur Schule oder in den Urlaub, um nur zwei Beispiele zu nennen.

Und trotz all dieser Anwendungsfreudigkeit kommt auch die Mathematik selbst nicht zu kurz, wie Anderson im Vorwort seines Buches „A first course in Combinatorial Mathematics" beschreibt ([1], S. vii): „The subject […] still remains an easily accessible area of mathematics, one which is becoming more and more widely used in other disciplines. The days are past when the calculus was thought to be the queen of applicable mathematics. But despite its applications, the subject of this book is genuine mathematics in all its purity […]."

Außermathematische Anwendungen und Innermathematisches, Modellieren und Mathematiktreiben liegen hier nah beieinander. Das macht die Themen so gut zugänglich und so besonders gut geeignet für eine authentische Auseinandersetzung mit Mathematik.

4.3 Optimieren

Allen von uns gewählten Themen liegen Optimierungsfragen zugrunde. Optimierungsprobleme zeichnen sich dadurch aus, dass sie ein klares Ziel vorgeben. Es bedarf keiner Erläuterungen. Herauszufinden, was genau mit „bestmöglich" gemeint ist, ist allerdings Teil des Erarbeitungsprozesses. So schnell wie möglich, so billig wie möglich, so kurz wie möglich: Das sind Zielvorgaben, die im Alltag ständig präsent sind, und die keiner Rechtfertigung bedürfen. Floer ([4], S. 2) beschreibt Optimierungsprozesse als eine Form intellektueller Auseinandersetzung mit der Umwelt.

Viele der klassischen Mathematikaufgaben (nicht nur im Schulunterricht) haben nur eine einzige Lösung. Das ist kein Wunder, denn eine der typischen Fragen der Analysis lautet: Hat das vorliegende Problem eine Lösung und wenn ja, ist sie eindeutig? In der kombinatorischen Optimierung (und in der Optimierung im Allgemeinen) gibt es jedoch in der Regel viele zulässige Lösungen (das sind die Elemente des betrachteten Lösungsraumes, die alle durch die Problemstellung gegebenen Nebenbedingungen erfüllen). Das Ziel ist, unter diesen eine beste (im Sinne der vorliegenden Zielfunktion) herauszufinden. Hat man irgendwie eine zulässige Lösung gefunden, so ist die Frage, ob diese bereits eine beste ist oder ob man sie noch verbessern kann. Fast automatisch führt dies auf folgende Überlegungen. Wie beweist man Optimalität? Und gibt es systematische Methoden zur Verbesserung vorhandener Lösungen? Und schon eröffnen sich neue Unterrichtsthemen: Optimalitätskriterien und die Entwicklung von einfachen Heuristiken, Verbesserungs- und Approximationsmethoden. Das sind lohnende Vertiefungsgebiete, auf die wir hier aber nicht weiter eingehen können.

Beim Erfinden von Algorithmen zur Konstruktion kürzester Wege kommen naheliegende Verbesserungsprozesse vor, etwa, wenn die Breitensuche, die in ungewichteten Graphen beweisbar kürzeste Wege konstruiert, auf gewichtete Graphen angewandt wird. Dieses Verfahren liefert eine zulässige Lösung, nämlich Wege vom Startknoten zu allen anderen Knoten, man stellt aber schnell fest, dass die so konstruierten Wege nicht notwendig optimal sind. Nun kann das Verfahren verändert und anhand der Ergebnisse getestet werden, ob es kürzeste Wege erbringt. So geschieht eine Annäherung an ein Lösungsverfahren, das ein Optimum erzeugt, Schritt für Schritt über verschiedene zulässige Lösungen. Selbstverständlich muss die Korrektheit eines so gefundenen Verfahrens bewiesen werden und reicht die Überprüfung durch „Hingucken“ nicht aus, aber sie hilft, Verbesserungen vorzunehmen und selbständig zu forschen.

Beim Travelling-Salesman-Problem ergibt sich eine andere Situation. Schüler erfinden, wenn man sie einmal zum Experimentieren ermutigt hat, eine Vielzahl von heuristischen Methoden zur Bestimmung „kurzer“ Rundreisen (wie z. B. Nächster-Nachbar-Heuristik, Erweiterungsheuristiken wie Cheapest- oder Nearest-Insert). Bei der konkreten Ausführung am Beispiel fällt ihnen dann auf, dass die konstruierten Rundreisen, die ja weit vom Optimum entfernt sein können, häufig durch einfache Austauschschritte verbessert werden können. Auf diese Weise entwickeln sie Verbesserungsverfahren in der Art wie 2-opt, 3-opt, Knotentausch etc. Überrascht sind sie dann zu erfahren, dass es keine schultauglichen Beweise für die Optimalität einer Rundreise gibt. Hier kann man dann in höheren Klassen z. B. auf die Komplexitätstheorie verweisen (NP-Vollständigkeit etc.).[10]

Ein weiterer Themenkomplex kann in die unterrichtliche Erarbeitung einfließen: der Beweis von Gütegarantien. Hier zeigt sich einmal mehr die Stärke mathematischer Methoden: Das Optimum ist nicht bekannt, aber dennoch kann durch Berechnung oberer oder unterer Schranken für den Optimalwert gezeigt werden, wie weit die gefundene Lösung höchstens davon entfernt ist. Es ist durchaus möglich, im Schulunterricht die Spanning-Tree-Heuristik für das Travelling-Salesman-Problem zu erarbeiten und zu beweisen, dass eine mit dieser Heuristik konstruierte Rundreise höchstens doppelt so lang ist wie eine optimale Tour. Allerdings gilt dies nur dann, wenn die „Entfernungen“ die Dreiecksungleichung erfüllen, was wiederum eine schöne Anwendung dieser Ungleichung außerhalb des üblichen Geometriekontextes ist.

4.4 Modularität des Stoffes

Eine Voraussetzung für einen selbstgesteuerten Lernprozess ist, dass der Stoff verschiedene individuelle Lernwege zulässt. Solch eine Offenheit kann auf verschiedene Weisen realisiert werden. Offene Aufgaben lassen verschiedene Lösungen zu. Modellierungsaufgaben können durch unterschiedliche Modellierungsannahmen auf unterschiedliche Lösungsansätze und Ergebnisse führen. Im Falle der kombinatorischen Optimierung ist besonders die Modularität des Stoffes hervorzuheben. Der Stoff ist nicht hierarchisch gegliedert, sondern bietet die Möglichkeit in verschiedene Richtungen ausgekundschaftet zu werden.

Ausgehend von einer zentralen Problemstellung[11] können die Lernenden in einem Unterricht, der offen gestaltet ist, ihren individuellen Fragen nachgehen. Man kann beispielsweise Algorithmen entwickeln, ohne vorher Graphentheorie betrieben zu haben. Die graphentheoretischen Fragestellungen, die bei der Entwicklung eines Algorithmus eine Rolle spielen, tauchen dann auf, wenn sie benötigt werden, und werden danach bearbeitet. Umgekehrt kann es sein, dass einige Schüler sich zuerst für die Struktur des Problems interessieren und so auf graphentheoretische Sachverhalte stoßen. Andere wiederum vertiefen sich lieber zunächst in Detailfragen der Modellierung.

Diese Offenheit im Erkundungsprozess ermöglicht es, über mehrere Schulstunden hinweg freies Forschen zuzulassen, um dann die Erkundungswege zusammenzutragen, zu vergleichen und jeweils noch nicht Bearbeitetes von anderen zu lernen. Auch in einem Unterricht, in dem die Klasse gemeinsam an einzelnen Problemen arbeitet, kann diese Modularität des Stoffes genutzt werden: Die Lehrperson legt die Reihenfolge der Erarbeitungsschritte nicht im Vorhinein fest, sondern kann auf das Unterrichtsgeschehen reagieren und die Schülerinnen und Schüler den jeweils aktuell diskutierten Fragestellungen nachgehen lassen. Eine Voraussetzung dafür ist eine Offenheit der Lehrperson gegenüber dem Unterrichtsverlauf und gegenüber unerwarteten Fragen und Wendungen im Unterricht. Praktisch sieht es so aus, dass sämtliche Unterrichtsmaterialien für die Lehrperson greifbar sein müssen, um sie bei Bedarf verwenden zu können.

4.5 Alltagsnahe Grundtätigkeiten

Der Umgang mit den Dingen des täglichen Lebens ist meist diskret, nur weniges in der alltäglichen Erfahrung ist wirklich kontinuierlich außer Raum und Zeit. Zählen, Zuordnen, Sortieren, in Beziehung setzen und Entscheiden gehören zu unserem gewohnten Tätigkeitsrepertoire. Das Zählen des Geldes in der Spardose, Aufräumen, Bücher im Bücherregal ordnen und die Überlegung, wer innerhalb der Klasse gerade mit wem befreundet ist, entscheiden, welcher Pullover am besten zur Hose passt, sind Beispiele für diese diskreten Grundtätigkeiten in der Lebenswelt von Schülerinnen und Schülern.

Gehen Schülerinnen und Schüler eines der ausgewählten Probleme selbständig an, so können sie zunächst auf diese gewohnten Tätigkeiten zurückgreifen, ohne dass von vornherein Vorgaben von Lehrerseite aus gemacht werden müssen. Das erste Herangehen an die Problemlösung kann also voraussetzungsfrei (bezüglich unterrichtlicher Inhalte) geschehen. Im Lauf der Problembearbeitung kommen Fragen auf, die die Grenzen der vertrauten Methoden aufzeigen und die nach mathematischen Methoden verlangen.

Im Rahmen der Bearbeitung des chinesischen Postbotenproblems etwa stoßen Schülerinnen und Schüler nach einer gewissen Zeit auf die Problematik der Knotengrade. Sie bemerken, dass ungerade Knotengrade Schwierigkeiten machen und sie begeben sich auf die Suche nach einer allgemeinen Charakterisierung von (von ihnen zu diesem Zeitpunkt nicht so benannten) Eulergraphen. An dieser Stelle geschieht der Übergang vom Experimentieren mit Hilfe bereits bekannter Methoden zum mathematischen Erarbeiten von Resultaten.

An dieser Stelle gibt es eine großartige Gelegenheit, die kreativen Aspekte der Mathematik zu betonen. Mathematik wird gelegentlich als eine Wissenschaft gesehen, die sich mit der (durchaus schwierigen, aber eher roboterhaften) Umformung und Manipulation von Formeln beschäftigt. Ohne Frage sind Fähigkeiten zur geschickten Termumformung zur Erzielung neuer Einsichten große Stärken der Mathematik und müssen im Schulunterricht gelehrt werden. Das entdeckende Experimentieren mit Graphen und die präzise Formulierung darauf basierender Vermutungen ist eine andere Art mathematisch-kreativer Betätigung, und hierbei kann man Schülerinnen und Schülern das Erlebnis vermitteln, dass das experimentelle Entdecken von Eigenschaften, Zusammenhängen, Konzepten und Strukturen eine der Haupttätigkeiten des kreativen Mathematikforschens ist.

Das Besondere der Mathematik ist aber, dass Erkenntnisse durch Beweise verifiziert werden müssen. Die Kreativität, die im Beweisfindungsprozess steckt, ist schwer vermittelbar. Viele der Beweise in der Graphentheorie sind algorithmischer Natur, und nach unseren bisherigen Erfahrungen können Schülerinnen und Schüler durch algorithmische Beweise dieser Art alternative Erfahrungen und Einsichten gewinnen und andere Formen von Präzision erlernen. Ein wunderbares Experiment ist z. B. der Versuch, einen Algorithmus für das Auffinden einer Euler-Tour in einem Eulergraphen zu formulieren und dessen Korrektheit zu beweisen. Selbst Euler ist das in seiner berühmten Arbeit über die Königsberger Brücken nicht gelungen (erst 137 Jahre nach Euler ist von Hierholzer der erste korrekte Beweis veröffentlicht worden).

„Es gibt keine Formel" war an dieser Stelle dann auch ein Schülerinnenkommentar (LK 13), in dem durchaus auch Enttäuschung mitschwang, denn ohne Formel konnte sie sich zunächst keine Methode vorstellen. Die Methode der Verknüpfung von Grundtätigkeiten zu Algorithmen erschließt sich Schülerinnen und Schülern dann aber meist sehr schnell und versetzt sie in die Lage eigene Algorithmen zu entwerfen und (umgangssprachlich) niederzuschreiben. Dass der Begriff „Formel" interpretiert werden kann als ein Werkzeug, das zur Lösung taugt, zeigt die Überschrift eines Schülers (LK 13) über seinen selbst entwickelten Algorithmus: „‚Formel' für eine Euler-Tour [...] (computerfreundlich)".

Die Arbeit mit Graphen eröffnet ein ganz besonderes Experimentierfeld, wie es in der Mathematik selten anzutreffen ist. Die Struktur von Graphen ist so einfach, dass beim Erstellen von eigenen Beispielen kaum Fehler unterlaufen können. Die im gewählten Themenkanon zu betrachtenden Graphen müssen nur sehr wenige Voraussetzungen erfüllen. Gelegentlich werden nur einfache Graphen betrachtet (z. B. beim Satz über das mehrfache Vorkommen von Knotengraden) oder Bäume. Werden bestimmte Eigenschaften gesucht, wie etwa die Existenz einer Eulertour, so dienen als Experimentierbeispiele jegliche zusammenhängenden Graphen. Es werden also stets nur sehr wenige und leicht zu überprüfende Voraussetzungen benötigt, so dass Schülerinnen und Schüler ohne Sorge vor falschen Beispielen selbständig eigene Graphen erfinden können, um Vermutungen zu finden oder bestimmten Ideen nachzugehen.

Gerald A. Goldin sieht in der Möglichkeit, mit einfachen heuristischen Methoden zu arbeiten, die Chance, Frustrationen zu vermeiden oder sogar zu überwinden und durch den Unterricht in diskreter Mathematik Erfolgserlebnisse zu schaffen (Goldin [7], S. 60, Hervorhebung durch d. Verf.): „Anticipating the frustration, and channeling it toward the adoption of better or different problem-solving strategies, is within reach if it is taken as an explicit goal of discrete mathematical instruction. In short, we should set out to develop *the affect of success* through discrete mathematics – the pathways and structures whereby previously unsuccessful students come to feel, **I am really somebody when I do mathematics like this!**"

5 Rückmeldungen von Schülerinnen und Schülern

Abschließend sind einige Kommentare von Schüler/innen der Klassen 8 und 13 zusammengestellt, die stellvertretend sowohl für die insgesamt sehr positiven Reaktionen der Lerngruppen als auch für den Gesamteindruck der beteiligten Lehrpersonen stehen.[12] Diese Einzeläußerungen sind kein statistisch signifikantes Material zur Bewertung des in diesem Artikel skizzierten Ansatzes. Wir halten sie dennoch für aufschlussreich und gerade für interessierte Lehrerinnen und Lehrer für durchaus ermutigend, sich an einen solchen Unterricht zu wagen.Weitere Forschungsarbeiten, die u.a. die aufgestellten Thesen empirisch untersuchen, sind im Gange bzw. in Planung.[13]

- *Wie hat dir das Thema gefallen? (Klasse 8)*
  - Besser als Mathe. Sehr Gut.
- *Was hat dir noch gefallen/nicht gefallen? (Klasse 8)*
  - Gut: Antworten nicht in mundgerechten Häppchen vorgekaut, sondern selber ausprobieren müssen.
  - Dass Diskrete Mathematik noch erforscht wird.
  - Man muss wenig rechnen.
- *Wie hat Ihnen das Thema gefallen? (Klasse 13)*
  - Perfekt! Total beeindruckend. Das Thema hat mich so vereinnahmt, dass ich über Wege auf meinem Duschvorhang nachgedacht habe.
  - […] Man konnte gut frei arbeiten und eigene Ideen entwickeln.
  - Gut, interessant, wirft spannende Aspekte der Mathematik in Verbindung mit der Realität auf.
  - Ich fand das Thema interessant. Es war etwa[s] komplett anderes, als der normale Unterrichtsstoff (Gleichungen, Formeln, Zahlen) [. Ich] […] fand es gut, einen neuen Bereich kennen zu lernen.
  - Interessant, weil es mal etwas anderes war, aber schwer fassbar am Anfang, weil man keine konkreten Anhaltspunkte, keine konkreten Lösungen/Lösungsverfahren hatte. Man konnte gut frei arbeiten und eigene Ideen entwickeln.
- *Hat sich Ihr Bild von Mathematik oder Ihre Einstellung* zur Mathematik durch die Arbeit an dem Thema verändert? Wenn ja, wie? (Klasse 13)
  - Man hat gesehen, dass nicht alles nur konkret auf Formeln zurückzuführen ist. Außerdem hat man mal eine direkte Anwendung von theoretischen mathematischen Problemstellungen erfahren. Mathematiker sind in meinen Augen also nicht mehr die bloßen Theoretiker.
  - Einstellung zu Mathe nicht verändert, aber der Mathe-Horizont hat sich stark erweitert.
  - Wie gesagt, ist dieses Thema nicht nur theoretisch mit Zahlen und Formeln aufgebaut, so dass man mit vielen praktischen Arbeiten und Selbstversuche[n] auf eine Lösung stößt. Ich hätte mich ohne diese Unterrichtsstunden nie mit dem Thema beschäftigt und hätte auch nie gedacht, dass das was mit Mathe zu tun hat.

– Es war ein gutes Beispiel für die Nützlichkeit der Mathematik im Alltag, selbst und vor allem bei komplizierten Problematiken wie […] [der] Optimierung von Wegen.

Diese Antworten zeigen, dass die eingangs formulierten Ziele mit einem solchen Unterricht durchaus erreicht werden können. Immer wieder betonen Schülerinnen und Schüler die Andersartigkeit der diskreten Mathematik im Vergleich zur klassischen Schulmathematik. Ein Kind aus einer 5. Klasse[14] formulierte dies am Ende einer Projektwoche zum Thema „Optimale Wege“ besonders pointiert:

Was hast du in dieser Woche dazugelernt?
„Dass Mathematik manchmal kein[e] Mathematik ist.“

6 Schlussbemerkung

Die hier vorgestellten Themen haben in Berlin Eingang in den Rahmenlehrplan der Sekundarstufe I gefunden[15] und müssen sich dort natürlich nun bewähren. Wir haben in diesem Artikel auf Ausführungen zur Curriculumsdiskussion verzichtet. Unsere Beobachtung, auch im Rahmen von etlichen Lehrerfortbildungen (bundesweit), ist aber, dass es eine ganze Reihe von Lehrkräften gibt, die es möglich machen, unabhängig von den in den Lehrplänen festgeschriebenen Inhalten Unterrichtseinheiten zur kombinatorischen Optimierung durchführen zu können. Sie füllen damit die durch die Bildungsstandards geöffneten inhaltlichen Freiräume. Zudem fügt sich die Thematik hinsichtlich der zu erwerbenden prozessbezogenen Kompetenzen nahtlos in das bestehende Curriculum ein. Sie ist voraussetzungslos auch in tieferen Klassenstufen behandelbar und bietet viele Möglichkeiten zur Förderung des Erwerbs der Kompetenzen „Modellieren“, „Problemlösen“, „mathematische Darstellungen verwenden“, „Argumentieren“ und „Kommunizieren“.

Anmerkungen

1 Für die Umsetzung und Erprobung ist im Rahmen der Unterrichtsentwicklung und -erforschung noch einige Arbeit zu leisten.
2 Vgl. hierzu die Fragebogenantworten von Schüler/innen in Kapitel 7 in [12] bzw. auszugsweise in Abschnitt 5 dieses Artikels, etwa die Aussage, der Unterricht sei „besser als Mathe“ gewesen.
3 Bei einigen anderen Autoren findet man den Begriff „authentisch“ ebenfalls: z. B. in: Büchter/Leuders [3], Habdank-Eichelsbacher/H. N. Jahnke [8], Hußmann/Leuders [9], Th. Jahnke [11].
4 Vgl. Van den Heuvel-Panhuizen [16], [17] und Westermann [19].
5 Wildermuth-Gymnasium Tübingen, Kl. 8 (2002), Geschwister-Scholl-Schule Tübingen, Kl. 9 (2002), Herder-Oberschule Berlin, Profilkurs 11 (2003, 2004), Romain-Rolland-Gymnasium Berlin, Profilkurs 11 (2003), Sommerschule Blossin, Kl. 12/13 (2004), Wieland-Herzfelde-Gymnasium Berlin, LK13 (2005), Wartburg-Grundschule Berlin, Kl. 5 und 6 (2007, 2008). Unterrichtsdauer: jeweils zwischen 8 und 16 Schulstunden bzw. 5 Tage Projektwoche (Blossin bzw. Wartburg-Grundschule). Auswertung durch Klassenarbeiten und Fragebögen.

6 Zur Theorie der Lerntagebücher vgl. [6].
7 Konkrete Unterrichtsideen dafür finden sich in [12].
8 Z. B. bei Fortbildungen im Rahmen des Telekom-Stiftungs-Projekts Mathematik Anders Machen (L-W gemeinsam mit Thilo Steinkrauß).
9 Eine ausführliche Ausarbeitung dieser Analyse findet sich in [12].
10 Eine elementare Einführung in die genannten Themen findet sich in [10] in den Kapiteln 4 und 9.
11 Vgl. z. B. die jeweiligen Anfänge der Buchkapitel in [10].
12 Es nahmen insgesamt über 140 Schülerinnen und Schülern an den Unterrichtsversuchen (s. o.) teil. Die abgedruckten Kommentare sind Fragebögen zu den Unterrichtsversuchen am Wildermuth-Gymnasium Tübingen, 2002, und am Wieland-Herzfelde-Gymnasium Berlin-Weißensee, 2005, entnommen.
13 Promotionsprojekt Benjamin Rawe (Hochschule Vechta), seit Oktober 2008.
14 Fragebogenantwort Februar 2008, Wartburg-Grundschule Berlin-Moabit.
15 [15], Module W1 7/8 und W1 9/10.

Literatur

[1] Ian Anderson. *A first course in Combinatorial Mathematics.* Oxford University Press, New York, 2. Auflage, 1989.
[2] Katja Biermann, Martin Grötschel und Brigitte Lutz-Westphal. *Besser als Mathe! Angewandte Mathematik aus dem Matheon zum Mitmachen.* Vieweg, Wiesbaden/Braunschweig, erscheint 2009.
[3] Andreas Buchter und Timo Leuders. *Mathematikaufgaben selbst entwickeln. Lernen fördern – Leistung überprüfen.* Cornelsen Scriptor, Berlin, 2005.
[4] Jürgen Floer. Optimierung von Netzwerken – Kürzeste Wege und größte Flüsse. *Praxis der Mathematik* 1, No. 19, 1–6, 40-44 (1977).
[5] Hans Freudenthal. *Mathematik als pädagogische Aufgabe. Band 1.* Klett, Stuttgart, 1. Auflage, 1973.
[6] Peter Gallin und Urs Ruf. *Dialogisches Lernen in Sprache und Mathematik. Band 1: Austausch unter Ungleichen: Grundzüge einer interaktiven und fächerübergreifenden Didaktik.* Kallmeyer, Seelze-Velber, 1998.
[7] Gerald A. Goldin. Problem Solving Heuristics, Affect, and Discrete Mathematics. *Zentralblatt fur Didaktik der Mathematik* 36, No. 2, 56–60 (2004).
[8] Britta Habdank-Eichelsbacher und Hans Niels Jahnke. Authentische Erfahrungen mit Mathematik durch historische Quellen, am 28.3.2006 geladen von: `http://www.uni-essen.de/didmath/texte/jahnke/hnj_pdf/tunnel.pdf`.
[9] Stephan Hußmann und Timo Leuders. Mathematik treiben, authentisch und diskret – eine Perspektive fur die Lehrerausbildung, *in: Beiträge zum Mathematikunterricht 2006.* Franzbecker, Hildesheim, 2006.
[10] Stephan Hußmann und Brigitte Lutz-Westphal. *Kombinatorische Optimierung erleben. In Studium und Unterricht.* Vieweg, Wiesbaden/Braunschweig, 2007.
[11] Thomas Jahnke. Zur Authentizitat von Mathematikaufgaben. am 29.3.2006 geladen von `http://www.math.uni-potsdam.de/prof/odidaktik/a_mita/aa/Publ/vortr`.
[12] Brigitte Lutz-Westphal. *Kombinatorische Optimierung – Inhalte und Methoden fur einen authentischen Mathematikunterricht.* Dissertation, Technische Universität Berlin, 2006.
[13] Sekretariat der Ständigen Konferenz der Kultusminister der Länder in der Bundesrepublik Deutschland, Hg. *Bildungsstandards der Kultusministerkonferenz. Erläuterungen zur Konzeption und Entwickung.* Veröffentlichungen der Kultusministerkonferenz. Wolters Kluwer Deutschland, München, 2004.

[14] Sekretariat der Ständigen Konferenz der Kultusminister der Länder in der Bundesrepublik Deutschland, Hg. *Bildungsstandards im Fach Mathematik für den Mittleren Schulabschluss.* Beschlüsse der Kultusministerkonferenz. Wolters Kluwer Deutschland, München, 2004.

[15] Senatsverwaltung fur Bildung, Jugend und Sport Berlin, Hg. *Rahmenlehrplan für die Sekundarstufe I. Jahrgangsstufe 7–10, Hauptschule, Realschule, Gesamtschule Gymnasium.* Berlin, 2006.

[16] Marja Van den Heuvel-Panhuizen. Realistic Mathematics Education. Work in progress. am 5.4.2006 geladen von `http://www.fi.uu.nl/en/rme/`, 1998.

[17] Marja Van den Heuvel-Panhuizen. Mathematics education in the Netherlands: A guided tour. am 5.4.2006 geladen von `http://www.fi.uu.nl/en/rme/TOURdef+ref.pdf`, 2000.

[18] Hans-Joachim Vollrath. *Grundlagen des Mathematikunterrichts in der Sekundarstufe.* Spektrum Akademischer Verlag, Heidelberg, Berlin, 2001.

[19] Bernd Westermann. Anwendungen und Modellbildung. *Mathematik-Didaktik. Praxishandbuch für die Sekundarstufe I und II* (Timo Leuders, Hg.). Cornelsen Scriptor, Berlin, 2003.

[20] Alexander Israel Wittenberg. *Bildung und Mathematik. Mathematik als exemplarisches Gymnasialfach.* Klett, Stuttgart, 1963.

Arithmetic of K3 surfaces

Matthias Schütt

Abstract

- Mathematics Subject Classification: 14J28; 11F11, 11G15, 11G25, 14G05, 14G10
- Keywords and Phrases: K3 surface, modular form, complex multiplication, Picard number, Tate conjecture, rational point, potential density

We review recent developments in the arithmetic of K3 surfaces. Our focus lies on aspects of modularity, Picard number and rational points. Throughout we emphasise connections to geometry.

Eingegangen: 11. 07. 2008

Department of Mathematical Sciences, University of Copenhagen,
Universitetspark 5, DK-2100 Copenhagen, Denmark, mschuett@math.ku.dk

DMV
JAHRESBERICHT
DER DMV

1 Introduction

K3 surfaces have established themselves as a connection between various areas of mathematics, as diverse as algebraic geometry, differential geometry, dynamics, number theory and string theory. In this survey, we will focus on arithmetic aspects and investigate their deep interplay with geometry.

The arithmetic of curves is fairly well understood, but in higher dimensions much less is known. It is this context which makes us turn to K3 surfaces. In 2004, Swinnerton-Dyer stated that "K3 surfaces are the simplest kind of variety about whose number-theoretic properties very little is known" [43].

Since 2004, there have been interesting developments in the arithmetic of K3 surfaces which this paper will review. Namely we will be concerned with the following topics:

1. Modularity and singular K3 surfaces;
2. Picard number and Galois action on the Néron-Severi group;
3. Rational points and potential density.

The survey requires only very basic knowledge of algebraic geometry and number theory. The concepts involved will be introduced whenever they are needed, so that the motivation becomes clear. Throughout the paper, we will study examples whenever they are easily available. Proofs will only be sketched to give an idea of the methods and techniques. We will, however, always include a reference for further reading. After a brief introduction to K3 surfaces, we will study the topics in the above order.

Many of the results and ideas that we explain can be formulated over arbitrary number fields or finite fields. For simplicity we will mostly restrict to the cases of $\mathbb{Q}$ and $\mathbb{F}_p$.

2 K3 surfaces

A. Weil introduced the notion of K3 surface for any (smooth) surface that carries the differentiable structure of a smooth quartic surface in $\mathbb{P}^3$. Abstractly a K3 surface is a two-dimensional Calabi-Yau manifold:

Definition 1 *A K3 surface is a smooth irreducible surface X with trivial canonical bundle and vanishing first cohomology:*

$$\omega_X \cong \mathcal{O}_X, \quad h^1(X, \mathcal{O}_X) = 0.$$

The definition allows non-algebraic K3 surfaces. By a theorem of Siu [40], every complex K3 surface is Kähler. Any two K3 surfaces are deformation equivalent and thus diffeomorphic. Hence Weil's notion and the above definition coincide. In this survey, we will only consider algebraic K3 surfaces. For details, the reader could consult [2].

Example 2 *A smooth quartic surface in* $\mathbb{P}^3$ *is K3. Here we can also allow isolated ADE-singularities. Then the minimal resolution is K3.*

Quartic surfaces in $\mathbb{P}^3$ have 19-dimensional moduli. This gives one of countably many components of the moduli space of algebraic K3 surfaces. The component is determined by the polarisation $H^2 = 4$ where H is an ample line bundle, i.e. here H corresponds to the hyperplane section.

By Serre duality, a K3 surface X has Euler characteristic $\chi(\mathcal{O}_X) = 2$. We can compute the Euler number with Noether's formula:

$$e(X) = 12\,\chi(\mathcal{O}_X) - K_X^2 = 24.$$

Since $e(X)$ can also be written as alternating sum of Betti numbers, we obtain the Hodge diamond of a K3 surface with entries $h^i(X, \Omega_X^j)$:

$$\begin{array}{ccccc} & & 1 & & \\ & 0 & & 0 & \\ 1 & & 20 & & 1 \\ & 0 & & 0 & \\ & & 1 & & \end{array}$$

The terminology K3 surface supposedly refers to Kähler, Kodaira and Kummer (and to the mountain K2). Kummer surfaces are relevant for many arithmetic aspects of K3 surfaces. Later we will also use elliptic K3 surfaces.

Example 3 (Kummer sufaces) *Let A be an abelian surface. Denote the involution by ι. Then the quotient A/ι has 16 A_1 singularities corresponding to the 2-division points on A. The minimal resolution is a K3 surface, called Kummer surface $Km(A)$.*

3 Modularity

As Calabi-Yau varieties, K3 surfaces are two-dimensional analogues of elliptic curves. In the arithmetic setting, the question of modularity comes to mind. For elliptic curves over $\mathbb{Q}$, modularity is the subject of the Taniyama-Shimura-Weil conjecture as proven by Wiles, Taylor et al. [49], [46], [4].

Theorem 4 (Taniyama-Shimura-Weil conjecture) *Any elliptic curve E over $\mathbb{Q}$ is modular: There is a newform f of weight 2 with Fourier coefficients a_p such that for almost all p*

$$\#E(\mathbb{F}_p) = 1 - a_p + p. \tag{1}$$

A newform is a holomorphic function on the upper half plane in $\mathbb{C}$, which satisfies a certain transformation law and is an eigenform of the algebra of Hecke operators. We shall only use that a newform admits a normalised Fourier expansion

$$\sum_{n\geq 1} a_n q^n, \quad q = e^{2\pi i\tau}, \quad \tau \in \mathbb{C}, \ \mathrm{im}(\tau) > 0$$

such that the Fourier coefficients are multiplicative. The complexity of a newform is measured by the level $N \in \mathbb{N}$. Geometrically, the primes dividing the level appear as bad primes for any associated smooth projective variety over $\mathbb{Q}$.

To generalise modularity of elliptic curves over $\mathbb{Q}$, we interpret (1) through the Lefschetz fixed point formula. Here we reduce the defining equation of E modulo some prime p. For almost all p, this defines a smooth elliptic curve E_p. E_p is endowed with the Frobenius morphism Frob_p which raises coordinates to their p-th powers. Then the set of $\mathbb{F}_p$-rational points is identified as

$$E_p(\mathbb{F}_p) = \text{Fix}(\text{Frob}_p).$$

The induced action Frob_p^* on the cohomology of E_p is subject to the Weil conjectures (proven in generality by Deligne and Dwork). Here one works with ℓ-adic étale cohomology at some prime $\ell \neq p$ which compares nicely between E and E_p (or strictly speaking between the base extensions to an algebraic closure). In the following we will drop the subscripts for simplicity. The Lefschetz fixed point formula yields

$$\#E(\mathbb{F}_p) = \sum_{i=0}^{2} (-1)^i \, \text{trace}(\text{Frob}_p^*; \; H^i(E)).$$

Then (1) is equivalent to $a_p = \text{trace}(\text{Frob}_p^*; \; H^1(E))$.

The above ideas generalise directly to any smooth projective variety and its good reductions. For a K3 surface X over $\mathbb{Q}$ and a prime of good reduction p, we obtain

$$\#X(\mathbb{F}_p) = 1 + \text{trace}(\text{Frob}_p^*; \; H^2(X)) + p^2. \tag{2}$$

For modularity we have newforms with Fourier coefficients $a_p \in \mathbb{Z}$ in mind. In consequence, modularity requires two-dimensional Galois representations (like those associated to $H^1(E)$). However, $h^2(X) = 22$ for a K3 surface. Here we distinguish that $H^2(X)$ contains both algebraic and transcendental cycles.

4 Algebraic and transcendental cycles

The divisors on any smooth projective surface up to algebraic equivalence form the Néron-Severi group $\text{NS}(X)$. The rank of $\text{NS}(X)$ is called the Picard number $\rho(X)$. Here we can consider X and $\text{NS}(X)$ over any given base field. Unless specified otherwise, we will be concerned with the geometric Néron-Severi group of the base change $\bar{X}$ to an algebraic closure of the base field – so that $\text{NS}(X)$ is independent of the chosen model. On a K3 surface, algebraic and numerical equivalence coincide; hence it suffices to compute intersection numbers.

$\text{NS}(X)$ is always generated by divisor classes that are defined over a finite extension of the base field. Hence the absolute Galois group acts by permutations. It follows that all eigenvalues of Frob_p^* are roots of unity. The eigenvalues can be computed explicitly from generators of $\text{NS}(X)$.

On a complex K3 surface X, cup-product endows $H^2(X, \mathbb{Z})$ with the structure of the unique even unimodular lattice of signature $(3, 19)$. Here $\mathrm{NS}(X)$ embeds primitively with signature $(1, \rho(X) - 1)$. In particular, $\rho(X) \leq 20$ which also follows from Lefschetz' theorem. We define the transcendental lattice $T(X)$ as

$$T(X) = \mathrm{NS}(X)^{\perp} \subset H^2(X, \mathbb{Z}).$$

If X is defined over some number field, the lattices of algebraic and transcendental cycles give rise to Galois representations of dimension $\rho(X)$ resp. $22 - \rho(X)$. Modularity requires a two-dimensional Galois representation that does not factor through a finite representation like $\mathrm{NS}(X)$. Hence we need $\rho(X) = 20$.

Example 5 (Fermat quartic) *Consider the Fermat quartic surface*

$$S = \{x_0^4 + x_1^4 + x_2^4 + x_4^4 = 0\} \subset \mathbb{P}^3.$$

S contains 48 lines where $x_0^4 + x_i^4 = x_j^4 + x_k^4 = 0$, $\{i, j, k\} = \{1, 2, 3\}$. Their intersection matrix has rank 20. Hence $\rho(S) = 20$ if S is considered over $\mathbb{C}$.

5 Singular K3 surfaces

Complex K3 surfaces of Picard number $\rho = 20$ are called singular (in the sense of exceptional, but not non-smooth). In many ways, they behave like elliptic curves with complex multiplication (CM), i.e. elliptic curves E with End $(E) \supsetneqq \mathbb{Z}$.

CM elliptic curves are fully described in terms of class group theory since $\mathrm{End}(E)$ is always an order in an imaginary-quadratic field. Analytically, this identification will be exhibited explicitly in (4). For CM elliptic curves, analytic and algebraic theory show a particularly nice interplay. Deuring used this to prove that CM elliptic curves are associated to certain Hecke characters. This in fact implies modularity for the 13 CM elliptic curves over $\mathbb{Q}$. The j-invariants of CM elliptic curves are often called singular – thus the terminology for K3 surfaces.

For a singular K3 surface X, the relation to class group theory becomes evident when we express $T(X)$ through its intersection form

$$Q(X) = \begin{pmatrix} 2a & b \\ b & 2c \end{pmatrix}. \tag{3}$$

The quadratic form $Q(X)$ is unique up to conjugation in $SL_2(\mathbb{Z})$. We denote its discriminant by $d = b^2 - 4ac < 0$.

Theorem 6 (Pjateckiĭ-Šapiro – Šafarevič, Shioda – Inose) *The map $X \mapsto Q(X)$ is a bijection from isomorphism classes of singular K3 surfaces to even integral positive-definite binary quadratic forms up to conjugation in $SL_2(\mathbb{Z})$.*

The injectivity follows from the Torelli theorem [26]. To prove the surjectivity, Shioda and Inose [38] start with an abelian surface A with $\rho(A) = 4$ and given quadratic form Q on the transcendental lattice $T(A)$. By earlier work of Shioda-Mitani [39], A is isomorphic to the product of two isogenous elliptic curves E, E' with CM in $K = \mathbb{Q}(\sqrt{d})$. As complex tori $E_\tau = (\mathbb{Z} + \tau\mathbb{Z})$ in terms of the coefficients of Q as in (3), we have

$$E = E_\tau, \quad \tau = \frac{-b+\sqrt{d}}{2a}, \qquad E' = E_{\tau'}, \quad \tau' = \frac{b+\sqrt{d}}{2}. \tag{4}$$

It follows that the Kummer surface of A is a singular K3 surface with intersection form $2Q$. To obtain a K3 surface with the original intersection form Q, Shioda-Inose exhibit a particular elliptic fibration on $\mathrm{Km}(A)$. Then a suitable quadratic base change of the base curve is again K3 with $\rho = 20$ and intersection form Q. The corresponding deck transformation is a Nikulin involution, i.e. an involution with eight isolated fixed points that leaves the holomorphic 2-form invariant. This construction – Kummer quotient and Nikulin involution yielding the same K3 surface – is often called Shioda-Inose structure. By work of Morrison [25], it also applies to certain K3 surfaces of Picard number $\rho \geq 17$.

$$\begin{array}{ccccc} A & & & & X \\ & \searrow & & \swarrow & \\ & & \mathrm{Km}(A) & & \end{array}$$

The Shioda-Inose structure implies that any singular K3 surface can be defined over a number field: By class field theory, E and E' can be defined over the ring class field $H(d)$ of discriminant d. The Kummer quotient respects the base field, and the elliptic fibrations are defined over some finite extension. An explicit model for X over $H(d)$ was given in [31]. We will see in section 11 how $H(d)$ relates to $\mathrm{NS}(X)$.

Example (Fermat quartic cont'd) *On the Fermat quartic surface, one can easily single out 20 lines whose intersection form has determinant* -64. *It was a long standing conjecture that these lines generate* $\mathrm{NS}(S)$ *in characteristic zero. The first complete proof goes back to Inose [16]. He showed that* $T(S)$ *is four-divisible as an even integral lattice. The only possibility with discriminant dividing* -64 *is*

$$Q(S) = \begin{pmatrix} 8 & 0 \\ 0 & 8 \end{pmatrix}.$$

By (4), we also obtain two further models for S: through the Shioda-Inose construction for E_i, E_{4i} *or as Kummer surface of* $E_i \times E_{2i}$. *Note that the latter model is defined over* $\mathbb{Q}$ *as both elliptic curves are, while the former lives only over* $\mathbb{Q}(\sqrt{2})$, *the real subfield of* $H(-64) = \mathbb{Q}(i, \sqrt{2})$.

Over some extension of the base field (where all the above maps and generators of $\mathrm{NS}(X)$ are defined), the Shioda-Inose structure determines the zeta function of X. The essential factor corresponding to $T(X)$ comes from the Hecke character of the elliptic curves.

6 Modularity of singular K3 surfaces over $\mathbb{Q}$

For a singular K3 surface X over a number field, the transcendental lattice $T(X)$ gives rise to a system of two-dimensional Galois representations. We have seen that over some extension of the base field, these Galois representations are related to Hecke characters. If X is defined over $\mathbb{Q}$, modularity was proven by Livné based on a general result about motives with CM [20].

Theorem 8 [Livné] *Let X be a singular K3 surface over $\mathbb{Q}$ with discriminant d. Then X is modular. There is a newform f of weight 3 with CM by $\mathbb{Q}(\sqrt{d})$ and Fourier coefficients a_p such that for almost all p*

$$\operatorname{trace}(Frob_p^*;\ T(X)) = a_p. \tag{5}$$

Let $K = \mathbb{Q}(\sqrt{d})$. The CM property is encoded in the Fourier coefficients at the good primes:

$$a_p = \begin{cases} \pm 2\,(x^2 - d\,y^2), & \text{if } p \text{ splits in } K \text{ and } p^2 = x^2 + dy^2 (x, y \in \mathbb{Q}^*); \\ 0, & \text{if } p \text{ is inert in } K. \end{cases} \tag{6}$$

Example 9 (Fermat quartic cont'd) *The associated newform is sensitive to the precise model over $\mathbb{Q}$. For instance, the Fermat quartic S as given in Ex. 5 is associated to the unique newform with CM in $\mathbb{Q}(\sqrt{-1})$ and Fourier coefficients*

$$a_p = 2\,(x^2 - 4\,y^2) \quad \text{if } p^2 = x^2 + 4\,y^2 \ (x, y \in \mathbb{N}).$$

This is the newform of weight 3 and level 16 *in [30, Tab. 1]. Other models of S over $\mathbb{Q}$ (as in (14)) lead to twists of the newform, cf. the discussion below.*

Mazur and van Straten independently asked the converse question whether every such newform of weight 3 is associated to a singular K3 surface over $\mathbb{Q}$.

We are in the opposite situation than for elliptic curves: A classical construction by Eichler and Shimura associates an elliptic curve over $\mathbb{Q}$ to any newform of weight two with Fourier coefficients $a_p \in \mathbb{Z}$. Meanwhile modularity was open for a long time. For singular K3 surfaces over $\mathbb{Q}$ we know modularity by Thm. 8. However, the only known geometric correspondence for newforms of higher weight is through fibre products of universal elliptic curves due to Deligne [6]. Weight 3 leads to elliptic modular surfaces [33]. Only for a few newforms, modular elliptic surfaces are K3.

In weight 3, the geometric realisation problem is nonetheless approachable because any newform with Fourier coefficients $a_p \in \mathbb{Z}$ has CM by a result of Ribet [28]. Up to twisting, these newforms are in bijective correspondence with imaginary-quadratic fields whose class group is only two-torsion by the classification in [30]. Here twisting refers to modifying the Fourier coefficients by a Dirichlet character χ:

$$f = \sum_{n \geq 1} a_n q^n \quad \mapsto \quad f \otimes \chi = \sum_{n \geq 1} a_n \chi(n) q^n.$$

The twist is a newform of possibly different level. Twists can be realised geometrically.

We have mentioned this for the Fermat surface in Ex. 9. It is also evident on double covers such as elliptic curves and surfaces: Let $c \in \mathbb{Q}^*$ squarefree and $g \in \mathbb{Q}[x_1, \ldots, x_n]$. Then the following double covers are isomorphic over $\mathbb{Q}(\sqrt{c})$:

$$\{y^2 = g(x_1, \ldots, x_n)\} \mapsto \{c\,y^2 = g(x_1, \ldots, x_n)\}. \tag{7}$$

On the level of modular forms, this corresponds to the twist by the Jacobi symbol $(\frac{c}{\cdot})$.

There are 65 known imaginary-quadratic fields with class group exponent two. By Weinberger [48], there is at most one more such field. Under a natural assumption on Siegel-Landau zeroes of L-series of odd real Dirichlet characters (which would follow from the extended Riemann hypothesis), the known list is complete.

Theorem 10 (Elkies, Schütt) *Every known newform of weight 3 with Fourier coefficients $a_p \in \mathbb{Z}$ is associated to a singular K3 surface over $\mathbb{Q}$.*

The proof of Thm. 10 is constructive. For each of the 65 known imaginary-quadratic fields with class group exponent two, it gives a singular K3 surface over $\mathbb{Q}$ [11]. Each surface admits an elliptic fibration over $\mathbb{Q}$. Hence we can realise all quadratic twists by (7). The next section gives further details of the construction.

Remark 11 *Theorem 5 fails for abelian surfaces. Because $H^1(A)$ carries information about the ring class field $H(d)$, we can only realise newforms for fields with class number one or two in abelian surfaces over $\mathbb{Q}$. However, the class number can be as big as 16 for $\mathbb{Q}(\sqrt{-1365})$. Since a K3 surface has trivial H^1 by definition, there are only milder obstructions. One of them still involves $H(d)$ and will be given in Thm. 19 as a consequence of modularity and the Artin-Tate conjecture. Another obstruction involves lattice theory and restricts the genus of $T(X)$ [31, Thm. 5.2].*

7 Families of K3 surfaces with high Picard number

To prove Thm. 10, Elkies and the author considered one-dimensional families of K3 surfaces over $\mathbb{Q}$ with $\rho \geq 19$ [11]. By moduli theory, such a family has infinitely many specialisations with $\rho = 20$ over $\bar{\mathbb{Q}}$. We aim at specialisations over $\mathbb{Q}$.

The Lefschetz fixed point formula (2) provides a good test whether a K3 surface is modular: If $\rho(X) \geq 19$, then we obtain 19 eigenvalues of Frob_p^* on $H^2(X)$ from the Galois operation on $\mathrm{NS}(X)$. By the Weil conjectures, the non-real eigenvalues come in complex conjugate pairs. Hence there is one further eigenvalue $\pm p$. If $\rho = 20$, then the remaining two eigenvalues give the trace of Frob_p^* on the Galois representation associated to $T(X)$. By counting points, we can check whether this trace agrees with the coefficient a_p of any given newform of weight 3.

Applied to several primes, this test can rule out or provide evidence for $\rho = 20$. But then we have to prove that $\rho = 20$ at some specialisation. We sketch two ways to approach this problem.

On the one hand, the parametrising curve is always a modular curve or a Shimura curve. Hence, if we can determine the curve and its CM points, we are done. However, the K3 surfaces that we are interested in become more and more complicated. We will see in Thm. 19 that this can be measured by the discriminant of X or equivalently by the Galois action on $\mathrm{NS}(X)$. But this means that the Shimura curves become actually so complicated that we barely have any knowledge about them at all. In fact, families of K3 surfaces with $\rho \geq 19$ provide a new tool to find detailed information about otherwise inaccessible Shimura curves (cf. [10]).

Example 12 (Dwork pencil) *The Fermat quartic can be deformed into several one-dimensional familes with $\rho \geq 19$. Consider the famous Dwork pencil*

$$S_\lambda = \{x_0^4 + x_1^4 + x_2^4 + x_4^4 = \lambda\, x_0 x_1 x_2 x_3\} \subset \mathbb{P}^3, \qquad \lambda \neq 0.$$

One way to determine the parametrising curve is related to mirror symmetry: The quotient Y_λ of S_λ by a $(\mathbb{Z}/4\mathbb{Z})^2$ subgroup of $Aut(S_\lambda)$ is a family of K3 surfaces with $\rho = 19$ and discriminant 4. By [7], the parametrising Shimura curve is $X_0(2)^+$. The parametrising curve of S_λ is a four-fold cover of $X_0(2)^+$. A new algebraic approach to this problem using Shioda-Inose structures is pursued in [12].

On the other hand, we can look for an additional divisor on some specialisation which would imply $\rho = 20$. This problem seems untractable for the Dwork pencil. It becomes feasible when turning to elliptic surfaces with section. This also has the side-effect that we can twist as in (7).

The Néron-Severi group of an elliptic surface is generated by fiber components and sections due to the Shioda-Tate formula. Hence to increase ρ, the singular fibers could degenerate, but in general there has to be an independent section. To find a specialisation with an independent section P, we have to solve a system of at least seven non-linear equations.

A newform that we want to realise geometrically fixes the discriminant of $\mathrm{NS}(X)$ up to square by Theorem 8. The theory of Mordell-Weil lattices after Shioda [35] translates $\mathrm{disc}(\mathrm{NS}((X))$ into conditions on the intersection numbers of P with fibre components and the other sections. The fibre component restrictions cut down the number of equations we have to solve. Sometimes, this suffices to determine a solution directly. In other cases, we exhibit an extensive seach over some finite field $\mathbb{F}_p$ to find a special K3 surface with an independent section mod p. Then we employ a p-adic Newton iteration to increase the p-adic accuracy. Finally we compute a lift to $\mathbb{Q}$ with the Euclidean algorithm and verify that $\rho = 20$ for this specialisation.

8 Picard numbers of surfaces

The Picard number of a projective surface is in general hard to determine. A method by Shioda applies to surfaces with large group actions, such as Fermat surfaces and their quotients [34]. In the previous section, we used reduction mod p and the Lefschetz trace formula to check for modularity. By Thm. 8, this is equivalent to $\rho = 20$ (cf. Ex. 15).

These ideas will be put in a systematic context in the sequel. Then we will give some applications.

Let X be a smooth projective surface over $\mathbb{Q}$. Then X has good reduction X_p at almost all primes p. From now on, we have to distinguish between the geometric Néron-Severi group $\mathrm{NS}(\bar{X})$ of the base extension $\bar{X}$ to an algebraic closure and the sublattice $\mathrm{NS}(X)$ generated by divisors over the given base field. The reduction morphism induces embeddings of lattices

$$\mathrm{NS}(X) \hookrightarrow \mathrm{NS}(X_p), \qquad \mathrm{NS}(\bar{X}) \hookrightarrow \mathrm{NS}(\bar{X}_p). \tag{8}$$

In particular, the Picard number cannot decrease upon good reduction.

We have already noted that Frob_p^* operates as identity on $\mathrm{NS}(X_p)$. On $\mathrm{NS}(\bar{X}_p)$, there are roots of unity involved which we shall denote by ζ. On the algebraic subspace of $H^2(X)$, the eigenvalues of Frob_p^* are exactly these roots of unity multiplied by p.

The eigenvalues of Frob_p^* on $H^2(X)$ are encoded in the characteristic polynomial

$$R_p(T) = \det(T - \mathrm{Frob}_p^*; H^2(X)). \tag{9}$$

By Newton's identities for symmetric polynomials, one obtains all coefficients of $R_p(T)$ from the traces of the powers of Frob_p^*. Hence it suffices to count points and apply the Lefschetz fixed point formula (2) for sufficiently many extensions $\mathbb{F}_q$ where we replace p by $q = p^s$. The computations are simplified by Poincaré duality and the fact that $R_p(T)$ is monic. Hence, for a K3 surface, one at worst has to consider $\mathbb{F}_{p^{11}}$.

The eigenvalues of Frob_p^* on $H^2(X)$ give upper bounds for the Picard numbers:

$$\rho(X_p) \leq \mathrm{ord}_{T=p}(R_p(T)), \quad \rho(\bar{X}_p) \leq \sum_{\zeta} \mathrm{ord}_{T=\zeta p}(R_p(T)). \tag{10}$$

Sometimes these bounds suffice to compute the Picard number of a surface: when we compute some divisors and their rank equals the bound at some good prime p obtained from (10).

However, this approach alone cannot work for all surfaces in characteristic zero. The reason lies in a parity condition due to the Weil conjecture: Since all eigenvalues of Frob_p^* on $H^2(X)$ other than $\pm p$ come in complex conjugate pairs, the following differences are even:

$$b_2(X) - \mathrm{ord}_{T=\pm p}(R_p(T)), \;\; b_2(X) - \sum_{\zeta} \mathrm{ord}_{T=\zeta p}(R_p(T)). \tag{11}$$

Conjecture 13 (Tate [44]) *The inequalities in (10) are in fact equalities.*

Tate proved the conjecture for abelian surfaces and products of curves. By work of Artin and Swinnerton-Dyer on principal homogeneous spaces [1], the Tate conjecture also holds for elliptic K3 surfaces with section.

The Tate conjecture predicts the parity of $\rho(\bar{X}_p)$ by (11). Hence, if a K3 surface over $\mathbb{Q}$ has odd Picard number, then ρ has to increase upon reduction. Therefore we cannot use the above method directly to compute $\rho(\bar{X})$. We sketch an idea due to van Luijk to circumvent this parity problem in the next section.

9 Van Luijk's method

Van Luijk [21] pioneered a method to prove odd Picard number on a K3 surface X over $\mathbb{Q}$. The setup is as follows: Assume we have a lower bound $\rho(\bar{X}) \geq r$ with odd r, say from explicit divisors on X. Find a prime p such that the eigenvalues of Frob_p^* on $H^2(X)$ imply $\rho(\bar{X}_p) \leq r+1$ by (10). Then van Luijk's method gives a criterion to show that the lower bound is attained.

Assume that $\rho(\bar{X}) = r+1$. Then the embeddings in (8) are isometries up to finite index. Hence the discriminants of the Néron-Severi groups in characteristic zero and p agree up to the square of the index. In this sense, the discriminants have to be compatible for all reductions at good primes p with $\rho(\bar{X}_p) = r+1$.

Criterion 14 (van Luijk) *In the above setup, assume that there are good primes $p_1 \neq p_2$ such that $\rho(\bar{X}_{pi}) = r+1$. Let*

$$D = \frac{disc(\mathrm{NS}(\bar{X}_{p_1}))}{disc(\mathrm{NS}(\bar{X}_{p_2}))}.$$

If D is not a square in $\mathbb{Q}^*$, then $\rho(\bar{X}) \leq r$.

Example 15 *In section 7 we implicitly used this technique to prove $\rho = 19$ for K3 surfaces in a one-dimensional family over $\mathbb{Q}$: Otherwise $\rho(X) = 20$ and X would be modular by Thm. 8. The point counting test checks whether (5) holds at any given p for a newform f of weight 3. Here f has CM by $K = \mathbb{Q}(\sqrt{d})$, encoded in the Fourier coefficients.*

At the inert primes in K, this coefficient is zero. This results in further eigenvalues $p, -p$ of Frob_p^* on $H^2(X)$. Subject to the Tate conjecture, the Picard number increases upon reduction, so we cannot use the above criterion. At the split primes in K, however, the Picard number stays constant upon reduction by (10). Since K is determined by d up to square, the test amounts to checking Criterion 14.

Criterion 14 requires the discriminant of the Néron-Severi group at two good primes up to square. In practice, this does not mean that one has to compute explicit divisors and their intersection numbers. Kloosterman noticed that instead one can work with the Artin-Tate conjecture which we formulate here for K3 surfaces over $\mathbb{F}_q$. It involves the characteristic polynomial $R_q(T)$ of Frob_q^* on $H^2(X)$ as in (9).

Conjecture 16 (Artin-Tate [45]) *Let X be a K3 surface over $\mathbb{F}_q$. Let $\alpha(X_q) = b_2(X) - \rho(X_q) - 1$. Then*

$$\left.\frac{R_q(T)}{(T-q)^{\rho(X_q)}}\right|_{T=q} = q^{\alpha(X_q)}\ |Br(X_q)| \cdot |\mathrm{discr}(\mathrm{NS}(X_q))|. \tag{12}$$

By [23] (cf. [24, p. 25] for characteristic two), the Artin-Tate conjecture is equivalent to the Tate conjecture. For us, it is crucial that the order of the Brauer group $Br(X_q)$ is always a square by [19]. Hence we can compute the discriminant of the Néron-Severi group up to square by $R_q(T)$. By the Lefschetz fixed point formula (2), this amounts to point counting over sufficiently many extensions of $\mathbb{F}_q$. Note that if X is defined over

$\mathbb{F}_p$, then we obtain $R_q(T)$ from $R_p(T)$ by Newton's identities for any $q = p^s$. Hence we only have to compute $R_p(T)$, working over the corresponding extensions of $\mathbb{F}_p$.

We now return to the setup of a K3 surface X over $\mathbb{Q}$ with $\rho(\bar{X}) \geq r$ for some odd r. Based on Crit. 14, we give an algorithm to prove that $\rho(\bar{X}) = r$. The third step which replaces the actual computation of $\operatorname{disc}(NS(X_q))$ is due to Kloosterman [17].

1. Find a good prime p and the characteristic polynomial $R_p(T)$ such that $\rho(\bar{X}_p) \leq r+1$ by (10).
2. Choose $q = p^s$ such that $R_q(T)$ has the root $T = q$ with multiplicity $r+1$.
3. Define $\tilde{D}_q = \frac{1}{q} \frac{R_q(T)}{(T-q)^{r+1}}\Big|_{T=q}$.
4. Repeat the above procedure for another good prime p.
5. If the $\tilde{D}_q$ are not multiples by a square factor, then $\rho(\bar{X}) \leq r$ by Crit. 14.

Remark 17 *In the above algorithm, we do not have to assume the Tate conjecture: In order to establish a contradiction, we only make the assumption that* $\rho(\bar{X}) = r+1$. *By the choice of q, the Tate conjecture follows automatically from the specialisation embedding (8). Hence the Artin-Tate conjecture gives the discriminant up to squares. We compute it in the third step and compare with the discriminant for other suitable choices of q. Thus we can derive a contradiction without assuming the Tate conjecture.*

10 Applications of van Luijk's method

We have already seen one application of van Luijk's method for families of K3 surfaces of Picard number $\rho \geq 19$. The method was independently based on the modularity of singular K3 surfaces over $\mathbb{Q}$ (cf. Ex. 15). In this section, we will sketch two other applications, due to van Luijk and Kloosterman.

10.1 K3 surfaces with Picard number one

By moduli theory, a general complex algebraic K3 surface has Picard number one. Terasoma showed that there is a smooth quartic K3 surface over $\mathbb{Q}$ with $\rho = 1$ [47]. This is a non-trivial fact since there are only countably many K3 surfaces over $\mathbb{Q}$. However, not even over $\mathbb{C}$, there was a single explicit K3 surface with $\rho = 1$ known until van Luijk formulated Crit. 14 in [21].

Here the main challenge is computational: The determination of $R_p(T)$ can require point counting over fields $\mathbb{F}_q$ with $q = p^s, s = 1, \ldots 11$. Hence van Luijk looked for a K3 surface X over $\mathbb{Q}$ with good reduction at the two smallest primes, 2 and 3. Then he computed $R_p(T)$.

At each prime, the second requirement is that $R_p(T)$ has only two roots ζp. Once this is achieved, the discriminants of the Néron-Severi groups are used to establish the claim $\rho(X) = 1$. In fact, van Luijk obtained a much stronger result:

Theorem 18 (van Luijk) *The smooth quartic K3 surfaces over $\mathbb{Q}$ with $\rho = 1$ are dense in the moduli space of K3 surface with a polarisation of degree 4.*

The proof relies on the above K3 surface X which van Luijk had found as a smooth quartic, say

$$X = \{f = 0\} \subset \mathbb{P}^3, \quad f \in \mathbb{Q}[x_0, x_1, x_2, x_3] \text{ homogenous of degree 4.}$$

Now consider a family of K3 surfaces parametrised in terms of another homogenous polynomial $h \in \mathbb{Q}[x_0, x_1, x_2, x_3]$ of degree 4:

$$\mathfrak{X}_h = \{f = 6\,h\} \subset \mathbb{P}^3. \tag{13}$$

Whenever h has coefficients in $\mathbb{Q}$ that are integral 2-adically and 3-adically, then $\mathfrak{X}_h$ reduces to the same surfaces X_2 mod 2 and X_3 mod 3. Hence $\rho = 1$ for all these surfaces by the above argument. The surfaces are easily seen to lie dense in the given component of the moduli space of K3 surfaces.

10.2 An elliptic K3 surface with Mordell-Weil rank 15

A complex elliptic K3 surface can have Mordell-Weil rank from 0 to 18, since $\rho \leq 20$. Cox proved that all these ranks occur [5]. This result is a consequence of the surjectivity of the period map, but Cox did not give any explicit examples. As a complement, Kuwata derived explicit complex elliptic K3 surfaces over $\mathbb{Q}$ with any Mordell-Weil rank from 0 to 18 except for 15 [18]. Kloosterman filled the gap with help of the algorithm we described in the previous section [17].

Through various base changes involving rational elliptic surfaces, Kloosterman derived an elliptic K3 surface with Mordell-Weil rank at least 15. Then he proved equality by the above algorithm. Since $\rho \geq 17$, he knew a factor of $R_p(T)$ of degree 17. Hence the determination of $R_p(T)$ only required point counting over $\mathbb{F}_p$ and $\mathbb{F}_{p^2}$. Therefore the technique was also feasible at the larger primes $p = 17, 19$ which Kloosterman used.

11 Class group action on singular K3 surfaces

The Artin-Tate conjecture has many other applications to K3 surfaces over finite fields or number fields. Here we sketch one of them – which again does not require to assume the validity of the conjecture.

To prove Thm. 10, we constructed singular K3 surfaces over $\mathbb{Q}$ where the associated imaginary-quadratic field $K = \mathbb{Q}(\sqrt{d})$ has class number 4, 8 or even 16. At first, this might come as a surprise since the equivalent statement for abelian surfaces does not hold because of the relation to the class field $H(d)$ (cf. Rem. 11). On the other hand, we know from class field theory that both surfaces can be defined over $H(d)$ (cf. sect. 5). In this section, we will see that independent of the field of definition, every singular K3 surface carries the class group structure: through the Galois action on the Néron-Severi group.

Theorem 19 (Elkies, Schütt) *Let X be a singular K3 surface. Let L be a number field such that $\mathrm{NS}(\bar{X})$ is generated by divisors over L. Denote the discriminant of X by d. Let $H(d)$ be the ring class field for d. Then $H(d) \subset L(\sqrt{d})$.*

Here we shall only sketch the case where $X/\mathbb{Q}$ is a singular K3 surface with $\mathrm{NS}(\bar{X})$ generated by divisors over $\mathbb{Q}$. This case is originally due to Elkies [8]. Thm. 19 can be rephrased as follows:

Theorem 20 (Elkies) *Let $X/\mathbb{Q}$ be a singular K3 surface. Assume that $\mathrm{NS}(\bar{X})$ is generated by divisors over $\mathbb{Q}$. Then X has discriminant d of class number one.*

We shall sketch an alternative proof given by the author in [32] which uses modularity and the Artin-Tate conjecture. The main idea of the proof is as follows:
Consider the good primes p that split in $K = \mathbb{Q}(\sqrt{d})$. By Thm. 8,

$$R_p(T) = T^2 - a_p\, T + p^2.$$

Since $p \nmid a_p$, the reduction X_p has $\rho(X_p) = \rho(\bar{X}_p) = 20$ by (10). Hence the Artin-Tate conjecture holds for X_p. From (12) we obtain a relation between a_p and d up to squares. First we ignore the squares and consider only K. Using the explicit description of a_p in (6), one can show that p splits into principal ideals in K. Since by assumption this holds for almost all split p, K has class number one.

Then we take the precise shape of d into account. This is made possible by the fact, that the embeddings (8) are almost always primitive. With elementary class group theory using representations of numbers by quadratic forms, one can prove that d also has class number one.

Remark 21 *In Thm. 20, one can also show that $T(X)$ is primitive. Otherwise the singular K3 surface would be Kummer or admit an isotrivial elliptic fibration with $j = 0$, but Mordell-Weil rank two.*

Conversely, for each $d < 0$ with class number one, there is a singular K3 surface X with $\mathrm{NS}(\bar{X})$ generated by divisors over $\mathbb{Q}$ and discriminant d (cf. [32, §10]).

We will study an application of Thm. 20 to elliptic K3 surfaces in the next section. Here we only note that Thm. 19 gives a direct proof of Šafarevič' finiteness theorem for singular K3 surfaces which generalises the theory for CM elliptic curves:

Theorem 22 (Šafarevič [29]) *Let $n \in \mathbb{N}$. Up to $\mathbb{C}$-isomorphism, there are only finitely many singular K3 surfaces over number fields of degree at most n.*

It is an open problem to determine all singular K3 surfaces over a fixed number field, say over $\mathbb{Q}$. It follows from work of Shioda [37], that the absolute value of the discriminant can be at least as big as $36 \cdot 427$.

12 Ranks of elliptic curves

In section 10.2, we have cited that every Mordell-Weil rank from 0 to 18 is possible on complex elliptic K3 surfaces. The question of the rank over $\mathbb{Q}$ is much more delicate. Shioda asked in [36] whether Mordell-Weil rank 18 over $\mathbb{Q}$ is possible. Elkies gave a negative answer in [8], [9], based on Thm. 20.

Since the Néron-Severi group of an elliptic surface is generated by horizontal and vertical divisors, Mordell-Weil rank 18 implies that an elliptic K3 surface is singular. Moreover all fibres have to be irreducible. In consequence, the Mordell-Weil lattice is even and integral, but has no roots (i.e. elements with minimal norm 2). This already is a special property.

If the Mordell-Weil rank over $\mathbb{Q}$ is 18, then $\mathrm{NS}(\bar{X})$ is generated by divisors over $\mathbb{Q}$. Hence Thm. 20 bounds the discriminant $|d| \leq 163$. Because of the absence of roots, such a lattice would break the density records for sphere packings in $\mathbb{R}^{18}$. By gluing up to a Niemeier lattice, Elkies is able to establish a contradiction.

On the other hand, Elkies found an elliptic K3 surface with Mordell-Weil rank 17 over $\mathbb{Q}$ (and necessarily $\rho = 19$) [9]. All intermediate ranks are also attained. After base changing from this elliptic K3 surface, a certain specialisation yields an elliptic curve with rank (at least) 28 over $\mathbb{Q}$. This extends the previous record by 4.

13 Rational points on K3 surfaces

Given a variety X over a field k, it is natural to ask for the k-rational points $X(k)$. This set can be empty, finite, infinite or even dense in X. For instance, the model of the Fermat quartic in Ex. 5 has no rational points over any totally real field. In this section we will review the situation for K3 surfaces over number fields.

The most general case would be K3 surfaces of Picard number one. In 2002, Poonen and Swinnerton-Dyer asked whether there is a K3 surface with $\rho = 1$ over a number field with infinitely many rational points. Van Luijk gave a striking affirmative answer in [21]:

Theorem 23 (van Luijk) *In the moduli space of K3 surface with a polarisation of degree 4, the K3 surfaces over $\mathbb{Q}$ with $\rho = 1$ and infinitely many rational points are dense.*

Van Luijk's basic idea is to find a dense set of K3 surfaces within the family $\mathfrak{X}_h$ in (13) which contain an elliptic curve of positive rank over $\mathbb{Q}$. By construction, the rational points thus obtained are not dense on the respective K3 surface. The question of density of rational points thus remains open. It has been answered for some other K3 surfaces with $\rho > 1$. We mention one example due to Harris and Tschinkel [14]:

Theorem 24 (Harris, Tschinkel) *Let S be a smooth quartic in $\mathbb{P}^3$ over some number field k. Assume that S contains a line ℓ over k which does not meet more than five lines on S. Then $S(k)$ is dense in S.*

The proof uses the fact that S admits an elliptic fibration. In Thm. 25 we will see more general consequences of this property in the context of potential density.

Recently Logan, van Luijk and McKinnon announced a similar result for twists of the Fermat quartic. They consider those models

$$S' = \{a\,x_0^4 + b\,x_1^4 + c\,x_2^4 + d\,x_3^4 = 0\} \subset \mathbb{P}^3 \tag{14}$$

with $a, b, c, d \in \mathbb{Q}^*$ such that $abcd$ is a square. They assume that there is a rational point on S outside the 48 lines and the coordinate planes. Then they conclude that the $\mathbb{Q}$-rational points are dense on S.

Here we touch on two crucial problems:

1. Is there a rational point on a given projective variety?
2. Does the existence of a rational point (plus possibly some conditions) imply that there are infinitely many rational points? Will the rational points be dense?

The first question motivated the Hasse principle: If X has a $\mathbb{Q}$-rational point, then it has $\mathbb{Q}_v$-rational points at every place v. Hence the set of adelic points $X(\mathbb{A})$ is non-empty. The converse implication, known as the Hasse principle

$$X(\mathbb{A}) \neq \emptyset \overset{?}{\Longrightarrow} X(\mathbb{Q}) \neq \emptyset,$$

holds for conics. It is computationally very useful since the existence of local points can be checked algorithmically. However, the Hasse principle is not true in general. Selmer showed that it fails for the genus one curve

$$C = \{3\,x^3 + 4\,y^3 + 5\,z^3 = 0\} \subset \mathbb{P}^2.$$

In 1970, Manin [22] discovered that the failure of the Hasse principle can often be explained through the Brauer group $\mathrm{Br}(X)$. He defined a subset $X(\mathbb{A})^{\mathrm{Br}} \subset X(\mathbb{A})$ that contains $X(\mathbb{Q})$, but can be empty even if $X(\mathbb{A})$ is not. This case is referred to as Brauer-Manin obstruction.

It is conjectured that the Brauer-Manin obstruction is the only obstruction to the Hasse principle on rational varieties. More generally, however, Skorobogatov [41] constructed a bielliptic surface where the Brauer-Manin obstruction does not suffice to explain the failure of the Hasse principle. Recent developments indicate that even natural cohomological refinements of the Brauer-Manin obstruction may not be sufficient in general [27].

For K3 surfaces, it is still an open problem whether the Brauer-Manin obstruction is the only obstruction to the Hasse principle. For the models of the Fermat surface over $\mathbb{Q}$ in (14), Swinnerton-Dyer [42] proved this under the following assumptions: Schinzel's hypothesis holds, the Tate-Šafarevič group of elliptic curves is finite plus conditions on the coefficients a, b, c, d.

The second problem is currently being investigated by van Luijk. Numerically he found evidence for the rate of growth of the number of points with bounded height h, thus indicating an affirmative answer. The conjectural formula involves the Picard number, resembling the situation for del Pezzo surfaces as predicted by Manin's conjecture. In some instances, the formula requires to leave out a finite number of curves on the surface. On a Zariski-open subset U, the conjectural formula in case $\rho(X) = 1$ reads

$$\#\{P \in U(\mathbb{Q}); h(P) \leq B\} \sim c \cdot \log B, \qquad c \text{ constant.}$$

Rational points and their density rely heavily on the model of the variety and the chosen base field – like for the Fermat surface in Ex. 5 and its twists in (14). This suggests that the notion of density would be too restrictive for most general statements. This is the reason to introduce potential density.

14 Potential density

Let X be a variety over a number field or the function field of a curve, denoted by k. We say that the rational points are potentially dense on X if there is some finite extension k'/k such that $X(k')$ is dense. The main expectation and motivation for this notion is that potential density should be a geometric property, depending only on the canonical class K_X.

For curves, this concept is known thanks to Faltings' theorem [13]: For any curve of genus greater than one over any number field, the rational points are finite. Conversely, potential density holds for curves of genus zero and one.

The same is true for surfaces with K_X negative: Over a finite extension, they are all rational. On the other end, the Lang-Bombieri conjecture rules out potential density for projective varieties of general type.

Among surfaces with $K_X \equiv 0$, potential density has been proved for abelian and Enriques surfaces. A result by Bogomolov and Tschinkel covers a great range of K3 surfaces [3].

Theorem 25 (Bogomolov, Tschinkel) *Let X be a K3 surface over a number field. Assume that X has an elliptic fibration or infinite automorphism group. Then the rational points are potentially dense on X.*

Here either assumption implies $\rho \geq 2$. Other than this, the assumptions are not too restrictive. For instance, any K3 surface with $\rho = 2$, but without (-2) curves satisfies the conditions of the theorem. Similarly, any K3 surface with $\rho \geq 5$ admits an elliptic fibration and therefore shares the property of potential density.

It is again the case $\rho = 1$ where we lack any examples over number fields – be it with or without potential density of rational points. The only known result concerns function fields of complex curves:

Theorem 26 (Hassett, Tschinkel [15]) *Let C be a complex curve. There are non-trivial K3 surfaces over $\mathbb{C}(C)$ with $\rho = 1$ and Zariski-dense rational points.*

The proof relies on the uncountability of $\mathbb{C}$. It is unclear how the techniques could be adapted for function fields $\bar{\mathbb{Q}}(C)$. Despite the recent progress, the question of potential density is still wide open for K3 surface.

Acknowledgement: This survey owes to the contributions of many mathematicians from whom I learned through lectures, discussions and collaborations. My thanks go especially to N. D. Elkies, B. van Geemen, K. Hulek, R. Kloosterman, R. van Luijk, T. Shioda, and to the referee. Funding from DFG under research grants Schu 2266/2-1 and Schu 2266/2-2 is gratefully acknowledged.

References

[1] Artin, M., Swinnerton-Dyer, P.: *The Shafarevich-Tate conjecture for pencils of elliptic curves on $K3$ surfaces*, Invent. Math. **20** (1973), 249–266.
[2] Barth, W., Hulek, K., Peters, C. A. M., van de Ven, A.: *Compact complex surfaces*, Second edition, Erg. der Math. und ihrer Grenzgebiete, 3. Folge, Band **4**. Springer (2004), Berlin.
[3] Bogomolov, F. A., Tschinkel, Y: *Density of rational points on elliptic $K3$ surfaces*, Asian J. Math. **4** (2000), no. 2, 351–368.
[4] Breuil, C., Conrad, B., Diamond, F., Taylor, R.: *On the modularity of elliptic curves over $\mathbb{Q}$*, J. Amer. Math. Soc. **14** (2001), 843–939.
[5] Cox, David A.: *Mordell Weil groups of elliptic curves over $C(t)$ with $p_g = 0$ or 1*, Duke Math. J. **49** (1982), no. 3, 677–689.
[6] Deligne, P.: *Formes modulaires et représentations ℓ-adiques*, in: Sém. Bourbaki 1968/69, no. 355 (Lect. Notes in Math. **179**), Springer-Verlag (1971), 139–172.
[7] Dolgachev, I.: *Mirror symmetry for lattice polarized K3 surfaces*, J. Math. Sci. **81** (1996), 2599–2630.
[8] Elkies, N. D.: *The maximal Mordell-Weil rank of an elliptic K3 surface over $\mathbb{Q}(t)$*, talk at conference on *Birational Automorphisms of Compact Complex Manifolds and Dynamical Systems* at Nagoya University, Aug 28, 2007.
[9] Elkies, N. D.: *Three lectures on elliptic surfaces and curves of high rank*, preprint(2007), arXiv: 0709.2908.
[10] Elkies, N. D.: *Shimura Curve Computations Via K3 Surfaces of Néron-Severi Rank at Least 19*, Lect. Notes in Comp. Sci. **5011** (ANTS VIII, 2008), Springer (2008), 196–211.
[11] Elkies, N. D., Schütt, M.: *K3 surfaces and modular forms*, preprint (2008). arXiv: 0809.0830.
[12] Elkies, N. D., Schütt, M.: *K3 families of high Picard rank*, in preparation.
[13] Faltings, G.: *Endlichkeitssätze für abelsche Varietäten über Zahlkörpern*, Invent. Math. **73** (1983), no. 3, 349–366.
[14] Harris, J., Tschinkel, Y.: *Rational points on quartics*, Duke Math. J. **104** (2000), no. 3, 477–500.
[15] Hassett, B., Tschinkel, Y.: *Potential density of rational points for K3 surfaces over function fields*, to appear in Amer. J. Math., preprint (2006), arXiv: math.AG/0604222.
[16] Inose, H.: *On certain Kummer surfaces which can be realized as non-singular quartic surfaces in $\mathbb{P}^3$*, J. Fac. Sci. Univ. Tokyo Sect. IA Math. **23** (1976), no. 3, 545–560.
[17] Kloosterman, R.: *Elliptic K3 surfaces with geometric Mordell-Weil rank 15*, Canad. Math. Bull. **50** (2007), no. 2, 215–226.
[18] Kuwata, M.: *Elliptic K3 surfaces with given Mordell-Weil rank*, Comment. Math. Univ. St. Pauli **49** (2000), no. 1, 91–100.
[19] Liu, Q., Lorenzini, D., Raynaud, M.: *On the Brauer group of a surface*, Inv. Math. **159** (2005), 673–676.
[20] Livné, R.: *Motivic orthogonal two-dimensional representations of Gal$(\overline{\mathbb{Q}}/\mathbb{Q})$*, Israel J. of Math. **92** (1995), 149–156.
[21] van Luijk, R.: *K3 surfaces with Picard number one and infinitely many rational points*, Algebra Number Theory **1** (2007), no. 1, 1–15.
[22] Manin, Y. I.: *Le groupe de Brauer-Grothendieck en géométrie diophantienne*, Actes du Congrès International des Mathématiciens (Nice, 1970), Tome 1, Gauthier-Villars (1971), 401–411.
[23] Milne, J.: *On a conjecture of Artin and Tate*, Ann. of Math. **102** (1975), 517–533.

[24] Milne, J.: *Addenda and Errata*, available through J. Milne's homepage http://www.jmilne.org/math.
[25] Morrison, D. R.: *On K3 surfaces with large Picard number*, Invent. Math. **75** (1984), no. 1, 105–121.
[26] Pjateckiĭ-Šapiro, I. I., Šafarevič, I. R: *A Torelli theorem for algebraic surfaces of type K3*, Math. USSR Izv. **5**, No. 3 (1972), 547–588.
[27] Poonen, B.: *Insufficiency of the Brauer-Manin obstruction applied to etale covers*, preprint (2008), arXiv: 0806.1312.
[28] Ribet, K.: *Galois representations attached to eigenforms with Nebentypus*, in: J.-P. Serre, D. B. Zagier (eds.), *Modular Functions of one Variable V* (Bonn 1976), Lect. Notes in Math. **601**, Springer (1977), 17–52.
[29] Šafarevič, I. R: *On the arithmetic of singular* K3-*surfaces*, in: *Algebra and analysis* (Kazan 1994), de Gruyter (1996), 103–108.
[30] Schütt, M.: *Hecke eigenforms with rational coefficients and complex multiplication*, preprint (2005), arXiv: math.NT/0511228.
[31] S-fields Schütt, M.: *Fields of definition of singular K3 surfaces*, Commun. Number Theory Phys. **1, 2 (2007), 307–321.**
[32] Schütt, M.: *K3 surfaces with Picard rank 20 over* $\mathbb{Q}$, preprint (2008), arXiv: 0804.1558.
[33] Shioda, T.: *On elliptic modular surfaces*, J. Math. Soc. Japan **24** (1972), 20–59.
[34] Shioda, T.: *An explicit algorithm for computing the Picard number of certain algebraic surfaces*, Amer. J. Math. **108**, No. 2 (1986), 415–432.
[35] Shioda, T.: *On the Mordell-Weil lattices,* Comm. Math. Univ. St. Pauli **39** (1990), 211–240.
[36] Shioda, T.: *On the ranks of elliptic curves over* $\mathbb{Q}(t)$ *arising from K3 surfaces,* Comm. Math. Univ. St. Pauli **43** (1994), 117–120.
[37] Shioda, T.: *K3 surfaces and sphere packings*, MPIM preprint **137** (2007).
[38] Shioda, T., Inose, H.: *On Singular K3 Surfaces*, in: W. L. Baily Jr., T. Shioda (eds.), *Complex analysis and algebraic geometry*, Iwanami Shoten, Tokyo (1977), 119–136.
[39] Shioda, T., Mitani, N.: *Singular abelian surfaces and binary quadratic forms*, in: *Classification of algebraic varieties and compact complex manifolds*, Lect. Notes in Math. **412** (1974), 259–287.
[40] Siu, Y. T.: *Every K3 surface is Kähler*, Invent. Math. **73** (1983), no. 1, 139–150.
[41] Skorobogatov, A. N.: *Beyond the Manin obstruction*, Invent. Math. **135** (1999), no. 2, 399–424.
[42] Swinnerton-Dyer, P.: *Arithmetic of diagonal quartic surfaces. II*, Proc. London Math. Soc. (3) **80** (2000), no. 3, 513–544.
[43] Swinnerton-Dyer, P.: *Diophantine equations: progress and problems*, in: *Arithmetic of higher-dimensional algebraic varieties* (Palo Alto, CA, 2002), Progr. Math. **226**, Birkhäuser (2004), 3–35.
[44] Tate, J.: *Algebraic cycles and poles of zeta functions*, in: *Arithmetical Algebraic Geometry* (Proc. Conf. Purdue Univ., 1963), Harper & Row (1965), 93–110.
[45] Tate, J.: *On the conjectures of Birch and Swinnerton-Dyer and a geometric analog*, in: A. Grothendieck, N. H. Kuiper (eds.), *Dix exposés sur la cohomologie des schemas*, North-Holland Publ. (1968), 189–214.
[46] Taylor, R., Wiles, A.: *Ring-theoretic properties of certain Hecke algebras*, Ann. Math. **141** (1995), 553–572.
[47] Terasoma, T.: *Complete intersections with middle Picard number* 1 *defined over* $\mathbb{Q}$, Math. Z. **189** (1985), no. 2, 289–296.
[48] Weinberger, P. J.: *Exponents of the class groups of complex quadratic fields*, Acta Arith. **22** (1973), 117–124.
[49] Wiles, A.: *Modular elliptic curves and Fermat's Last Theorem*, Ann. Math. (2) **141**, No. 3 (1995), 443–551.

Heiner Zieschang

Gerhard Burde[1] und Richard Weidmann[2]

Abstract

■ Mathematics Subject Classification: 20 E XX, 57 M XX

Wir beschreiben die wissenschaftliche Laufbahn und das wissenschaftliche Werk Heiner Zieschangs.

Eingegangen: 02. 10. 2008

[1]Goethe-Universität Frankfurt am Main, burde@math.uni-frankfurt.de
[2]Heriot-Watt University Edinburgh, R.Weidmann@ma.hw.ac.uk

DMV
JAHRESBERICHT
DER DMV

1 Wissenschaftliche Laufbahn

Heiner Zieschang starb in Bochum am 5. April 2004 an einem Krebsleiden. Sein Tod kam für die meisten seiner Freunde und Kollegen überraschend, denn nur wenige wussten von seiner Krankheit, und er war bis in die letzten Lebenswochen hinein mit seinen Forschungsprojekten beschäftigt. Er war ein vielseitiger Forscher, ein außergewöhnlicher Lehrer und ein sehr wirkungsvoller Kommunikator und Organisator auf der internationalen Bühne seiner Wissenschaft. Darüber hinaus wird die große Zahl seiner Kollegen, Schüler und Menschen, die mit ihm zu tun hatten, vor allem einen warmherzigen und optimistischen Freund vermissen.

Heiner Zieschang wurde am 12. November 1936 in Kiel geboren. Nach dem Abitur am Helmholtz-Gymnasium in Hilden schrieb er sich zum Sommersemester 1956 an der Georgia-Augusta in Göttingen als Student der Mathematik und Physik ein. 1958 besuchte er das Seminar von Kurt Reidemeister; es entwickelte sich eine intensive wissenschaftliche Beziehung zwischen beiden, die bis zum Tode Reidemeisters (1971) andauerte – wenn auch nicht ungetrübt. Im Gegenteil, das Verhältnis war zunehmend durch heftige Meinungsverschiedenheiten über grundsätzliche wissenschaftliche Positionen gekennzeichnet.

Zusammen mit seinem Mitstudenten Johannes Köhn machte sich Heiner Zieschang bereits in seinen Anfangssemestern am Göttinger Mathematischen Institut einen Namen durch eine Ausarbeitung der Vorlesung „Analytische Geometrie“ (Sommersemester 1958/59) von Reidemeister. Dieser war ein Feind des sich damals durchsetzenden Trends, eine solche Vorlesung auf die Lineare Algebra zu beschränken und die Geometrie auszusparen. Reidemeister bot in seiner Vorlesung einen ideenreichen Gegenentwurf. Sein Vortragsstil war allerdings für Anfänger schwer verdaulich, und die Studenten waren dringend auf die sorgfältige und klare Ausarbeitung der beiden angewiesen. Bei den regelmäßigen ausführlichen Besprechungen dieser Ausarbeitung mit Reidemeister wurde Zieschang früh mit dessen Sichtweise und philosophischer Grundhaltung zur Mathematik vertraut. Reidemeister blieb in den Jahren 1958–1961 der bestimmende Einfluss; bei ihm legte er 1960 das Diplomexamen ab und bereits 1961 hatte er unter dessen Anleitung seine Dissertation vollendet und wurde „summa cum laude“ promoviert. Er verbrachte seine Studienzeit mit Ausnahme des Wintersemesters 59/60 in Göttingen. In diesem Semester ging er nach Hamburg, um an dem Topologieseminar Emil Artins teilzunehmen – übrigends gegen den ausdrücklichen Wunsch Reidemeisters, der über seinen Star-Studenten eifersüchtig wachte.

Aus der Dissertation ergaben sich zwei Veröffentlichungen [1], [2], die bereits zwei Schwerpunkte seiner späteren Forschungstätigkeit betrafen, die kombinatorische Gruppentheorie und die Topologie 2- und 3-dimensionaler Mannigfaltigkeiten. Typisch für diese Arbeiten und die meisten der folgenden ist die konkrete Fragestellung. Er war immer eher ein „Problemlöser“ als ein Systematiker.

Heiner Zieschang hatte seinen Lebensweg genau vorausgeplant. Schon während der Arbeit an seiner Dissertation hatte er in einem Intensivkurs Russisch gelernt und sich um ein Stipendium für einen Aufenthalt an der Lomonossov Universität in Moskau beworben, wo damals eine Reihe bedeutender Topologen und Algebraiker tätig war. Seine

Bemühungen waren erfolgreich und er ging 1963 für zwei Jahre nach Moskau. Diese Zeit war ausgefüllt mit intensiver und vielfältiger Forschungsarbeit und begründete eine lebenslange enge sowohl mathematische als persönliche Beziehung zu Russland und seinen Mathematikern. Unter ihnen ist besonders P. S. Alexandroff zu nennen, der in Moskau sein Mentor war. Er kannte ihn von Göttingen, wo Alexandroff im Sommersemester 1957 die Gaußprofessur innegehabt hatte. In die Moskauer Zeit fallen die Vorarbeiten für die Habilitation über Flächen und diskontinuierliche Gruppen. Er interessierte sich aber auch für ganz andere Themen: Mit J. Flachsmeyer, einem Stipendiaten aus der DDR, schrieb er einen Aufsatz zum Haar'schen Maß [7].

1964 kehrte er als Assistent von Wolfgang Franz nach Frankfurt zurück, habilitierte sich im folgenden Jahr und wurde dort Privatdozent. Er war bald der Mittelpunkt einer aktiven Gruppe von Topologiestudenten, die von seiner Kompetenz, seinem Enthusiasmus und wohl auch von seiner Jugend angezogen waren. Franz, der mit administrativen Aufgaben beschäftigt war – als Dekan, Rektor und Prorektor – überließ ihm weitgehend die wissenschaftliche Führung des Lehrstuhls. Er gründete auch eine Familie: Seine Frau Ute hatte er als Medizinstudentin bereits in Göttingen kennengelernt, seine Töchter Tanja und Kim wurden 1965 und 1969 geboren.

Nach einem weiteren Semester in Moskau – 1967/68 – nahm er den Ruf auf ein Ordinariat an der neu gegründeten Ruhr-Universität in Bochum an. Die meisten seiner Frankfurter Studenten, zu denen u. a. Elmar Vogt, Rudolf Beyl, Wolfgang Heil und Renate Engmann gehörten, gingen mit ihm nach Bochum. Dort entstand in den folgenden drei Jahrzehnten ein lebendiges, produktives und weltoffenes Zentrum für niederdimensionale Topologie und geometrische Gruppentheorie. Wir gehen auf die Forschungsergebnisse im einzelnen noch ein. Heiner Zieschang baute im Laufe der Zeit ein ganzes Netz institutioneller und persönlicher internationaler Kontakte auf; an seinem Institut arbeiteten regelmäßig Gäste aus aller Welt – einen stets präsenten Grundstock bildeten dabei die russischen Mathematiker. In den siebziger Jahren kamen Gäste von amerikanischen Universitäten dazu, wo er selbst mehrere Semester verbrachte; in Europa waren es England und Frankreich, wo es zu längerfristigen Forschungskooperationen kam: Mit D. J. Collins in London schrieb er eine Reihe größerer Arbeiten zur kombinatorischen Gruppentheorie. In den achtziger Jahren entwickelte sich eine enge Zusammenarbeit mit der Universität Paul Sabatier in Toulouse, insbesondere mit M. Boileau und Claude Hayat-Legrand. Es ergaben sich häufige und ausgedehnte Aufenthalte in Toulouse und es entstanden zahlreiche Arbeiten über 3-dimensionale Mannigfaltigkeiten. 1996 verlieh Toulouse ihm die Ehrendoktorwürde. Während all dieser Jahre blieb die Verbindung mit Russland immer lebendig; regelmäßig verbrachte er einige Monate dort und schließlich verlief der wissenschaftliche Austausch im Fach Mathematik zwischen der BRD und der UDSSR bzw. Russland auch offiziell über ihn; er war einer der Gründer des „Russisch-Deutschen Instituts für Kultur und Wissenschaft“. Sein letzter Aufenthalt in Moskau im Rahmen der Johann Gottfried Herder-Stiftung war von 2001–2003. Er hielt dort Vorlesungen und Seminare ab und publizierte eine Reihe von Arbeiten mit S. Bogatyi, D. Goncalves und Elena Kudryavtseva, mit denen er zur Flächentheorie seiner Jugendjahre zurückkehrte. Die Lomonossov Universität verlieh ihm

1997 eine „Ehrenprofessur“, eine traditionsreiche Auszeichnung, die als einer der ersten Goethe erhalten hatte.

Heiner Zieschang war ein heiterer, meist optimistisch gestimmter Mensch. Mit Freude, Hartnäckigkeit und großer Energie ging er seine konkreten Probleme an. Stets versuchte er andere für seine Probleme zu begeistern und für eine Mitarbeit zu gewinnen. Umgekehrt war er stets bereit, sich in Fragestellungen einzuarbeiten, die in seinem Umfeld bearbeitet wurden, was zu einer ganzen Reihe von Veröffentlichungen führte, [60], [65], [69], die abseits seiner eigenen Forschungsgebiete lagen. D. J. Collins hat aufgelistet, dass Zieschang im Laufe seines Lebens mit 39 verschiedenen Ko-Autoren publiziert hat, mit den meisten vielfach.

Heiner Zieschang war ein erfolgreicher und beliebter akademischer Lehrer; insbesondere sind seine sechs Lehrbücher zu erwähnen [24, 27, 43, 54, 66, 83]. Ihre Hochschätzung wird belegt durch die Tatsache, dass die meisten von ihnen mehrfach aufgelegt und übersetzt wurden. Dazu kommen zahlreiche Skripte seiner Vorlesungen, insbesondere eine Reihe über die Theorie der 3-dimensionalen Mannigfaltigkeiten, die an vielen Instituten als Grundlage für Vorlesungen und Seminare in Gebrauch waren. Seine Schüler und Schülerinnen sind zahlreich und erfolgreich.

Jeder, der für längere oder kürzere Zeit im Bochumer Institut zu Gast war, wird sich gerne an die heitere, unkonventionelle Atmosphäre erinnern, in der man sich ernsthaft und enthusiastisch mit der Mathematik beschäftigte.

2 Das wissenschaftliche Werk Heiner Zieschangs

Die Hauptschwerpunkte Heiner Zieschangs wissenschaftlicher Tätigkeit waren die kombinatorische Gruppentheorie und die niedrigdimensionale Topologie, insbesondere das Wechselspiel zwischen diesen beiden Disziplinen hatte es ihm angetan. Er hat in der Auswahl seiner Problemstellungen stets guten Geschmack bewiesen und einige seiner Ergebnisse gelten heute als klassische Resultate oder sind Spezialfälle wichtiger Theorien.

Flächen waren das zentrale Objekt in Heiner Zieschangs wissenschaftlichem Werk. Bereits in seiner ersten Arbeit [1], die aus seiner Dissertation hervorgegangen ist, spielen sie eine große Rolle. Diese Arbeit enthält eine Klassifikation von einfachen Kurven auf dem Rand einer Vollbrezel in Bezug auf Homöomorphismen der Vollbrezel. Nach seiner Promotion begann er sich für die Theorie der Flächen selbst zu interessieren. In einer Reihe von Arbeiten in den sechziger Jahren entwickelte er mit den „binären Produkten“ [6], [9] ein schlagkräftiges Hilfsmittel der geometrischen Gruppentheorie, mit dem er eine kombinatorische Flächentheorie aufbaute. Eine Konsequenz dieser Theorie war die vollständige Beschreibung der Menge aller Homomorphismen von einer Flächengruppe in eine freie Gruppe oder in anderen Worten der Lösungen quadratischer Gleichungen in freien Gruppen. Dieses Resultat ist ein bedeutender Spezialfall der Beschreibung der Lösungsmenge beliebiger Gleichungen in freien Gruppen von Makanin und Razborov.

Die Ergebnisse der Arbeiten dieser Phase sind zusammengefasst in dem 1970 erschienenen Buch „Flächen und ebene diskontinuierliche Gruppen" in der Reihe „Lecture Notes in Mathematics" mit den Ko-Autoren E. Vogt und H.-D. Coldewey [24]. Das Buch ist ein Standardwerk; es wurde in einer erheblich erweiterten Version 10 Jahre später als englische Ausgabe [41] wieder aufgelegt und weitere acht Jahre später erschien eine russische Übersetzung. Es enthält: Verallgemeinerte Nielsen-Sätze, Strukturaussagen über Automorphismen ebener diskontinuierlicher Gruppen, einen eigenen kombinatorischen Zugang zur Teichmüllertheorie.

Parallel entstanden einige Beiträge zur Knotentheorie und über 3-dimensionale Mannigfaltigkeiten. In [14] wird bewiesen, dass die Knotengruppen mit nicht-trivialem Zentrum die Torusknoten charakterisieren. Dieses Ergebnis ist das erste in einer ganzen Reihe verwandter, die in den folgenden Jahren über Fundamentalgruppen von 3-Mannigfaltigkeiten mit nichttrivialem Zentrum gefunden wurden, z. B. von F. Waldhausen und W. Heil. Die Charakterisierung der Torusknoten beruht auf einem Nielsen'schen Satz über Flächen, der zum Themenkreis des sogenannten „Realisierungsproblems" gehört: Kann man eine endliche Gruppe von Abbildungsklassen einer Fläche durch Abbildungen realisieren?

1966 erschien die Arbeit über Seifert'sche Faserräume (mit E. Vogt und P. Orlik) [16]. Sie enthält die topologische Klassifikation dieser Räume. Für den Spezialfall der orientierbaren Seifert'schen Faserräume mit orientierbarer Zerlegungsfläche war das Ergebnis bereits von Waldhausen bewiesen worden. Das bereits angesprochene Nielsen'sche Realisierungsproblem beschäftigte Zieschang in den siebziger Jahren, 1981 erschien dann sein zweites Buch bei den Lecture Notes [43], ein Forschungsbericht zu diesem Thema. Durch Fenchel, Kerckhoff und Zieschang selbst waren erhebliche Fortschritte gemacht worden – die Realisierungsfrage wurde für auflösbare Gruppen positiv entschieden. Damit wurde auch Nielsens Resultat für den Fall einer zyklischen Gruppe bestätigt, in deren Beweis Zieschang eine Lücke entdeckt hatte. [52] enthält die Klassifikation der „Montesinos-Knoten", die Bonahon mit anderen Mitteln bereits durchgeführt hatte, ohne sie aber zu veröffentlichen.

In der Gruppentheorie enstanden weitere Arbeiten über Fuchs'sche Gruppen, oft wurde gefragt, inwieweit sich die Algebra in der Topologie widerspiegelt. So wurde der Rang, das heißt die minimale Anzahl von Erzeugenden, Fuchs'scher Gruppen untersucht. Dazu wurde die Nielsen'sche Kürzungsmethode auf freie Produkte mit Amalgam verallgemeinert [25]. Nachdem in dieser Arbeit scheinbar gezeigt wurde, dass der algebraische und geometrische Rang übereinstimmen, sind kurze Zeit später Gegenbeispiele aufgetaucht. In [31] wurde dann eine abschließende Antwort gegeben, die alle Gegenbeispiele klassifizierte. Des Weitern wurde gezeigt [34], dass Zerlegungen kokompakter Fuchs'scher Gruppen als freie Produkte mit Amalgam $\mathbf{Z}$ oder D_∞ geometrisch sind, d. h. zu Zerschneidungen der zugehörigen markierten Fläche korrespondieren. Dieses Resultat spielt heute eine wichtige Rolle in der Theorie der JSJ-Zerlegungen endlich präsentierter Gruppen.

Das vielleicht spektakulärste Ergebnis aus dieser Zeit war die Widerlegung der Waldhausen-Vermutung, die für orientierbare, geschlossene, zusammenhängende 3-Mannigfaltigkeiten die Gleichheit von Heegard-Geschlecht $h(M)$ und dem Rang

$r(M)$ der Fundamentalgruppe der Mannigfaltigkeit erwartete. Die Gegenbeispiele sind Seifert'sche Faserräume mit 4 Ausnahmefasern. Ausgenutzt wird die oben erwähnte Tatsache, dass spezielle Fuchs'sche Gruppen eine geringere Anzahl algebraischer als geometrischer Erzeugenden zulassen. Seit dieser Entdeckung wurden weitere Mannigfaltigkeiten gefunden, für die der Rang kleiner als das Heegaardgeschlecht ist; die Frage, ob auch hyperbolische 3-Mannigfaltigkeiten mit dieser Diskrepanz existieren, ist noch offen und findet derzeit viel Beachtung.

Aus der Zusammenarbeit mit M. Boileau und M. Rost resultierte Mitte der achtziger Jahre eine Reihe von Arbeiten, die sich mit Knoten bzw. Verkettungen beschäftigten. Für die Außenräume von Torus- und Montesinosknoten wurden Heegard-Zerlegungen minimalen Geschlechts klassifiziert, Brücken- und Tunnelzahlen bestimmt und in Beziehung zu algebraischen und geometrischen Erzeugendenzahlen der Fundamentalgruppe gesetzt. Durch den Kontakt mit Toulouse kam es ab Mitte der neunziger Jahre zu einer weiteren andauernden Zusammenarbeit mit Claude Hayat-Legrand, zu der sich noch Sicheng Wang aus Peking gesellte [81], [83], [85], der in Bochum Humboldt-Stipendiat war.

Die Arbeiten befassen sich mit der Existenz von Abbildungen vom Grad eins von einer orientierbaren geschlossenen 3-Mannigfaltigkeit in Linsenräume und von solchen zwischen Seifert'schen Faserräumen. Die Kriterien sind Bedingungen für die Homologie und die Verschlingungsmatrix der Mannigfaltigkeit. In Zusammenhang mit diesen Fragen steht [87], wo die Struktur des Kohomologierings einer Seifert-Mannigfaltigkeit über S^2 berechnet wird und wo Zieschang seine Leidenschaft für das Konkrete in umfangreichen expliziten Rechnungen und Formeln auslebt.

In den Jahren 1997–2004 bildete sich wieder eine neue Arbeitsgruppe mit Bogatyi, Concalves und Elena Kudryavsteva, die thematisch zu Zieschangs Anfängen, zu den Flächen zurückkehrte. Es wurden wiederum ganz konkrete Resultate über Koinzidenzpunkte von Flächenabbildungen und Realisierungen von verzweigten Überlagerungen von Flächen erzielt. Insbesondere Elena Kudryavsteva arbeitete noch am Krankenlager mit ihm bis in seine letzten Lebenstage.

1 Von Heiner Zieschang betreute Dissertationen

Elmar Vogt (1971)
Renate Engmann (1972)
Edelgard Gramberg (1973)
Norbert Peczynski (1976)
Wolfram Reiwer (1978)
Cornelia Wissemann-Hartmann (1980)
Winfried Mellis (1981)
Artur Heil (1984)
Ruzena Davoodi (1987)
Johannes Tipp (1989)
Antje Christensen (1996)
Karsten Kroll (1997)
Hans-Dieter Coldewey (1972)
Andreas Stieglitz (1972)
Klaus Funcke (1975)
Bruno Zimmermann (1977)
Ute Dederek-Breuer (1980)
Bärbel Wicha (1981)
Gerhard Krause (1983)
Rainer Preuß (1986)
Friedrich Fels (1988)
Martin Kuhn (1994)
Richard Weidmann (1997)

2 Ehrungen

1996: Ehrenpromotion an der Universität Paul Sabatier, Toulouse
1997: Ehrenprofessur an der Lomonossow-Universität, Moskau

3 Administrative Funktionen

Mitherausgeber des Journal of Knot Theory and its Ramifications

4 Schriftenverzeichnis

[1] Heiner Zieschang. Über einfache Kurven auf Vollbrezeln. *Abh. Math. Sem. Univ. Hamburg,* 25:231–250, 1961/1962.
[2] Heiner Zieschang. Über Worte $S_1{}^{a_1} S_2{}^{a_2} \dots S_q{}^{a_q}$ in einer freien Gruppe mit p freien Erzeugenden. *Math. Ann.,* 147:143–153, 1962.
[3] Heiner Zieschang. Über einfache Kurvensysteme auf einer Vollbrezel vom Geschlecht 2. *Abh. Math. Sem. Univ. Hamburg,* 26:237–247, 1963/1964.
[4] H. Cišang. On the classification of simple systems of paths on a surface of genus 2. *Dokl. Akad. Nauk SSSR,* 152:841–844, 1963.
[5] H. Cišang. On a problem of Neuwirth on knot groups. *Dokl. Akad. Nauk SSSR,* 153:1017–1019, 1963.
[6] Heiner Zieschang. Alternierende Produkte in freien Gruppen. *Abh. Math. Sem. Univ. Hamburg,* 27:13–31, 1964.
[7] Jürgen Flachsmeyer and Heiner Zieschang. Über die schwache Konvergenz der Haar'schen Masse von Untergruppen. *Math. Ann.,* 156:1–8, 1964.
[8] H. Cišang. On automorphisms of plane groups. *Dokl. Akad. Nauk SSSR,* 155:57–60, 1964.
[9] Heiner Zieschang. Alternierende Produkte in freien Gruppen. II. *Abh. Math. Sem. Univ. Hamburg,* 28:219–233, 1965.
[10] H. Cišang. Simple path systems on full pretzels. *Mat. Sb. (N.S.),* 66 (108):230–239, 1965.
[11] Heiner Zieschang. Algorithmen für einfache Kurven auf Flächen. *Math. Scand.,* 17:17–40, 1965.
[12] H. Cišang. Discrete groups of plane motions and plane group images. *Uspehi Mat. Nauk,* 21(3):195–212, 1966.
[13] Heiner Zieschang. Über Automorphismen ebener diskontinuierlicher Gruppen. *Math. Ann.,* 166:148–167, 1966.
[14] Gerhard Burde and Heiner Zieschang. Eine Kennzeichnung der Torusknoten. *Math. Ann.,* 167:169–176, 1966.
[15] D. B. A. Epstein and H. Zieschang. Curves on 2-manifolds: A counterexample. *Acta Math.,* 115:109–110, 1966.
[16] P. Orlik, E. Vogt, and H. Zieschang. Zur Topologie gefaserter dreidimensionaler Mannigfaltigkeiten. *Topology,* 6:49–64, 1967.
[17] Heiner Zieschang. On a paper of J. G. Sinaĭ on dynamical systems. In *Symposium on Probability Methods in Analysis (Loutraki, 1966),* page p. 329. Springer, Berlin, 1967.
[18] Gerhard Burde and Heiner Zieschang. Neuwirth'sche Knoten und Flachenabbildungen. *Abh. Math. Sem. Univ. Hamburg,* 31:239–246, 1967.
[19] H. Cišang and A. V. Černavskiĭ. Geometric topology of manifolds. In *Algebra, Topology, Geometry, 1965 (Russian),* pages 219–261. Akad. Nauk SSSR Inst. Naučn. Tehn. Informacii, Moscow, 1967.

[20] H. Cišang. Nielsen's theorem: Certain applications and generalizations of it. In *Proc. Fourth All-Union Topological Conf. (Tashkent, 1963) (Russian),* pages 184–201. Izdat. „Fan" Uzbek. SSR, Tashkent, 1967.
[21] G. Burde and H. Zieschang. A topological classification of certain 3-manifolds. *Bull. Amer. Math. Soc.,* 74:122–124, 1968.
[22] H. Cišang. Torus bundles over surfaces. *Mat. Zametki,* 5:569–576, 1969.
[23] Heiner Zieschang. Algorithmen für einfache Kurven auf Flächen. II. *Math. Scand.,* 25:49–58, 1969.
[24] H. Zieschang, E. Vogt, and H.-D. Coldewey. *Flächen und ebene diskontinuierliche Gruppen.* Lecture Notes in Mathematics, Vol. 122. Springer-Verlag, Berlin, 1970.
[25] Heiner Zieschang. Über die Nielsen'sche Kürzungsmethode in freien Produkten mit Amalgam. *Invent. Math.,* 10:4–37, 1970.
[26] Heiner Zieschang. On extensions of fundamental groups of surfaces and related groups. *Bull. Amer. Math. Soc.,* 77:1116–1119, 1971.
[27] Boto von Querenburg. *Mengentheoretische Topologie.* Springer-Verlag, Berlin, 1973.
[28] Heiner Zieschang. Lifting and projecting homeomorphisms. *Arch. Math. (Basel),* 24:416–421, 1973.
[29] Heiner Zieschang. On the homeotopy group of surfaces. *Math. Ann.,* 206:1–21, 1973.
[30] Heiner Zieschang. Addendum to: „On extensions of fundamental groups of surfaces and related groups" (Bull. Amer. Math. Soc. **77** (1971), 1116–1119). *Bull. Amer. Math. Soc.,* 80:366–367, 1974.
[31] N. Peczynski, G. Rosenberger, and H. Zieschang. Über erzeugende ebener diskontinuierlicher Gruppen. In *Proceedings of the Second International Conference on the Theory of Groups (Australian Nat. Univ., Canberra, 1973),* pages 562–564. Lecture Notes in Math., Vol. 372, Berlin, 1974. Springer.
[32] Reinhard Oselies and Heiner Zieschang. Ergodische Eigenschaften der Automorphismen p-adischer Zahlen. *Arch. Math. (Basel),* 26:144–153, 1975.
[33] Norbert Peczynski, Gerhard Rosenberger, and Heiner Zieschang. Über Erzeugende ebener diskontinuierlicher Gruppen. *Invent. Math.,* 29(2):161–180, 1975.
[34] Heiner Zieschang. On decompositions of discontinuous groups of the plane. *Math. Z.,* 151(2):165–188, 1976.
[35] H. Cišang. Triangular groups. *Uspehi Mat. Nauk,* 31(5(191)):177–183, 1976.
[36] Heiner Zieschang. Generators of the free product with amalgamation of two infinite cyclic groups. *Math. Ann.,* 227(3): 195–221, 1977.
[37] Dieter Fuchs, Ursula Kammler, and Heiner Zieschang. Unteralgebren von $\mathfrak{lf}$ (2, **R**) und Untergruppen von LF(2, **R**). *Math. Z.,* 161(3):211–220, 1978.
[38] Norbert Peczynski and Heiner Zieschang. On coverings of Seifert 3-manifolds. *Arch. Math. (Basel),* 31(4):382–386, 1978/79.
[39] Heiner Zieschang and Bruno Zimmermann. Endliche Gruppen von Abbildungsklassen gefaserter 3-Mannigfaltigkeiten. *Math. Ann.,* 240(1):41–62, 1979.
[40] Edelgard Gramberg and Heiner Zieschang. Order reduced Reidemeister-Schreier subgroup presentations and applications. *Math. Z.,* 168(1):53–70, 1979.
[41] Heiner Zieschang, Elmar Vogt, and Hans-Dieter Coldewey. *Surfaces and planar discontinuous groups,* volume 835 of *Lecture Notes in Mathematics.* Springer, Berlin, 1980. Translated from the German by John Stillwell.
[42] R. P. Osborne and H. Zieschang. Primitives in the free group on two generators. *Invent. Math.,* 63(1):17–24, 1981.
[43] Heiner Zieschang. *Finite groups of mapping classes of surfaces,* volume 875 of *Lecture Notes in Mathematics.* Springer-Verlag, Berlin, 1981.
[44] H. Cišang. Decompositions of discrete groups of motions of the plane. *Uspekhi Mat. Nauk,* 36(1(217)):173–192, 1981.
[45] Heiner Zieschang and Bruno Zimmermann. Über Erweiterungen von **Z** und $Z_2 * Z_2$ durch nichteuklidische kristallographische Gruppen. *Math. Ann.,* 259(1):29–51, 1982.

[46] Michel Boileau and Heiner Zieschang. Genre de Heegaard d'une variété de dimension 3 et générateurs de son groupe fondamental. *C. R. Acad. Sci. Paris Ser. I Math.,* 296(22):925–928, 1983.
[47] Kh. Tsishang. Subgroups of a free product of cyclic groups. *Trudy Mat. Inst. Steklov.,* 154: 284–295, 1983. Topology (Moscow, 1979).
[48] Donald J. Collins and Heiner Zieschang. Rescuing the Whitehead method for free products. I. Peak reduction. *Math. Z.,* 185(4):487–504, 1984.
[49] Donald J. Collins and Heiner Zieschang. Rescuing the Whitehead method for free products. II. The algorithm. *Math. Z.,* 186(3):335–361, 1984.
[50] M. Boileau and H. Zieschang. Heegaard genus of closed orientable Seifert 3-manifolds. *Invent. Math.,* 76(3):455–468, 1984.
[51] Donald J. Collins and Heiner Zieschang. On the Whitehead method in free products. In *Contributions to group theory,* volume 33 of *Contemp. Math.,* pages 141–158. Amer. Math. Soc., Providence, RI, 1984.
[52] Heiner Zieschang. Classification of Montesinos knots. In *Topology (Leningrad, 1982),* volume 1060 of *Lecture Notes in Math.,* pages 378–389. Springer, Berlin, 1984.
[53] Michel Boileau and Heiner Zieschang. Nombre de ponts et génerateurs méridiens des entrelacs de Montesinos. *Comment. Math. Helv.,* 60(2):270–279, 1985.
[54] Gerhard Burde and Heiner Zieschang. *Knots,* volume 5 of *de Gruyter Studies in Mathematics.* Walter de Gruyter & Co., Berlin, 1985.
[55] Heiner Zieschang. A note on the mapping class groups of surfaces and planar discontinuous groups. In *Low-dimensional topology (Chelwood Gate, 1982),* volume 95 of *London Math. Soc. Lecture Note Ser.,* pages 206–213. Cambridge Univ. Press, Cambridge, 1985.
[56] Michel Boileau, Markus Rost, and Heiner Zieschang. Décompositions de Heegaard des extérieurs des nœuds toriques et des variétés de Seifert associées. *C. R. Acad. Sci. Paris Ser. I Math.,* 302(18):661–664, 1986.
[57] Khaĭner Tsishang. Minimal geodesics on a punctured torus. *Izv. Akad. Nauk SSSR Ser. Mat.,* 50(5):1097–1105, 1986.
[58] Donald J. Collins and Heiner Zieschang. A presentation for the stabiliser of an element in a free product. *J. Algebra,* 106(1):53–77, 1987.
[59] Markus Rost and Heiner Zieschang. Meridional generators and plat presentations of torus links. J. *London Math. Soc. (2),* 35(3):551–562, 1987.
[60] A. T. Fomenko and Kh. Tsishang. On the topology of three-dimensional manifolds arising in Hamiltonian mechanics. *Dokl. Akad. Nauk SSSR,* 294(2):283–287, 1987.
[61] Michel Boileau, Donald J. Collins, and Heiner Zieschang. Scindements de Heegaard des petites variétés de Seifert. *C. R. Acad. Sci. Paris Ser. I Math.,* 305(12):557–560, 1987.
[62] Donald J. Collins and Heiner Zieschang. On the Nielsen method in free products with amalgamated subgroups. *Math. Z.,* 197(1):97–118, 1988.
[63] Michel Boileau, Markus Rost, and Heiner Zieschang. On Heegaard decompositions of torus knot exteriors and related Seifert fibre spaces. *Math. Ann.,* 279(3):553–581, 1988.
[64] Heiner Zieschang. Zum Poincaré'schen Problem. *Mitt. Math. Ges. Hamburg,* 11(5):541–555, 1988.
[65] A. T. Fomenko and Kh. Tsishang. Generic topological properties of integrable Hamiltonian systems. *Izv. Akad. Nauk SSSR Ser. Mat.,* 52(2):378–407, 447, 1988.
[66] Ralph Stöcker and Heiner Zieschang. *Algebraische Topologie.* Mathematische Leitfäden. [Mathematical Textbooks]. B. G. Teubner, Stuttgart, 1988. Eine Einführung. [An introduction].
[67] Heiner Zieschang. On Heegaard diagrams of 3-manifolds. *Astérisque,* (163–164) :7, 247–280, 283 (1989), 1988. On the geometry of differentiable manifolds (Rome, 1986).
[68] Kh. Tsishang, É. Fogt, and Kh.-D. Koldevaĭ. *Poverkhnosti i razryvnye gruppy.* „Nauka", Moscow, 1988. Translated from the English and with a preface by O. Ya. Viro and N. Yu. Netsvetaev, with an addendum by N. V. Ivanov.

[69] A. T. Fomenko and Kh. Tsishang. A topological invariant and a criterion for the equivalence of integrable Hamiltonian systems with two degrees of freedom. *Izv. Akad. Nauk SSSR Ser. Mat.,* 54(3):546–575, 1990.
[70] D. Kollinz and Kh. Tsishang. Combinatorial theory of groups, and fundamental groups. In *Algebra, 7 (Russian),* Itogi Nauki i Tekhniki, pages 5–190, 257–261, 263. Akad. Nauk SSSR Vsesoyuz. Inst. Nauchn. i Tekhn. Inform., Moscow, 1990. Translated from the English by P. F. Kurchanov.
[71] M. Boileau, D. J. Collins, and H. Zieschang. Genus 2 Heegaard decompositions of small Seifert manifolds. *Ann. Inst. Fourier (Grenoble),* 41(4):1005–1024, 1991.
[72] R. I. Grigorchuk, P. F. Kurchanov, and H. Zieschang. Equivalence of homomorphisms of surface groups to free groups and some properties of 3-dimensional handlebodies. In *Proceedings of the International Conference on Algebra, Part 1 (Novosibirsk, 1989),* volume 131 of *Contemp. Math.,* pages 521–530, Providence, RI, 1992. Amer. Math. Soc.
[73] Ralf Kaufmann and Heiner Zieschang. On the rank of NEC groups. In *Discrete groups and geometry (Birmingham, 1991),* volume 173 of *London Math. Soc. Lecture Note Ser.,* pages 137–147. Cambridge Univ. Press, Cambridge, 1992.
[74] Heiner Zieschang. On the Alexander and Jones polynomial. In *Topics in knot theory (Erzurum, 1992),* volume 399 of *NATO Adv. Sci. Inst. Ser. C Math. Phys. Sci.,* pages 229–257. Kluwer Acad. Publ., Dordrecht, 1993.
[75] D. J. Collins and H. Zieschang. Combinatorial group theory and fundamental groups. In *Algebra, VII,* volume 58 of *Encyclopaedia Math. Sci.,* pages 1–166, 233–240. Springer, Berlin, 1993.
[76] Ralph Stöcker and Heiner Zieschang. *Algebraische Topologie.* Mathematische Leitfäden. [Mathematical Textbooks]. B. G. Teubner, Stuttgart, second edition, 1994. Eine Einführung. [An introduction].
[77] M. Lustig, E.-M. Thiele, and H. Zieschang. Primitive elements in the free product of two finite cyclic groups. *Abh. Math. Sem. Univ. Hamburg,* 65:277–281, 1995.
[78] Heiner Zieschang. On the Nielsen and Whitehead methods in combinatorial group theory and topology. In *Groups-Korea '94 (Pusan),* pages 317–337. de Gruyter, Berlin, 1995.
[79] Claude Hayat-Legrand, Shicheng Wang, and Heiner Zieschang. Degree-one maps onto lens spaces. *Pacific J. Math.,* 176(1):19–32, 1996.
[80] John Bryden, Claude Hayat-Legrand, Heiner Zieschang, and Peter Zvengrowski. L'anneau de cohomologie d'une variété de Seifert. *C. R. Acad. Sci. Paris Sér. I Math.,* 324(3):323–326, 1997.
[81] Claude Hayat-Legrand, Shicheng Wang, and Heiner Zieschang. Minimal Seifert manifolds. *Math. Ann.,* 308(4):673–700, 1997.
[82] A. V. Zarelua, A. A. Mal'tsev, and S. P. Novikov. Heiner Zieschang (on the occasion of his sixtieth birthday). *Uspekhi Mat. Nauk,* 52(4(316)):247–250, 1997.
[83] Heiner Zieschang. *Lineare Algebra und Geometrie.* Mathematische Leitfaden. [Mathematical Textbooks]. B. G. Teubner, Stuttgart, 1997.
[84] Claude Hayat-Legrand and Heiner Zieschang. On the cup product on Seifert manifolds. *Mat. Contemp.,* 13:159–180, 1997. 10th Brazilian Topology Meeting (Sao Carlos, 1996).
[85] D. J. Collins, R. I. Grigorchuk, P. F. Kurchanov, and H. Zieschang. *Combinatorial group theory and applications to geometry.* Springer-Verlag, Berlin, 1998. Translated from the 1990 Russian original by P. M. Cohn, Reprint of the original English edition from the series Encyclopaedia of Mathematical Sciences *[Algebra. VII,* Encyclopaedia Math. Sci., 58, Springer, Berlin, 1993; MR1265269 (95g:57004)].
[86] Gerhard Burde and Heiner Zieschang. Development of the concept of a complex. In *History of topology,* pages 103–110. North-Holland, Amsterdam, 1999.
[87] S. A. Bogatyĭ, D. L. Gonçalves, and Kh. Tsishang. Coincidence theory: the minimization problem. *Tr. Mat. Inst. Steklova,* 225(Solitony Geom. Topol. na Perekrest.):52–86, 1999.
[88] J. Bryden, C. Hayat-Legrand, H. Zieschang, and P. Zvengrowski. The cohomology ring of a class of Seifert manifolds. *Topology Appl.,* 105(2):123–156, 2000.

[89] Claude Hayat-Legrand and Heiner Zieschang. Exemples de calcul du degré d'une application. In *XI Brazilian Topology Meeting (Rio Claro, 1998),* pages 41 – 59. World Sci. Publ., River Edge, NJ, 2000.

[90] Semeon Bogatyi, Daciberg L. Gonçalves, and Heiner Zieschang. The minimal number of roots of surface mappings and quadratic equations in free groups. *Math. Z.,* 236(3):419 – 452, 2001.

[91] Daciberg L. Gonçalves and Heiner Zieschang. Equations in free groups and coincidence of mappings on surfaces. *Math. Z.,* 237(1):1 – 29, 2001.

[92] Claude Hayat-Legrand, Sergei Matveev, and Heiner Zieschang. Computer calculation of the degree of maps into the Poincaré homology sphere. *Experiment. Math.,* 10(4):497 – 508, 2001.

[93] Daciberg L. Goncalves, Elena Kudryavtseva, and Heiner Zieschang. Intersection index of curves on surfaces and applications to quadratic equations in free groups. *Atti Sem. Mat. Fis. Univ. Modena,* 49(suppl.):339 – 400, 2001. Dedicated to the memory of Professor M. Pezzana (Italian).

[94] Claude Hayat-Legrand, Elena Kudryavtseva, Shicheng Wang, and Heiner Zieschang. Degrees of self-mappings of Seifert manifolds with finite fundamental groups. *Rend. Istit. Mat. Univ. Trieste,* 32(suppl. 1):131 – 147 (2002), 2001. Dedicated to the memory of Marco Reni.

[95] Daciberg L. Gonçalves, Elena Kudryavtseva, and Heiner Zieschang. Roots of mappings on nonorientable surfaces and equations in free groups. *Manuscripta Math.,* 107(3):311 – 341, 2002.

[96] Claude Hayat-Legrand, Shicheng Wang, and Heiner Zieschang. Any 3-manifold 1-dominates at most finitely many 3-manifolds of S^3-geometry. *Proc. Amer. Math. Soc.,* 130(10): 3117 – 3123 (electronic), 2002.

[97] S. I. Bogataya, S. A. Bogatyĭ, and Kh. Tsishang. On compositions of open mappings. *Mat. Sb.,* 193(3):3 – 20, 2002.

[98] Kerstin Aaslepp, Michael Drawe, Claude Hayat-Legrand, Christian A. Sczesny, and Heiner Zieschang. On the cohomology of Seifert and graph manifolds. In *Proceedings of the Pacific Institute for the Mathematical Sciences Workshop „Invariants of Three-Manifolds" (Calgary, AB, 1999),* volume 127, pages 3 – 32, 2003.

[99] Gerhard Burde and Heiner Zieschang. *Knots,* volume 5 of *de Gruyter Studies in Mathematics.* Walter de Gruyter & Co., Berlin, second edition, 2003.

[100] Semeon Bogatyi, Daciberg L. Goncalves, Elena Kudryavtseva, and Heiner Zieschang. Realization of primitive branched coverings over closed surfaces following the Hurwitz approach. *Cent. Eur. J. Math.,* 1(2): 184 – 197 (electronic), 2003.

[101] Elena Kudryavtseva, Richard Weidmann, and Heiner Zieschang. Quadratic equations in free groups and topological applications. In *Recent advances in group theory and low-dimensional topology (Pusan, 2000),* volume 27 of *Res. Exp. Math.,* pages 83 – 122. Heldermann, Lemgo, 2003.

[102] Semeon Bogatyi, Daciberg L. Goncalves, Elena Kudryavtseva, and Heiner Zieschang. On the Wecken property for the root problem of mappings between surfaces. *Mosc. Math.* J., 3(4):1223 – 1245, 2003.

[103] S. A. Bogatyĭ, D. L. Gonçalves, E. A. Kudryavtseva, and Kh. Tsishang. The minimal number of preimages under mappings of surfaces. *Mat. Zametki,* 75(1):13 – 19, 2004.

[104] Gerhard Burde. In memoriam Heiner Zieschang: 1936 – 2004. *J. Knot Theory Ramifications,* 13(7):989 – 990, 2004.

[105] Oleg Bogopolski, Elena Kudryavtseva, and Heiner Zieschang. Simple curves on surfaces and an analog of a theorem of Magnus for surface groups. *Math. Z.,* 247(3):595 – 609, 2004.

[106] S. A. Bogatyi, D. L. Gonçalves, E. A. Kudryavtseva, and H. Zieschang. Realization of primitive branched coverings over closed surfaces. In *Advances in topological quantum field theory,* volume 179 of *NATO Sci. Ser. II Math. Phys. Chem.,* pages 297 – 316. Kluwer Acad. Publ., Dordrecht, 2004.

[107] S. A. Bogatyi, E. A. Kudryavtseva, and Kh. Tsishang. On the coincidence points of mappings of a torus into a surface. *Tr. Mat. Inst. Steklova,* 247(Geom. Topol. i Teor. Mnozh.): 15–34, 2004.

5 Heiner Zieschang gewidmete Schriften

[A] A. V. Zarelua, A. A. Mal'tsev, and S. P. Novikov. Heiner Zieschang (on the occasion of his sixtieth birthday). *Uspekhi Mat. Nauk,* 52(4(316)):247–250, 1997.

[B] G. Burde: In memoriam Heiner Zieschang 1936–2004, J. Knot Theory and its Ramifications, Vol. 13, no 7, (989–990), 2004.

[C] The Zieschang Gedenkschrift, editors M. Boileau, M. Scharlemann and R. Weidmann, Geometry & Topology Monograph 14, 2008.