

# Vorwort Heft 3-09

Hans-Christoph Grunau

Eine genaue und verlässliche numerische Simulation turbulenter Strömungen in komplizierten Geometrien ist ebenso anspruchsvoll wie von Interesse für wissenschaftliche und industrielle Anwendungen. Unter anderem diese Thematik motiviert den Übersichtsartikel von Michael Dumbser, Gregor Gassner und Claus-Dieter Munz zu Discontinuous-Galerkin-Verfahren für zeitabhängige Advektions-Diffusions-Gleichungen. Diese Methode ist besonders gut geeignet, z.B. in der Modellierung von Turbinenströmungen lokal auftretende sehr große Gradienten ebenso genau aufzulösen wie sehr glatte Lösungsbereiche. Der Artikel erläutert die mathematischen Grundlagen sowie die algorithmische Umsetzung und geht dann zur Illustration auf numerische Berechnungen in der Aeroakustik und bei den kompressiblen Navier-Stokes-Gleichungen ein.

„Geomathematik, was ist das überhaupt?“ Diese Frage beantwortet Willi Freeden zunächst in einer ganz allgemeinen Weise, um dann im zweiten Teil seines Übersichtsartikels zwei geomathematische Themen im Detail vorzustellen. Es handelt sich dabei um die Bestimmung des Schwerefeldes der Erde aus terrestrischen Lotabweichungen sowie die Berechnung der ozeanischen Zirkulation aus Satellitendaten.

Buchbesprechungen, dieses Mal mit einem Akzent auf der Algebra, runden das Heft ab.

In meinem ersten Vorwort in Heft 1-2009 hatte ich Sie im Namen des Herausgeberremiums herzlich eingeladen, mit uns in Diskussion über Beiträge im Jahresbericht zu treten. Eine erste Rückmeldung hat mich zu dem Beitrag von Martin Grötschel und Brigitte Lutz-Westphal erreicht, der ebenfalls in Heft 1-2009 erschienen ist und Anregungen und Ansätze zu einem authentischen Mathematikunterricht vorgestellt hat. Unter anderem wird dort auch die Unterrichtspraxis in den Niederlanden erwähnt, eine Thematik, die offenbar sehr intensiv diskutiert wird. Hierzu hat Rainer H. Kaenders aus Köln einen aktuellen und sehr differenzierten Beitrag „Von Wiskunde und Windmühlen - über den Mathematikunterricht in den Niederlanden“ (Ausarbeitung eines Vortrags auf einer GDM-Tagung) verfasst, den Sie unter

<http://www.kaenders.uni-koeln.de/publicationseng.html>

herunterladen können und der in „Beiträge zum Mathematikunterricht“ erscheinen wird.

Nach diesem anregenden Auftakt möchte ich meine Einladung zur Diskussion mit Nachdruck wiederholen: Die Herausgeberin und die Herausgeber freuen sich auf Ihre Meinungen. Ebenso dankbar sind wir für Hinweise, welche neu erschienenen Bücher Sie im Jahresbericht besprochen sehen möchten.



Michael Dumbser



Gregor Gassner



Claus-Dieter Munz

## Discontinuous-Galerkin-Verfahren für zeitabhängige Advektions-Diffusions-Gleichungen

### Abstract

- Mathematics Subject Classification: 65M60, 76R99, 76N99, 35L65
- Keywords and Phrases: Discontinuous-Galerkin-Verfahren, Raum-Zeit-Formulierung, beliebige Genauigkeitsordnung, zeitabhängige Lösungen

Discontinuous-Galerkin-Verfahren erscheinen vor allem im Bereich der numerischen Strömungsmechanik als diejenigen Kandidaten, die für numerische Simulationen in komplexen Geometrien einen Sprung in der Effizienz bewerkstelligen können. So gelingt mit diesen Verfahren die Kombination von hoher Genauigkeit im Bereich von glatten Lösungen und die Auflösung lokaler starker Gradienten auch auf sehr allgemeinen unstrukturierten Gittern. Wir beschreiben im Folgenden eine Klasse von expliziten Discontinuous-Galerkin-Verfahren, wie sie für zeitabhängige Advektions-Diffusions-Gleichungen eingesetzt werden. Als Prädiktor-Korrektor-Verfahren im Raum-Zeit-Bereich formuliert sind sie von Seiten der Konstruktion von beliebiger Ordnung in Raum und Zeit. Eine Adaption an die lokalen Eigenschaften der Lösung bei Mehrskalenproblemen kann durch Gitterverfeinerung oder durch Veränderung der Genauigkeitsordnung erreicht werden. Adaptivität wird auch lokal in der Zeitapproximation ausgeführt: Jede Gitterzelle schreitet mit dem nach der lokalen Stabilitätsbedingung optimalen Zeitschritt vorwärts. Numerische Ergebnisse werden für unterschiedliche Probleme vorgestellt. Aus dem Bereich der Aeroakustik zeigen wir die Lärmentwicklung und Lärmausbreitung des Verdichters eines Turbinen-Triebwerks, aus dem Bereich der Strömungsmechanik die Zeitentwicklung eines Überschallstrahls im Ansaugrohr eines mit Erdgas angetriebenen Motors und die Umströmung einer Kugel.

Eingegangen: 12.01.2009

Institut für Aerodynamik und Gasdynamik, Universität Stuttgart  
Pfaffenwaldring 21, D-70550 Stuttgart

**DMV**  
**JAHRESBERICHT**  
**DER DMV**  
© Vieweg+Teubner 2009

## 1 Einleitung

Discontinuous-Galerkin-Verfahren (DG-Verfahren) wurden schon in den frühen 70er Jahren durch Reed und Hill [35] vorgeschlagen, welche damit die stationären Neutronentransport-Gleichungen lösten. Theoretisch analysiert wurde diese Methode vier Jahre später von LeSaint und Raviart [26]. Einen Überblick über den heutigen Stand der Theorie der DG-Verfahren für lineare hyperbolische Systeme findet sich bei Brezzi et al. [3] und Ern und Guermond [15]. Für nichtlineare hyperbolische Gleichungen wurde die DG-Methode von Cockburn und Shu in einer Reihe von Arbeiten [7, 6, 4, 8, 9] aufgegriffen und analysiert. Der Stand bis etwa zum Jahre 2000 ist in dem Übersichtsband [5] dokumentiert. Die Erweiterung auf parabolische Terme und damit auf Advektions-Diffusions-Gleichungen wurde von Bassi und Rebay [2] begonnen, indem sie Differentialoperatoren zweiter Ordnung in ein System erster Ordnung umschrieben und somit der direkten Anwendung der DG-Approximation zuführten. Eine ausführliche Beschreibung über die Entwicklungsgeschichte der DG-Verfahren ist in dem Buch von Hesthaven und Warburton [22] zu finden.

DG-Verfahren können als eine Kombination zweier Ideen verstanden werden, bei der die eine wesentlich bei der Konstruktion von Finite-Volumen-Verfahren (FV-Verfahren) ist und die andere bei Finite-Elemente-Verfahren (FE-Verfahren). So wird wie beim FE-Verfahren die Näherungslösung als eine Linearkombination von Basisfunktionen geschrieben und ist im ganzen Rechengebiet definiert. Bei einem FV-Verfahren werden die integralen Mittelwerte approximiert und man erhält eine überall definierte Näherungslösung nur durch eine Rekonstruktion aus den integralen Mittelwerten. Diese Rekonstruktion wird so ausgeführt, dass Unstetigkeiten der Näherungslösung zwischen den Gitterzellen zugelassen werden. Eine Übersicht über die Konstruktion von FV-Verfahren mit einer detaillierten Diskussion der Rekonstruktion enthält die Arbeit von Morton und Sonar [31]. Die nur stückweise stetigen Funktionen sind besser in der Lage, starke Änderungen bis hin zu Unstetigkeiten in den schwachen Lösungen zu erfassen. Diese beiden Ideen werden beim DG-Verfahren kombiniert: Die Näherungslösung ist eine in jeder Gitterzelle mindestens stetige Funktion, darf aber am Gitterzellenrand unstetig sein.

Wir konzentrieren uns im Folgenden auf eine Klasse von DG-Verfahren, welche eine explizite Zeitapproximation besitzt und welche vor allem für zeitabhängige Probleme geeignet ist. Im Bereich der numerischen Strömungsmechanik ist gerade die Simulation von zeitabhängigen Strömungen in komplexen Geometrien immer noch eine große Herausforderung, die mit vielen Tagen Rechenzeit einhergehen kann. Insofern werden in der Industrie bei der Simulation von turbulenten Strömungen die zeitgemittelten Strömungsgleichungen benutzt, die mit Hilfe eines Turbulenzmodells geschlossen werden müssen. Oft bleibt es dabei unklar, ob das Turbulenzmodell tatsächlich die turbulente Dissipation richtig beschreibt oder ob das Problem auch im Sinne von zeitgemittelten Größen stationär ist. Wegen des hohen Rechenaufwandes werden instationäre Simulationen mit höherwertigen Turbulenzmodellen allerdings nur zur Validierung in den Forschungs- und Entwicklungsabteilungen der Industrie eingesetzt. Bei den DG-Verfahren, die wir im Folgenden beschreiben, sehen wir das Potenzial, dass die numerischen

Werkzeuge deutlich verbessert werden können, vor allem wegen der folgenden Eigenschaften:

- Hohe beliebige Genauigkeitsordnung in Raum und Zeit auf sehr allgemeinen unstrukturierten Gittern,
- Adaption durch lokale Gitterverfeinerung oder lokale Wahl der Genauigkeitsordnung,
- lokale Zeitschritte für zeitgenaue Simulationen, bei denen jede Gitterzelle mit dem optimalen Zeitschritt abgearbeitet wird.

Die verschiedenen Bausteine dieser expliziten DG-Verfahren wurden im Laufe der letzten Jahre entwickelt und werden im Folgenden beschrieben.

## 2 Variationsformulierung und Approximation

### 2.1 Advektions-Diffusions-Gleichung

Zur besseren Übersicht betrachten wir eine skalare Advektions-Diffusions-Gleichung in der Form

$$u_t + \vec{\nabla} \cdot \vec{f}^a(u) = \vec{\nabla} \cdot \vec{f}^d(u, \vec{\nabla} u). \quad (1)$$

Die Funktion  $u = u(\vec{x}, t)$  ist die gesuchte Lösung,  $\vec{f}^a$  ist der Advektionsfluss und  $\vec{f}^d$  der Diffusionsfluss. In der Schreibweise mit Koordinaten beschränken wir uns meist auf zwei Raumkoordinaten und die Zeit. Die Flüsse haben dann zwei Komponenten:  $\vec{f}^a := (f_1^a, f_2^a)^T$  und  $\vec{f}^d := (f_1^d, f_2^d)^T$ , wobei das hochgestellte  $T$  den transponierten Vektor bezeichnet. Die Gleichung (1) ist in der sogenannten Flussformulierung geschrieben. Der Diffusionsterm kann auch in die gebräuchliche Form umgeschrieben werden:

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{f}^d(u, \vec{\nabla} u) = \vec{\nabla} \cdot (\mu(u) \vec{\nabla} u), \quad (2)$$

wobei  $\mu = \mu(u)$  der nicht-negative Diffusionskoeffizient ist. Die Diffusion ist hier isotrop angenommen und wirkt als eine skalare Funktion in alle Richtungen gleich.

### 2.2 Variationsformulierung

Es wird angenommen, dass das Rechengebiet  $\Omega$  diskretisiert vorliegt und in einzelne nicht-überlappende Gitterzellen unterteilt ist, deren Vereinigung ganz  $\Omega$  ergibt. Die  $i$ -te Gitterzelle wird mit  $Q_i$  und deren Rand mit  $\partial Q_i$  bezeichnet. Wie bei einem FE-Verfahren üblich starten wir mit einer schwachen Formulierung der Advektions-Diffusions-Gleichung (1). Wir multiplizieren die Gleichung mit einer Testfunktion  $\phi$  und integrieren bei einem DG-Verfahren über eine Raum-Zeit-Gitterzelle  $Q_i^n := Q_i \times [t^n, t^{n+1}]$ :

$$\int_{Q_i^n} \left( u_t + \vec{\nabla} \cdot (\vec{f}^a(u) - \vec{f}^d(u, \vec{\nabla}u)) \right) \phi \, d\vec{x}dt = 0. \quad (3)$$

Die partielle Integration im Raum liefert

$$\begin{aligned} \int_{Q_i^n} u_t \phi \, d\vec{x}dt - \int_{Q_i^n} \vec{f}^a(u) \cdot \vec{\nabla} \phi \, d\vec{x}dt + \int_{Q_i^n} \mu \vec{\nabla}u \cdot \vec{\nabla} \phi \, d\vec{x}dt \\ + \int_{\partial Q_i^n} \vec{f}^a(u) \cdot \vec{n} \phi \, dsdt - \int_{\partial Q_i^n} \mu \vec{\nabla}u \cdot \vec{n} \phi \, dsdt = 0 \end{aligned} \quad (4)$$

und führt eine Kopplung mit den benachbarten Gitterzellen über die Flussterme ein. Dabei bedeutet  $\vec{n}$  der nach außen gerichtete Normalenvektor auf den Seiten  $\partial Q_i^n := \partial Q_i \times [t^n, t^{n+1}]$  der Gitterzelle.

Der Diffusionsfluss wurde hier durch die übliche Formulierung (2) wieder ersetzt. Das Volumenintegral des Diffusionsterms mit dem dort auftretenden Gradienten von  $u$  kann nochmals partiell integriert werden:

$$\int_{Q_i^n} \vec{\nabla}u \cdot \mu \vec{\nabla} \phi \, d\vec{x}dt = \int_{\partial Q_i^n} u \mu \vec{\nabla} \phi \cdot \vec{n} \, dsdt - \int_{Q_i^n} u \vec{\nabla} \cdot (\mu \vec{\nabla} \phi) \, d\vec{x}dt. \quad (5)$$

Wird dies in die schwache Formulierung (4) eingesetzt, dann ergibt sich als Startpunkt unserer Approximation die schwache Formulierung

$$\begin{aligned} \int_{Q_i^n} u_t \phi \, d\vec{x}dt - \int_{Q_i^n} \vec{f}^a(u) \cdot \vec{\nabla} \phi \, d\vec{x}dt - \int_{Q_i^n} u \vec{\nabla} \cdot (\mu \vec{\nabla} \phi) \, d\vec{x}dt \\ + \int_{\partial Q_i^n} (\vec{f}^a(u) - \vec{f}^d(u, \vec{\nabla}u)) \cdot \vec{n} \phi \, dsdt + \int_{\partial Q_i^n} \mu u \vec{\nabla} \phi \cdot \vec{n} \, dsdt = 0. \end{aligned} \quad (6)$$

Die zweite partielle Integration ergibt ein zusätzliches Randintegral, indem die Funktion  $u$  selbst im Integranden auftritt. Es zeigt sich, dass dieser zusätzliche Term für ein Verfahren mit optimaler Konvergenzordnung notwendig ist. Wir nennen dies die ultraschwache Formulierung und werden auf diesen Punkt bei der Approximation zurückkommen.

### 2.3 Das Näherungsverfahren

Es gibt drei Möglichkeiten der Approximation der Variationsformulierung und der Definition von Ansatzfunktionen. Ein Raum-Zeit-DG-Verfahren, wie es zum Beispiel von van der Vegt und van der Ven [40] verwendet wird, betrachtet die Näherungslösung  $u_h = u_h(\vec{x}, t)$  in der Gitterzelle  $Q_i^n$  in der Form

$$u_h(\vec{x}, t) = u_i(\vec{x}, t) = \sum_{l=1}^{\mathcal{N}} \hat{u}_{i,l} \phi_{i,l}(\vec{x}, t), \quad \text{für } (\vec{x}, t) \in Q_i^n, \quad (7)$$

wobei  $\phi_{i,l} = \phi_{i,l}(\vec{x}, t)$ ,  $l = 1, \dots, \mathcal{N}$  Basisfunktionen sind, welche Raum-Zeit-Polynome vom Grad  $\leq N$  mit Definitionsbereich  $Q_i^n$  erzeugen – mit  $\hat{u}_{i,l}$  sind die Freiheitsgrade bezeichnet. Eingesetzt in die Variationsformulierung ergibt sich nach Approximation der Integrale ein global gekoppeltes System zur Bestimmung der Freiheitsgrade.

Die zweite Möglichkeit ist, die Zeitdiskretisierung zunächst nicht auszuführen und eine Näherungslösung in der Form

$$u_h(\vec{x}, t) = u_i(\vec{x}, t) = \sum_{l=1}^{\mathcal{N}} \hat{u}_{i,l}(t) \phi_{i,l}(\vec{x}), \quad \text{für } (\vec{x}, t) \in Q_i^n \quad (8)$$

zu betrachten. Die Basisfunktionen  $\phi_{i,l} = \phi_{i,l}(\vec{x})$ ,  $l = 1, \dots, \mathcal{N}$  hängen hier nur von der Raumkoordinate ab und erzeugen den Raum der Polynome vom Grad  $N$  mit Definitionsbereich  $Q_i$ , während die Freiheitsgrade  $\hat{u}_{i,l}(t)$ ,  $l = 1, \dots, \mathcal{N}$  Funktionen von  $t$  sind. Wird diese Ansatzfunktion in die zeit-kontinuierliche Variationsformulierung eingesetzt, erhält man ein System von gewöhnlichen Differentialgleichungen, welches dann mit einem numerischen Verfahren für Systeme von gewöhnlicher Differentialgleichungen gelöst wird. Dieser sogenannte ODE-Ansatz (Ordinary Differential Equation) oder Linienmethode ist attraktiv durch die Trennung von Raum und Zeit, was die diskreten Gleichungen vereinfacht und mehr Flexibilität bringt. Eine explizite Approximation unter Verwendung von Runge-Kutta-Verfahren (RKDG-Verfahren) wurde von Cockburn und Shu [8] vorgeschlagen und wird üblicherweise benutzt. Eine implizit-explizite Approximation wurde von Kanevsky et al. [24] eingeführt, eine reine implizite Approximation über BDF-Formeln von Bassi und Rebay [2].

Wir schlagen hier eine dritte Möglichkeit vor und starten wie beim ODE-Ansatz mit der Ansatzfunktion (8), bleiben aber bei der Raum-Zeit-Variationsformulierung (6). Diese wird zunächst noch etwas umgeformt. Bei der Approximation setzen wir voraus, dass die Randintegrale für den Austausch zwischen den Gitterzellen sorgen und dass die Volumenintegrale mit Werten innerhalb der Gitterzelle approximiert werden. Unter dieser Voraussetzung wird die partielle Integration des Diffusionsterms wieder rückwärts ausgeführt:

$$\int_{Q_i^n} u_i \vec{\nabla} \cdot (\mu \vec{\nabla} \phi) d\vec{x} dt = \int_{\partial Q_i^n} [u_i \mu \vec{\nabla} \phi \cdot \vec{n}]^- ds dt - \int_{Q_i^n} \mu \vec{\nabla} u_i \cdot \vec{\nabla} \phi d\vec{x} dt, \quad (9)$$

da sich dies einfacher berechnen lässt. Die Bezeichnung  $[\cdot]^-$  bedeutet die Berechnung des Arguments von innen an  $\partial Q_i^n$ . Eingesetzt ergibt dies die diskrete schwache oder ultra-schwache Formulierung

$$\begin{aligned}
 & \int_{Q_i^n} (u_i)_t \phi \, d\vec{x} dt - \int_{Q_i^n} (\vec{f}^a - \vec{f}^d) \cdot \vec{\nabla} \phi \, d\vec{x} dt \\
 & + \int_{\partial Q_i^n} (\vec{g}^a - \vec{g}^d) \cdot \vec{n} \phi \, ds dt + \int_{\partial Q_i^n} g^s [\vec{\nabla} \phi \cdot \vec{n}]^- \, ds dt = 0.
 \end{aligned} \tag{10}$$

Mit  $g^s := \mu u_i - [\mu u_i]^-$  ist der zusätzliche Randterm bezeichnet, der sich durch die partielle Hin- und Rück-Integration unter der oben gemachten Voraussetzung ergeben hat. Für eine exakte Lösung ist dieser Term Null. Die geeignete Wahl der Flüsse ist im Kapitel 4 beschrieben. Für eine konstante Testfunktion fällt das Volumenintegral weg und man erhält die Standardformulierung des Finite-Volumen-Verfahrens, was die Erhaltungseigenschaft des DG-Verfahrens zeigt.

Insbesondere für nichtlineare Flussfunktionen benötigt man noch eine Approximation der Integrale in (10). Eine übliche Vorgehensweise ist hier die Anwendung der Gauß-Quadratur-Formeln in Raum und Zeit und sieht für die einzelnen Terme wie folgt aus:

$$\begin{aligned}
 \int_{Q_i^n} (u_i)_t \phi \, d\vec{x} dt & \approx \sum_{k=1}^{K_G} \tilde{\omega}_k u_i(\vec{\chi}_k, t_{n+1}) \cdot \phi^-(\vec{\chi}_k) - \sum_{k=1}^{K_G} \tilde{\omega}_k u_i(\vec{\chi}_k, t_n) \cdot \phi^-(\vec{\chi}_k), \\
 \int_{Q_i^n} \vec{f}^a \cdot \vec{\nabla} \phi \, d\vec{x} dt & \approx \sum_{k=1}^{K_G} \sum_{m=1}^{M_G} \tilde{\omega}_k \omega_m \vec{f}^a(u_i(\vec{\chi}_k, \tau_m)) \cdot \vec{\nabla} \phi^-(\vec{\chi}_k), \\
 \int_{\partial Q_i^n} \vec{g}^a \cdot \vec{n} \phi \, ds dt & \approx \sum_{S_k \subset \partial Q_i} \sum_{j=1}^{J_G^k} \sum_{m=1}^{M_G} \tilde{\omega}_j^k \omega_m g_n^a(u^\pm(\vec{\chi}_j^k, \tau_m)) \cdot \phi^-(\vec{\chi}_j^k).
 \end{aligned} \tag{11}$$

Die anderen werden analog approximiert. Hierbei sind die Raum-Zeit-Gaußpunkte für die Volumenintegrale mit  $(\vec{\chi}, \tau) \in Q_i \times [t_n; t_{n+1}]$  und die zugehörigen Gewichte mit  $\tilde{\omega}, \omega$  bezeichnet, für die Oberflächenintegrale schreiben wir  $\vec{\chi}^k \in S_k \subset \partial Q_i$  und Gewichte  $\tilde{\omega}^k$ ,  $S_k \subset \partial Q_i$ , wobei über alle Kanten oder Seitenflächen  $S_k$  der Gitterzelle  $Q_i$  aufsummiert wird. Die Zahl der Volumen-Gauß-Punkte ist mit  $K_G$ , die für die Oberflächen mit  $J_G^k$  bezeichnet. Um eine optimale Konvergenzordnung zu erhalten, muss die Anzahl dieser Punkte so gewählt werden, dass die Gauß-Formeln exakt zumindest für die Approximation der Integrale von linearen Flüssen sind. Die Anzahl der Gauß-Punkte in der Zeit wird mit  $M_G$  bezeichnet und ist mindestens die halbe Zeitordnung des Verfahrens. Die Terme  $\vec{g}^a$  und  $g^d$  bezeichnen den numerischen Advektionsfluss bzw. den numerischen Diffusionsfluss.

Die Anzahl der Gauß-Punkte wächst mit dem Grad der Polynome und der Ordnung des Verfahrens stark an. Nehmen wir als Beispiel ein Hexaeder-Gitter und den Polynomgrad  $N = 4$ . Da zumindest die Produkte eines linearen Flusses und Testfunktion exakt integriert werden müssen, benötigt man 5 Gaußpunkte in jeder Richtung. Das macht in drei Raumdimensionen zusammen 125 Punkte für das Volumenintegral und sechsmal 25 Punkte für die Flüsse durch die Seitenflächen, also insgesamt 275 Flussaus-

wertungen pro Gitterzelle. Durch eine Approximation lässt sich dieser Aufwand jedoch stark reduzieren. Bislang haben wir die Wahl der Basisfunktionen nicht genauer diskutiert. Startet man mit der Monobasis, kann man durch die Gram-Schmidt Orthogonalisierung eine orthonormale Basis konstruieren und erhält eine Diagonalmatrix als Masse-Matrix. Um die näherungsweise Integration effizient auszuführen, gehen wir von dieser modalen zu einer nodalen Darstellung der Näherung über. Die nodale Basis ergibt sich aus einer Menge von Stützpunkten und den zugehörigen Lagrange-Stützpolynomen. Den Fluss stellt man ebenso in dieser Basis dar. Es genügt dann, die modale Steifigkeitsmatrix einmal in der Anfangsphase, etwa mit einer Gauß-Quadratur, zu berechnen und abzuspeichern. Die Integration reduziert sich dann auf Matrix-Vektor-Multiplikationen. Für den Hexaeder und dem Polynomgrad  $p = 4$  genügen 50 Punkte für das Volumenintegral, welche sich zudem so anordnen lassen, dass jeweils 17 auf den Oberflächen liegen, so dass zur Berechnung aller Integrale 50 Flussauswertungen ausreichen. Nodale DG-Verfahren werden im Detail von Hesthaven und Warburton [21] beschrieben, die nodale Integration für modale DG-Verfahren und eine Diskussion günstiger Punkteverteilungen in [16].

### 3 Lokaler Prädiktor

Die Ansatzfunktion und die Raum-Zeit-Variationsformulierung passen zunächst nicht zusammen. Werte an den Raum-Zeit-Gausspunkten im betrachteten Zeitintervall liegen für  $t > t^n$  nicht vor. Die Idee an dieser Stelle ist, Näherungswerte in einem Prädiktor-Schritt zu besorgen, und diese dann in die Variationsformulierung (11) einzusetzen. Um das Verfahren explizit zu halten, starten wir in jedem Zeitschritt mit einem Prädiktor, der uns die Werte auf den benötigten Zeitlevel im Zeitintervall liefert. Im Rahmen von FV-Verfahren wurde von Harten et al. in [20] eine solche Vorgehensweise für die eindimensionalen Eulergleichungen vorgeschlagen, bei der eine Raum-Zeit-Taylor-Entwicklung die benötigten Werte liefert. Auf unsere Situation übertragen sieht dies wie folgt aus:

$$u_h(\vec{x}, t) = u_h(\vec{x}_i, t_n) + \sum_{j=1}^p \frac{1}{j!} \left( (t - t_n) \frac{\partial}{\partial t} + (\vec{x} - \vec{x}_i) \cdot \vec{\nabla} \right)^j u_h(\vec{x}_i, t_n), \quad (12)$$

wobei  $\vec{x}_i$  den Schwerpunkt der Gitterzelle  $Q_i$  bezeichnet. Während die reinen Raumableitungen zum alten Zeitpunkt  $t_n$  aus dem vorliegenden Polynom einfach zu berechnen sind, machen alle Zeit- oder gemischten Raum-Zeit-ableitungen Schwierigkeiten. Diese lassen sich jedoch sukzessive unter der mehrmaligen Benutzung der Evolutionsgleichung berechnen. In Anlehnung an den berühmten Existenzbeweis für die Lösungen von Anfangswertproblemen nach Cauchy und Kovalevsky wurde dies in [20] als die Cauchy-Kowalevsky(CK)-Prozedur bezeichnet und wurde bis zum zweiten Term schon beim Verfahren von Lax und Wendroff [25] benutzt, siehe auch die Verallgemeinerung auf beliebige Ordnung und Raumdimension in [30].

Die erste Zeitableitung ergibt sich direkt aus der Evolutionsgleichung (1) zu

$$u_t = -\vec{\nabla} \cdot \vec{f}^a(u) + \vec{\nabla} \cdot \vec{f}^d(u, \vec{\nabla}u). \quad (13)$$

Evolutionsgleichungen für Ableitungen höherer Ordnung erhält man durch weiteres Differenzieren in der Form

$$\frac{\partial^{m+q+o} u}{\partial x^m y^q t^o} = -\frac{\partial^{m+q+o}}{\partial x^{m+1} y^q t^{o-1}} (f_1^a - f_1^d) - \frac{\partial^{m+q+o}}{\partial x^m y^{q+1} t^{o-1}} (f_2^a - f_2^d). \quad (14)$$

Auf der rechten Seite treten dabei immer Zeitableitungen niedriger Ordnung auf, so dass man sukzessive die entsprechenden Zeit und Raum-Zeitableitungen berechnet. Der lineare Fall kann sehr allgemein auch für Systeme behandelt werden. Mit den Flüssen

$$f_1 = au \quad \text{und} \quad f_2 = bu, \quad (15)$$

ergibt sich die Zeitableitung zu

$$u_t = -au_x - bu_y. \quad (16)$$

Für alle Ableitungen zweiter Ordnung wird diese Gleichung dann nach  $x$ ,  $y$  und  $t$  abgeleitet, was auf die Beziehungen

$$u_{tx} = -au_{xx} - bu_{yx}, \quad (17)$$

$$u_{ty} = -au_{xy} - bu_{yy}, \quad (18)$$

$$u_{tt} = -au_{xt} - bu_{yt} \quad (19)$$

führt. Der nächste Schritt ist somit die Berechnung von  $u_{tx}$  und  $u_{ty}$  nach (17) bzw. (18), mit denen sich die Zeitableitung zweiter Ordnung aus (19) ergibt. So geht dies sukzessive weiter für die Ableitungen höherer Ordnung. Die CK-Prozedur kann so in einem Rechenprogramm implementiert werden, dass nur die Eingabe der Funktionalmatrizen und die Ordnung benötigt wird. Ergebnisse für die Maxwell-Gleichungen sind in [37], für die Gleichungen eines elastischen Mediums in [13] gezeigt. Bei einem nichtlinearen Fluss ist dies schwieriger und man benötigt Differenzierungsregeln und Approximationen. In [12, 14] wird dafür die verallgemeinerte Leibniz-Regel benutzt.

Im Prädiktor werden keine Werte aus den benachbarten Gitterzellen benutzt. Er liefert lediglich die innere zeitliche Entwicklung der Näherungslösung, die dann in die DG-Variationsformulierung eingesetzt wird. Insofern kann man diesen ersten Schritt auch als die Berechnung einer Näherungslösung betrachten, bei der das Cauchy-Problem innerhalb der Gitterzelle

$$\begin{aligned} u_t + \vec{\nabla} \cdot \vec{f}^a(u) &= \vec{\nabla} \cdot \vec{f}^d(u, \vec{\nabla}u) \quad \text{in} \quad \mathbb{R}^d \times [0, \Delta t], \\ u(\vec{x}, 0) &= u_i(\vec{x}, t_n) \quad \forall \vec{x} \in \mathbb{R}^d \end{aligned} \quad (20)$$

gelöst wird. Dabei bezeichnet  $u_i(\vec{x}, t_n)$  das DG-Polynom der Gitterzelle  $Q_i$  zum Zeitpunkt  $t_n$ , erweitert auf den ganzen  $\mathbb{R}^d$ .

Die Taylorentwicklung (12) ist eine Approximation dieser Lösung. Es lassen sich aber auch weitere Möglichkeiten einer Näherungslösung des Cauchy-Problems ange-

ben. So kann als Prädiktor auch ein Raum-Zeit-FE-Verfahren eingesetzt werden. Dabei lässt sich das implizite lokale Problem in einer Gitterzelle, bei dem nur Werte von innen benutzt werden, schnell lösen. Mit einem stetigen FE-Ansatz wurde dies von Dumbser et al. in [10] ausgeführt. Während die CK-Prozedur für jede Gleichung oder jedes System angepasst werden muss, ist dieser FE-Prädiktor sehr allgemein. Für Probleme mit steifen Quelltermen kann man als Prädiktor auch ein lokales DG-Raum-Zeit-Verfahren ansetzen [11].

## 4 Numerische Flüsse

Die hier vorgestellten Verfahren lassen Unstetigkeiten in den Näherungslösungen zu und sind damit in der Lage, auch sehr starke Gradienten auf einem vorgegebenen Gitter zu approximieren. Das Ganze kann allerdings nur dann eine sinnvolle Lösung, etwa im Sinne von integralen Mittelwerten liefern, wenn Informationen über das Verhalten von Unstetigkeiten in die numerischen Flüsse eingebaut wird. Für die Advektion war die wesentliche Idee die von Godunov [19] im Jahre 1959.

### 4.1 Der Advektionsfluss

Godunov erkannte, dass er für die zeitliche Entwicklung einer einzelnen Unstetigkeit eine exakte Lösung angeben kann und benutzte diese, um den numerischen Fluss in einem Finite-Volumen-Verfahren zu bestimmen. Nehmen wir an, dass hinter und vor der Unstetigkeit konstante Zustände sind, dann führt dies auf ein sogenanntes Riemannproblem

$$u_t + f(u)_\xi = 0, \quad u(\xi, 0) = \begin{cases} u^+, & \text{für } \xi > 0, \\ u^-, & \text{für } \xi < 0, \end{cases} \quad (21)$$

in Normalenrichtung. Die Koordinate  $\xi$  bezeichnet hier die Koordinate und  $f(u)$  den Fluss in Normalenrichtung. Für eine konvexe Flussfunktion liegt im skalaren Fall eine einfache Lösung vor: Für  $u_l > u_r$  enthält die exakte Lösung einen Verdichtungsstoß, andernfalls eine Verdünnungswelle. Diese exakte lokale Lösung wird an der Sprungstelle ausgewertet, in die Flussfunktion eingesetzt und über den Zeitschritt in der Zeit integriert. Damit wird die lokale nichtlineare Wellenausbreitung mit in das Verfahren übernommen. Eine Übersicht der Konstruktion von FV-Verfahren für den skalaren Fall findet man zum Beispiel in [27].

Immer dann, wenn das Riemannproblem gelöst werden kann, kann das Godunov-Verfahren direkt auf andere Gleichungen oder Gleichungssysteme übertragen werden. Speziell für Systeme gibt es eine ganze Reihe von Verfahren, bei denen die Lösung des Riemannproblems nur näherungsweise berechnet wird und damit Rechenzeit gespart werden kann. Eine gute Übersicht über unterschiedliche Flussberechnungen wird in dem Buch von Toro [39] gegeben. Alle diese Flussberechnungen können direkt für DG-

Verfahren übernommen werden. Einen Vergleich von unterschiedlichen Flussberechnungen beim DG-Verfahren wurde zum Beispiel in [34] ausgeführt.

## 4.2 Der numerische Diffusionsfluss

Bei Diffusionsgleichungen führen unstetige Anfangsdaten sofort zu einer stetigen Lösung für  $t > 0$ . Lässt man unstetige Näherungen zu, dann muss dieses Verhalten konsistent in den numerischen Fluss übernommen werden. Bei den FV-Verfahren macht man üblicherweise unter der Annahme der Stetigkeit eine Art Differenzenapproximation über den Gitterzellenrand hinweg, was allerdings inkonsistent mit der Rekonstruktion und der Idee von Godunov für die Advektionsterme ist. Es erfordert zudem, dass das viskose Profil stetig über mehrere Gitterzellen aufgelöst werden muss. Diese Methode lässt sich auf DG-Verfahren nicht direkt anwenden. Wir beschreiben im Folgenden den Ansatz in [17] und [29], welcher der Idee von Godunov folgt, die Behandlung der Diffusionsterme konsistent mit der Finite-Volumen-Rekonstruktion vorschlägt und wiederum auf DG-Verfahren direkt übertragen werden kann.

Der Kürze halber beschränken wir uns auf das reine Diffusionsproblem

$$u_t - \vec{\nabla} \cdot (\mu \vec{\nabla} u) = 0, \quad (22)$$

wobei der Diffusions-Koeffizient  $\mu = \mu(\vec{x}, u)$  von der Raumvariablen und der Lösung selbst abhängen darf. Die schwache Formulierung (10) vereinfacht sich in diesem Fall zu

$$\int_{Q_i^n} \frac{\partial}{\partial t} u_i \phi \, d\vec{x} dt + \int_{Q_i^n} \vec{f}^d \cdot \vec{\nabla} \phi \, d\vec{x} dt - \int_{\partial Q_i^n} \vec{g}^d \cdot \vec{n} \phi \, ds dt + \int_{\partial Q_i^n} g^s [\vec{\nabla} \phi \cdot \vec{n}]^- \, ds dt = 0. \quad (23)$$

Zur Approximation der Flüsse  $\vec{g}^d$  und  $g^s$  in Richtung der Normalen auf einer Seitenfläche der Gitterzelle wird die Rotationsinvarianz der Gleichung (22) ausgenutzt. An jedem Stützpunkt der Quadraturformel wird der Gradient  $\vec{\nabla} u$  im  $\vec{\xi}$ -Koordinatensystem, welches in die Normal- und die Tangential-Richtung zeigt, dargestellt:

$$\vec{\nabla}_{\vec{\xi}} u = \underline{T} \vec{\nabla}_{\vec{x}} u. \quad (24)$$

Die erste Komponente  $\xi$  des  $\vec{\xi}$ -Systems zeige dabei in Richtung der nach außen gerichteten Normalen der Oberfläche. Unter Ausnutzen der Rotationsinvarianz

$$\vec{f}^d(u, \vec{\nabla}_{\vec{x}} u) \cdot \vec{n} = f_1^d(u, \vec{\nabla}_{\vec{\xi}} u) \quad \text{für alle } \vec{n} \in \mathbf{R}^d \quad (25)$$

erhält man

$$\vec{f}^d(u, \vec{\nabla}_{\vec{x}} u) \cdot \vec{n} = \mu u_{\xi} =: f_{\vec{n}}^d. \quad (26)$$

Das mehrdimensionale Problem kann somit auf ein eindimensionales Problem in Normalenrichtung zurückgeführt werden. Ganz analog bekommt man für den numerischen Fluss

$$\vec{g}^{d,s}(\mu^\pm, u^\pm, \vec{\nabla}_{\vec{x}} u^\pm) \cdot \vec{n} =: \vec{g}_{\vec{n}}^{d,s}(\mu^\pm, u^\pm, u_\xi^\pm), \quad (27)$$

wobei „-“ und „+“ die Werte am Rand der Gitterzelle von innen bzw. außen bezeichnet.

Wir betrachten zuerst den linearen Fall für die Diffusionsgleichung, wobei aber unstetige Koeffizienten zugelassen werden. Das Anfangswertproblem mit stückweise linearen Anfangswerten und stückweise konstanten Diffusionskoeffizienten lautet

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial t} v = \lambda(\xi) \frac{\partial^2}{\partial \xi^2} v, \quad v(\xi, 0) = \begin{cases} u^+ + \xi u_\xi^+, & \text{für } \xi > 0, \\ u^- + \xi u_\xi^-, & \text{für } \xi < 0, \end{cases} \\ \lambda(\xi) = \begin{cases} \mu^+, & \text{für } \xi > 0, \\ \mu^-, & \text{für } \xi < 0, \end{cases} \end{aligned} \quad (28)$$

welches wir das verallgemeinerte Riemannproblem für die Diffusion nennen. Die exakte beschränkte Lösung dieses Anfangswertproblems wird im Folgenden benutzt, um einen Diffusionsfluss zu definieren.

Die exakte Lösung erhält man zum Beispiel durch die Anwendung der Laplace-Transformation. Diese wird für die rechte und die linke Seite getrennt angewandt, danach werden die Lösungen zusammengesetzt. Bei der Kopplung setzen wir Kompatibilitätsbedingungen an der Stelle  $\xi = 0$  voraus: Beide Lösungen seien beschränkt und die zusammengesetzte Lösung und der Fluss seien stetig. Dies ergibt eine eindeutige Lösung. Der Fluss der exakten Lösung an der Stelle  $\xi = 0$  wird zurück transformiert und lautet

$$f^d(0, t) = \frac{[u] \sqrt{\mu^+ \mu^-}}{\sqrt{\pi t} (\sqrt{\mu^+} + \sqrt{\mu^-})} + \frac{\sqrt{\mu^+} f_{\vec{n}}^{d-} + \sqrt{\mu^-} f_{\vec{n}}^{d+}}{\sqrt{\mu^+} + \sqrt{\mu^-}}. \quad (29)$$

mit  $[u] := u^+ - u^-$  und  $f_{\vec{n}}^{d\pm} = \mu^\pm u_{\xi_1}^\pm$ . Dieser Fluss ist bei  $t = 0$  singular, falls die Anfangswerte unstetig sind. Das Zeitintegral über einen Zeitschritt existiert aber in der Form eines uneigentlichen Integrals. Der Zeitmittelwert wird dann zur Definition der numerischen Diffusionsflüsse genommen:

$$g_{\vec{n}}^d := \frac{1}{\Delta t} \int_0^{\Delta t} f^d(0, t) dt = \frac{2[u] \sqrt{\mu^+ \mu^-}}{\sqrt{\Delta t} \sqrt{\pi} (\sqrt{\mu^+} + \sqrt{\mu^-})} + \frac{\sqrt{\mu^+} f_{\vec{n}}^{d-} + \sqrt{\mu^-} f_{\vec{n}}^{d+}}{\sqrt{\mu^+} + \sqrt{\mu^-}}. \quad (30)$$

Den Fluss  $g_{\vec{n}}^s$  erhält man mit Hilfe des Wertes der Lösung des Riemannproblems (28) an der Stelle  $\xi = 0$ . Für  $t \rightarrow 0^+$  erhält man den Wert

$$u_{S_k} = \lim_{t \rightarrow 0^+} v(0, t) = \frac{\sqrt{\mu^+} u^+ + \sqrt{\mu^-} u^-}{\sqrt{\mu^+} + \sqrt{\mu^-}}, \quad (31)$$

der dann zur Berechnung des Flusses

$$g_{\vec{n}}^s = (u_{S_k} - u^-) \mu^- \phi_\xi^-. \quad (32)$$

eingesetzt wird.

Falls der Diffusionskoeffizient stetig ist, vereinfacht sich der ganze Ausdruck und man erhält den Wert der Lösung an der Stelle  $\xi = 0$  als arithmetischer Mittelwert des linken und rechten Zustands. Der numerische Diffusionsfluss (30) lautet dann

$$g_{\tilde{n}}^d := \frac{\sqrt{\mu}}{\sqrt{\Delta t \pi}} \llbracket u \rrbracket + \frac{1}{2} (f_{\tilde{n}}^{d-} + f_{\tilde{n}}^{d+}). \quad (33)$$

Mit dieser Vorarbeit ist die Verallgemeinerung auf den nichtlinearen Fall nicht sehr schwierig. Im nichtlinearen Fall kann der Diffusionskoeffizient an dem Übergang von einer Gitterzelle zur anderen springen. Da wir einen solchen Sprung schon berücksichtigt haben, können wir den linearen Fall durch die Definition

$$\mu^\pm := \mu(u^\pm) \quad \text{und} \quad f_{\tilde{n}}^{d\pm} := f_{\tilde{n}}^d(u^\pm) \quad (34)$$

und dem Einsetzen in (30) und (32) direkt übertragen.

Dieser Diffusionsfluss wird beim FV-Verfahren aus der gleichen Rekonstruktion wie der Advektionsfluss berechnet und wird als dGRP-Fluss (diffusive Generalized Riemann Problem) bezeichnet. Im Rahmen eines FV-Verfahrens angewandt, hat er bei einer Rekonstruktion mit einem Polynom vom Grad  $p$  die Approximationsordnung  $p$ . Im Vergleich zum Advektionsfluss ist dies eine Ordnung geringer. Dies kommt daher, dass die Lösung des verallgemeinerten diffusiven Riemannproblems für diesen Fluss einmal abgeleitet wird. Daher ist auch die Lösung des Riemannproblems mit stückweise konstanten Anfangsdaten inkonsistent im Falle der Diffusion.

Für DG-Verfahren wurden auch andere Flussberechnungen vorgeschlagen. So geht eine Idee auf die Arbeit von Nitsche [32] im Jahre 1978 zurück, der für elliptische Differenzialgleichungen einen Strafterm für Unstetigkeiten einführte. Dies wird heute SIP-Verfahren (Symmetric Interior Penalty) bezeichnet und wurde von Arnold [1] detailliert untersucht. Der dGRP-Fluss (33) hat eine ganz ähnliche Form wie der SIP-Fluss und kann gewissermaßen als eine physikalische Begründung dieses Flusses betrachtet werden. Der dGRP-Fluss kann in der Form

$$g_{\tilde{n}}^d := \mu \tilde{\eta} \llbracket u \rrbracket + \frac{1}{2} (f_{\tilde{n}}^{d-} + f_{\tilde{n}}^{d+}) \quad (35)$$

geschrieben werden, wobei  $\tilde{\eta} = \frac{1}{\sqrt{\Delta t \mu \pi}}$  der Koeffizient des Strafterms ist. Der kleinstmögliche Wert von  $\tilde{\eta}$  kann durch Stabilitätsbetrachtungen bestimmt werden, wie es in [29] ausgeführt ist. Die Ableitung des SIP-Verfahrens aus der lokalen Lösung eines Riemannproblems führt auf einen neuen Weg der Verallgemeinerung auf Systeme. Kann man eine Ähnlichkeitstransformation zur Diagonalisierung der Diffusionsmatrix anwenden, dann entkoppelt sich das System der Diffusionsgleichungen und die skalare Methode lässt sich auf jede einzelne Gleichung anwenden. Die Rücktransformation liefert den numerischen Diffusionsfluss. Dies wird in Gassner et al. [17] im Detail beschrieben und in [18] auf die Navier-Stokes-Gleichungen angewandt.

## 5 Lokale Zeitschritte

### 5.1 Zeitschritt-Bedingung

Wie jedes explizite Verfahren für eine Advektions-Diffusions-Gleichung muss das DG-Verfahren eine Stabilitätsbedingung erfüllen, welche die Wahl der Zeitschritte einschränkt. In unseren Rechnungen benutzen wir

$$\frac{1}{\Delta t} = \sqrt{\frac{1}{\Delta t_a^2} + \frac{1}{\Delta t_d^2}}, \quad (36)$$

wobei sich  $\Delta t_a$  und  $\Delta t_d$  aus der Stabilitätsbedingung für den hyperbolischen bzw. den parabolischen Term berechnet. Diese ergeben sich aus einer linearen Stabilitätsanalyse für die eindimensionale Advektions-Gleichung bzw. die Wärmeleitungsgleichung, die in [28,17,29] dokumentiert sind.

Für die lineare Advektionsgleichung ergibt sich als Stabilitätsbedingung

$$a \frac{\Delta t}{\Delta x} < \sigma = \frac{\sigma^*}{2N + 1}. \quad (37)$$

mit Werten von  $\sigma^*$ , welche von 1.0 für erste und zweite Ordnung leicht fallen und 0.55 für sechste Ordnung ist. Runge-Kutta-DG-Verfahren schneiden mit  $\sigma^* = 1$  für jede Genauigkeitsordnung etwas besser ab. Dies ist vermutlich darauf zurückzuführen, dass auf jedem internen Runge-Kutta-Level der Einfluss des Flusses zu den benachbarten Gitterzellen berechnet wird und danach in das Volumenintegral eingeht. Das STE-DG bleibt dagegen im gesamten Schritt lokal, was sich hier nachteilig auswirkt, aber einen großen Vorteil bringt, auf den wir gleich zurückkommen.

Zunächst noch die Zeitschrittbedingung für die Diffusion. Es ergibt sich auch hier ein Stabilitätsverhalten, bei dem die Stabilitätsgrenze vom Polynomgrad  $N$  abhängt:

$$\mu \frac{\Delta t}{\Delta x^2} \leq \frac{\beta}{(2N + 1)^2} \quad (38)$$

mit  $\beta = \beta(N)$ . Die lineare Stabilitätsanalyse in [17] zeigt für die Wahl von  $\eta$  in einem Intervall  $[\eta_{min}, \eta_{max}]$  die optimalen Stabilitätsgrenzen. Für kleinere Werte von  $\eta$  wird das Verfahren instabil, für größere Werte von  $\eta$  muss der Zeitschritt reduziert werden.

Dass die Ordnung des Verfahrens in die Zeitschrittbeschränkung eingeht, erscheint zunächst als ein großer Nachteil der DG-Verfahren, da eine hohe Genauigkeitsordnung kleine Zeitschritte erfordert, und lässt damit die Effizienz der Verfahren hoher Ordnung fraglich erscheinen. Allerdings ist die Auflösung bei einem DG-Verfahren nicht nur durch die Größe der Gitterzelle bestimmt, sondern auch durch den Grad der Polynome. Mit hoher Ordnung kann so eine ganze Welle in einer Gitterzelle aufgelöst werden, wofür ein FV-Verfahren hoher Ordnung mindestens fünf Gitterzellen benötigt. Die Auflösung bei DG-Verfahren ist proportional zu  $\Delta x/N$  und dies ist die Größe, welche in der Stabilitätsbedingung auftaucht.

Wir greifen etwas vor und zeigen in Abbildung 1 numerische Ergebnisse des DG-Verfahrens und eines FV-Verfahrens, beide fünfter Ordnung, für die Gasdynamik- oder Eulergleichungen. Das Problem ist ein starker Verdichtungsstoß, der mit der Machzahl 10 gegen eine Wand unter dem Winkel  $60^\circ$  läuft. Man erhält eine komplexe Stoßstruktur, die Doppel-Machreflektion genannt wird und insbesondere eine instabile Scherströmung enthält. Dies ist ein bekanntes anspruchsvolles Testbeispiel, welches zum einen die scharfe und monotone Auflösung von Stoßwellen zeigt und zum anderen die numerische Dissipation, siehe Woodward und Collella [41]. Je kleiner die aufgelösten Strukturen in der Scherinstabilität sind, desto weniger numerische Dissipation enthält das Verfahren. Abbildung 1 zeigt hier den Ausschnitt mit der Scherinstabilität. Die Auflösung der Phänomene ist auf beiden Bildern sehr ähnlich: Das DG-Verfahren schafft dies auf einem Gitter mit Schrittweite  $h = 1/120$ , das FV-Verfahren braucht viermal so viel Gitterzellen.

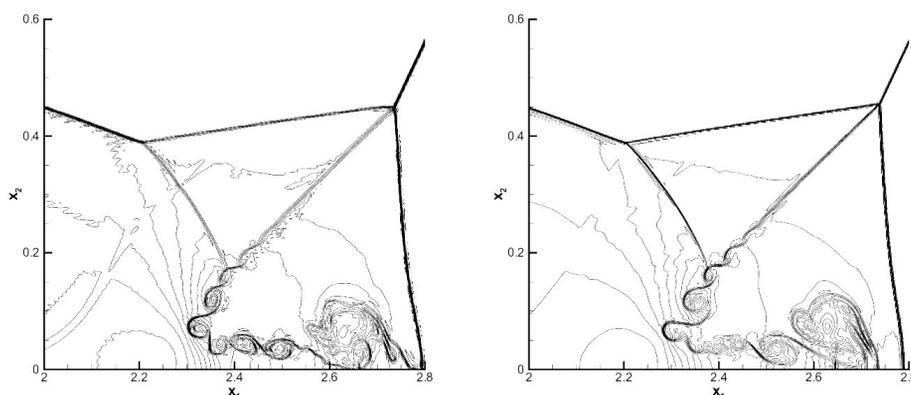


Abbildung 1. Dichte-Konturlinien, links: DG-Verfahren mit  $h = 1/120$  und  $N = 4$ , rechts: WENO-FV-Verfahren 5. Ordnung und  $h = 1/480$ .

## 5.2 Der lokale Zeitschritt-Algorithmus

Jede lokale Wahl der Genauigkeitsordnung oder eine lokale Gitterverfeinerung, abhängig von den lokalen Lösungseigenschaften, wird im Allgemeinen den Zeitschritt im gesamten Rechengebiet verkleinern. Auch bei der Gittererzeugung eines unstrukturierten Gitters treten oft kleine Gitterzellen auf, selbst wenn die Geometrie dies nicht verlangt, die dann den Zeitschritt im ganzen Strömungsgebiet bestimmen. Deshalb werden auch für instationäre Probleme oft implizite Verfahren eingesetzt. Die Lokalität des vorgestellten STE-DG-Verfahrens legt eine völlig neue Strategie nahe, wie man in der Zeit vorwärtsschreitet. Dabei kann jede Gitterzelle mit dem optimalen Zeitschritt vorwärts gehen.

Betrachten wir eine Gitterzelle  $Q_i$  mit dem augenblicklichen Zeitlevel  $t_i^n$ . Die Freiheitsgrade sind im Vektor  $\vec{u}_i^n$  gespeichert. Die lokale Stabilitätsbedingung (36) in  $Q_i$  bestimmt den Zeitschritt  $\Delta t_i^n$  und das zukünftige Zeitlevel zu

$$t_i^{n+1} = t_i^n + \Delta t_i^n. \quad (39)$$

Die Raum-Zeit-Gitterzelle lautet demnach  $Q_i^n = Q_i \times [t_i^n, t_i^{n+1}]$ . Die Evolutionsgleichung für die Freiheitsgrade hat wiederum die Form (10) mit der lokalen Definition der Raum-Zeit-Gitterzelle. Um den Zeitschritt in einer Gitterzelle ausführen zu können, müssen die Daten aller direkten Nachbarn zur Verfügung stehen. Dies ist der Fall, wenn

$$t_i^{n+1} \leq \min\{t_j^{n+1}\}, \forall j : Q_j \cap Q_i \neq \emptyset \quad (40)$$

gültig ist. Die globale Zeitschleife wird somit ersetzt durch ein Suchen von Gitterzellen, welche (40) erfüllen.

Wir beschreiben den Ablauf an dem Beispiel in Abbildung 2 mit drei nebeneinander liegenden Gitterzellen und Start auf einem gemeinsamen Zeitlevel  $t^0 = 0$ . Nach Berechnung der lokalen Zeitschritte wird in jeder Gitterzelle der Raum-Zeit-Prädiktor ausgeführt und es steht in jeder Gitterzelle  $Q_i \times [t_i^0, t_i^1]$  mit  $i = 1, 2, 3$  eine vorläufige Näherungslösung in der Form eines Raum-Zeit-Polynoms zur Verfügung. Der Beitrag des Volumenintegrals wird ausschließlich mit inneren Werten berechnet und kann direkt zu den Freiheitsgraden addiert werden. Diese Situation liegt beim linken oberen Bild in Abbildung 2 vor. In dem Beispiel erfüllt die mittlere Gitterzelle  $Q_2$  Bedingung (40). Es werden die Flüsse am rechten Rand und linken Rand von  $Q_2$  berechnet und deren Beitrag auf die Freiheitsgrade von  $Q_2$  addiert. Damit ist die Näherungslösung in  $Q_2$  zum nächsten Zeitpunkt  $t_2^1$  berechnet und die Freiheitsgrade werden in  $\vec{u}_2$  abgespeichert. Die berechneten Flüsse werden auch bei den benachbarten Gitterzellen berücksichtigt und deren Beitrag zu den Freiheitsgraden addiert. Damit ist die Berechnung der neuen Werte in  $Q_2$  beendet, es wird das neue Raum-Zeitpolynom in  $Q_2 \times [t_2^1, t_2^2]$  als Prädiktor berechnet und den Beitrag des Volumenintegrals addiert. Damit liegt die Ausgangsposition für den nächsten Zeitschritt wieder vor und man ist in Abbildung 2 in der rechten oberen Ecke angekommen.

Sind die Randwerte links und rechts der drei Gitterzellen vorgegeben, dann erfüllt als Nächstes  $Q_1$  die Bedingung, um den Zeitschritt nach  $t_1^1$  auszuführen. Für diese Gitterzelle wurde schon ein Teil des Flusses nach  $Q_2$  berechnet. Es genügt somit, den fehlenden Teil zu berechnen und auf die Freiheitsgrade zu addieren – diese Situation ist im linken unteren Bild von 2 gezeichnet. Wie zuvor wird der Fluss auch in der entsprechenden Nachbarzelle mit berücksichtigt.

Allgemein ist das Zeitintervall, in dem der Fluss zwischen zwei Elementen  $Q_i$  und  $Q_j$  berechnet werden muss, durch

$$[t_{ij}^*, t_i^{n+1}] = [\max(t_i^n, t_j^n), t_i^{n+1}] \quad (41)$$

gegeben. Das Verfahren schreitet in der Zeit vorwärts, indem Gitterzellen gesucht werden, welche Bedingung (40) erfüllen. In den Fällen, in der sich benachbarte Zeitlevels

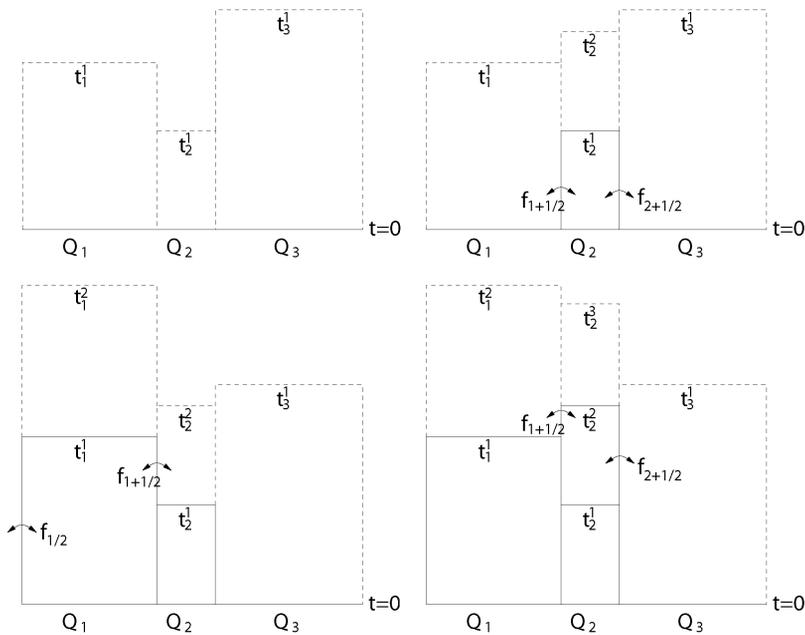


Abbildung 2. Zeitlicher Ablauf mit lokalen Zeitschriften für drei Gitterzellen

nur um sehr wenig unterscheiden, werden die Zeitlevels synchronisiert, um Rechenzeit einzusparen. Ganz analog wird für die Ausgabe von Daten eine Synchronisation durchgeführt.

Zur Demonstration der Güte und der Effizienz der lokalen Zeitschritte zeigen wir numerische Ergebnisse für ein Testproblem, bei dem die kompressiblen Navier-Stokes-Gleichungen mit Quellterm in zwei Raumdimensionen gelöst werden, siehe [18] für Details. Das Rechengebiet ist in Abbildung 3 aufgezeichnet zusammen mit dem dem größten Gitter aus 132 Gitterzellen und der ersten Verfeinerung. Es enthält Dreiecke, Vierecke, hängende Knoten und Gitterzellen mit gekrümmten Kanten an dem kreisförmigen Hindernis. Auf einem solchen Gitter wird zur Zeit kaum ein anderes Verfahren tatsächlich eine Approximation hoher Genauigkeitsordnung schaffen. Das Gitter wird verfeinert, indem bei jeder Verfeinerung ein Gitterelement in vier neue Elemente unterteilt wird. Es werden bei den Rechnungen die größtmöglichen lokalen Zeitschritte benutzt.

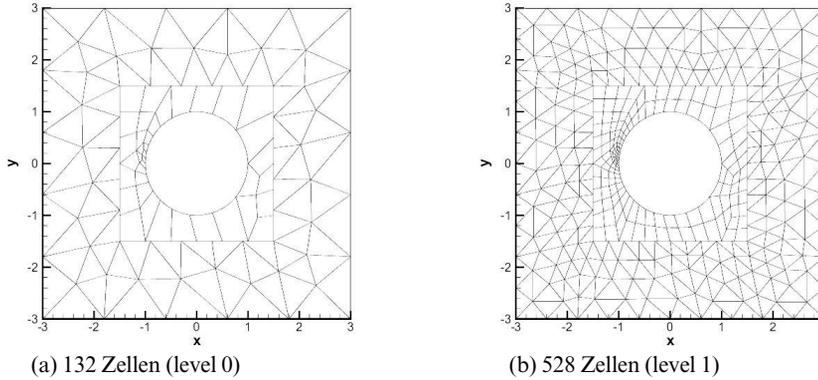


Abbildung 3. Größtes Gitter und erste Verfeinerungsstufe.

In Tabelle 1 ist die experimentelle Ordnung der Konvergenz des STE-DG- und des RK-DG-Verfahrens mit globalem Zeitschritt für den Polynomgrad  $N = 4$  oder Ordnung 5 aufgezeichnet. Bei beiden Verfahren ergibt sich ungefähr die Ordnung fünf. Es zeigt sich, dass bei diesem Beispiel die lokalen Zeitschritte eine große Effizienz liefern, insbesondere auf dem feinsten Gitter. Dies ist natürlich auf die Unterschiede in der Größe der Gitterzellen zurückzuführen. Für Probleme, bei denen in bestimmten Bereichen eine große Auflösung eingesetzt werden muss, ist ein Verfahren mit lokalen Zeitschritten überlegen.

Gitter	Freiheitsgrade	$L_2(U_4)$	$\mathcal{O}_{L_2}$	CPU[s]	$L_2(U_4)$	$\mathcal{O}_{L_2}$	CPU[s]
STE $N = 4$				RK $N = 4$			
132	1980	$1,02E-02$	–	6	$8,89E-03$	–	16
528	7920	$3,48E-04$	<b>4,88</b>	40	$2,80E-04$	4,99	219
2112	31680	$1,29E-05$	<b>4,76</b>	790	$1,06E-05$	4,81	3713
8448	126720	$4,13E-07$	<b>4,96</b>	8448	$3,60E-07$	4,88	76251

Tabelle 1. Experimentelle Konvergenzordnung und Rechenzeiten des STE-DG- und des RK-DG-Verfahrens.

## 6 Numerische Aeroakustik

Die linearisierten Euler-Gleichungen werden oft als ein mathematisches Modell für die Ausbreitung akustischer Wellen im Strömungsgebiet eingesetzt. Man erhält dieses Modell, wenn ein Störungsansatz in die kompressiblen Strömungsmechanikgleichungen eingesetzt wird. Dabei ist der Zustand  $U_0 = (\rho_0, \vec{v}^T, p_0)^T$ , um den linearisiert wird, die zeitgemittelte Lösung der Strömungssimulation: Dichte, Geschwindigkeit und Druck. Die akustischen Quellterme werden durch die Strömung bestimmt. Die linearisierten Eulergleichungen haben die Form



Die Gitter des Differenzen-Verfahrens und des DG-Verfahrens sind in Abbildung 5 dargestellt. Dabei wurde wegen der Übersichtlichkeit in radialer und in axialer Richtung nur jeder dritte Gitterpunkt gezeichnet. Das unstrukturierte DG-Gitter besteht aus Tetraedern und ist lokal nahe in der Nähe des gekrümmten Randes verfeinert. Einen Schnitt durch das akustische Feld zu einem Zeitpunkt ist in Abbildung 6 festgehalten. Man sieht, dass beide Methoden optisch etwa die gleiche Qualität der Lösungen liefern. Es ergab sich maximal ein Unterschied von 2 dB an den in der Abbildung eingezeichneten Punkten. Die benötigte Rechenzeit, um eine Millisekunde in der physikalischen Zeit zu berechnen, ist in Tabelle 2 für das Differenzen- und für das DG-Verfahren aufgeführt. Es zeigt sich, dass die Rechenzeiten in einem Zeitschritt pro Freiheitsgrad ziemlich ähnlich sind – mit leichten Vorteilen für das DG-Verfahren. Das Differenzenverfahren kann allerdings größere, von der Ordnung fast unabhängige Zeitschritte ausführen. Auf der anderen Seite hat man bei dem DG-Verfahren das unstrukturierte flexible Gitter mit der Möglichkeit der lokalen Zeitschritte und eine deutlich schnellere Gittererzeugung.

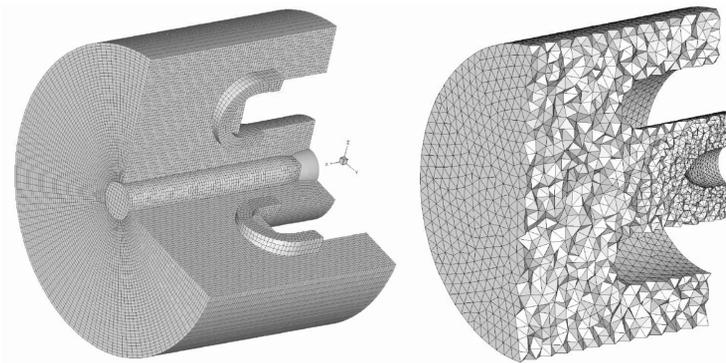


Abbildung 5. Block-strukturiertes Chimera-Gitter (links) und unstrukturiertes Tetraeder-Gitter (rechts).

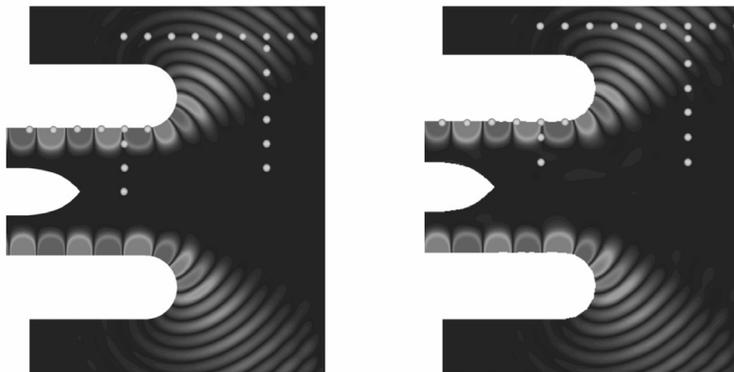


Abbildung 6. Schallfeld des Differenzen-Verfahrens (links) und des DG-Verfahrens (rechts).

Übersichtsartikel	Historische Beiträge	Berichte aus der Forschung	Buchbesprechungen
-------------------	----------------------	----------------------------	-------------------

Methoden	Freiheitsgrade	Gitterzellen	Ordnung	CPUh/ms
Differenzen-Verfahren	5 469 928	5 469 928 N	4	<b>6.30</b>
DG-Verfahren	2 466 080	123 304 E	4	<b>2.15</b>

Tabelle 2. Rechenzeitvergleich.

## 7 Kompressible Navier-Stokes Gleichungen

Die dreidimensionalen kompressiblen Navier-Stokes-Gleichungen sind die Gleichungen für eine kompressible Strömung und lauten in der Flussformulierung

$$U_t + \vec{\nabla} \cdot \vec{F}^a(U) - \vec{\nabla} \cdot \vec{F}^d(U, \vec{\nabla}U) = S, \quad (44)$$

wobei  $U = (\rho, \rho v_1, \rho, \rho v_2, \rho v_3, \rho e)^T$  der Vektor der Erhaltungsgrößen ist und  $\vec{F}^a := (F_1^a, F_2^a, F_3^a)^T$  der Zeilenvektor mit den Advektionsflüssen. Die linke Seite mit einer verschwindenden rechten Seite nennt man auch die Eulergleichungen oder die Gleichungen der Gasdynamik. Die Komponenten der Eulerflüsse in  $x$ -,  $y$ - und  $z$ -Richtung lauten

$$F_l(U) = \begin{pmatrix} \rho v_l \\ \rho v_1 v_l + \delta_{1l} p \\ \rho v_2 v_l + \delta_{2l} p \\ \rho v_3 v_l + \delta_{3l} p \\ \rho e v_l + p v_l \end{pmatrix}, \quad l = 1, 2, 3. \quad (45)$$

Dies ist die übliche Bezeichnung der Größen:  $\rho$ ,  $\vec{v} = (v_1, v_2, v_3)^T$ ,  $p$  und  $e$  bezeichnen die Massendichte, den Geschwindigkeitsvektor, den Druck, und die spezifische Gesamtenergie. Die Eulergleichungen werden ein geschlossenes System durch eine Zustandsgleichung, die wir hier für ein ideales Gas formulieren:

$$p = \rho R T = (\gamma - 1) \rho (e - \frac{1}{2} \vec{v} \cdot \vec{v}), \quad \text{und} \quad e = \frac{1}{2} \vec{v} \cdot \vec{v} + c_v T \quad (46)$$

mit der spezifischen Gaskonstante  $R = c_p - c_v$ , dem Adiabatenexponenten  $\gamma = \frac{c_p}{c_v}$  und den spezifischen Wärmen  $c_p, c_v$ , die als konstant vorausgesetzt werden.

Die Diffusionsterme auf der rechten Seite sind ebenso in der Flussformulierung  $\vec{F}^d := (F_1^d, F_2^d, F_3^d)^T$  geschrieben:

$$F_l^d(U, \vec{\nabla}U) = \begin{pmatrix} 0 \\ \tau_{1l} \\ \tau_{2l} \\ \tau_{3l} \\ \sum_j \tau_{ij} v_j - q_l \end{pmatrix}, \quad l = 1, 2, 3, \quad (47)$$

wobei  $\tau_{ij}$  die Komponenten des Reibungstensors

$$\underline{\tau} := \mu(\nabla\vec{v} + (\nabla\vec{v})^T - \frac{2}{3}(\nabla \cdot \vec{v})\underline{I}) \quad (48)$$

und  $\vec{q} = (q_1, q_2, q_3)^T$  den Wärmefluss

$$\vec{q} := -k\nabla T \quad \text{mit} \quad k = \frac{c_p \mu}{Pr} \quad (49)$$

bezeichnet. Der Reibungskoeffizient  $\mu$  und die Prandtl-Zahl  $Pr$  werden als konstant vorausgesetzt,  $S$  ist ein Quellterm.

### 7.1 Umströmung einer Kugel

Die Kugel hat einen Radius von  $r = 1$  mit Mittelpunkt  $\vec{x}_0 = (0, 0, 0)^T$  und befindet sich in einer Anströmung mit Machzahl  $M = 0.3$ . Die Reibung mit einer Reynoldszahl  $Re = 300$  ergibt eine Umströmung der Kugel ohne Turbulenz. Das Rechengebiet reicht von  $x_1 = -20$  bis  $x_1 = 100$  und  $x_2, x_3 = \pm 50$ . Um das Vernetzen zu vereinfachen, wurde ein Block-unstrukturiertes Konzept verwendet. Ein Block mit der Kantenlänge 4 direkt um die Kugel wurde mit Prismen und Tetraeder vernetzt, wobei die typische Gitterzellengröße  $h \approx 0.1$  gewählt wurde. Zudem wurden direkt an der Kugeloberfläche Gitterzellen mit gekrümmten Flächen verwendet. Um die von Karman Straße aufzulösen wurden Hexaeder mit typischer Kantenlänge  $h = 0.5$  gewählt. Nahe der Kugel wurden dann Hexaeder der Größe  $h \approx 3$  und etwas weiter weg Hexaeder der Größe  $h \approx 10$  eingesetzt. Insgesamt ergeben sich so 30250 Gitterzellen. Ein Schnitt durch das Gitter mit der Ebene  $\vec{n}_{plane} = (0, 1, 0)^T$  ist in Abbildung 7 gezeichnet. Detaillierte Ansichten des Gitters in der Kugelnähe sind in Abbildung 8 dargestellt. Zur Berechnung wurden Polynome mit Polynomgrad 4 verwendet. Die Gesamtanzahl an Freiheitsgraden pro physikalische Variable ergibt sich damit zu 1058750. In Abbildung 9 ist die Struktur der sich ablösenden Wirbel nach dem  $\lambda_2$ -Kriterium gezeigt.

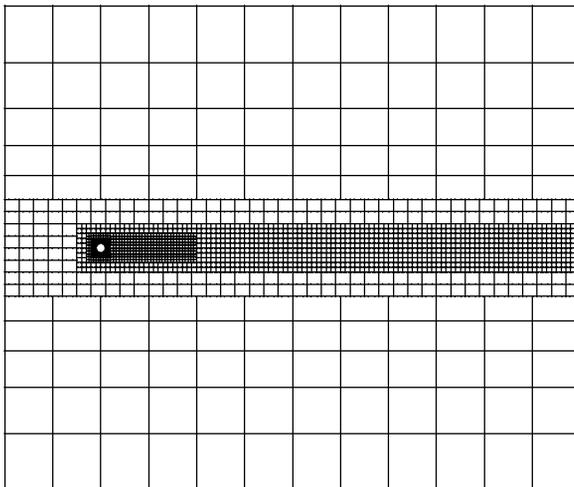


Abbildung 7.  
Visualisierung des gesamten  
Rechengitters.

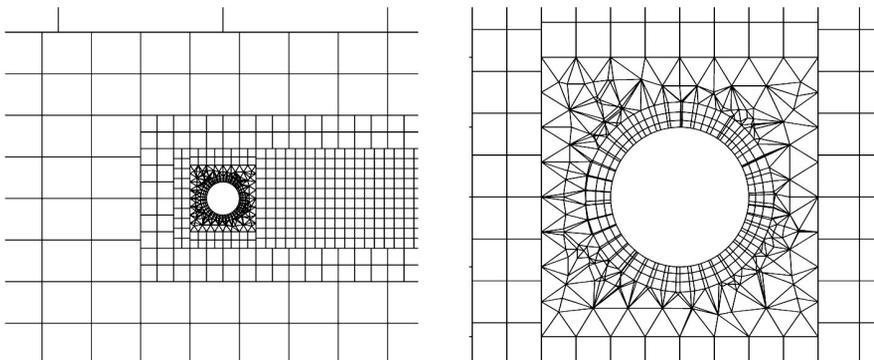


Abbildung 8. Detail-Ansichten des Rechengitters.

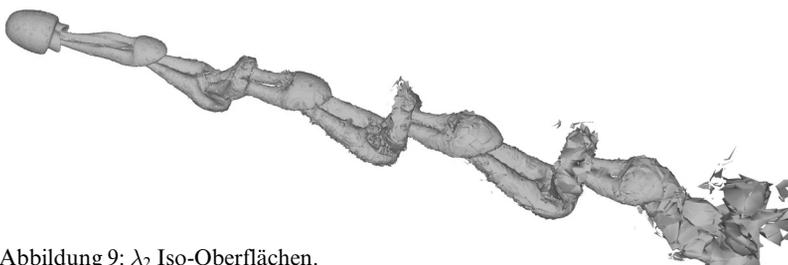


Abbildung 9:  $\lambda_2$  Iso-Oberflächen.

Die Koeffizienten für den Widerstand, die Amplituden der Oszillationen und die Strouhalzahl stimmen sehr gut mit denen in Tomboulides [38] und Johnson und Patel [23] überein, die sie in einer Simulation mit den inkompressiblen Navier-Stokes-Gleichungen erzielten.

## 7.2 Erdgaseinspritzung

Eine große Herausforderung für die numerische Simulation ist die Erdgaszuführung und die Vermischung mit der angesaugten Luft in einem Erdgas angetriebenen Fahrzeugmotor. Das Erdgas wird hier in die Luftströmung in einem dünnen Strahl mit Überschallgeschwindigkeit eingebracht. Eine schematische Skizze ist in Abbildung 10 aufgezeichnet. Der Überschallstrahl erzeugt Lärm, der diese Motoren lauter als die entsprechenden Benzinmotoren macht. Insofern ist in diesem Problem nicht nur die reine Strömung interessant, sondern auch Lärmentstehung und Ausbreitung und mögliche Maßnahmen zur Lärmreduktion. Die Machzahl der Einströmung mit  $M_a = 1,4$  in Zusammenhang mit den kleinen Abmessungen der Düse machen die numerische Simulation sehr aufwändig. Die Anfangswerte der Simulation lauten

$$T = 220 \text{ K}, \quad R = 287.058 \frac{\text{J}}{\text{kgK}}, \quad u, v, w = 0.0 \frac{\text{m}}{\text{s}}, \quad p = 1.0 \text{ bar}, \quad (50)$$

die Einströmung hat die Werte

$$u = 500 \frac{\text{m}}{\text{s}}, \quad p = 2.8 \text{ bar}, \quad (51)$$

Eine zeitgemittelte Simulation mit einem Turbulenzmodell ist für den gesamten Vorgang möglich. Diese enthält dann aber nicht den Vorgang des Öffnens des Ventils. Die durch das Öffnen entstehende erste Druckwelle wird aber wesentlich zum Lärm beitragen, sie wird durch das Rohr laufen und dort an den Wänden und an der Luftpfeileinströmung reflektiert mit dem ausgebildeten Strahl wechselwirken. Insofern ist der gesamte Vorgang instationär. Eine instationäre Simulation mit einem höherwertigen Turbulenzmodell lässt sich mit den bestehenden Rechenprogrammen wegen des hohen Rechenaufwandes von mehreren Wochen selbst auf Hochleistungsrechnern nicht ausführen. Hier möchten wir das STE-DG-Verfahren mit sehr flexiblen Gitter einsetzen, sehr kleine Gitterzellen am Gasstrahl und große in der sich wenig ändernden Luft-Querströmung. Die Möglichkeit der lokalen Zeitschritte sollte hier einen großen Vorteil bringen. Bislang gerechnet wurde allerdings lediglich die Düsenströmung des Erdgases im Überschall ohne Rohr und Querströmung.

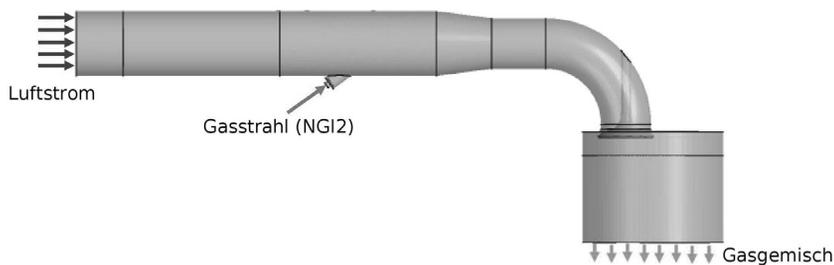


Abbildung 10. Schematische Darstellung der Erdgas-Einspritzung.

Um das Rechengebiet wurde ein sogenannter Sponge-Layer positioniert, in dem akustische Wellen gedämpft werden, um so größere Reflexionen zu vermeiden. In der Abbildung 11 ist die Dichteverteilung gezeichnet. Man sieht, dass es neben der Druckwelle durch den Einschaltvorgang vor allem zwei Bereiche gibt, in denen akustische Wellen entstehen und sich ausbreiten. Hochfrequenter Lärm entsteht direkt an der Einströmdüse, des weiteren wird Lärm durch die großen entstehenden Wirbel und durch deren Zerfall erzeugt. In Zusammenarbeit mit der Robert Bosch GmbH wurde dieses Problem im Rahmen der Doktorarbeit [36] experimentell und numerisch untersucht.

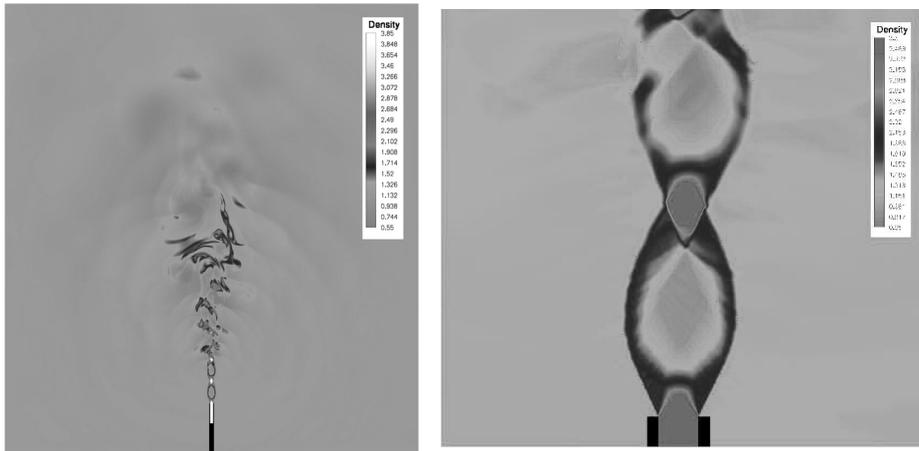


Abbildung 11. Dichteverteilung des Überschallstrahls, rechts vergrößerter Ausschnitt der Strömung an der Einströmdüse.

## 8 Zusammenfassung und Ausblick

Die wesentliche Eigenschaft der vorgestellten Klasse von Verfahren und allgemein von DG-Verfahren ist die Approximation hoher Ordnung in Raum und Zeit auf sehr allgemeinen unstrukturierten Gittern. Die DG-Verfahren liefern in praktischen Rechnungen tatsächlich die theoretische Voraussage und können für die Simulation von realen Anwendungen weitaus effizienter sein als bisherige Verfahren, insbesondere wenn eine hohe Genauigkeit der Ergebnisse gefragt ist. Der große Rechenaufwand pro Gitterzelle ließ sich in den letzten Jahren deutlich reduzieren, so dass diese Verfahren inzwischen mit den Finite-Volumen-Verfahren konkurrieren können. Es gibt sicherlich noch eine ganze Reihe von Aspekten, die noch nicht vollständig geklärt sind. So werden im Rahmen des EU-Projekts „ADIGMA – Adaptive High Order Variational Methods for Aerospace Applications“, in dem 22 Partner von Universitäten, Forschungseinrichtungen und der Luftfahrtindustrie von zehn Ländern zusammenarbeiten, untersucht, inwieweit die DG-Verfahren für künftige industrielle Anwendungen in der Luftfahrt geeignet sind. Robustheit, insbesondere bei der Approximation starker Gradienten, ist dabei noch ein Problem, welches nicht zufriedenstellend gelöst ist.

Das beschriebene explizite DG-Verfahren ist ein Kandidat für die Simulation von zeitabhängigen Problemen, insbesondere für die Simulation turbulenter Strömungen in komplexen Geometrien mit höherwertigen Turbulenzmodellen. Die lokale zeitgenaue Schrittweitensteuerung in Kombination mit dem expliziten Verfahren sollte insbesondere für Strömungssimulationen mit lokaler unterschiedlicher Auflösung sehr effizient sein. Wir haben in diesem Beitrag nichts über die adaptive Steuerung der Ordnung und des Gitters geschrieben. Zur Zeit betrachten wir den Sprung des numerischen und des

Flusses berechnet mit den inneren Werten. Ist dieser Sprung zu groß, muss die Auflösung verbessert werden und die Ordnung wird erhöht. Führt dies nicht zu einer Reduktion des Sprunges, dann wird die Gitterzelle unterteilt. Das explizite DG-Verfahren erscheint uns auch im Hinblick auf die künftigen Many-Core Prozessoren auf Parallelrechnern als sehr effizient, da pro Gitterzelle viel Rechenaufwand mit relativ wenig Daten anfällt.

## 9 Danksagung

Die Forschungsergebnisse, welche in dieser Arbeit beschrieben sind, wurden durch die Deutsche Forschungsgemeinschaft (DFG) im Rahmen der Forschergruppe FOR508 „Noise Generation in Turbulent Flow“ und im Rahmen des Schwerpunktprogramms 1276 „MetStroem: Skalenübergreifende Modellierung in der Strömungsmechanik und Meteorologie“ unterstützt.

## Literatur

- [ 1 ] Arnold, D. *An Inferior Penalty Finite Element Method with Discontinuous Elements*. PhD thesis, The University of Chicago, 1979.
- [ 2 ] Bassi, F., and Rebay, S. A high-order accurate discontinuous finite element method for the numerical solution of the compressible Navier-Stokes equations. *J. Comput. Phys.* 131 (1997), 267–279.
- [ 3 ] Brezzi, F., Marini, L., and Süli, E. Discontinuous Galerkin methods for first-order hyperbolic problems. *Math. Models Methods Appl. Sci.* 14 (2004), 1893–1903.
- [ 4 ] Cockburn, B., Hou, S., and Shu, C.-W. The Runge-Kutta local projection discontinuous Galerkin finite element method for conservation laws IV: The multidimensional case. *Math. Comput.* 54 (1990), 545–581.
- [ 5 ] Cockburn, B., Karniadakis, G. E., and Shu, C.-W. *Discontinuous Galerkin Methods*. Lecture Notes in Computational Science and Engineering. Springer, 2000.
- [ 6 ] Cockburn, B., Lin, S. Y., and Shu, C.-W. TVB Runge-Kutta local projection discontinuous Galerkin finite element method for conservation laws III: One dimensional systems. *J. Comput. Phys.* 84 (1989), 90–113.
- [ 7 ] Cockburn, B., and Shu, C.-W. TVB Runge-Kutta local projection discontinuous Galerkin finite element method for conservation laws II: General framework. *Math. Comput.* 52 (1989), 411–435.
- [ 8 ] Cockburn, B., and Shu, C.-W. The Runge-Kutta local projection  $p^l$ -discontinuous Galerkin method for scalar conservation laws. *MAN* 25 (1991), 337–361.
- [ 9 ] Cockburn, B., and Shu, C.-W. The Runge-Kutta discontinuous Galerkin method for conservation laws V: Multidimensional Systems. *J. Comput. Phys.* 141 (1998), 199–224.
- [10] Dumbser, M., Balsara, D. S., Toro, E. F., and Munz, C.-D. A unified framework for the construction of one-step finite-volume and discontinuous Galerkin schemes on unstructured meshes. *J. Comput. Phys.* 227 (2008), 8209–8253.
- [11] Dumbser, M., Eaux, C., and Toro, E. F. Finite volume schemes of very high order of accuracy for stiff hyperbolic balance laws. *J. Comput. Phys.* 227 (2008), 3971–4001.
- [12] Dumbser, M., Käser, M., Titarev, V. A., and Toro, E. F. Quadrature-free non-oscillatory finite volume schemes on unstructured meshes for nonlinear hyperbolic systems. *J. Comput. Phys.* 226 (2007), 204–243.

- [13] Dumbser, M., Käser, M., and Toro, E. F. An arbitrary high order discontinuous Galerkin method for elastic waves on unstructured meshes V: Local time stepping and  $p$ -adaptivity. *Geophysical Journal International* 171 (2007), 695–717.
- [14] Dumbser, M., and Munz, C.-D. Building blocks for arbitrary high order discontinuous Galerkin schemes. *Journal of Scientific Computing* 27 (2006), 215–230.
- [15] Ern, A., and Guermond, J.-L. Discontinuous Galerkin methods for Friedrichs’ systems. I. General theory. *SIAM J Numer. Anal.* 44 (2006), 753–778.
- [16] Gassner, G., Lörcher, F., C.-D. Munz, and J. S. Hesthaven. Polymorphic nodal elements and their application in discontinuous Galerkin methods. *J Comput. Phys.* 228 (2009), 1573–1590.
- [17] Gassner, G., Lörcher, F., and Munz, C.-D. A contribution to the construction of diffusion fluxes for finite volume and discontinuous Galerkin schemes. *J Comput. Phys.* 224, 2 (2007), 1049–1063.
- [18] Gassner, G., Lörcher, F., and Munz, C.-D. A discontinuous Galerkin scheme based on a space-time expansion. II. Viscous flow equations in multi dimensions. *J. Sei. Comp.* 34, 3 (2008), 260–286.
- [19] Godunov, S. K. A difference method for the numerical calculation of discontinuous solutions of hydrodynamic equations. *Mat. Sbornik* 47 (1959), 271–306.
- [20] Harten, A., Engquist, B., Osher, S., and Chakravarthy, S. Uniformly high order essentially non-oscillatory schemes, III. *J. of Comput. Phys.* 77(1987), 231–303.
- [21] Hesthaven, J., and Warburton, T. Nodal high-order methods on unstructured grids I: Time-domain solution of Maxwell’s equations. *J. Comput. Phys.* 181, 1 (2002), 186–221.
- [22] Hesthaven, J., and Warburton, T. *Nodal Discontinuous Galerkin Methods: Algorithms, Analysis, and Applications*. Springer Verlag, New York, 2008.
- [23] Johnson, T., and Patel, V. Flow past a sphere up to a Reynolds number of 300. *J. Fluid. Mech.* 378 (1999), 19–70.
- [24] Kanevsky, A., Carpenter, M., Gottlieb, D., and Hesthaven, J. Application of implicit-explicit high-order Runge-Kutta methods to discontinuous Galerkin schemes. *J. Comput. Phys.* 225 (2007), 1753–1781.
- [25] Lax, R., and Wendroff, B. Systems of conservation laws. *Communications in Pure and Applied Mathematics* 13 (1960), 217–237.
- [26] Lesaint, R., and Raviart, R.-A. On a finite element method for solving the neutron transport equation. In *Mathematical Aspects of Finite Elements in Partial Differential Equations.*, C. de Boor, Ed. Academic Press, New York, 1974, pp. 89–145.
- [27] Le Veque, R. *Numerical Methods for Conservation Laws, 2nd edition*. Birkhäuser-Verlag, 2005.
- [28] Lörcher, F., Gassner, G., and Munz, C.-D. A discontinuous Galerkin scheme based on a space-time expansion. I. Inviscid compressible flow in one space dimension. *J. Sei. Comp.* 32, 2 (2007), 175–199.
- [29] Lörcher, F., Gassner, G., and Munz, C.-D. An explicit discontinuous Galerkin scheme with local time-stepping for general unsteady diffusion equations. *J. Comput. Phys.* 227, 11 (2008), 5649–5670.
- [30] Lörcher, F., and Munz, C.-D. Lax-Wendroff-type schemes of arbitrary order in several space dimensions. *IMA J. Num. Anal.* 27 (2007), 593–615.
- [31] Morton, K. W., and Sonar, T. Finite volume methods for hyperbolic conservation laws. *Acta Numerica* 16 (2007), 155–238.
- [32] Nitsche, J. A. Über ein Variationsprinzip zur Lösung von Dirichlet-Problemen bei Verwendung von Teilräumen, die keinen Randbedingungen unterworfen sind. *Abh. Math. Sem. Univ. Hamburg* 36 (1971), 9–15.
- [33] Panek, L., Schönwald, N., Thiele, F., Dumbser, M., and Munz, C.-D. Comparison of numerical approaches for the Simulation of sound radiation from a scarfed inlet. In *Proceedings of the 14th International Conference on Sound and Vibration (ICSV14)*, Cairns, Australia (2007).

- [34] Qiu, J., Khoo, B. C., and Shu, C.-W. A numerical study for the performance of the Runge-Kutta discontinuous Galerkin method based on different numerical fluxes. *J. Comput. Phys.* 212 (2006), 540–565.
- [35] Reed, W., and Hill, T. Triangular mesh methods for the neutron transport equation. Technical Report LA-UR-73-479, Los Alamos Scientific Laboratory, 1973.
- [36] Schönrock, O. *Numerical prediction of flow induced noise in free jets of high Mach numbers*. Dissertation, University of Stuttgart, 2008.
- [37] Taube, A., , Dumbser, M., Munz, C.-D., and Schneider, R. A high order discontinuous Galerkin method with local time stepping for the Maxwell equations. *Int. J. of Numerical Modeling: Electronic Networks, Devices and Fields* (2008).
- [38] Tomboulides, A. *Direct and large-eddy simulation of wake flows: Flow past a sphere*. PhD thesis, Princeton University, 1993.
- [39] Toro, E. *Riemann Solvers and Numerical Methods for Fluid Dynamics*. Springer, June 1999.
- [40] Van der Vegt, J. J. W., and van der Ven, H. Space-time discontinuous Galerkin finite element method with dynamic grid motion for inviscid compressible flows: I. General formulation. *J. Comput. Phys.* 182, 2 (2002), 546–585.
- [41] Woodward, P., and Colella, P. The numerical simulation of two-dimensional fluid flow with strong shocks. *J. Comput. Phys.* 54 (1984), 115–173.



## Geomathematik, was ist das überhaupt?

Willi Freeden

### Abstract

- Mathematics Subject Classification: 86A04
- Keywords and Phrases: Geomathematik – Rolle, Aufgaben, Potenzial.  
Geomathematics – role, aims, potential.

Während der letzten Dekaden wurden die Geowissenschaften und das Geoingenieurwesen durch zwei wesentliche Szenarien beeinflusst: Zum einen hat der technologische Fortschritt vollständig die Beobachtungs- und Messtechniken verändert, zum andern gibt es ein wachsendes öffentliches Interesse an der Zukunft unseres Planeten, seines Klimas, seiner Umwelt und an dem erwarteten Rohstoffmangel. Beide Aspekte erfordern den starken Bedarf neuer und innovativer mathematischer Strukturen, Hilfsmittel und Methoden, d. h. Geomathematik. Die vorliegende Note stellt einen Versuch dar, Geomathematik in ihrer Rolle, ihren Aufgaben und ihrem Potenzial zu beschreiben.

During the last decades, geosciences and geoengineering were influenced by two essential scenarios: on the one hand technological progress has changed completely the observational and measurement techniques, on the other hand there is a growing public concern about the future of our planet, its climate, its environment, and about the expected shortage of natural resources. Both aspects demand the strong need for new and innovative structures, tools and methods, i.e., geomathematics. The present note represents an attempt to describe geomathematics in its role, its aims, and its potential.

Eingegangen: 04.06.2009

Willi Freeden, TU Kaiserslautern, AG Geomathematik,  
freeden@mathematik.uni-kl.de

**DMV**  
**JAHRESBERICHT**  
**DER DMV**  
© Vieweg+Teubner 2009

## 1 Einleitung

Auf die Anfrage, das Herausbergremium einer künftigen Zeitschrift „Geomathematics (GeM)“ zu komplettieren, entgegnete ein bekannter deutscher Geophysiker: „Bei allem Respekt, aber warum noch ein Journal? Und für Geomathematik (Was ist das überhaupt?) brauchen wir meiner Meinung nach bestimmt kein neues Journal!“ Vor diesem Hintergrund lautete meine knapp gehaltene Antwort: „Geophysik ist doch eine Tochterwissenschaft der Physik. Meinem Kenntnisstand nach unterscheidet sie sich von den anderen physikalischen Disziplinen durch ihre Beschränkung auf bestimmte Untersuchungsobjekte, eben die von geowissenschaftlichem Charakter. Warum sollte also der Mathematik verwehrt bleiben, was die Physik schon seit Emil Wiecherts Zeit Ende des 19. Jahrhunderts als ihr kanonisches Recht ansieht?“ Ich weiß nicht, ob diese dem Inhalt nach mehr formelle Antwort meinen Kollegen zu überzeugen vermochte. Mich selbst veranlasste seine Frage zu einer breiteren und offensiveren Darstellung meiner Meinung, dass es heutzutage – mehr denn je – gewichtige Gründe für einen wohldefinierten Platz der Geomathematik als Tochter der Mathematik und gleichzeitig der Geowissenschaften gibt. Die Gründe erklären sich zum einen intrinsisch aus dem Selbstverständnis der Mathematik, zum anderen verstehen sie sich aus der besonderen gegenwärtigen Situation der Geowissenschaften. Im Folgenden will ich meine Gesichtspunkte näher darlegen. Meine Wunschvorstellung wäre es, nicht nur unseren Geophysiker, sondern ein breites Publikum zu überzeugen: „Geomathematik, das ist was! Sie besitzt ihr adäquates Forum innerhalb der Mathematik, sie hat ihren vollwertigen Platz innerhalb der Geowissenschaften!“.

## 2 Geomathematik als Kulturgut

Geomathematik kann man nur gerecht werden, wenn ihre historische Bedeutung kurz beleuchtet wird. Den ältesten schriftlich überlieferten Zeugnissen nach ist Mathematik hervorgegangen im sumerischen Babylon aus den praktischen Aufgaben des Messens, Zählens und Rechnens zur Feldbewirtschaftung und Vorratshaltung. Ihre erste Blüte erlebte die mit geowissenschaftlich relevanten Fragen befasste Mathematik in der Antike, z. B. mit der Berechnung des Erdradius durch den Alexandriner Eratosthenes (176–195 v. Chr.). Von den Arabern ist etwa für das Jahr 827 n. Chr. eine nordwestlich von Bagdad ausgeführte Gradmessung überliefert. Weitere Schlüsseletappen geomathematischer Forschung führen uns über den Orient ins abendländische Mittelalter und die Neuzeit. N. Kopernikus (1473–1543) gelingt der Übergang vom geozentrischen Weltssystem des Ptolemäos zum heliozentrischen System. J. Kepler (1571–1630) findet die Gesetze der Planetenbewegungen. Weitere Meilensteine aus historischer Sicht sind z. B. die Begründung der Lehre des Erdmagnetismus durch W. Gilbert (1544–1608), die Entwicklung von Triangulationsmethoden bei Gradnetzbestimmungen durch T. Brahe (1547–1601) und W. Snellius (1580–1626), die Fallgesetze des G. Galilei (1564–1642) und die Grundzüge der Ausbreitung von Erdbebenwellen durch C. Huygens (1629–

1695). Die vom Engländer I. Newton (1643–1727) formulierten Gravitationsgesetze machen klar, dass die Erdanziehungskraft (auch Schwere genannt) mit der Entfernung von der Erde abnimmt. Im 17. und 18. Jahrhundert übernimmt Frankreich eine wesentliche Rolle durch die Gründung der Akademie in Paris (1666). Erfolgsetappen sind die Theorie des isostatischen Ausgleichs der Massenverteilung in der Erdkruste durch P. Bouguer (1698–1758), die Berechnung der Erdfigur, insbesondere der Polabplattung, durch P.L. Maupertuis (1698–1759) und A.C. Clairaut (1713–1765) sowie die Entwicklung des Kalküls der Kugelfunktionen durch A.M. Legendre (1752–1833) und P.S. Laplace (1749–1829). Das 19. Jahrhundert ist wesentlich geprägt durch das Werk von C.F. Gauß (1777–1855). Besonders hervorzuheben sind die Berechnung der ersten Fourierkoeffizienten der Kugelfunktionsentwicklung des Erdmagnetfeldes, die Hypothese elektrischer Ströme in der Ionosphäre sowie die Definition der Niveaufläche des Geoids (der Begriff „Geoid“ stammt allerdings vom Gauß-Schüler J.B. Listing (1808–1882)). Ende des 19. Jahrhunderts wurde die Grundidee der Dynamotheorie in der Geomagnetik durch B. Stewart (1851–1935) geboren, u.v.a. Diese unvollständige (nicht einmal das letzte Jahrhundert enthaltende) Liste zeigt bereits, dass historisch gesehen Geomathematik eine der großen Errungenschaften der Menschheit ist.

### 3 Geomathematik als Aufgabe und Ziel

Geomathematik aus heutiger Sicht widmet sich den qualitativen und quantitativen Eigenschaften der aktuell vorhandenen oder möglichen Strukturen unseres Erdsystems. Sie ist Garant und Patin zugleich für den Begriff von Wissenschaftlichkeit in der Erdsystemforschung. Das System Erde besteht dabei aus einer Anzahl von Elementen, die selbst wieder Systeme darstellen (vgl. z. B. [6]). Die Komplexität des Gesamtsystems Erde wird bestimmt durch interagierende physikalische, biologische und chemische Prozesse, die Energie, Material und Information transformieren und transportieren. Es ist gekennzeichnet durch natürliche, soziale und ökonomische Prozesse, die zur gegenseitigen Beeinflussung führen. Folglich ist für ein Verstehen ein simples Ursache-Wirkungsdenken völlig ungeeignet. Erforderlich ist ein Denken in dynamischen Strukturen und das Bewusstsein multipler, unvorhergesehener, sicherlich auch manchmal unerwünschter Effekte bei Eingriffen. Inhärente Vernetzungen müssen erkannt und genutzt werden, Selbstregulierung ist zu beachten. Alle diese Aspekte machen eine Mathematik unabdingbar, die mehr als eine Ansammlung von Theorien und numerischer Verfahren sein muss. Die sich den Geowissenschaften widmende Mathematik, d. h. Geomathematik, ist ihrem Wesen nach nichts anderes als die Organisation der Komplexität des Systems Erde. Dazu gehören anschauliches Denken zur Verdeutlichung abstrakter komplexer Sachverhalte, richtige Vereinfachung der komplizierten Interaktionen, ein angemessenes mathematisches Begriffssystem zur Beschreibung und die Genauigkeit im Denken und Formulieren. Geomathematik wird somit zur Schlüsselwissenschaft des komplexen Systems Erde. Wo immer es Daten und Beobachtungen gibt, z. B. bei den diversen skalaren, vektorialen und tensorialen Clustern von Satellitendaten, wird es mathematisch

(vgl. [14]). Statistik dient z. B. der Entrauschung, konstruktive Approximation der Komprimierung und Auswertung, spezielle Ansatzsysteme von Funktionen geben georelevante graphische und numerische Darstellungen – dies alles mit mathematischen Algorithmen.

Geomathematik hat als spezifische Aufgabe, eine Brücke zwischen der mathematischen Theorie und der geotechnischen Anwendung zu spannen. Der besondere Reiz dieser Tochter der Mathematik begründet sich daher im regen Gedankenaustausch zwischen der mehr an Modellbildung, theoretischer Fundierung und approximativer sowie numerischer Problembewältigung interessierten Gruppe angewandter Mathematiker und der mehr mit Messtechnik, Methodik der Datenanalyse, Implementation von Routinen und Software-Anwendung vertrauten Gruppe der Georingenieure und -physiker. Das Spektrum moderner Geowissenschaften, welches im Fokus der Geomathematik (vgl. Abbildung 1) steht, ist nicht zuletzt wegen immer stärker werdender Beobachtungsdiversität breit gefächert. Gleichzeitig vergrößert sich der „Kasten“ mathematischer Werkzeuge. Eine Besonderheit liegt darin, dass Geomathematik sich vornehmlich mit jenen Gebieten der Erde befasst, die für direkte Messungen nur unzureichend oder (auch durch Fernerkundungsmethoden) nicht zugänglich sind. Inverse Methoden zur mathematischen Auswertung sind dann unumgänglich. Diese laufen meist darauf hinaus, dass ein physikalisches Feld nahe der Erdoberfläche ausgemessen wird, um es dann mit mathematischen Methoden in die interessierenden Tiefen- und Höhenbereiche fortzusetzen („downward and upward continuation“).

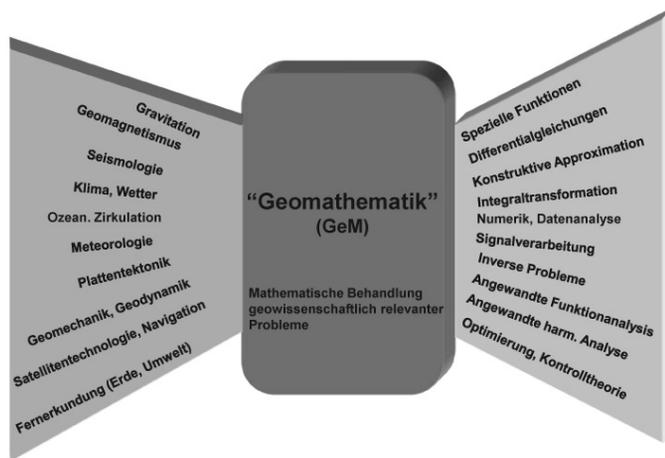


Abbildung 1. Geomathematik, ihr Fachspektrum und ihre Werkzeuge.

#### 4 Geomathematik als Querschnittswissenschaft

Einmal mehr sollte festgehalten werden, dass heute der Computer und die Messtechnik zu einer explosionsartigen Ausbreitung von Mathematik in fast allen Bereichen der Gesellschaft geführt haben. Die Mathematik als Querschnittswissenschaft durchzieht fast

alle Bereiche unseres Lebens. Als Folge steht Mathematik in enger Wechselwirkung mit nahezu allen Wissenschaften bis hin zur Medizin und Teilen der Geisteswissenschaften (Mathematisierung der Wissenschaften). Der Einsatz des Computers befähigt zur Behandlung komplizierter Modelle zu realen Datensätzen. Modellierung, Berechnung und Visualisierung führen zu zuverlässigen Simulationen von Prozessen und Produkten. Mathematik ist dabei der „Rohstoff“ der Modelle und das Wesen jeder Computersimulation; sie bildet den Mittler (d. h. die Schlüsseltechnologie), um die Bilder der realen Welt in Modelle der virtuellen Welt umzusetzen und umgekehrt (für weitere Ausführungen sei z. B. auf [19], [4] verwiesen).

Die besondere Rolle der Mathematik als Querschnittswissenschaft wird in den letzten Jahren von Technik, Wirtschaft und Handwerk zunehmend anerkannt. Dieser Prozess hat aber auch Rückwirkungen auf die Mathematik selbst. Neue mathematische Fachrichtungen wie Wissenschaftliches Rechnen (Scientific Computing), Finanz- und Wirtschaftsmathematik, Technomathematik, Biomathematik und eben auch Geomathematik haben sich den traditionellen hinzugesellt. Die Querschnittseigenschaft impliziert auch den fachübergreifenden Charakter des Mathematikunterrichts (vgl. die exzellente Darstellung [22]). Beziehungen und Bezüge zu den anderen Disziplinen (insbesondere zur Informatik, Physik, Chemie, Biologie, aber auch zur Ökonomie und Geographie) werden zusehends wichtiger, interessanter und ausbaufähiger. Die Problemfelder der Mathematik werden anschaulich, beobachtbar, visualisierbar. Dies gilt unzweifelhaft und selbstverständlich auch für das System Erde.

## 5 Geomathematik als Herausforderung

Für Wissenschaft und Technik war das vergangene 20. Jahrhundert eine Zeitspanne mit zwei völlig verschiedenen Gesichtern für Forschung und ihre Folgen. Die ersten zwei Drittel dieses Jahrhunderts waren geprägt vom Aufbruch in eine unerschöpflich scheinende Zukunft von Wissenschaft und Technik, sie waren gekennzeichnet von einem unbedingten Glauben an den technischen Fortschritt, der schließlich alles erreichbar macht. Bis in die 60er Jahre glaubte der Mensch, zum Herrscher über die Erde geworden zu sein (beachte, Beherrschen wird auch in den Geowissenschaften synonym für Verstehen gebraucht). Wegeners Drifttheorie ließ uns die Plattentektonik verstehen, Arktis und Antarktis wurden in das Blickfeld geowissenschaftlicher Forschung gerückt, der Mensch begann mit Satelliten den Weltraum zu erobern und damit zum ersten Mal in seiner Geschichte die Erde global ausmessbar zu machen etc. Im letzten Drittel des vergangenen Jahrhunderts keimte dann tiefe Skepsis, ob der wissenschaftliche und technische Fortschritt uns wirklich vorangebracht hatte und ob das Erreichte in seinen Auswirkungen verantwortbar war. Als Folge des vom Club of Rome vorhergesagten Schreckgespensts Rohstoffmangel (Öl- und Gasreserven) wurde während der 70er Jahre die geologisch-geophysikalische Lagerstättenerkundung angekurbelt (vgl. [13]). Mehr noch, die letzten beiden Dekaden des Jahrhunderts weiteten den Blick für die globalen Probleme des Umgangs mit Klima und Umwelt. Das Bewusstsein wurde geschärft für

die Gefahren durch Naturgewalten, von Erdbeben und Vulkanausbrüchen bis zur Temperaturentwicklung und zum Ozonloch. Der Mensch vergegenwärtigte sich seines Lebensraums. In der Tat ist die (von Ozeanographen manchmal geäußerte) Vorstellung nicht abwegig, die Erde sei eine vom Regen feuchte Kartoffel (vgl. Abbildung 2). Der feuchte Film auf dieser Kartoffel, vielleicht einen Bruchteil von einem Millimeter dick, ist der Ozean. Die gesamte Atmosphäre, die das Wetter- und Klimageschehen beherbergt, ist nur unwesentlich dicker. Fläche, aus dem Wasserfilm herausragende Verbeulungen wären die Kontinente. Das gesamte menschliche Leben spielt sich in einem sehr kleinen Außenschalenbereich (von wenigen Kilometern in der Vertikalausdehnung) ab. Der an sich hervorragende Vergleich mit der Kartoffel beinhaltet jedoch nicht explizite Information über Gravitation, Magnetfeld, Deformation, Wind- und Wärmeverteilung, ozeanische Strömung, innere Strukturen etc.

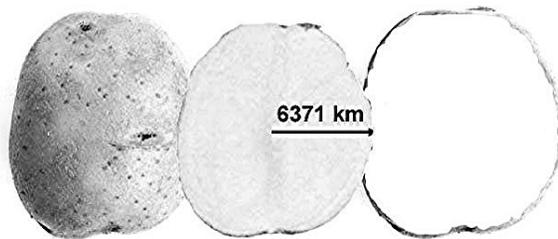


Abbildung 2. Kartoffel „Erde“ (links), die Dimension der Erde (Mitte), der Lebensraum des Menschen (rechts).

In unserem 21. Jahrhundert scheinen nun die Geoprobleme die wissenschaftlichen Programme und Lösungsvorschläge zu überrollen. Die Frage scheint angebracht und dringlich: „Was verträgt unsere Erde noch?“ Tatsächlich gibt es eine Vielzahl an tiefgreifenden Veränderungen in den letzten Dekaden, z. B. Artenverlust, Klimawandel, Wüstenbildung, Meeresströmungen, Atmosphärenzusammensetzung, Übergang des Magnetfeldes von der Dipolstruktur zum Quadrupolfeld usw., die sich dramatisch beschleunigt haben. Hauptursachen für die Mehrzahl dieser Phänomene sind ungebremstes Wachstum in der Industriegesellschaft (Bevölkerung, Konsum, Ressourcenverbrauch, Landverbrauch, Energieverbrauch) und tiefe Armut in den Entwicklungs- und Schwellenländern. Bedrohlich daran ist die sehr große Veränderung in äußerst kurzer Zeit; es gibt keine vergleichbare Entwicklung in der Dynamik des Systems Erde. Die von Menschen bewirkten Veränderungen erfolgen schneller als Veränderungen durch natürliche Schwankungen. Zudem offenbart die gegenwärtige Finanzkrise, dass unser westliches Wohlstandsmodell (gültig für etwa 1 Mrd. Menschen) nicht auf 5–8 Mrd. global übertragen werden kann. Massive Auswirkungen für den Menschen sind unausweichlich. Das erschreckende Resümee ist, dass die angehäuften erdwissenschaftlichen Fragen heute gebündelt auf dem Tisch liegen. Interdisziplinäre Lösungen unter intensiver Einbeziehung und Beteiligung der Mathematik als Antwort auf die Fragen einer immer komplexeren Welt sind dringend erforderlich. Geomathematik ist unabdingbar für

eine Entwicklung, die sowohl zukunftsfähig als auch nachhaltig ist. Aber die wissenschaftliche Herausforderung besteht nicht nur in einem Mehr an führender Präsenz von Mathematik innerhalb des bisherigen „Wissenschaftskonsortiums Erde“. Es geht auch darum, den Stellenwert „Erde“ innerhalb der Mathematik (wieder) höher anzusetzen und die Mathematiker selbst stärker zu begeistern. Bisher ist es gängige und gute Gepflogenheit für anwendungsorientierte Fachbereiche und Forschungsinstitutionen innerhalb der Mathematik, die Anwendungen in Technik, Wirtschaft, Finanzen bis hin zur Medizin dem wissenschaftlichen Nachwuchs als karrierefördernd darzustellen. In diese Phalanx kann sich aber Geomathematik mit aktuellen Themen wie z. B. Exploration, Geothermie, Navigation nahtlos einreihen. Die Mathematik sollte bei diesen anspruchsvollen und volkswirtschaftlich hochinteressanten Themen Leit- und nicht nur Servicefunktionen übernehmen. Aber auch Grundlagenforschung ist unverzichtbar. Verstecken wir uns nicht hinter den anderen Geowissenschaften! Warten wir nicht auf die nächste schreckliche Naturkatastrophe in Mitteleuropa! Es ist jetzt an der Zeit, eine stärkere Öffnung hin zu georelevanten Anwendungsbereichen zu zeigen. Die Erde als komplexes, aber begrenztes System (mit ihren globalen Klima-, Umwelt-, Ressourcen- und Bevölkerungsproblemen) bedarf neuer politischer Strategien, die in der Konsequenz unser geändertes Verständnis von „well being“ (z. B. in sozialem Umfeld, Gesundheit, Arbeit, Selbständigkeit, finanzielle Situation, Sicherheit etc.) schrittweise in Forschung und Lehre an Universitäten und Hochschulen einfordern werden. Dies wird ein schwieriger Prozess. Letztendlich – ich wage die Prognose – wird er auch zu einer geänderten Berufungspraxis an den Universitäten und Hochschulen führen. Ausschreibungen im Bereich Geomathematik werden sich in Anzahl und Bedeutung erhöhen, um die Attraktivität zu steigern, aber auch um Allgemeinverantwortung gegenüber der Gesellschaft zu übernehmen. Zusätzlich werden sich die curricularen Standards und Leitbilder für den Schulunterricht in Mathematik ändern. Eifersüchteleien und Bedenken auf dem Weg dorthin werden wir uns kaum noch leisten können.

## 6 Geomathematik als Lösungspotenzial

Die bisherige Methodik der angewandten Mess- und Auswertungsverfahren variiert stark je nach der untersuchten Messgröße (Erdbeschleunigung, elektrische bzw. magnetische Feldstärke, Temperatur und Wärmefluss, etc.), dem beobachteten Frequenzbereich und der dabei auftretenden grundlegenden „Feldcharakteristik“ (Potenzialfeld, Diffusionsfeld oder Wellenfeld, jeweils abhängig von den zugrunde liegenden Differenzialgleichungen). Insbesondere hat die Differenzialgleichung großen Einfluss auf die Auswertungsverfahren. Daher seien hier – wie in den Geowissenschaften üblich – die typischen mathematischen Erkundungsverfahren nach der zutreffenden „Feldcharakteristik“ aufgeführt.

- Potenzialverfahren (Potenzialfelder, elliptische Differenzialgleichungen) in Gravimetrie, Geomagnetik, Geoelektrik, Geothermie, ...
- Diffusionsverfahren (Diffusionsfelder, parabolische Differenzialgleichungen) in Magnetotellurik, Geoelektromagnetik, ...

- Wellenverfahren (Wellenfelder, hyperbolische Differenzialgleichungen) in Seismologie und Seismik, Georadar, ...

Die Diversität der mathematischen Erkundungsverfahren wird sich in Zukunft mit der technologischen Entwicklung von Computer- und Messtechnik erhöhen. Es gilt, viel intensiver als bisher, Modellierungen und Simulationen zu kombinierten und vernetzten Daten- und Observablenstrukturen anzustreben.

Die Vorgehensweise (d. h. der „Kreislauf“) zur Lösung praktischer Probleme hat in der Regel folgende Komponenten (vgl. [4]):

- *Mathematische Modellbildung*: Das praktische Problem wird in die Sprache der Mathematik übersetzt. Dies erfordert die Zusammenarbeit zwischen Anwendern und Mathematikern.
- *Mathematische Analyse*: Die resultierende mathematische Aufgabe wird auf ihre „Wohlgestelltheit“ (d. h. Existenz, Eindeutigkeit, Abhängigkeit von den Eingabedaten) überprüft.
- *Entwicklung und Ausführung eines mathematischen Lösungsverfahrens*: Geeignete analytische, algebraische und/oder numerische Methoden und Verfahren zur konkreten Lösung müssen der Aufgabenstellung angepasst oder gegebenenfalls neue Methoden entwickelt werden. Der Lösungsprozess wird durch Zerlegung in Einzeloperationen effizient und ökonomisch ausgeführt, in der Regel auf Computern.
- *Rückübertragung aus der Sprache der Mathematik in die Anwendung*: Die Ergebnisse werden in geeigneter Weise illustriert, um ihre Beurteilung zu sichern. Das mathematische Modell wird an realen Daten validiert und gegebenenfalls modifiziert. Eine gute Übereinstimmung von Modell und Realität wird angestrebt.

Der Vorteil und der Nutzen dieser mathematischen Vorgehensweise bestehen in der besseren, schnelleren, billigeren und sichereren Problemlösung, und zwar mit den bereits genannten Mitteln der Simulation, der Visualisierung und der Reduktion von Datenfluten. Was erlaubt nun den Mathematikern die Brückenschläge zwischen verschiedenartigen Gebieten? Die Zahlen- und Formenwelt der Mathematik enthält sehr effiziente Kürzel, mit denen wir den regelhaften Aspekt realer Phänomene beschreiben können. Diese Beschreibung beinhaltet u. a. eine Vereinfachung durch Abstraktion: Wesentliche Eigenschaften eines Problems werden von unwichtigen getrennt und gehen in ein Lösungsschema ein. Der mathematische Blick für Gemeinsamkeiten erlaubt oft nachträglich zu erkennen, dass ein geeignet reduziertes Problem auch aus ganz anderen Zusammenhängen entstehen kann und entsprechend die entstehenden Lösungen bei angemessener Anpassung bzw. Konkretisierung vielseitig verwendbar werden. Ohne diesen zweiten Schritt bleibt die Abstraktion in ihrem Wesen leer (vgl. [4]). Dieses Wechselspiel zwischen Abstraktion und Konkretisierung kennzeichnet die Entstehungsgeschichte, aber auch die heutige rasante Weiterentwicklung der Mathematik als verbindende Sprache und als eigenständige Wissenschaft. Eine durch Abstraktion reduzierte Problemstellung wird selbst als neues „konkretes“ zu lösendes Problem betrachtet und in einen allgemeinen Rahmen gestellt, innerhalb dessen eine eventuell gefundene Lösung Gültigkeit besitzt. Je mehr Beispiele man kennt, desto mehr erkennt man den ursächlichen

Zusammenhang zwischen der Abstraktheit mathematischer Konzepte mit deren Schlag- und Querschnittskraft.

Selbstverständlich steht Geomathematik in enger Wechselbeziehung mit Geoinformatik, Geoingenieurwesen und Geophysik. Aber Geomathematik unterscheidet sich auch grundsätzlich von diesen Disziplinen (vgl. [14]). Ingenieure und Physiker benötigen die mathematische Sprache als Hilfsmittel und Werkzeug. Inhalt der Geomathematik ist aber auch die Fortentwicklung der Sprache selbst. Gegenstand der Geoinformatik ist Design und Architektur von Prozessoren und Computern, Datenbanken und Programmiersprachen usw. im georeflektierten Umfeld. Für Geomathematik sind Computer allerdings nicht Studienobjekte, sondern technische Hilfsmittel zum Lösen mathematischer Probleme der Georealität.

## 7 Ansatzfunktionen – global und/oder lokal

Bisherige Ansatzfunktionen zur Beschreibung geowissenschaftlich relevanter Größen tragen häufig der (nahezu) sphärischen Erdgestalt Rechnung. Mit modernen Satellitenpositionierungsmethoden kann nämlich die maximale Abweichung der tatsächlichen Erdoberfläche vom mittleren Erdradius (6371 km) geringer als 0.4 Prozent aufgewiesen werden. Eine mathematische Formulierung im sphärischen Kontext ist somit eine zwar einschränkende, aber zumindest für eine große Anzahl von Problemen doch zulässige Simplifizierung. Gewöhnlich betrachtet man in den Geowissenschaften als Referenzraum für Ansatzfunktionen einen separablen Hilbertraum mit (bekannter) polynomialer Basis. Eine Standardtechnik der Approximation aus diskreten Daten seit C. F. Gauß (1835) ist die Fourierreihe in einer Orthogonalbasis (d. h. Kugelfunktionsbasis). Charakteristisch für einen solchen Zugang ist, dass die polynomialen Ansatzfunktionen keine Ortslokalisierung zeigen. Im Spektralraum (hier Frequenzraum genannt) korrespondiert jede Kugelfunktion nämlich mit genau einem einzigen Fourierkoeffizienten. Wir sprechen daher von idealer Frequenzlokalisierung. Wegen der idealen Frequenzlokalisierung und dem simultanen Verzicht auf Ortslokalisierung beeinflussen lokale Datenänderungen alle (durch Globalintegration ermittelten) Fourierkoeffizienten. In der Konsequenz führt dies auch zu globalen Änderungen der Datendarstellungen im Ortsraum. Nichtsdestoweniger lässt sich vermerken, dass ideale Frequenzlokalisierung sich als äußerst vorteilhaft aufgrund der bedeutsamen physikalischen Interpretierbarkeit (als Multipolmomente) des Modells und wegen der einfachen Vergleichbarkeit der Fourierkoeffizienten für geophysikalisch in Interrelation stehende Observablen erweist. Wünschenswert aus mathematischer und physikalischer Sicht wären allerdings Ansatzfunktionen, die sowohl ideale Frequenz- als auch Ortslokalisierung zeigen. Ein solches ideales System von Ansatzfunktionen würde Modelle höchster räumlicher Resolution bei gleichzeitiger Interpretierbarkeit der einzelnen Frequenzen zulassen. Das Unschärfeprinzip (vgl. [7], [10]), welches Frequenz- und Ortslokalisierung qualitativ und quantitativ verbindet, lehrt uns jedoch, dass beide Eigenschaften (abgesehen vom trivialen Fall) gegenseitig ausgeschlossen sind.

Legendre Kern	zonale Kerne		Dirac Kern
	allgemeiner Fall		
	bandlimitiert	ortslimitiert (kompakter Träger)	

Tabelle 1: Vom Legendre Kern über zonale Kerne zum Dirac Kern.

Extreme Vertreter von Ansatzfunktionen (vgl. die Klassifikation in Tabelle 1) sind nach dem Unschärfeprinzip auf der einen Seite Polynome, d. h. im sphärischen Kontext Kugelfunktionen (ideale Frequenz-, aber keine Ortslokalisation) und auf der anderen Seite Dirac Kerne (ideale Orts-, aber keine Frequenzlokalisation). Folglich sind Fouriermethoden mittels orthogonaler Kugelfunktionen gut geeignet, niedere und mittlere Frequenzphänomene aufzulösen, während hohe Resolution globaler und/oder lokaler „Signale“ sich als kritisch darstellt. Dieses Phänomen ist auch aus der theoretischen Physik bekannt. Zum Beispiel sind ebene Wellen mit festen Frequenzen Lösungen bestimmter Differenzialgleichungen, sie reflektieren aber nicht die Realität. Erst Wellenpakete gewinnen ein Maß an Orts- und Frequenzlokalisation. In ähnlicher Weise leiten uns geeignete Superpositionen polynomialer Ansatzfunktionen zu Kernfunktionen (Kernen), die einen Kompromiss zwischen reduzierter Frequenz- und wachsender Ortslokalisation gewähren. Mehr noch, ist der Kern eine endliche Superposition polynomialer Ansatzfunktionen, so spricht man von einem bandlimitierten Kern (vgl. Abbildung 3), im anderen Fall haben wir es mit einem nicht-bandlimitierten Kern zu tun.

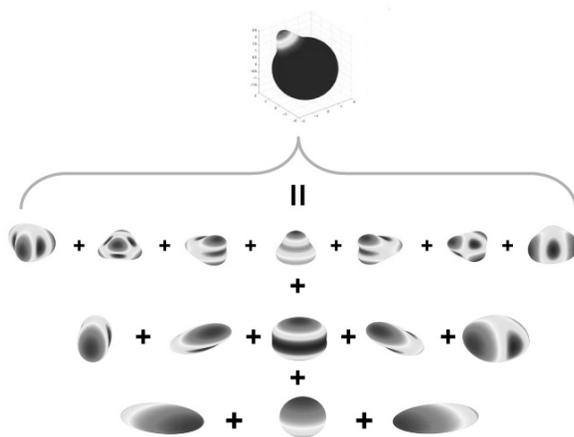


Abbildung 3. Summation von Kugelfunktionen zur Generierung eines bandlimitierten zonalen Kernes.

Als Dirac Folgen können (bandlimitierte und nicht-bandlimitierte) Kerne skalenabhängig so konstruiert werden, dass sie alle Phasen einer Frequenz- und Ortslokalisation

durchlaufen. Der Skalenparameter kontrolliert dabei das Aufkommen an Ortslokalisierung und simultaner Frequenzlokalisierung. Daher spricht man in der konstruktiven Approximation von *Skalierungsfunktionen*.

Der Vorrat an Skalierungsfunktionen führt uns methodisch zu folgender Klassifikation: Polynomiale Fourierentwicklung ist der kanonische Ausgangspunkt für niederfrequente Phänomene (in globaler Approximation). Bandlimitierte Kerne oder auch nicht-bandlimitierte Kerne mit großen lokalen Trägern bilden den Übergang von längeren Wellenlängen zu kürzeren (global bis hin zu regional orientiertem Modellieren). Wegen ihrer starken Ortslokalisierungseigenschaften bilden nicht-bandlimitierte Kerne (wie z. B. der (geglättete) Haar-Kern (19)) ein adäquates Mittel zum Einsatz auf kurzweilige Phänomene (lokales Modellieren). Skalenabhängige Kerne können an die Erfordernisse der Daten angepasst werden (Multiskalenapproximation). Typischerweise bewirken die Erzeugenden von Skalierungsfunktionen mit grober Skala, d. h. breiten lokalen Trägern, eine Tiefpassfilterung. Höhere Frequenzen werden dabei unterdrückt oder bleiben vollständig unberücksichtigt. Waveletkerne (auch schon in der einfachsten Form als Differenzen zweier Skalierungskerne) vermitteln eine Bandpassfilterung. Nieder- und hochfrequente Phänomene werden durch Wavelets unterdrückt. Der zugrundeliegende (Hilbertsche) Referenzraum wird mit Hilfe von Skalierungsfunktionen i. a. in eine geschachtelte Folge von approximierenden Teilräumen zerlegt – je nach spezieller Wahl des Skalierungsparameters. Jeder Skalenraum ist eine Realisierung einer bestimmten Orts- und Frequenzlokalisierung. Die Differenz zweier sukzessiver Skalenräume vermittelt diejenigen Details, die ein Mehr (vgl. Abbildung 4) in der Tiefpassapproximation zur Skala  $j + 1$  im Vergleich zur Skala  $j$  sind, die Differenz zweier Skalenräume heißt daher Detailraum.

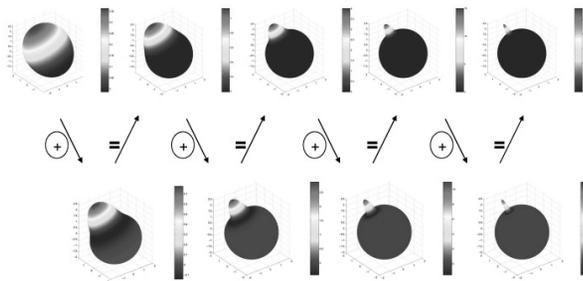


Abbildung 4. Skalierungsfunktionen (obere Reihe) und Waveletfunktionen (untere Reihe) in gegenseitiger Relation in der Multiskalenapproximation.

Wavelets bilden Basissysteme von Detailräumen, sie sind festgelegt durch die Wahl zweier Parameter, nämlich Skala und Position. Jedes Element des Hilbertraums lässt sich durch eine initiale Tiefpassfilterung und anschließende Bandpassfilterungen (vgl. Abbildung 4) darstellen. In Form einer „Fast Wavelet Transform (FWT)“ ist dieser Prozess auch umkehrbar. Insgesamt erhält man mittels Wavelets die Möglichkeit, eine komplizierte georelevante Struktur in einzelne Stücke verschiedener Resolution auf-

zuberechnen und die einzelnen Stücke separat auf ihren geowissenschaftlichen Gehalt zu untersuchen. Mit anderen Worten, obwohl die meisten Datensysteme eine Korrelation hinsichtlich Ort und Frequenz aufweisen, erlauben Skalierungs- und Waveletfunktionen durch gezielte Orts- und Frequenzanalyse eine ökonomische und effiziente Detektion und Approximation wesentlicher Kennzeichen der Daten durch Betrachtung fraktionierter Anteile der Originalinformation (Dekorrelation). Alles in allem (vgl. Tabelle 2): Polynome (im sphärischen Kontext Kugelfunktionen) sind „erzeugende Globalstrukturen“, die eine gute Trendapproximation vermitteln; Skalierungs- und Waveletfunktionen sind „erzeugende Blöcke“, die zu einer schnellen Dekorrelation der Daten befähigen.

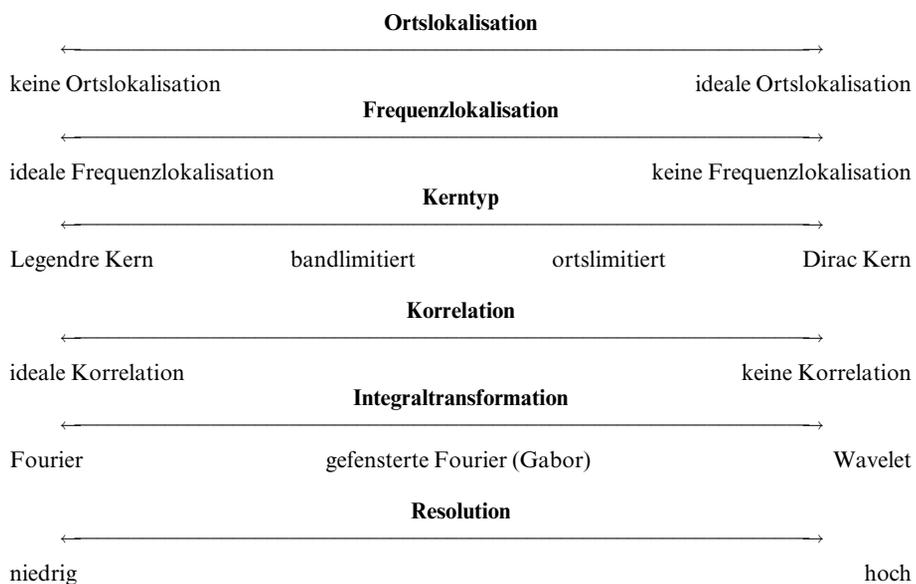


Tabelle 2. Interrelationen zwischen Orts- und Frequenzlokalisierung, Kerntyp, Korrelation, Integraltransformation und Resolution.

## 8 Kreislauf Geomathematik an Beispielen

Im Folgenden wird Geomathematik als Lösungspotenzial an zwei in Inhalt, Herkunft und Intention völlig unterschiedlichen Beispielen demonstriert, nämlich die Bestimmung des Schwerefelds aus terrestrischen Lotabweichungen und die Berechnung der ozeanischen Zirkulation aus Satellitendaten (Radardaten). Wir werden uns dabei der Einfachheit halber auf die Bestimmung dieser geophysikalischen Größen auf der (als sphärisch angenommenen) Erdoberfläche beschränken. Unsere mathematische Analyse wird zeigen, dass beide Probleme über den Helmholtzschen Zerlegungssatz für Vektor-

felder auf Sphären (vgl. [8], [10]) eng miteinander in Relation stehen. Dieser Satz ermöglicht die Aufspaltung eines sphärischen Vektorfeldes jeweils in einen radialen und tangentialen Anteil, wobei der tangential Anteil in ein quell- und wirbelfreies Vektorfeld zerlegbar ist. Der mathematisch terminologische Hintergrund stimmt für beide geowissenschaftlich unterschiedliche Problemfelder überein, ihre Lösung kann im selben mathematischen Kontext durchgeführt und mit demselben Formelapparat beschrieben werden. Dennoch müssen die numerischen Methoden zur konkreten Lösung der Aufgabenstellung spezifisch angepasst werden, sie sind in der Konsequenz grundlegend verschieden. Im ersten Fall (Schwerefeld) haben wir einen Integrationsprozess, im zweiten Fall (ozeanische Zirkulation) einen Differenzierungsprozess zu diskret vorgegebenen Daten auszuführen.

## 8.1 Kreislauf Geomathematik am Beispiel des Schwerefeldes

Modellierungen des Schwerefeldes und der Äquipotenzialflächen, insbesondere des Geoids, sind bedeutsam aus einer Reihe von Gesichtspunkten (vgl. die Darlegungen in [7], [21]): (i) *Bauingenieurwesen und Geodäsie*: Das Geoid macht die geometrischen Höhen konvertierbar in nivellierte Höhen durch Subtraktion eines hochgenauen Geoids. (ii) *Satellitenorbits*: Für jede Unschärfe in der Positionierung ist der Orbit eines Satelliten und damit das Gravitationsfeld die limitierende Größe. (iii) *„Innere“ Physik*: Masseninhomogenitäten und Gravitationsfeldänderungen bedingen sich gegenseitig und finden ihren Ausdruck im Schwerefeld (wie z. B. bei Plumes). (iv) *Ozeanographie*: Das Geoid liefert über Altimetermessungen (Radarmessungen per Satellit) die Topographie von Ozeanen. (v) *Systemforschung*: Das Geoid wird bei Festschreibung eines Zeitpunktes als statische Referenz („frozen picture“) für schnell ablaufende Prozesse (z. B. des Klimas, der Umwelt etc.) angesehen. (vi) *Exploration und Prospektion*: Das Gravitationsfeld gibt Aufschluss über Gravitationsanomalien bezogen auf ein ellipsoisches (sphärisches) Referenzmodell (d. h. Normalfeld).

### 8.1.1 Mathematische Modellbildung der Schwerefeldbestimmung aus Lotabweichungsdaten

Die *Schwere*  $w$  ist die Resultierende der *Gravitation*  $v$  und der *Zentrifugalkraft*  $z$ :  $w = v + z$ . Wir unterstellen hier eine Drehbewegung mit konstanter Winkelgeschwindigkeit  $\Omega$  um eine gegenüber dem Erdkörper unveränderliche Rotationsachse  $e^3$  (d. h. durch Nord- und Südpol). Die Richtung der Schwere  $w$  wird auch als *Lotrichtung* bezeichnet, während man den Betrag  $g = |w|$  die (skalare) *Schwere(beschleunigung)* nennt.

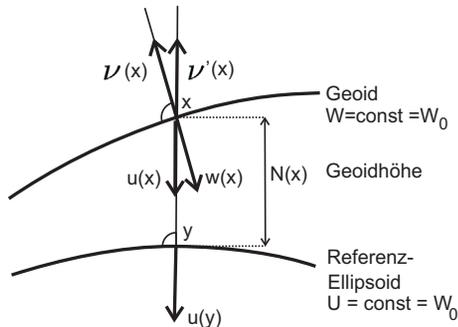


Abbildung 5. Schwereanomalienvektor  $a(x) = w(x) - u(y)$  und Schwerestörvektor  $d(x) = w(x) - u(x)$ .

Das Schwerfeld  $w$  lässt sich als Gradientenfeld in der Form  $w = \nabla W$  beschreiben, wobei das Schwerepotenzial  $W = V + Z$  durch  $v = \nabla V$  und  $z = \nabla Z$  mit  $Z(x) = \frac{\Omega^2}{2}(x_1^2 + x_2^2)$  charakterisiert ist. Das Gravitationspotenzial lässt sich als Newtonsches (Volumen-)Integral  $G \int_{Erde} \rho(y) \cdot |x-y|^{-1} dV(y)$  mit der Dichtefunktion  $\rho$  darstellen ( $G$ : Gravitationskonstante,  $dV$ : Volumenelement). Da die Dichtefunktion  $\rho$  weitgehend unbekannt ist, ist das Volumenpotenzial  $V$  für unsere Betrachtungen nicht verwendbar. Wir halten allerdings fest, dass  $V$  eine im Außenraum der Erde harmonische Funktion ist, die im Unendlichen regulär ist, d. h.  $|V(x)| = O(|x|^{-1})$  für  $|x| \rightarrow \infty$  erfüllt.

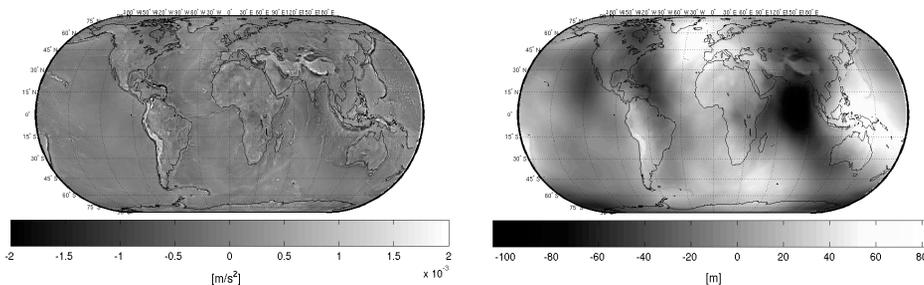


Abbildung 6. Gravitationsanomalien und Geoidundulationen rekonstruiert mit Hilfe geglätteter Haar Kerne (19) mit  $k = 5, j = 3$  aus EGM96-Daten [15] (numerische Realisierung und graphische Illustration in Kooperation mit D. Mathar (2008)).

Die Flächen konstanten Schwerepotenzials  $W = \text{const.}$  werden als *Geopotenzialflächen* der Schwere (vgl. Abbildung 5) bezeichnet. Die Geopotenzialfläche in Meereshöhe heißt, wie bereits erwähnt (vgl. [16]), *Geoid*. Geopotenzialflächen der Schwere erlauben keine einfache mathematische Darstellung. Dies ist der Grund, warum die Geowissenschaften sich als Näherung für das Geoid  $\mathcal{G}$  einer geeigneten „Normalfläche“ bedienen. Diese Normalfläche wird als Äquipotenzialfläche eines so genannten *Normalschwerepotenzials*  $U$  verstanden, der Gradient von  $U$ , d. h.  $u = \nabla U$  heißt *Normalschwere*. Ge-

schlossene Darstellungen von Normalschwerepotenzialen unter Berücksichtigung des Fliehkraftanteiles finden sich in der geodätischen Literatur (vgl. zum Beispiel [10], [12], [23]). Sie machen in der Tat seit A.C. Clairaut (1743) einen wichtigen Teil klassischer mathematisch-geodätischer Arbeit aus. Das *Störpotenzial*  $T$  ist die Differenz von  $W$  und  $U$ , d. h.  $W = U + T$ . Tatsächlich gelingt es das Störpotenzial  $T = W - U$  so zu konstruieren, dass der Mittelpunkt des Ellipsoids mit dem Schwerpunkt der Erde zusammenfällt und Erde und Ellipsoid keinen Unterschied hinsichtlich ihrer Masse  $M$  ausmachen. In der Konsequenz können wir  $\int_{\mathcal{G}} T(x) dS(x) = 0$  und  $\int_{\mathcal{G}} T(x)(\epsilon^i \cdot x) dS(x) = 0$ ,  $i = 1, 2, 3$ , ( $dS$  ist das Flächenelement) fordern. Wir vergleichen Geoid  $\mathcal{G}$  ( $W = \text{const.} = W_0$ ) und Referenzellipsoid  $\mathcal{E}$  ( $U = \text{const.} = W_0$ ). Ein Punkt  $x$  des Geoids wird auf einen Punkt  $y$  des Referenzellipsoids in Richtung der Ellipsoidennormalen projiziert (vgl. Abbildung 5). Der Abstand  $N(x)$  von  $x$  und  $y$  wird *Geoidhöhe* (oder *Geoidundulation*) in  $x \in \mathcal{G}$  genannt. Der *Schwereanomalienvektor*  $a(x)$  im Punkt  $x$  des Geoids ist definiert als Differenz des Schwerevektors  $w(x)$  und des (zugehörigen) Normalschwerevektors  $u(y)$ , d. h.,  $a(x) = w(x) - u(y)$  (vgl. Abbildung 5), während der *Schwerestörvektor*  $d(x)$  als Differenz der Vektorfelder  $w$  und  $u$  im selben Punkt  $x$  des Geoids  $\mathcal{G}$  gegeben ist, d. h.,  $d(x) = w(x) - u(x)$ . Es sind viele grundlegende Beziehungen zwischen den Skalarfeldern  $g = |w|$  und  $\gamma = |u|$  sowie den Vektorfeldern  $a$  und  $d$  bekannt. Im Folgenden beschränken wir uns auf die Beschreibung der Relation von Störpotenzial  $T$  und (skalaren) *Schwereanomalien*  $A$  gegeben durch  $A(x) = g(x) - \gamma(y) = |w(x)| - |u(y)|$ ,  $x \in \mathcal{G}$ ,  $y \in \mathcal{E}$  sowie von Störpotenzial  $T$  und (skalaren) *Schwerestörungen*  $D$  definiert durch  $D(x) = g(x) - \gamma(x) = |w(x)| - |u(x)|$ ,  $x \in \mathcal{G}$ . Als Ausgangspunkt für unseren (heuristischen) Exkurs (vgl. [12]) dient die Gleichung  $d(x) = w(x) - u(x) = \nabla(W(x) - U(x)) = \nabla T(x)$ ,  $x \in \mathcal{G}$ . Entsprechend der Taylorschen Formel erhalten wir für  $U(x)$  die Linearisierung  $U(y) + \frac{\partial U}{\partial \nu'}(y)N(x)$ , d. h.  $U(x) \simeq U(y) + \frac{\partial U}{\partial \nu'}(y)N(x)$ , wobei  $\nu'(y) = -u(y)/|u(y)|$  die ellipsoidische Normale im Punkt  $y$  ist (vgl. Abbildung 5). Das Zeichen „ $\simeq$ “ meint, dass der Fehler von rechter und linker Seite als vernachlässigbar klein angesehen wird. Unter Beachtung von  $T(x) = W(x) - U(x)$  und  $|u(y)| = -\nu'(y) \cdot u(y) = -\nu'(y) \cdot \nabla U(y) = -\frac{\partial U}{\partial \nu'}(y)$  erhalten wir

$$N(x) = \frac{T(x) - (W(x) - U(y))}{|u(y)|} = \frac{T(x) - (W(x) - U(y))}{\gamma(y)}. \quad (1)$$

Berücksichtigen wir schließlich  $U(y) = W(x) = \text{const.} = W_0$ , so gewinnen wir die *Formel von Bruns* (vgl. [5])

$$N(x) = \frac{T(x)}{|u(y)|} = \frac{T(x)}{\gamma(y)}. \quad (2)$$

Diese Formel setzt die physikalische Größe  $T(x)$  mit der geometrischen Größe  $N(x)$  für Punkte  $x$  auf dem Geoid  $\mathcal{G}$  in Beziehung. Aus der Definition des Normalfeldes  $\nu$  gewinnen wir  $w(x) = -|w(x)|\nu(x) = \nabla W(x)$ . In analoger Weise erhalten wir  $u(x) = -|u(x)|\nu'(x) = \nabla U(x)$ . Unter der *Lotabweichung*  $\Theta(x)$  im Punkt  $x \in \mathcal{G}$  versteht man die tangentielle Differenz der Richtungen  $\nu(x)$  und  $\nu'(x)$ , d. h.

$$\Theta(x) = \nu(x) - \nu'(x) - ((\nu(x) - \nu'(x)) \cdot \nu(x))\nu(x). \quad (3)$$

Die Lotabweichung wird bestimmt durch den Winkel zwischen der Lotlinie und der ellipsoidischen Normalen im Punkt  $x \in \mathcal{G}$ . Offensichtlich ist  $\Theta(x)$  orthogonal zu  $\nu(x)$ . Die Lotabweichungen sind grob gesprochen ein Maß für den Gradienten der Niveauflächen (vgl. [1], [11], [12]). Wir wollen diesen Aspekt im Detail weiter ausarbeiten: Zunächst gilt mit (3)

$$\begin{aligned} w(x) &= \nabla W(x) \\ &= -|w(x)|\nu(x) \\ &= -|w(x)|(\Theta(x) + \nu'(x) + ((\nu(x) - \nu'(x)) \cdot \nu(x))\nu(x)). \end{aligned} \quad (4)$$

Folglich erhalten wir für den Schwerestörvektor  $d(x)$  im Punkt  $x \in \mathcal{G}$

$$\begin{aligned} d(x) &= \nabla T(x) \\ &= -|w(x)|(\Theta(x) + ((\nu(x) - \nu'(x)) \cdot \nu(x))\nu(x)) \\ &\quad - (|w(x)| - |u(x)|)\nu'(x). \end{aligned} \quad (5)$$

Spalten wir den Gradienten von  $T$  in  $x \in \mathcal{G}$  in einen normalen und tangentialen Anteil auf, so gilt  $\nabla T(x) = \nu(x)\frac{\partial T}{\partial \nu}(x) + \frac{1}{|x|}\nabla^* T(x)$ , wobei  $\nabla^*$  den Flächengradienten des Geoids  $\mathcal{G}$  in  $x$  bezeichnet. Die Schwerestörungen betragen maximal  $10^{-4}$  der Erdanziehung. Dies ist der Grund, warum der Fehler (vgl. z. B. [12], [23]) zwischen  $\nu(x)\frac{\partial T}{\partial \nu}(x)$  und  $\nu'(x)\frac{\partial T}{\partial \nu}(x)$  keine Berücksichtigung findet:  $d(x) \simeq \nu'(x)\frac{\partial T}{\partial \nu}(x) + \frac{1}{|x|}\nabla^* T(x)$ . Mehr noch, auch das Skalarprodukt  $(\nu(x) - \nu'(x)) \cdot \nu(x)$  wird als vernachlässigbar klein angesehen, d. h.  $\nu(x) - \nu'(x)$  und  $\nu(x)$  werden mit erlaubtem Genauigkeitsverlust als orthogonal betrachtet (vgl. [12]). Es gilt daher in Verbindung mit (5)  $d(x) \simeq -(|w(x)| - |u(x)|)\nu'(x) - |w(x)|\Theta(x)$ . Durch Vergleich erhalten wir  $|w(x)|\Theta(x) = -\frac{1}{|x|}\nabla^* T(x)$ . Das Produkt aus Schwerebeschleunigung und Lotabweichungen ist somit proportional zum Flächengradientenfeld des Störpotenzials. In üblicher sphärischer Approximation, d. h. für die Kugel mit (mittlerem) Erdradius  $R$ , bedeutet dies in Anwendung auf die Geoidundulationen nach der Brunsschen Formel (2)

$$-R\Theta(R\xi) = \nabla_\xi^* N(R\xi), \quad \xi \in \mathbb{S}^2, \quad (6)$$

für jeden Vektor  $\xi (= x/R)$  der Einheitskugel  $\mathbb{S}^2 \subset \mathbb{R}^3$ , wobei  $\gamma(y)$  in üblicher Weise durch  $(GM)/R^2$  ersetzt wird (vgl. z. B. [11], [12], [23] für weitere Information).

### 8.1.2 Mathematische Analyse

Die zu behandelnde Gleichung (6) ist von vektoriell tangentialem Typ mit der Einheitskugel  $\mathbb{S}^2$  im Euklidischen Raum  $\mathbb{R}^3$  als Definitionsbereich. Genauer gesagt, es handelt sich um die Flächengradientengleichung  $\nabla^* P = p$  mit  $p$  als gegebenem stetigen Vektorfeld ( $p(\xi) = -R\Theta(R\xi)$ ) und  $P$  als gesuchtem stetig differenzierbarem Skalarfeld ( $P(\xi) = N(R\xi)$ ) auf  $\mathbb{S}^2$ . In der bisher formulierten Abstraktion ist die Bestimmung der „Potenzialfunktion“  $P$  über die Gleichung  $\nabla^* P = p$  sicherlich nicht eindeutig lösbar. Man kann eine beliebige Konstante zu  $P$  addieren, ohne die Gleichung zu ändern. Für unser Anwendungsproblem ist dies allerdings zu kurz gedacht, weil wir zusätzlich noch die Integrationsbedingungen  $\int_{\mathbb{S}^2} P(\xi)(e^i \cdot \xi)^k dS(\xi) = 0$ ;  $k = 0, 1$ ;  $i = 1, 2, 3$  berücksich-

tigen müssen. Hierdurch gewinnen wir Eindeutigkeit. Die Lösungstheorie stützt sich nun auf den Greenschen Satz (vgl. zum Beweis [10])

$$P(\xi) = \frac{1}{4\pi} \int_{\mathbb{S}^2} P(\eta) dS(\eta) - \int_{\mathbb{S}^2} \nabla_{\eta}^* G(\xi \cdot \eta) \cdot \nabla_{\eta}^* P(\eta) dS(\eta), \quad (7)$$

wobei  $t \mapsto G(t) = \frac{1}{4\pi} \ln(1-t) + \frac{1}{4\pi} (1 - \ln 2)$ ,  $t \in [-1, 1)$ , die Greensche Funktion (d. h. Fundamentallösung) zum (Laplace-)Beltrami Operator auf der Einheitskugel  $\mathbb{S}^2$  bezeichnet. Dies führt uns auf folgendes Resultat: Es sei  $p$  ein gegebenes stetiges, tangentiales, wirbelfreies Vektorfeld auf  $\mathbb{S}^2$ . Dann ist

$$P(\xi) = \frac{1}{4\pi} \int_{\mathbb{S}^2} \frac{1}{1 - \xi \cdot \eta} (\xi - (\xi \cdot \eta)\eta) \cdot p(\eta) dS(\eta), \quad \xi \in \mathbb{S}^2 \quad (8)$$

die eindeutig bestimmte Lösung der Differenzialgleichung  $\nabla^* P = p$  mit  $\frac{1}{4\pi} \int_{\mathbb{S}^2} P(\eta) dS(\eta) = 0$ . Damit ist die Existenz und Eindeutigkeit der Gleichung geklärt. Mehr noch, die Lösung lässt sich in Form eines auf  $\mathbb{S}^2$  singulären Integrals explizit angeben.

### 8.1.3 Entwicklung und Ausführung eines (einfachen) Lösungsverfahrens

Terrestrische Lotabweichungen  $\Theta$  sind als Daten in nicht regelhafter Verteilung verfügbar. Es gibt sie z. B. auf kontinentalen Arealen in viel größerer Dichte als auf ozeanischen. Um den Informationsgehalt des vorhandenen Datenvorrats auszuschöpfen, ist daher nicht die Anwendung einer Fouriertechnik in Kugelfunktionen, sondern eine „Zooming-in“-Methodik angebracht, die von einer (initialen) groben Datenweite global (niedrige Skala) zu immer feineren lokal (höhere Skalen) voranschreitet. Ein simpler Lösungsvorschlag für eine Multiskalenapproximation besteht in der „Regularisierung“ des singulären Kerns  $\Phi : t \mapsto \Phi(t) = (1-t)^{-1}$ ,  $-1 \leq t < 1$ , in (7) durch den stetigen Kern  $\Phi_{\rho} : t \mapsto \Phi_{\rho}(t)$ ,  $t \in [-1, 1]$ , gegeben durch

$$\Phi_{\rho}(t) = \begin{cases} \frac{1}{1-t} & , \quad \rho < 1-t \leq 2 \\ \frac{1}{\rho} & , \quad 0 \leq 1-t \leq \rho. \end{cases} \quad (9)$$

In der Tat ist es nicht schwierig zu verifizieren, dass

$$P_{\rho}(\xi) = \frac{1}{4\pi} \int_{\mathbb{S}^2} \Phi_{\rho}(\xi \cdot \eta) (\xi - (\xi \cdot \eta)\eta) \cdot p(\eta) dS(\eta), \quad \xi \in \mathbb{S}^2, \quad (10)$$

der folgenden Grenzrelation genügt:  $\lim_{\rho \rightarrow 0} \sup_{\xi \in \mathbb{S}^2} |P(\xi) - P_{\rho}(\xi)| = 0$ . Mehr noch, in skalendiskreter Formulierung für eine streng monoton abfallende Nullfolge  $(\rho_j)_{j \in \mathbb{N}_0}$  mit  $\rho_j \in (0, 2)$  (z.B.:  $\rho_j = 2^{1-j}$  oder  $\rho_j = 1 - \cos(2^{-j}\pi)$ ,  $j \in \mathbb{N}_0$ ) folgt mit dem „Waveletkern“  $\Psi_{\rho_j} = \Phi_{\rho_{j+1}} - \Phi_{\rho_j}$  explizit gegeben durch

$$\Psi_{\rho_j}(t) = \begin{cases} 0 & , \quad \rho_j < 1-t \leq 2 \\ \frac{1}{1-t} - \frac{1}{\rho_j} & , \quad \rho_{j+1} < 1-t \leq \rho_j \\ \frac{1}{\rho_{j+1}} - \frac{1}{\rho_j} & , \quad 0 \leq 1-t \leq \rho_{j+1} \end{cases} \quad (11)$$

die Rekursion  $P_{\rho_{j+1}} = P_{\rho_j} + W_{\rho_j}$  und daher  $P_{\rho_{j+m}} = P_{\rho_j} + \sum_{k=0}^{m-1} W_{\rho_{j+k}}$  mit

$$W_{\rho_j}(\xi) = \frac{1}{4\pi} \int_{\mathbb{S}^2} \Psi_{\rho_j}(\xi \cdot \eta)(\xi - (\xi \cdot \eta)\eta) \cdot p(\eta) dS(\eta), \quad \xi \in \mathbb{S}^2. \quad (12)$$

Die Funktionen  $P_{\rho_j}$  stellen Tiefpassfilterungen von  $P$  dar,  $P_{\rho_j}$  wird durch die Bandpassfilterung  $W_{\rho_j}$  verbessert, um  $P_{\rho_{j+1}}$  zu erhalten usw. Von besonderer Bedeutung bei diesem Prozess ist, dass der skalenabhängige Kern  $\Psi_{\rho_j} : t \mapsto \Psi_{\rho_j}(t), t \in [-1, 1]$ , einen kompakten Träger besitzt, wobei dieser Träger mit  $j \rightarrow \infty$  kleiner und kleiner wird. Daher ist bei der Berechnung das Integral über immer kleinere Kappen zu erstrecken („Zooming-in“). Sich verkleinernde Kugelkappen und ansteigende Datendichte stehen dabei selbstverständlich in entsprechender Korrelation. Die variable Größe der Kappen mit wachsendem Skalenparameter  $j$  ermöglicht somit Integration von Datensätzen heterogener Datendichte für lokale Bereiche.

#### 8.1.4 Rückübertragung in die Anwendung

Zu den numerischen Ergebnissen sollte Folgendes vermerkt werden: Die Schwerestörungen, die einen Vergleich der wirklichen Erde mit einer (ellipsoidischen) Modellerde (wie bisher in den Geowissenschaften üblich mathematisch in sphärischer Approximation) liefern, sind der Ausdruck eines Kräfteungleichgewichts im Innern der Erde. Sie lassen nach dem Newtonschen Gravitationsgesetz auf Dichteanomalien schließen (vgl. Abbildung 5). Analog sind die Formunterschiede der tatsächlichen Schwerepotenzialflächen von den Niveauflächen des Modellkörpers ein Maß für die Abweichung der Erde von einem hydrostatischen Gleichgewichtszustand. Dabei stellen insbesondere die Geoidundulationen (geoidalen Höhen) die Auslenkungen der Äquipotenzialfläche auf mittlerem Meeressniveau vom Ellipsoid dar. Die Geoidanomalien zeigen im allgemeinen keine wesentlichen Korrelationen mit der Verteilung der Kontinente. Man nimmt an, dass Geoidundulationen wesentlich abhängen von der reziproken Distanz der Dichteanomalien. Sie werden beeinflusst durch laterale Dichteveränderungen großer Vertikalausdehnung, von der Kern-Mantel-Grenze bis zu Krustenschichten (vgl. [21]). In der Tat wäre das direkte Geoidalsignal, das sich aus der Anziehung der Kontinentalblöcke und Ozeanböden ergäbe, nämlich mehrere hundert Meter. Folglich ist das Gewicht der kontinentalen und ozeanischen Massen im Erdinnern beinahe perfekt aufgefangen. Dies ist das bereits von P. Bouguer (um 1715) bemerkte Phänomen der isostatischen Kompensation (vgl. z. B. [12] zur näheren Diskussion). Anders stellt sich die Situation bei Plumbildung (z. B. Galapagos, Hawaii etc.) dar. Hier verzeichnet man ein deutliches Anomaliensignal durch den an die Oberfläche drängenden Magmapfropfen (vgl. die Abbildungen 7, 8, 9). Bekanntlich sind Plumes aufsteigende Ströme heißen Materials aus dem tiefen Erdmantel, die sich in Form einer Säule zur Erdoberfläche bewegen. Durch sie wird Material aus der Tiefe an die Erdoberfläche transportiert, während an anderer Stelle Material durch die Subduktion in die Tiefe verbracht wird. Somit tragen Plumes zum Ausgleich der Massenbilanz bei, und stellen daher einen wichtigen Teil der Mantelkonvektion dar (vgl. z. B. [20]). Die Umrissse von Plumes zeigen sich wegen der Massenverlagerungen deutlich in den Gravitationsanomalien (vgl. Abbildungen 8, 9 für Hawaii).

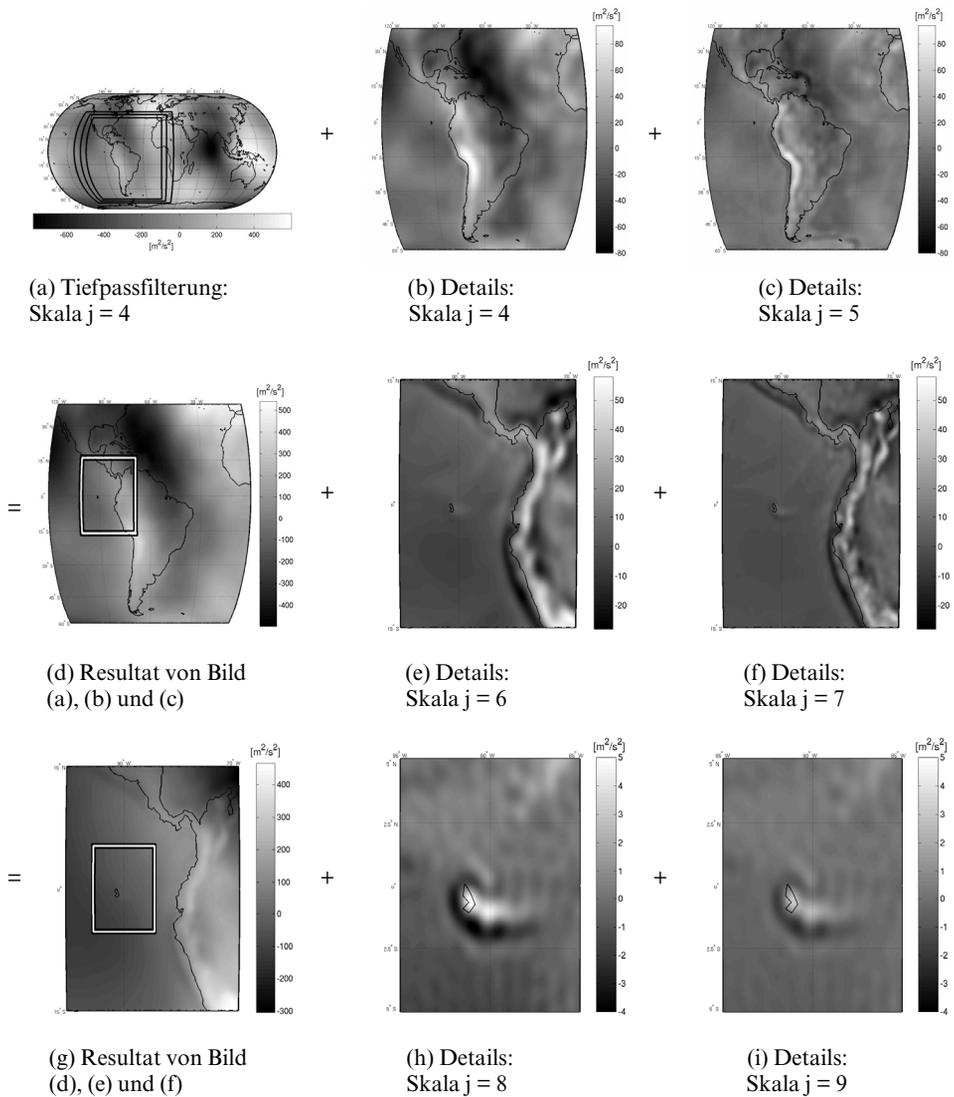


Abbildung 7. „Zooming-in“-Modellierung des Störpotenzials  $T [m^2s^{-2}]$  mit Zielbereich Galapagos  $0^\circ N$   $91^\circ W$  (numerische Realisierung und graphische Illustration in Kooperation mit K. Wolf (2009)).

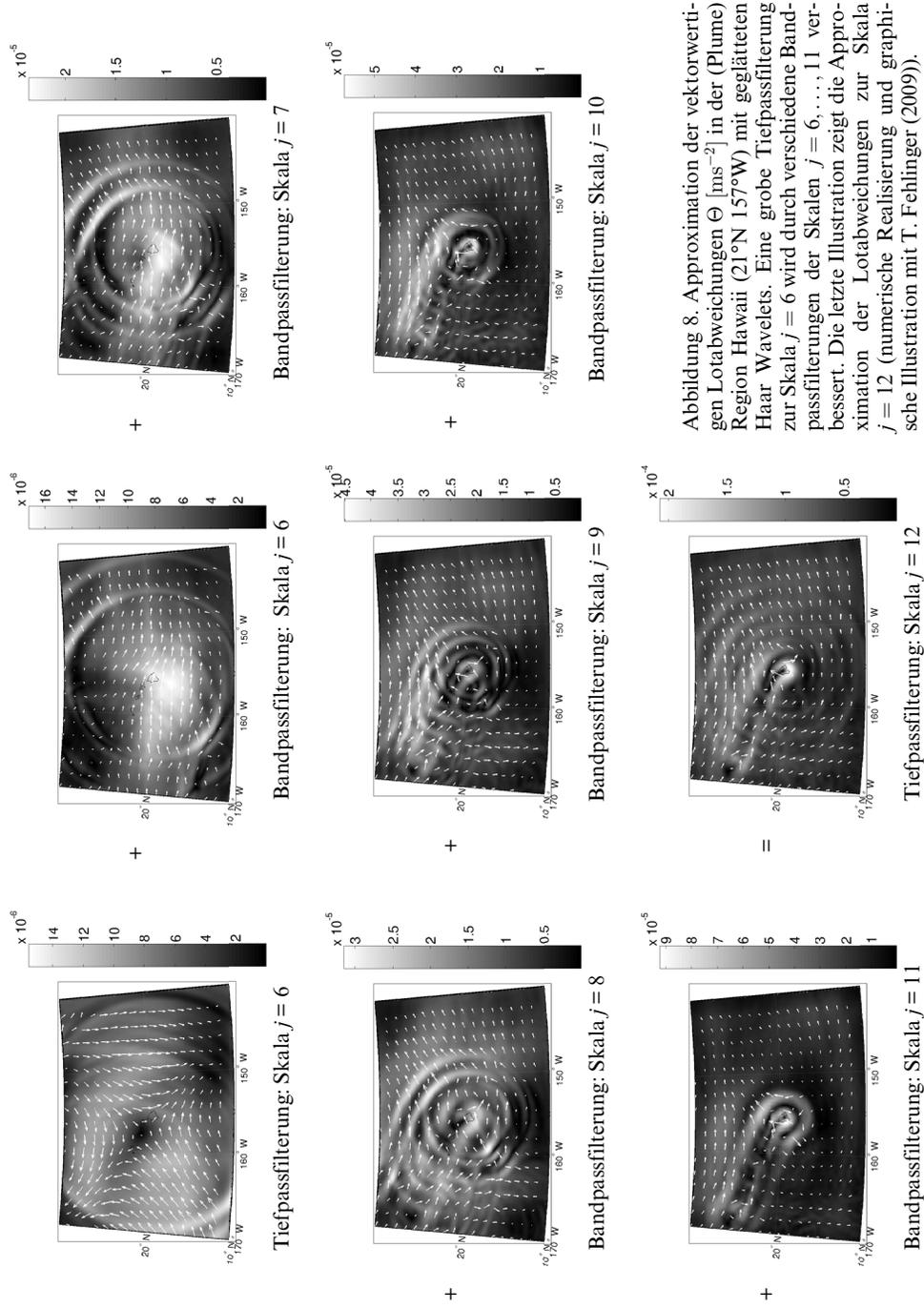


Abbildung 8. Approximation der vektorwertigen Lotabweichung  $\Theta$  [ $\text{ms}^{-2}$ ] in der (Plume) Region Hawaii ( $21^\circ\text{N } 157^\circ\text{W}$ ) mit geglätteten Haar Wavelets. Eine grobe Tiefpassfilterung zur Skala  $j = 6$  wird durch verschiedene Bandpassfilterungen der Skalen  $j = 6, \dots, 11$  verbessert. Die letzte Illustration zeigt die Approximation der Lotabweichungen zur Skala  $j = 12$  (numerische Realisierung und graphische Illustration mit T. Fehlinger (2009)).

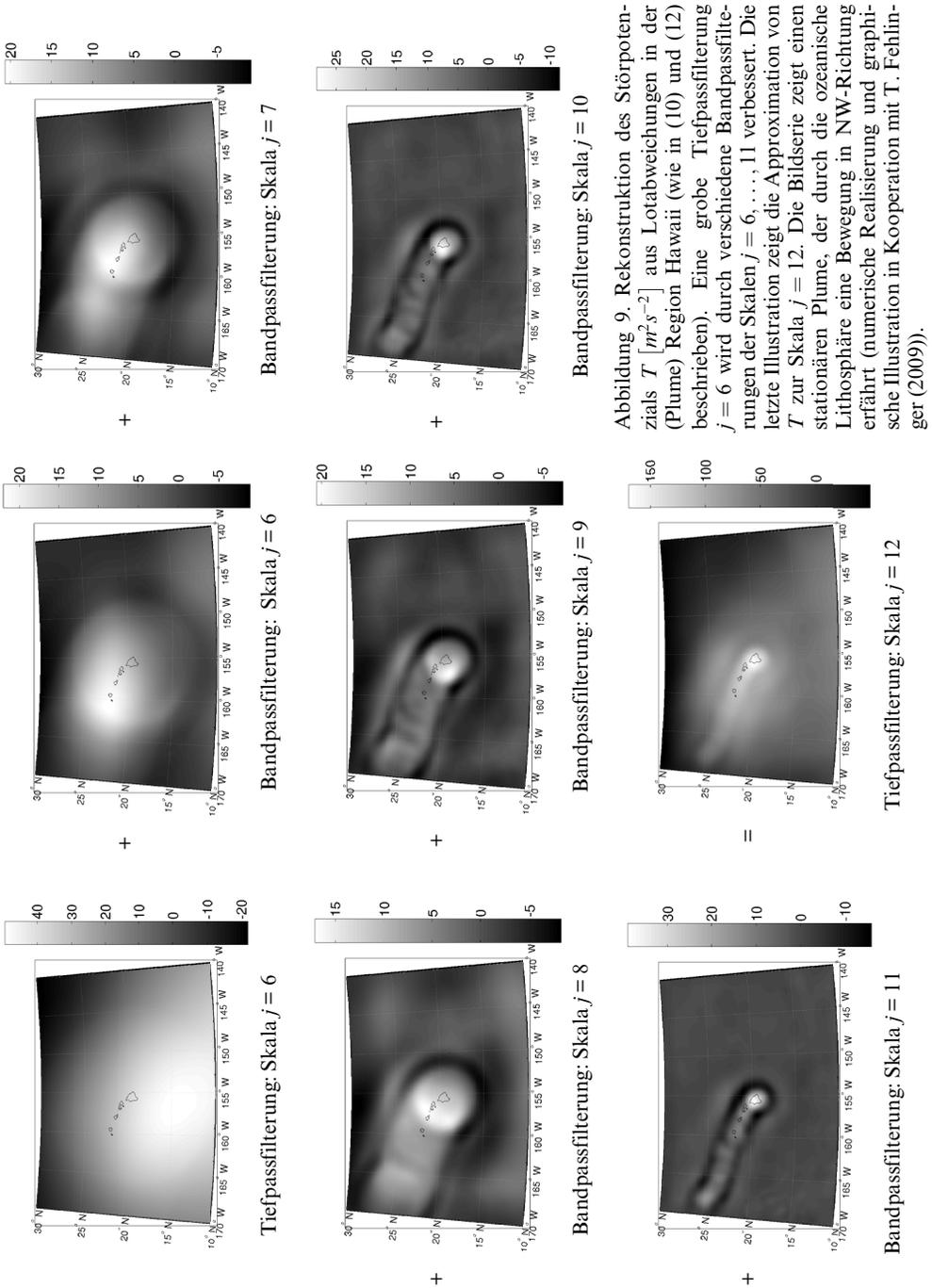


Abbildung 9. Rekonstruktion des Störpotentials  $T$  [ $m^2 s^{-2}$ ] aus Lotabweichungen in der (Plume) Region Hawaii (wie in (10) und (12) beschrieben). Eine grobe Tiefpassfilterung  $j = 6$  wird durch verschiedene Bandpassfilterungen der Skalen  $j = 6, \dots, 11$  verbessert. Die letzte Illustration zeigt die Approximation von  $T$  zur Skala  $j = 12$ . Die Bildserie zeigt einen stationären Plume, der durch die ozeanische Lithosphäre eine Bewegung in NW-Richtung erfährt (numerische Realisierung und graphische Illustration in Kooperation mit T. Fehlerger (2009)).

## 8.2 Kreislauf Geomathematik am Beispiel der ozeanischen Zirkulation

Ozeane bilden ein dynamisches System, das laufenden Veränderungen unterworfen ist. Zusammen mit der Atmosphäre sind sie ein hochkomplexes System, das für die Wärmespeicherungs- und Transportvorgänge auf der Erde verantwortlich ist. Variationen in den Ozeanen sind eng mit Klimaänderungen korreliert. Im Folgenden widmen wir uns der ozeanischen Zirkulation unter den vereinfachenden Voraussetzungen des stationären Flusses, horizontaler Geschwindigkeiten und der Vernachlässigung von innerer Reibung. Dies führt uns auf inner-ozeanische langskalige Strömungen, die aber dennoch – wie z. B. im Falle von El Niño (vgl. Abbildung 12) – aussagekräftige Ergebnisse ermöglichen.

### 8.2.1 Mathematische Modellbildung der ozeanischen Zirkulation aus Ozeantopographie

Die numerische Simulation von Ozeanströmungen basiert auf den Navier-Stokes Gleichungen. Ihre Formulierung ist wohlbekannt (für nähere Details sei der Leser auf die Monographie [3] verwiesen): Ein Fluid nehme zur Zeit  $t = 0$  ein Teilgebiet  $G_0 \subset \mathbb{R}^3$  ein. Das Vektorfeld  $v : [0, t_{\text{end}}] \times G_0 \rightarrow G_t \subset \mathbb{R}^3$  beschreibe die Veränderung der Partikelpositionen  $\pi \in G_0$  in der Zeit; dabei fülle das Fluid zur Zeit  $t \geq 0$  das Gebiet  $G_t = \{v(t; \pi) | \pi \in G_0\}$  aus. Laut Konstruktion beschreibt dann  $t \mapsto v(t; \pi)$  die Bahn eines Partikels  $\pi \in G_0$ . Die Geschwindigkeit des Fluids an einem festen Ort  $x = v(t; \pi) \in G_t$  ist dann die Ableitung  $u(t; x) = \frac{\partial}{\partial t} v(t; \pi)$ . Unter diesen Annahmen erhalten wir dann ein mathematisches Modell für die Strömung eines Fluids aus den Erhaltungssätzen für Masse und Impuls. Die Masse eines Fluids wird durch das Integral über die Dichte  $\rho$  des Fluids bestimmt. Bei Massenerhaltung muss für alle  $t \in [0, t_{\text{end}}]$  der Wert  $\int_{G_0} \rho(0; x) dV(x)$  mit  $\int_{G_t} \rho(t; x) dV(x)$  übereinstimmen. Die Ableitung nach der Zeit verschwindet daher. Das Transporttheorem liefert dann  $\int_{G_t} \left( \frac{\partial}{\partial t} \rho(t; x) + \text{div}(\rho u)(t; x) \right) dV(x) = 0$  für alle  $t$  und  $G_t$ , so dass der Integrand selbst Null sein muss. Dies führt zur *Kontinuitätsgleichung* für kompressible Fluide  $\frac{\partial}{\partial t} \rho + \text{div}(\rho u) = 0$ . Der Impuls eines Körpers ist das Produkt seiner Masse mit der Geschwindigkeit:  $\int_{G_t} \rho(t; x) u(t; x) dV(x)$ . Nach dem Newtonschen Gesetz ist die zeitliche Änderung des Impulses gleich der Kraft, die auf das Fluid wirkt. Dies sind Volumenkräfte  $k$  und Oberflächenkräfte auf  $\partial G_t$ , die im Spannungstensor  $\sigma(t; x)$  erfasst werden  $\frac{d}{dt} \int_{G_t} \rho(t; x) u(t; x) dV(x) = \int_{G_t} \rho(t; x) k(t; x) dV(x) + \int_{\partial G_t} \sigma(t; x) \nu(x) dS(x)$ . Wenden wir auf die linke Seite das Transporttheorem und die Produktregel und auf das Oberflächenintegral den Gaußschen Integralsatz an, so erhalten wir die *Impulsgleichung*

$$\frac{\partial}{\partial t}(\rho u) + (u \cdot \nabla)(\rho u) + (\rho u) \nabla \cdot u = \rho k + \nabla \cdot \sigma. \quad (13)$$

Der weitere Charakter der Gleichung (13) im Hinblick auf die von uns angestrebte Ozeanmodellierung versteht sich wesentlich aus verschiedenen Annahmen an  $\sigma$  und  $k$ . Für ein nicht-viskoses Fluid vernachlässigt man die inneren Reibungskräfte. Der Spannungstensor wird dann schlicht durch den Druck  $\sigma(t; x) = -P(t; x) \mathbf{i}$  ( $\mathbf{i}$  ist die Einheitsmatrix) beschrieben. In Abwesenheit innerer Reibung (bedingt z. B. durch Windeffekte und Oberflächeneinfluss) können wir die Ableitung  $\frac{\partial u}{\partial t}$  und damit die Zeitabhängigkeit

ignorieren. Als relevante Volumenkräfte  $k$  verbleiben das Schwerfeld  $w$  und die Coriolis-Kraft  $c = 2u \wedge \omega$ . Für großskalige Strömungen von Ozeanen spielt schließlich der nicht-lineare Teil keine Rolle, d. h.  $((u \cdot \nabla)u)$  wird vernachlässigt. Im Spezialfall *inkompressibler* Fluide (hier Ozeanwasser), die durch weder von Ort noch Zeit abhängige Dichte  $\rho(t; x) = \rho_0 = \text{const.}$  charakterisiert sind, ergibt sich  $\nabla \cdot u = 0$ . Unter diesen sehr einschneidenden Annahmen reduziert sich die Bewegungsgleichung (13) auf die folgende Identität

$$2\omega \wedge u = -\frac{\nabla P}{\rho_0} - w. \quad (14)$$

Wir nehmen nun noch das Geschwindigkeitsfeld eines sphärischen Schichtmodells an. Für jede Schicht, d. h. für jede Sphäre um den Nullpunkt mit Radius  $r (\leq R)$ , ist dann das Geschwindigkeitsfeld  $u$  in ein normales Feld  $u_{\text{nor}}$  und ein tangentiales Feld  $u_{\text{tan}}$  zerlegbar. Dabei ist der Normalanteil verschwindend klein (vgl. die Ausführungen in [18]) gegenüber dem Tangentialanteil. Daher erhalten wir mit  $\omega = \Omega(\xi \cdot \epsilon^3)\xi$  (der Ausdruck  $C(\xi) = 2\Omega(\epsilon^3 \cdot \xi)$  heißt Coriolis-Parameter) die folgenden Dekorrelationen von (14) (beachte  $\xi \cdot u_{\text{tan}}(r\xi) = 0, \xi \in \mathbb{S}^2$ )

$$C(\xi)\xi \wedge u_{\text{tan}}(r\xi) = -\frac{1}{\rho_0 r} \nabla_{\xi}^* P(r\xi) \quad (15)$$

und

$$(C(\xi)\xi \wedge u_{\text{tan}}(r\xi)) \cdot \xi = -\frac{1}{\rho_0} \frac{\partial}{\partial r} P(r\xi) + g_r. \quad (16)$$

Dabei haben wir hier (der Einfachheit halber) die Schwerebeschleunigung als Normalfeld betrachtet:  $w(r\xi) = -g_r \xi, \xi \in \mathbb{S}^2$  (mit  $g_r$  als mittlerer Schwerebeschleunigung). Nach J. Pedlovsky [18] können wir nun dem Umstand Rechnung tragen, dass die vertikale Coriolis-Beschleunigung im Hinblick auf die tangentielle Bewegung sehr gering ist, d. h. es ist erlaubt,  $(2\Omega(\xi \cdot \epsilon^3)\xi \wedge u_{\text{tan}}(R\xi)) \cdot \xi = 0$  anzunehmen. Für die Erdoberfläche, d. h.  $r = R$ , erhalten wir dann aus (16) eine direkte Relation des Produktes aus mittlerer Dichte und (mittlerer) Schwerebeschleunigung zum normalen Druckgradienten (hydrostatische Approximation):  $\frac{\partial}{\partial r} P(R\xi) = \rho_0 g_r$ . Dies ist der Grund, warum wir durch Integration

$$P(R\xi) = \rho_0 g_R \Xi(R\xi) + P_{\text{Atm}} \quad (17)$$

erhalten, wobei  $P_{\text{Atm}}$  den (mittleren) Atmosphärendruck bezeichnet.  $\Xi(R\xi)$  (vgl. Abbildung 10) ist dabei die Differenz der Höhen von Ozeanoberfläche und Geoid für  $\xi \in \mathbb{S}^2$ . Die (skalare) Funktion  $\xi \mapsto \Xi(R\xi), \xi \in \mathbb{S}^2$ , heißt *Ozeantopographie*. Mit Hilfe eines Altimetersatelliten können wir die Differenz  $H$  von (bekannter) Satellitenhöhe  $H_{\text{Sat}}$  und (unbekannter) Höhe der Ozeanoberfläche  $H_{\text{Ozean}}$  messen:  $H = H_{\text{Sat}} - H_{\text{Ozean}}$ . Nach rechnerischer Ermittlung von  $H_{\text{Ozean}}$  und bei bekannter Geoidhöhe  $H_{\text{Geoid}}$  ist dann die Ozeantopographie  $\Xi$  berechenbar:  $\Xi = H_{\text{Ozean}} - H_{\text{Geoid}}$ . In Verbindung mit (15) und (17) führt uns dies schließlich auf die Gleichung  $C(\xi)\xi \wedge u_{\text{tan}}(R\xi) = -\frac{g_R}{R} \nabla_{\xi}^* \Xi(R\xi)$ . Mit dem Flächenrotationsgradienten  $L_{\xi}^* = \xi \wedge \nabla_{\xi}^*$  erhalten wir schließlich

$$\frac{R}{g_R} C(\xi) u_{\text{tan}}(R\xi) = L_{\xi}^* \Xi(R\xi). \quad (18)$$

Dies ist die Gleichung des *geostrophischen ozeanischen Flusses* (vgl. [2], [17], [10] sowie die dort angegebene Literatur).

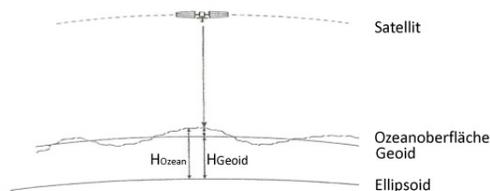


Abbildung 10. Prinzip der Satellitenaltimetrie (Radarmessung der Satellitenhöhe über der Ozeanoberfläche).

## 8.2.2 Mathematische Analyse

Wiederum erhalten wir eine Gleichung vom vektoruell tangentialen Typ auf der Einheitssphäre  $\mathbb{S}^2$ . Diesmal jedoch handelt es sich um die Gleichung des Flächenrotationsgradienten  $L^*S = s$  (mit  $s(\xi) = \frac{R}{gR} C(\xi) u_{\text{tan}}(R\xi)$  und  $S(\xi) = \Xi(\xi)$ ,  $\xi \in \mathbb{S}^2$ ). Eine Lösungstheorie, um aus dem quelfreien Vektorfeld  $s$  die „Stromfunktion“  $S$  zu gewinnen, entspräche den Ausführungen des Abschnittes 8.1.2 (mit  $\nabla^*$  durch  $L^*$  ersetzt). Die Berechnung des geostrophischen ozeanischen Flusses ist jedoch schlicht ein Differenzierungsproblem, nämlich die Berechnung der Ableitung  $L_\xi^* S(\xi) = \xi \wedge \nabla_\xi^* S(\xi)$ ,  $\xi \in \mathbb{S}^2$ .

## 8.2.3 Entwicklung und Ausführung des Lösungsverfahrens

Die direkte (explizite) Ausführung der Ableitung  $L^*S$  ist nicht umsetzbar. Auch hier hat man es mit diskretem Datenmaterial zu tun, das zudem nur auf ozeanischen Flächen vorliegt. Gewöhnlich macht man in der geodätischen Literatur für die Ozeantopographie einen Kugelfunktionsansatz in Form einer Fourierreihe. Der vektoruell isotrope Operator  $L^*$  (vgl. [10]) wird dann unter Verlust seiner vektoriellen Isotropie in der Zerlegung nach skalaren, anisotropen Komponenten auf die resultierende Fourierreihe angewendet. Das Resultat sind skalare Komponenten des (geostrophischen) Flusses. Die Schwierigkeiten mit polynomialen Globalstrukturen (wie Kugelfunktionen) bestehen (mit  $\Xi = 0$  auf Kontinenten!) im Auftreten des Gibbschen Phänomens nahe den Küstenlinien, wo allerdings der ozeanische Fluss auch nicht als geostrophisch angesehen werden kann und die von uns verfolgte Modellierung fehlt. Ein alternativer Zugang, um numerisch bedingte Oszillationen in Küstennähe zu vermeiden, besteht in der Anwendung von Kernen mit lokalem Träger, wie z. B. (geglätteten) Haar Kernen (vgl. [8])

$$\Phi_\rho^{(k)}(t) = \begin{cases} 0 & , \quad \rho < 1 - t \leq 2 \\ \frac{k+1}{2\pi} \frac{(t - (1 - \rho))^k}{\rho^{k+1}} & , \quad 0 \leq 1 - t \leq \rho \end{cases} \quad (19)$$

Für  $\rho > 0$ ,  $k \in \mathbb{N}$ , ist  $\Phi_{\rho}^{(k)}$  eine  $(k-1)$ -mal stetig differenzierbare Funktion. Da  $(\Phi_{\rho_j}^{(k)})_{j \in \mathbb{N}_0}$  für eine streng monoton fallende Nullfolge  $(\rho_j)_{j \in \mathbb{N}_0}$  eine Dirac Folge (vgl. [10]) bildet, gelten mit dem Faltungsintegral (Tiefpassfilter)

$$H_{\rho_j}^{(k)}(\xi) = \int_{\mathbb{S}^2} \Phi_{\rho_j}^{(k)}(\xi \cdot \eta) H(\eta) dS(\eta), \quad \xi \in \mathbb{S}^2, \quad (20)$$

$$\lim_{j \rightarrow \infty} \sup_{\xi \in \mathbb{S}^2} |H(\xi) - H_{\rho_j}^{(k)}(\xi)| = 0 \text{ sowie auch } \lim_{j \rightarrow \infty} \sup_{\xi \in \mathbb{S}^2} |L_{\xi}^* H(\xi) - L_{\xi}^* H_{\rho_j}^{(k)}(\xi)| = 0.$$

Eine leichte Rechnung liefert

$$L_{\xi}^* \Phi_{\rho_j}^{(k)}(\xi \cdot \eta) = \begin{cases} 0 & , \quad \rho_j < 1 - \xi \cdot \eta \leq 2, \\ \frac{k(k+1)}{2\pi} \frac{((\xi \cdot \eta) - (1 - \rho_j))^{k-1}}{\rho_j^{k+1}} \xi \wedge \eta & , \quad 0 \leq 1 - \xi \cdot \eta \leq \rho_j. \end{cases} \quad (21)$$

Ein Multiskalenzugang mittels Haar Wavelets kann in der üblichen Weise formuliert werden. Zum Beispiel können wir Haar Wavelets als Differenzen zweier aufeinander folgender Skalierungsfunktionen verstehen, d. h.  $\Psi_{\rho_j}^{(k)} = \Phi_{\rho_{j+1}}^{(k)} - \Phi_{\rho_j}^{(k)}$ , und mit ihrer Hilfe schnelle Algorithmen in Baumstruktur („tree algorithms“) garantieren. Für die Einzelheiten sei auf [8], [10] verwiesen.

#### 8.2.4 Rückübertragung in die Anwendung

Ozeanischer Fluss unterliegt verschiedenen Einflüssen wie Windfeld, atmosphärischer Erwärmung, Salinität des Wassers usw., die in unserer Modellierung keine Beachtung fanden. Unsere Approximation versteht sich im Sinne geostrophischen Gleichgewichts. Eine Analyse (vgl. [2], [17]) zeigt, dass ihre Gültigkeit auf räumlichen Skalen etwa mit einer Ausdehnung von etwa mehr als 30 [km] und auf zeitlichen Skalen länger als etwa eine Woche für gegeben angesehen werden kann. In der Tat ist das geostrophische Geschwindigkeitsfeld senkrecht zum tangentialen Gradienten der Ozeantopographie (d. h. senkrecht zum tangentialen Druckgradienten). Dies ist eine bemerkenswerte Eigenschaft. Das Wasser fließt längs Kurven konstanter Ozeantopographie (d. h. längs Isobaren). Trotz der wesentlich einschränkenden Annahmen bei der Modellierung gewinnt man instruktive Zirkulationsmodelle des inneren ozeanischen Oberflächenflusses jeweils für die nördliche (vgl. Abbildung 11) oder südliche Hemisphäre (Schwierigkeiten bei der Berechnung des Flusses ergeben sich allerdings aus der Tatsache, dass der Coriolis Parameter auf dem Äquator verschwindet). Positiv sollte Erwähnung finden, dass die (Modellierung der) Ozeantopographie einen wesentlichen Beitrag zum Studium von Ausnahmephänomenen innerer Ozeanströme, wie etwa El Niño, vermittelt. El Niño ist eine Anomalie des Ozean-Atmosphäre-Systems. Sie verursacht das Auftreten veränderter Strömungen im äquatorialen Pazifik, d. h. das normalerweise nach Westen strömende oberflächennahe Wasser strömt nach Osten. Geographisch ausgedrückt, der kalte Humboldtstrom schwächt sich ab und kommt zum Erliegen. Innerhalb von wenigen Monaten wandert die Wasserschicht von Südostasien nach Südamerika. Die Wasserzirkulation hat sich umgekehrt. In der Konsequenz erwärmt sich der Ostpazifik, während

vor Australien und Indonesien die Wassertemperatur sinkt. Dies hat weltweite Auswirkungen auf das Wetter in Form extremer Dürren oder Unwetter. Unsere Berechnungen (Abbildung 12) helfen nicht nur, diese Veränderungen graphisch zu verdeutlichen, sie bilden auch die Grundlage zukünftiger Prädiktionen von El-Niño-Ausprägungen und -Wirkungen.

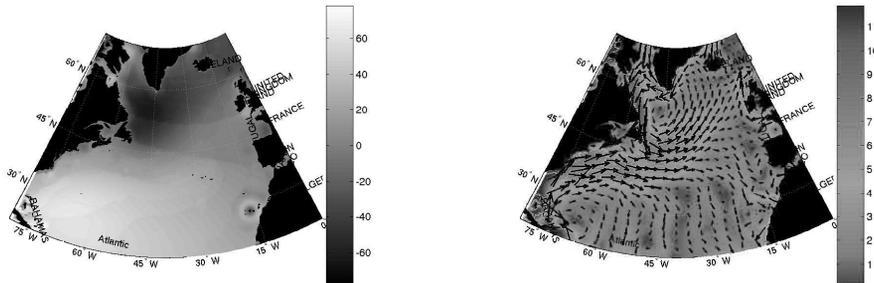


Abbildung 11. Ozeantopographie  $\Xi(R\cdot)$  [cm] (links) und geostrophischer ozeanischer Fluss  $u_{\tan}(R\cdot)$  [cm/s] (rechts) des Golfstromes berechnet mit Hilfe geglätteter Haar Wavelets ( $j = 8, k = 5$ ) (numerische Realisierung und graphische Illustration in Kooperation mit V. Michel und D. Michel (2006)).

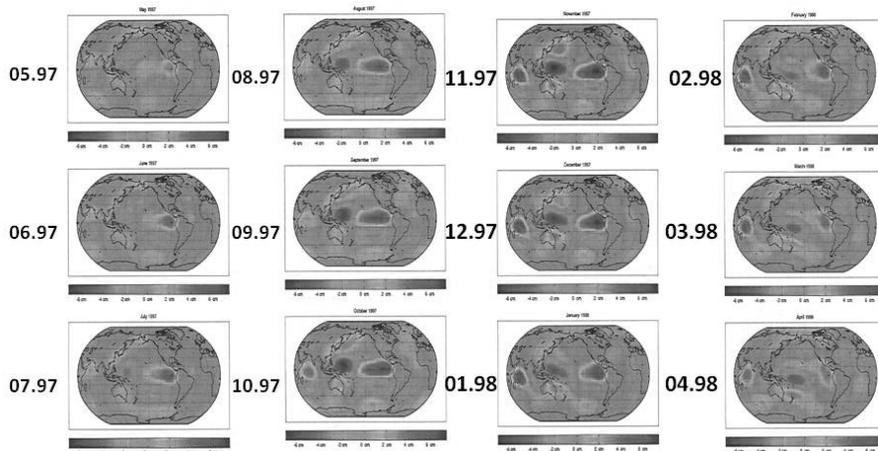


Abbildung 12. Ozeantopographie  $\Xi(R\cdot)$  [cm] (mit Skala ( $j = 3$ ) für alle Bilder) während der El-Niño-Periode (Mai 1997–April 1998) aus Daten des Altimetersatelliten TOPEX-POSEIDON (numerische Realisierung und graphische Illustration ( $j = 3$ ) in Kooperation mit V. Michel und S. Maßmann (2006)).

## 9 Schlussbemerkungen

Halten wir zusammenfassend fest: Die Erde ist ein dynamischer Planet, der sich angetrieben durch großräumige konvektive Stoff- und Energieumlagerungsvorgänge in seinem Innern und durch vielfältige Einwirkungen von Außen in einem ständigen Wandel befindet. Unser Lebensraum Erde ist daher nur zu verstehen, wenn wir die Erde als komplexes System im Zusammenwirken aller Komponenten betrachten [6]. Auf der Erde ablaufende Prozesse sind miteinander gekoppelt und bilden verzweigte Ursache-Wirkung-Ketten, die durch den Eingriff des Menschen in die natürlichen Gleichgewichte und Kreisläufe zusätzlich beeinflusst werden. Dabei ist die Kenntnis der Ursache-Wirkung-Ketten heute noch weitgehend unvollständig. In angemessener Zeit lassen sich substantielle Verbesserungen nur durch Ausbeutung neuer Mess- und Beobachtungsmethoden, z. B. durch die geplanten und/oder begonnenen Satellitenmissionen sowie innovative mathematische Konzepte des Modellierens und Simulierens (z. B. mit neuartigen lokalen Ansatzfunktionen) gewinnen. Für die Datenauswertung ist festzuhalten, dass die überkommenen mathematischen Verfahren in Zukunft weder in Theorie noch in Numerik in der Lage sein werden, die neuen Datenmengen – insbesondere unter dem wichtigen Aspekt einer vertieften raum-zeitlich regionalisierenden Behandlung eingebettet in einem globalen Konzept – zu beherrschen. Gefordert ist vielmehr eine Aufbereitung der geowissenschaftlich relevanten Größen in konstituierende Bausteine, die durch drei wesentliche Merkmale charakterisiert ist: gute Approximationseigenschaft, geeignetes Dekorrelationsvermögen und schnelle Algorithmen. Diese Eigenschaften sind der Schlüssel für eine Vielzahl von Fertigkeiten, insbesondere Datenkompression und -transmission, Entrauschung (Denoising) sowie selektive Multiresolution.

**Danksagung:** Thomas Sonar möchte ich für seinen erfrischenden und unterstützenden Zuspruch herzlich danken.

Meinen Mitarbeitern und Diplomanden gilt Dank für Bemerkungen und Kommentare sowie für die Hilfe bei der Erstellung der Illustrationen.

## Literatur

- [1] Aardalan, A.A., Grafarend, E.W., Finn, G. (2006): Ellipsoidal Vertical Deflections and Ellipsoidal Gravity Disturbances: Case Studies. *Stud. Geophys. Geod.*, **50**, 1–57.
- [2] Albertella, A., Savcenko, R., Bosch, W., Rummel, R. (2008): Dynamic Ocean Topography – The Geodetic Approach. *IAPG/FESG Mittelungen*, **27**, TU München.
- [3] Anson, R., Sonar, T. (2009): *Mathematical Models of Fluid Dynamics*. Second Updated Edition, Wiley-VCH, Weinheim.
- [4] Bach, V., Fraunholz, W., Freeden, W., Hein, F., Müller, J., Müller, V., Stoll, H., von Weizsäcker, H., Fischer, H. (2004): Curriculare Standards des Fachs Mathematik in Rheinland-Pfalz (Vorsitz: W. Freeden). Studie: Reform der Lehrerinnen- und Lehrerbildung, MWWFK Rheinland-Pfalz.
- [5] Bruns, E.H. (1878): *Die Figur der Erde*. Publikation Königl. Preussisch. Geodätisches Institut. P. Stankiewicz, Berlin.

Übersichtsartikel	Historische Beiträge	Berichte aus der Forschung	Buchbesprechungen
-------------------	----------------------	----------------------------	-------------------

- [6] Emmermann, R., Raiser, B. (1997): Das System Erde-Forschungsgegenstand des GFZ. Vorwort des GFZ-Jahresberichts 1996/1997, V–X, GeoForschungsZentrum, Potsdam.
- [7] Freedden, W. (1999): Multiscale Modelling of Spaceborne Geodata. B.G. Teubner, Stuttgart, Leipzig.
- [8] Freedden, W., Gervens, T., Schreiner, M.(1998): Constructive Approximation on the Sphere (With Applications to Geomathematics). Oxford Science Publications, Clarendon, Oxford.
- [9] Freedden, W., Michel, V. (2004): Multiscale Potential Theory (With Applications to Geoscience). Birkhäuser Verlag, Boston, Basel, Berlin.
- [10] Freedden, W., Schreiner, M. (2009): Spherical Functions of Mathematical Geosciences – A Scalar, Vectorial, and Tensorial Setup. Springer, Berlin, Heidelberg.
- [11] Groten, E. (1979): Geodesy and the Earth's Gravity Field I+II. Dümmler, Bonn.
- [12] Heiskanen, W.A., Moritz, H. (1967): Physical Geodesy. Freeman and Company, San Francisco CA.
- [13] Jakobs, F., Meyer, H. (1992): Geophysik – Signale aus der Erde. Teubner, Leipzig.
- [14] Kümmerer, B. (2002): Mathematik. Campus, Spektrum der Wissenschaftsverlagsgesellschaft, 1–15.
- [15] Lemoine, F.G., Kenyon, S.C., Factor, J.K., Trimmer, R.G., Pavlis, N.K., Shinn, D.S., Cox, C.M., Klosko, S.M., Luthcke, S.B., Torrence, M.H., Wang, Y.M., Williamson, R.G., Pavlis, E.C., Rapp, R.H., Olson, T.R. (1998): The Development of the Joint NASA GSFC and NIMA Geopotential Model EGM96. NASA/TP-1998-206861, NASA Goddard Space Flight Center, Greenbelt, MD, USA.
- [16] Listing, J.B. (1873): Über unsere jetzige Kenntnis der Gestalt und Größe der Erde. Dietrichsche Verlagsbuchhandlung, Göttingen.
- [17] Nerem, R.S., Koblinski, C.J. (1994): The Geoid and Ocean Circulation (Geoid and its Geophysical Interpretations). Vanicek, P., Christon, N.T. (eds.), CRC Press, 321–338.
- [18] Pedlovsky, J. (1979): Geophysical Fluid Dynamics. Springer, New York, Heidelberg, Berlin.
- [19] Pesch, H.J. (2002): Schlüsseltechnologie Mathematik. Teubner, Stuttgart, Leipzig, Wiesbaden.
- [20] Ritter, J.R.R., Christensen U.R. (2007) (eds.): Mantle Plumes – A Multidisciplinary Approach. Springer, Heidelberg.
- [21] Rummel, R. (2002): Dynamik aus der Schwere – Globales Gravitationsfeld. An den Fronten der Forschung (Kosmos, Erde, Leben), Hrsg. R. Emmermann u. a., Verhandlungen der Gesellschaft Deutscher Naturforscher und Ärzte, 122. Versammlung, Halle.
- [22] Sonar, T. (2001): Angewandte Mathematik, Modellbildung und Informatik: Eine Einführung für Lehramtsstudenten, Lehrer und Schüler. Vieweg, Braunschweig, Wiesbaden.
- [23] Torge, W. (1991): Geodesy. Walter de Gruyter, Berlin.