Vorwort Heft 4-09

Hans-Christoph Grunau

„Was macht mathematisches Arbeiten aus?“, fragen Kristina Reiss und Stefan Ufer. Die Möglichkeit, Erkenntnisse durch Beweisen zu gewinnen, ist ein Alleinstellungsmerkmal der Mathematik. Die Autoren definieren zunächst sorgfältig ihre zentralen Begriffe „Argumentieren, Begründen, Beweisen“ und reflektieren deren Rolle in den Bildungsstandards und beim Lehren und Lernen in Schule und Hochschule. Der Schwerpunkt dieses Übersichtsartikels liegt auf empirischen Untersuchungen, inwieweit verschiedene Formen von Wissen und Problemlösungsstrategien die Fähigkeit zum Argumentieren, Begründen, Beweisen beeinflussen. Der Beitrag von Kristina Reiss und Stefan Ufer lädt ein, die eigene und auch die allgemein gepflegte Unterrichtspraxis mit dem Ziel zu überdenken, dass Schülerinnen und Schüler, Studentinnen und Studenten mehr Freude am und mehr Kompetenz beim Argumentieren, Begründen und Beweisen entwickeln.

Knoten im $\mathbb{R}^3$ sind ganz anschauliche Objekte, die Berechnung von Knoteninvarianten wie etwa deren Geschlecht oder Gefasertheit jedoch Gegenstand aktueller topologischer Forschung. Der Übersichtsartikel „Knot invariants: Low dimensional topology and combinatorics“ von András I. Stipsicz führt zunächst in einige Grundbegriffe der Knotentheorie ein, um dann mit dem Alexander-Polynom eine klassische und der Knoten-Floer-Homologie eine erst wenige Jahre alte Knoteninvariante vorzustellen. Ganz aktuell ist das Ergebnis, dass die Knoten-Floer-Homologie rein kombinatorisch behandelt werden kann. Damit wird – zumindest grundsätzlich – eine rein algorithmische Bestimmung dieser Knoteninvariante und damit z.B. auch des Knotengeschlechts oder der Gefasertheit ermöglicht.

Am 19. Februar dieses Jahres verstarb mit Edmund Hlawka einer der bedeutendsten österreichischen Mathematiker des 20. Jahrhunderts, der durch sein Werk und seine zahlreichen Schüler weltweit große Wirkung entfaltet hat. Jörg M. Wills zeichnet in seinem historischen Beitrag einige biographische Stationen, besonders bedeutende mathematische Ergebnisse, Edmund Hlawkas große Erfolge als akademischer Lehrer und einige seiner wichtigsten Ehrungen nach.

Die Buchbesprechungen wollen Ihnen wie üblich eine Hilfe sein, künftige Favoriten für Ihren Bücherschrank und Ihren Schreibtisch zu finden.

Hans-Christoph Grunau

Was macht mathematisches Arbeiten aus?

Empirische Ergebnisse zum Argumentieren, Begründen und Beweisen

Kristina Reiss und Stefan Ufer

Abstract

- Mathematics Subject Classification: 97C30, 97D50, 97E50
- Keywords and Phrases: Mathematics education, proof and argumentation, structure of mathematical competence
  Mathematikdidaktik, Beweisen und Argumentieren, Kompetenzstruktur

Irgendwelche „regulae cogitandi", die die zweckmäßigste Disziplin des Denkens genau vorschreiben könnten, sind uns nicht bekannt. Wären solche Regeln auch möglich, sehr nützlich wären sie nicht. (Polya & Szegö, 1925)

Beweisen ist die Tätigkeit, durch die sich mathematisches Arbeiten von der Vorgehensweise in allen anderen Wissenschaften unterscheidet. Dazu gehört es selbstverständlich, Aussagen zu begründen und logisch konsistent zu argumentieren. Argumentieren, Begründen und Beweisen sind entsprechend auch als wichtige Zielkompetenzen des Mathematikunterrichts durch Lehrpläne und Bildungsstandards festgeschrieben. Wie aber gehen Schülerinnen und Schüler mit diesen schwierigen Lerngegenständen um? Eine Antwort auf die Frage ist von zentraler Bedeutung, wenn man wirklich der Thematik im Unterricht gerecht werden will und die Lehramtsausbildung darauf abstimmen möchte. Der vorliegende Beitrag widmet sich diesem Thema und den entsprechenden Kompetenzen von Schülerinnen und Schülern. Dabei geht es zunächst um eine Klärung und Abgrenzung der Begriffe und um die Beschreibung von Voraussetzungen mathematischen Argumentierens, Begründens und Beweisens. Anhand von nationalen und internationalen empirischen Ergebnissen zu Schülerkompetenzen werden sie in ihrer Bedeutung diskutiert und verglichen. Eine vertiefte Analyse führt zu Vorschlägen für die Ausbildung (nicht nur) von Lehramtsstudierenden im Fach Mathematik.

Eingegangen: 13. 08. 2009

Kristina Reiss und Stefan Ufer, Mathematisches Institut der Universität München, Theresienstraße 39, D-80333 München, kristina.reiss@math.lmu.de; ufer@math.lmu.de

DMV
JAHRESBERICHT DER DMV

1 Einführung

Die Mathematik ist eine beweisende Wissenschaft und verfügt damit über ein wesentliches Alleinstellungsmerkmal im Vergleich zu allen anderen Wissenschaften. Mathematische Vermutungen und Behauptungen bekommen erst dann den Status eines Satzes, wenn ihre Gültigkeit durch einen in der mathematischen Community akzeptierten Beweis belegt ist. Beweise nutzen die Regeln der Logik, bauen auf Axiomen, Definitionen und (bewiesenen) Sätzen auf und zeichnen sich durch eine gewisse Strenge und Vollständigkeit der Argumentation aus. Beweise und Argumentationen hängen entsprechend eng zusammen, denn jeder Beweis basiert auf nachvollziehbaren, sinnvollen und stringenten Ketten von Argumenten. Umgekehrt kann man aber Argumente für einen Sachverhalt angeben, ohne dass man ihn im mathematischen Sinne beweist. Argumentieren kann heißen, den eigenen Standpunkt zu vertreten und für ihn einzutreten. Vor allem strittige oder fragliche Positionen werden oft durch Argumente gestützt. Auch das Begründen passt in diesen Zusammenhang. Begründungen werden in der Regel weniger mit einer argumentativen Auseinandersetzung als mit der fundierten Darlegung einer Position verbunden. Dennoch kann Begründen als ein Teilaspekt des Argumentierens gesehen werden. Begründungen haben nicht selten einen lokalen Charakter[1] und/oder sind durch einen eher begrenzten Grad der Allgemeinheit gekennzeichnet. Alle drei Aspekte müssen also zusammenspielen, wenn aus Ideen und Vermutungen ein tragfähiges mathematisches Wissen entstehen soll.

Auch wenn diesen Aspekten eine zentrale Rolle in jeder Mathematikausbildung von der Grundschule über die Sekundarstufe bis hinein in das berufliche Bildungswesen und natürlich den universitären Bereich zukommt, stellen die vielfältigen Erscheinungsformen bei der Beschreibung und Sicherung mathematischen Wissens für Schülerinnen, Schüler und Studierende eine große Herausforderung dar. Welche Schwierigkeiten dabei genau auftreten, wurde in zahlreichen empirischen Studien untersucht, die sich mit dem Lehren und Lernen von mathematischem Argumentieren und Beweisen beschäftigt haben. So wichtig es allerdings ist, potentielle Problembereiche zu identifizieren, so zentral ist auch die tiefer gehende Frage, welches Wissen und welche Fähigkeiten Schülerinnen und Schüler bzw. Studierende benötigen, um Anforderungen im argumentativen Bereich kompetent begegnen zu können. Erst die Antwort auf diese Frage ermöglicht eine reflektierte Entscheidung darüber, wie Inhalte von Unterrichtseinheiten, Seminaren, Vorlesungen und Übungen präsentiert werden sollten, um einen guten Lernerfolg sicherzustellen.

Der vorliegende Beitrag widmet sich diesem Themenkomplex. Es soll zunächst mathematische Argumentationskompetenz aus einer theoretischen Perspektive beschrieben und empirische Evidenz für die Bedeutung einiger zentraler individueller Voraussetzungen für mathematisches Argumentieren und Beweisen zusammengetragen werden. Vor diesem Hintergrund werden mögliche Implikationen für die universitäre Mathematikausbildung (sei es in Fachstudiengängen oder in der Lehrerausbildung) diskutiert.

[1] Im Sinne einer unvollständigen axiomatischen Basistheorie; siehe Abschnitt 2 bzw. Freudenthal (1973).

2 Beweisen – Argumentieren – Begründen

Beweisen, Argumentieren und *Begründen* gehören zu einem Begriffsfeld, das in der Fachdidaktik aus verschiedenen Perspektiven untersucht wird. Als Grundlage für die weitere Darstellung sollen die Begriffe hier zunächst – soweit möglich – gegeneinander abgegrenzt und in Beziehung gesetzt werden.

Balacheff (1999) unterscheidet zwei Bedeutungen des Begriffs *mathematisches Argumentieren.* Einerseits kann Argumentieren, angelehnt an Perelman (1970), als diskursive Tätigkeit verstanden werden, die primär auf die Überzeugung eines Gegenübers ausgerichtet ist. Ob die Argumentation als solche „schlüssig“ oder „korrekt“ ist, ist dabei zunächst weniger relevant. Die zweite, bei Balacheff eher an die Arbeiten von Toulmin (1958, 1996) angelehnte Bedeutung des Begriffs bezieht sich auf die Generierung, Untersuchung und Absicherung von Vermutungen und Hypothesen in Bezug auf deren (objektiven oder individuell eingeschätzten) Wahrheitsgehalt. In dieser Bedeutung kann Argumentieren als individuelle Fähigkeit verstanden werden, die (unter anderem) auch für mathematische Arbeitsweisen relevant ist, und nur in dieser Bedeutung sind die Begriffe *Begründen* und *Beweisen* demselben Begriffsfeld zuzuordnen. Auch hier spielt der soziale Kontext, in dem argumentiert wird, eine zentrale Rolle für die Akzeptanz oder Ablehnung einer Argumentation. Dennoch liegt in diesem Verständnis des Begriffs der Fokus nicht auf der Überzeugung Dritter, sondern primär auf der Gültigkeit der Argumentation nach Regeln innerhalb des sozialen Kontextes (beispielsweise der mathematischen Community). Entsprechend gehen die meisten Arbeiten in diesem Bereich von einer solchen individuellen, sozial eingebetteten Sichtweise mathematischen Argumentierens aus (Pedemonte, 2007; Inglis, Mejia-Ramos & Simpson, 2007).

Mathematisches Argumentieren ist dabei weit gefasst als eine Tätigkeit, die auf die Untersuchung und Absicherung von Hypothesen und offenen Fragen ausgerichtet ist. Insbesondere sind durchaus auch nicht-deduktive Formen der Argumentation mit eingeschlossen wie Schlüsse durch Analogie, Metaphern, durch Abduktion oder durch Induktion[2]. In dieser Form kann mathematisches Argumentieren ergebnisoffen sein in dem Sinne, dass in einer bestimmten mathematischen Situation eine als (plausible) Vermutung zu formulierende Regelmäßigkeit gesucht oder eine vorgegebene Vermutung auf ihre Plausibilität hin geprüft und gegebenenfalls angepasst bzw. korrigiert wird. Unter dem Schlagwort *Conjecturing* werden diese Tätigkeiten und Fähigkeiten, die auch in den verschiedenen Standards ein zentrales Element mathematischer Kompetenz ausmachen, in der Fachdidaktik diskutiert (Chen & Lin, 2000; Koedinger, 1998).

Mathematisches Argumentieren umfasst – aufbauend auf den beschriebenen explorativen Tätigkeiten – natürlich auch Aktivitäten zur Absicherung einer bereits als plausibel angenommenen Behauptung. *Beweisen* stellt hier den Anspruch, nach Kriterien der mathematischen Community letztendlich die Gültigkeit einer Behauptung abzusichern. Entsprechend zeichnet sich das Beweisen durch die bekannten Spezifika wie die ausschließliche Akzeptanz deduktiver Schlüsse und den expliziten Bezug auf eine Rah-

[2] In diesem Kontext verstanden als der Schluss von Einzelfällen auf allgemeine Gesetzmäßigkeiten und abgegrenzt von dem deduktiven Schlussschema der vollständigen Induktion.

mentheorie aus. Letztere beinhaltet die verwendeten mathematischen Konzepte sowie deren genaue axiomatische Definition genauso wie daraus abgeleitete und akzeptierte Aussagen. Um die Erfüllung dieser Anforderungen im Beweistext transparent zu machen, wird in der Regel ein gewisser Grad an formaler Abfassung verlangt. Allgemein anerkannt ist dabei, dass eine vollständige Formalisierung eines Beweises auf streng axiomatischer Ebene meist nicht erreicht wird (Thurston, 1994). Weiterhin basiert die Akzeptanz eines Beweises in diesem Sinne gerade nicht auf festgeschriebenen Kriterien, sondern geschieht in einem sozialen Prozess, der beispielsweise im Peer-Review institutionalisiert sein kann. Yuri Manin (1977) fasst dies treffend mit den Worten *„A proof becomes a proof after the social act of accepting it as a proof“* zusammen. Dennoch gibt es in der Mathematik eine hohe Kohärenz in Bezug auf das Konzept des „Beweises“ (Heintz, 2000).

Balacheff (1999) diskutiert eine feine Unterscheidung zwischen den französischen Begriffen *preuve* (proof) und *démonstration* (mathematical proof). Letzterer beschreibt vor allem das Produkt, also den fertigen Beweistext, der logisch schlüssig ist und die üblichen formalen Anforderungen erfüllt. Für den Begriff *preuve* gilt zwar im Wesentlichen das Gleiche, der Beweistext soll jedoch zusätzlich ein inhaltliches Verständnis der zugrunde liegenden Argumentation ermöglichen. Balacheff spricht in diesem Zusammenhang von einem „oeuvre of knowledge“, das den Beweis im Sinne von *preuve* beim (kundigen) Leser schaffen soll.

Der dritte Begriff in diesem Begriffsfeld ist das *Begründen*, das in der aktuellen fachdidaktischen Diskussion noch wenig von den anderen beiden Begriffen abgegrenzt ist. In diesem Beitrag wird Begründen als der Teilbereich von Argumentieren verstanden, der sich auf die primär deduktive Absicherung einer als plausibel angenommenen Behauptung bezieht. In diesem Sinne ist Beweisen als Spezialfall von Begründen zu verstehen, der sich durch die oben aufgezählten Spezifika wie den Bezug auf eine feste Rahmentheorie und einen gewissen Grad formaler Abfassung auszeichnet. Insbesondere solange keine ausreichend ausgearbeitete mathematische Rahmentheorie verfügbar ist, die als Grundlage für Beweise dienen könnte, stellt das Begründen eine Vorläuferaktivität des Beweisens dar. Dabei kann die Rechtfertigung eigener Lösungswege und -strategien genauso zum Begründen gehören wie die Begründung von induktiv gewonnenen Zusammenhängen.

3 Argumentieren, Begründen, Beweisen Die Rolle in Bildungsstandards und Curricula

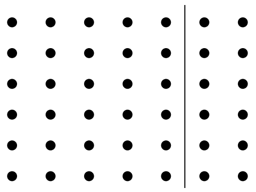
Beweisen lernt man im Studium, doch wie fast jeder Lernprozess im universitären Bereich hat auch das Beweisen eine Vorgeschichte im schulischen Unterricht. Welche Voraussetzungen und Vorerfahrungen die Studierenden dabei mitbringen, ist selbstverständlich von Interesse für die universitäre Ausbildung. Man weiß natürlich, dass Unterrichtsinhalte nicht mit dem tatsächlichen Wissen und Können der Schülerinnen und Schüler identisch sind. Dennoch ist es sinnvoll, sich mit dieser normativen Ebene auseinanderzusetzen, denn nur so wird die Diskrepanz zwischen Anforderungen und dem Erfolg von Unterricht konkret: Weil die meisten vorliegenden Forschungsergebnisse zum Argumentieren und Beweisen aus dem schulischen Umfeld stammen, ist die Rolle dieser Kompetenzen in Curricula und Bildungsstandards eine zentrale Hintergrundinformation zur Interpretation der Ergebnisse.

Welchen Stellenwert haben also das Argumentieren, Begründen und Beweisen im Mathematikunterricht? Bis vor ein paar Jahren markierten geometrische Beweise in der siebten oder achten Jahrgangsstufe den Beginn des Themas, doch hier hat es in den letzten Jahren einen Wandel gegeben. Ganz wesentlich haben dazu die „Principles and Standards for School Mathematics" des *National Council of Teachers of Mathematics* (NCTM) beigetragen. In dieser Sammlung von wünschenswerten Inhalten und Methoden mathematischen Arbeitens in der Schule nehmen das Begründen und Beweisen („Reasoning and Proof") einen prominenten Platz im Curriculum *aller* Klassenstufen ein. Es geht entsprechend nicht mehr um einen Unterrichtsinhalt, der zu einem bestimmten Zeitpunkt behandelt und gelernt wird, sondern vielmehr um den Aufbau einer wichtigen Kompetenz und einer übergreifenden Einstellung zum Fach, um einen *habit of mind*, der vom ersten bis zum letzten Schultag eine zentrale Rolle im Unterricht spielt (National Council of Teachers of Mathematics, 2000; Reiss, 2009).

Diese grundlegende Idee spiegelt sich auch in den von der Kultusministerkonferenz (KMK) beschlossenen Bildungsstandards für die Primarstufe, für den Hauptschulabschluss nach der 9. Klasse und den mittleren Bildungsabschluss nach der 10. Klasse wider (Kultusministerkonferenz, 2003, 2004a, 2004b). Diese Standards legen einerseits inhaltliche und andererseits allgemeine Kompetenzen fest, über die Schülerinnen und Schüler am Ende einer bestimmten Schulstufe verfügen sollten. Dabei ist es hier das Argumentieren, das als eine Kompetenz, die in allen Schulformen und Jahrgangsstufen angeführt wird, einen wichtigen Stellenwert bekommt. Wie bei den Standards des NCTM geht es auch bei denen der KMK um einen kontinuierlichen Aufbau mathematischer Argumentationskompetenz, die mit inhaltlich gebundenen Argumentationen beginnt und zunehmend eine mathematische Strukturierung erfährt.

Entsprechend der naturgemäß eingeschränkten formalen Begriffsbasis wird für die Primarstufe (und das sind hier die Klassenstufen 1 bis 4) als Regelstandard angegeben, mathematische Aussagen zu hinterfragen und auf Korrektheit zu prüfen, aber auch mathematische Zusammenhänge zu erkennen und Vermutungen zu entwickeln sowie Begründungen zu erkennen und nachzuvollziehen (Kultusministerkonferenz, 2004b). Zunächst sind dabei Kompetenzen genannt, die dem Bereich des *Conjecturing* (Koedinger, 1998; Chen & Lin, 2000) zuzuordnen sind, wie etwa das Aufstellen und Untersuchen von Vermutungen. Genauso kann es aber auch darum gehen, Begründungen für geeignete mathematische Zusammenhänge zu betrachten. Gerade an dieser Stelle zeigt sich deutlich ein Spezifikum von Argumentationen in der Grundschule: Alles baut hier auf Phänomenen auf. Argumentationen beziehen sich entsprechend auf Begriffe, die mit konkreten Erfahrungen verbunden sind, und auf handlungsnah konzeptionierte Operationen mit diesen Begriffen. Daher sind die in Argumentationen verwendbaren Eigenschaften von Begriffen und Operationen auch nicht in axiomatischer Weise fundiert, sondern werden durch soziale Aushandlungsprozesse – auch im Rahmen von argumentativen Auseinandersetzungen – gewonnen (Yackel & Cobb, 1996). Auf der Basis einer solchen induktiv gewonnenen Wissensbasis kann dann durchaus eine deduktive Strukturierung der Argumentationen angestrebt werden.

Als Beispiel sei die (für die Grundschule typische) Begründung der Zerlegungsstrategie für Multiplikationen des kleinen Einmaleins genannt. Sie besteht in der additiven Zerlegung eines Faktors und der Summation der Teilprodukte (d. h. der Anwendung des Distributivgesetzes). In der Grundschule besteht die gemeinsame Wissensbasis für eine solche Begründung beispielsweise aus einer akzeptierten Repräsentation von Produkten als rechteckigen Punktefeldern und der Addition als Mächtigkeit der Vereinigung zweier disjunkter Mengen. Dargestellt ist die Zerlegung $7 \cdot 6 = 5 \cdot 6 + 2 \cdot 6$.



Aufbauend auf einem (oder mehreren) spezifischen Beispielen kann das Allgemeine hinter dem Speziellen im Sinne eines generischen Beispiels (*generic proof,* z. B. Mason & Pimm, 1984) thematisiert werden: Eine entsprechende Zerlegung des Punktefeldes liefert bei beliebigen Produkten eine Begründung für die Strategie.

Im Rahmen der Sekundarstufe I (also in den Klassen 5 bis 10) soll auf diesen Kompetenzen aufgebaut werden, wobei hier – zumindest in eng umgrenzten Bereichen – eine strengere Grundlage für Argumentationen erarbeitet wird. Dabei kann natürlich auch hier keine axiomatische Herangehensweise gewählt werden. Allerdings greift man für Begründungen und Beweise auf eine Zusammenstellung von fundamentalen Sätzen zurück, die als gemeinsam akzeptierte Grundlagen einen (meist impliziten) Ersatz für ein Axiomensystem bilden. Entsprechend wird in den Bildungsstandards für den mittleren Schulabschluss und den Hauptschulabschluss (Kultusministerkonferenz, 2003, 2004a) das Entwickeln eigener Begründungen und Beweise als ein Ziel genannt. Die Schülerinnen und Schüler sollen insbesondere lernen, für die Mathematik spezifische Fragen zu stellen („Gibt es ...?", „Ist das immer so ...?"), angemessene Vermutungen zu äußern und sie mit stützenden Argumenten zu untermauern.

In den Bildungsstandards für die Sekundarstufe wird für jeden Kompetenzbereich (also etwa für das mathematische Argumentieren) zwischen drei verschiedenen Anforderungsbereichen unterschieden. Diese sind im Wesentlichen hierarchisch angeordnet, so dass mit einem höheren Bereich auch tatsächlich zunehmende Anforderungen verbunden sind. Allerdings ist ein solcher Anspruch in den Bildungsstandards an keiner Stelle konkret formuliert, denn dafür sind empirische Daten unerlässlich (vgl. auch Reiss & Winkelmann, 2008).

In der allgemeinen Formulierung umfasst der Anforderungsbereich I reproduktive Fähigkeiten, also das direkte Anwenden von Grundwissen oder das Ausführen von Routinetätigkeiten. Der Anforderungsbereich II wird durch ein Erkennen und Nutzen von Zusammenhängen zwischen verschiedenen mathematischen Wissensbereichen beschrieben. Im Anforderungsbereich III geht es schließlich um komplexe Tätigkeiten wie etwa das Strukturieren, das Entwickeln von Strategien, das Beurteilen und Verallgemeinern. Ganz konkret sind für die Sekundarstufe I diese Anforderungsbereiche für die allgemeine Kompetenz „Argumentieren“ folgendermaßen spezifiziert (Kultusministerkonferenz, 2003):

- *Anforderungsbereich I:*
  Routineargumentationen wiedergeben (Rechnungen, Verfahren, Herleitungen, Sätze die aus dem Unterricht vertraut sind) und mit Alltagswissen argumentieren.
- *Anforderungsbereich II:*
  Überschaubare mehrschrittige Argumentationen erläutern oder entwickeln; Lösungswege beschreiben und begründen; Ergebnisse bzgl. ihres Anwendungskontextes bewerten; Zusammenhänge, Ordnungen und Strukturen erläutern.
- *Anforderungsbereich III:*
  Komplexe Argumentationen erläutern oder entwickeln, verschiedene Argumentationen bewerten; Fragen stellen, die für die Mathematik charakteristisch sind und Vermutungen begründet äußern.

Die Anforderungsbereiche scheinen auf den ersten Blick eher vage formuliert. Sie sind aber ganz bewusst so gestaltet worden, dass sie sich im Prinzip in jeder Jahrgangsstufe auf der Basis der bis dahin entwickelten Konzepte und Begriffe (seien sie eher handlungsnah gewonnen oder eher axiomatisch geprägt) realisieren lassen. Im Zusammenhang mit der Umsetzung der inhaltlichen Standards haben Lehrerinnnen und Lehrern dabei viel Freiheit für die eigene Unterrichtsgestaltung.

Vor dem Hintergrund dieser begrifflichen Einordnung von Beweis- und Argumentationskompetenz stellen sich Fragen, die sowohl für die fachdidaktische Forschung als auch für die Ausgestaltung von Curricula und deren Umsetzung in Unterricht bedeutsam sind. Zunächst muss geklärt werden, welche kognitiven Prozesse für diesen Kompetenzbereich relevant sind und welche individuellen Voraussetzungen Schülerinnen und Schüler haben sollten, um Beweis- und Argumentationskompetenz erwerben zu können. Darauf aufbauend ist es dann von Interesse, was die Entwicklung von Beweis- und Argumentationskompetenz ausmacht und wie diese Entwicklung gefördert werden kann. Eine Antwort auf diese Frage sollte die konzeptuelle genauso wie die empirische Sicht einschließen. Welche Inhalte für Schule und Unterricht bedeutsam sind, das kann nur aus einer fachlichen und gesellschaftlichen Perspektive bestimmt werden; wie und ob Unterricht im Hinblick auf die Ziele erfolgreich ist, das kann hingegen nur auf einer empirischen Grundlage beurteilt werden.

4 Beweisen als Prozess

Beweisen ist eine komplexe Aktivität, und das ist sie auch in Abgrenzung von anderen argumentativen Tätigkeiten. Duval (2007) sieht die sprachliche Struktur eines Beweises als einen wesentlichen Aspekt dieser Komplexität. Beispielsweise kann unzureichendes Verständnis mathematischer Sätze (als Wenn-Dann-Aussage) und deren Funktion im

Rahmen eines deduktiven Schlusses (als deduktives Argument bestehend aus Voraussetzungen, Wenn-Dann-Aussage und Schluss) zu typischen Fehlern beim Abfassen von Beweisen führen. Ob diese Probleme auf in sich fehlerhafte Argumentationen zurückzuführen sind, oder ob die Formalisierung einer korrekten Argumentation Schwierigkeiten bereitete, kann am fertigen Produkt oft nur schwer geklärt werden. Zentral ist, dass beide Teilbereiche, nämlich das Finden einer gültigen Argumentation und deren sprachlich adäquate Abfassung, ebenso zum Prozess des Beweisens gehören wie auch explorative Tätigkeiten zum Finden plausibler Vermutungen (und Zwischenvermutungen für die Strukturierung von Beweisen).

In diesem Sinn wird in der Forschung zu individuellen Beweisprozessen in der Regel von einer „kognitiven Einheit“ (Boero, Garuti & Mariotti, 1996) von Argumentieren und Beweisen gesprochen. Gemeint ist damit, dass zum Erlernen des Beweisens eben nicht nur die Beschäftigung mit dem fertigen Produkt, dem Beweis bzw. Beweistext gehört, sondern in mindestens ebenso großem Maße auch explorative Tätigkeiten wie das Erkunden von Bedingungen und das Aufstellen von Vermutungen. Dabei wird vermutlich in explorativen Phasen konzeptuelles Wissen aktiviert, das später im Beweisprozess wieder verwendet werden kann. Außerdem kann vor allem im Rahmen einer Exploration eine Beweisidee generiert werden, was auch das Finden von plausiblen Zwischenbehauptungen für die Strukturierung des späteren Beweises umfasst. Im Bereich der universitären Lehre sind derartige Ideen in Ansätzen umgesetzt, beispielsweise durch die den meisten Mathematikstudierenden bekannten Aufgaben mit dem Beginn „Beweisen oder widerlegen Sie ...“.

Diese Einheit von Argumentieren und Beweisen wird besonders deutlich in einem von Boero (1999) vorgeschlagenen Prozessmodell des Beweisprozesses bei Experten. Es beschreibt deduktive und induktive Phasen, die sowohl der Exploration von potentiell anwendbaren Sätzen als auch dem Zusammenfügen von Teilargumenten zu einem Beweis dienen. Das eigentlich Modell umfasst sechs Phasen. Es ist aber sinnvoll, als eine siebte Phase die Anerkennung des Beweises durch die mathematische Community hinzuzufügen (vgl. Manin, 1977, Heinze & Reiss, 2004).

1. Finden einer Vermutung aus einem mathematischen Problemfeld heraus.
2. Formulierung der Vermutung nach üblichen Standards.
3. Exploration der Vermutung mit den Grenzen ihrer Gültigkeit; Herstellen von Bezügen zur mathematischen Rahmentheorie; Identifizieren geeigneter Argumente zur Stützung der Vermutung.
4. Auswahl von Argumenten, die sich in einer deduktiven Kette zu einem Beweis organisieren lassen.
5. Fixierung der Argumentationskette nach aktuellen mathematischen Standards
6. Annäherung an einen formalen Beweis.
7. Akzeptanz durch die mathematische Community.

Diese sieben Phasen müssen nicht unbedingt in der hier vorgegebenen Reihenfolge durchlaufen werden, vielmehr ist ein häufiger Wechsel zwischen diesen Phasen vor allem bei erfahrenen Mathematikern zu erwarten. Außerdem wird gerade die sechste Phase nur in wenigen Fällen tatsächlich verwirklicht. In der Regel wird der in Phase fünf gefundene Beweis auf Konferenzen und im Rahmen des Peer-Review von der mathematischen Community geprüft und ggf. veröffentlicht. Im schulischen Kontext wird diese Rolle der mathematischen Community in der Regel von der Lehrkraft wahrgenommen.

Das Modell basiert auf dem (optimalen) Beweisprozess eines Experten. Für Zwecke von Ausbildung und Unterricht muss es angepasst werden. Dabei erfordern unterschiedliche Abschnitte auch unterschiedliche Blicke auf den mathematischen Kontext. Denkt man an das Mathematikstudium, so ist für die dort betrachteten Formen mathematischen Argumentierens spezifisch, dass sie auf der Verfügbarkeit einer gut definierten Rahmentheorie mit axiomatisch gefestigten Begriffen und anerkannten Sätzen als Grundlage aufbauen können. Genau diese Basis ist im schulischen Kontext in der Regel nicht oder nur ansatzweise vorhanden. Begriffe werden hier (beispielsweise in der Geometrie) in aller Regel zunächst aus der Anschauung heraus gebildet. Eine axiomatische Fundierung erfolgt oft nicht. Als Basis für Argumentationstätigkeiten dienen verschiedene als äquivalent erkannte Charakterisierungen von Begriffen wie „Rechteck“ oder „Parallelität“ sowie daraus abgeleitete Sätze. Nur in seltenen Ausnahmen sind axiomatische Definitionen im Ansatz möglich (z. B. „gleichschenkliges Dreieck“), aber auch diese werden zumeist begleitend erfahrungsbasiert fundiert. Im Bereich der Grundschule erfolgt eine Einführung der Begriffe altersgemäß fast ausschließlich handlungsorientiert, Gemeinsamkeiten innerhalb der identifizierten Objektklassen bzw. Unterschiede und Beziehungen zwischen ihnen werden darauf basierend gewonnen.

Ist also „mathematisches Beweisen“ für Schülerinnen und Schüler der Sekundarstufe prinzipiell nicht zugänglich, weil eine entsprechende axiomatische Grundlage fehlt? Für den Aufbau einer mathematischen Theorie, die von Axiomen ausgeht und nur auf diesen basierend Folgerungen beschreibt, ist dies wahrscheinlich richtig. Fasst man aber Beweisen und Begründen wie oben beschrieben als Prozess auf, der aus weit mehr besteht als dem axiomatisch-deduktiven Produkt, muss die Frage anders gedacht werden. Auch Mathematiker denken nicht nur auf einer axiomatisch-formalen Ebene. Sie verfügen über ein Verständnis der von ihnen betrachteten Begriffe über ihren axiomatischen Umfang hinaus, indem sie beispielsweise adäquate mentale (z. B. visuelle) Modelle entwickeln und diese für explorative Tätigkeiten nutzen. Solche mentalen Modelle sind oft hochgradig vereinfachend und können sehr spezialisiert sein, sie gehören jedoch untrennbar zum individuellen Verständnis mathematischer Begriffe[3]. Das Zusammenspiel dieser (oft visuell-räumlichen) mentalen Repräsentationen und den (meist eher verbal geprägten) axiomatisch-deduktiven Beschreibungen von Argumentationen ist ein aktuelles Forschungsfeld in Mathematikdidaktik und kognitiver Psychologie. Die Theorie von Johnson-Laird (1983, 2006) zum deduktiven Schließen beschreibt beispielsweise deduktive Schlüsse auf der Basis solcher Modelle: Zunächst wird ein mentales Modell gebildet, das mit den Voraussetzungen kompatibel ist. Nun wird eine spezifische Eigenschaft dieses Modells als potentieller Schluss identifiziert, d. h. im Prinzip

[3] Dem zweiten Autor ist hier als Beispiel eine Begebenheit aus einer Vorlesung zur Funktionentheorie mehrerer Variabler in Erinnerung, als ein kleines Quadrat an die Tafel gezeichnet wurde mit der erklärenden Bemerkung, hier handele es sich um eine Kugel im $\mathbb{C}^n$. Die folgende Erklärung des Beweises anhand dieser Darstellung war eine wichtige Unterstützung – aber eben kein Ersatz für den eigentlichen Beweis.

wird zunächst ein induktiver Schluss gezogen. Dieser wird dann anhand alternativer mentaler Modelle der Voraussetzungen überprüft bis – so eben die Theorie – die Existenz mentaler Modelle, die dem Schluss widersprechen, ausgeschlossen werden kann. Für mathematisches Begründen – egal ob auf fester axiomatischer Basis oder vor dem Hintergrund anderer als wahr angenommener Aussagen – ist letztlich die Angabe eines (akzeptablen) Arguments notwendig, das die Existenz solcher Modelle in der Tat ausschließt. Versteht man in diesem Sinne mathematisches Beweisen als das Wechseln zwischen dem Schließen mit Hilfe mentaler Modelle und der Absicherung dieser Schlüsse durch Aussagen aus einer mathematischen Rahmentheorie, zeigt sich eine Perspektive, die Tätigkeit mathematischen Beweisens im Rahmen einer schulisch zugänglichen mathematischen Rahmentheorie zu behandeln.

5 Empirische Ergebnisse zum Argumentieren und Beweisen

In den vergangenen Jahrzehnten hat sich die empirische mathematikdidaktische Forschung immer wieder mit den tatsächlichen Fähigkeiten von Schülerinnen und Schülern im Bereich des Argumentierens und Beweisens befasst. Die Studien weisen dabei national und international konsistent auf große Probleme bei der Konstruktion von Beweisen hin. So zeigte eine Untersuchung der Gruppe um Usiskin (1982) mit über 1500 Teilnehmerinnen und Teilnehmern aus Geometriekursen an amerikanischen Schulen der Sekundarstufe I, dass lediglich 70% von ihnen in der Lage waren, einfachste Deduktionen vorzunehmen, und nur etwa 50% wenigstens moderaten Erfolg bei längeren Beweisen hatten. Eine weitere große Studie aus England (Healy & Hoyles, 1998) mit etwa 2500 leistungsstarken Schülerinnen und Schülern der 10. Jahrgangsstufe ergab, dass auch in dieser ausgelesenen Population die meisten Lösungen auf empirischen Argumenten beruhten und dass auch bei Beweisproblemen, bei denen empirische Beispiele nur schwer zu finden waren, kaum deduktive Argumente formuliert wurden. Die Ergebnisse konnten durch Studien in den Gruppen um Lin (2005) und Reiss (z. B. Heinze, Reiss & Rudolph, 2005; Heinze, Cheng, Ufer, Lin & Reiss, 2008) mit Schülern der 7. bis 9. Jahrgangsstufe in Taiwan und Deutschland bestätigt und ergänzt werden. Auch die hier genannten Arbeiten zeigten Probleme der Schülerinnen und Schüler beim Beweisen in der Geometrie, wobei insbesondere die deutlichen Schwierigkeiten bei der Abfassung mehrschrittiger Beweise mit Hilfe eines zugrunde gelegten Kompetenzmodells systematisch untersucht und nachgewiesen werden konnten. Über das Beweisen hinaus sieht Lin (2005) in seinen Ergebnissen zum Umgang mit falschen Vermutungen einen Hinweis darauf, dass in der Tat Aktivitäten wie die Exploration einer Vermutung und die Suche nach Gegenbeispielen positive Auswirkungen auf das Finden einer entsprechenden korrekten Vermutung haben und auch spätere Beweisversuche unterstützen kann. Ein kohärenter Effekt, der sich bei den empirischen Studien zum mathematischen Beweisen bis zum Ende der Schulzeit zeigt, besteht also in schwachen Leistungen der Schülerinnen und Schüler im Argumentieren und Beweisen.

Auf der Suche nach Gründen für diese Probleme wurden in der Vergangenheit verschiedene Voraussetzungen und Teilfertigkeiten identifiziert, die als prädiktiv für die Fähigkeit zum Argumentieren und Beweisen angesehen werden können. Sieht man die Konstruktion mathematischer Argumentationen und Beweise zunächst allgemein als ein Problem im Sinne der psychologischen Problemlöseforschung an, so können Prädiktoren allgemeiner Art identifiziert werden. Schoenfeld (1992) nennt beispielsweise Faktenwissen im Inhaltsbereich des Problems, Wissen über Problemlösestrategien, metakognitive Fähigkeiten zur individuellen Steuerung des Problemlöseprozesses, affektive und motivationale Faktoren sowie Überzeugungen („beliefs") zur Bedeutung der jeweiligen Problemstellung. Andere Arbeitsgruppen aus der Mathematikdidaktik nennen darüber hinaus als wesentliche Hindernisse beim Beweisen: die mangelnde Fähigkeit zum Umgang mit deduktiven Schlüssen (Duval, 2002), das fehlende Wissen über Akzeptanzkriterien mathematischer Beweise (Healy & Hoyles, 1998) sowie unzureichendes strategisches Wissen darüber, wann welche mathematischen Konzepte hilfreich angewendet werden können und wann nicht (Weber, 2001). Im Folgenden sollen empirische Ergebnisse zu den verschiedenen Prädiktorbereichen berichtet werden, um ihre Bedeutung für das Beweisen und Argumentieren zu klären. Zumeist beziehen sich die Untersuchungen auf die Sekundarstufe I. Da es aber für die Sekundarstufe II ähnliche Ergebnisse gibt (z. B. Reiss, Klieme & Heinze, 2001), scheint es gerechtfertigt zu sein, bei der Förderung von Beweiskompetenz im Studium davon auszugehen, dass sich die Bedeutung der Prädiktoren über die Zeit nicht allzu stark verändert. Dies würde bedeuten, dass den in der Sekundarstufe als prädiktiv erkannten Voraussetzungen bis zur Verfügbarkeit aktueller Daten auch in der ersten Phase des Studiums besondere Aufmerksamkeit zukommen sollte.

5.1 Methodenwissen

Unter Methodenwissen wird im weiteren Sinne das Wissen über die Natur und die Funktion von Beweisen gefasst. Dazu gehört an erster Stelle das Wissen um Kriterien zur Akzeptanz von Beweisen. Hier sind es mindestens drei Aspekte, die für einen akzeptablen Beweis berücksichtigt sein müssen. Zunächst wird verlangt, dass jeder Teilschluss innerhalb eines Beweises von deduktiver Natur sein muss und unter Nutzung von gesicherten Aussagen aus einer Rahmentheorie entwickelt ist (Aspekt „Beweisform" bei Ufer, Heinze, Kuntze & Rudolph-Albert, 2009). Weiterhin müssen alle Beweisschritte in einer deduktiven Struktur organisiert sein, so dass jeder Schritt auf Prämissen beruht, die entweder Voraussetzungen der zu beweisenden Aussage darstellen oder im bisherigen Beweis bereits gezeigt wurden (Aspekt „Beweiskette" bei Ufer et al., 2009). Letztlich muss diese Kette deduktiver Schritte bei den Voraussetzungen der zu beweisenden Behauptung beginnen und bei der Behauptung derselben enden (Aspekt „Beweisstruktur" bei Ufer et al., 2009).

Healy und Hoyles (1998) untersuchten als Erste dieses Wissen und stellten in ihrer Stichprobe fest, dass diese Kriterien von Schülerinnen und Schülern zwar teilweise beherrscht wurden, jedoch je nachdem zu welchem Zweck (Wissenssicherung, Erklärung, Demonstration schulischer Leistung, eigene Lösung) sie sich mit dem Beweis bschäftigten, unterschiedlich berücksichtigt und teilweise durch eigentlich irrelevante Kriterien ersetzt wurden. So wurde einem Beweis eher eine Chance auf eine gute Bewertung durch den Lehrer zugesprochen, wenn er sich formalsprachlicher Elemente bediente, auch wenn er sachlich nicht korrekt war (z. B. einen Zirkelschluss enthielt). Ähnliche Beobachtungen machten Lin et al. (2000) sowie Reiss und Thomas (2000). In zwei weiteren deutschen Untersuchungen (Ufer et al., 2009) konnte dieser Effekt dann allerdings nicht repliziert werden. Die Untersuchungen zeigten jedoch allesamt, dass die Einschätzung von Beweisen als korrekt oder fehlerhaft (z. B. Beweise mit Argumentationslücken oder Zirkelschlüssen) den Schülern Probleme bereitete.

Im Blick auf unterrichtliche Interventionen ist von Interesse, wie stark dieses Methodenwissen die Kompetenz der Schülerinnen und Schüler, selbst Beweise zu verfassen, beeinflusst. Aus theoretischer Sicht ist klar, dass ein Einfluss existieren sollte, da die konstruierten Beweise ja nur als korrekt gewertet werden, wenn sie den üblichen Akzeptanzkriterien genügen. Wie groß und wie relevant dieser Einfluss allerdings ist, lässt sich aus der Theorie nicht ableiten. In den beiden Studien, die von Ufer et al. (2009) berichtet werden, ergab sich ein signifikanter, aber eher als schwach bis mittel zu bezeichnender Zusammenhang zwischen der Fähigkeit, Beweise aus der Geometrie auf Akzeptanzkriterien hin zu prüfen und geometrischer Beweiskompetenz. Diese Ergebnisse weisen darauf hin, dass es sich zwar um einen relevanten Prädiktor für geometrische Beweiskompetenz handelt, dass die Probleme der Schülerinnen und Schüler aber nicht verschwinden, wenn sie über dieses grundlegende Wissen verfügen.

Ein anderer Aspekt, der im weiteren Sinne zum Bereich des Methodenwissens zählt, ist das Verständnis der Funktion logischer Aussagen, insbesondere von Implikationen und deduktiven Schlüssen. Um einen Beweis auf das Kriterium „Beweisform“ hin untersuchen zu können, ist ein solches Verständnis unabdingbar. Mehrere Untersuchungen der vergangenen Jahre (Küchemann & Hoyles, 2002; Chen & Lin, 2000) zeigten bei Schülerinnen und Schülern in diesem Bereich Verständnislücken, besonders bei der Unterscheidung einer Implikation und ihrer Umkehrung. Auch in anderen Bereichen sind Probleme mit logischen Quantoren und ihrer Bedeutung dokumentiert (Barkai, Tsamir, Tirosh & Dreyfus, 2002). Allerdings sind je nach nationaler Herkunft der Untersuchungen auch Besonderheiten in Bezug auf die Landessprache zu erwarten. So verfügen viele Sprachen nicht über die Möglichkeit, alle logischen Konstrukte in handhabbaren Sätzen zuverlässig wiederzugeben. Interventionsstudien zeigten, dass ein reines Training im abstrakten Verständnis der entsprechenden formallogischen Inhalte, beispielsweise mittels Wahrheitstafeln, nicht zu der erwarteten Verbesserung von argumentativen Kompetenzen führte. Insbesondere stellt sich die Frage, ob ein Verständnis formal-logischer Notationen und Operationen hinreichend ist für die Anwendung dieser Konzepte bei der Arbeit mit konkreten Inhalten. Hier ist, auch auf der Basis psychologischer Theorien (z. B. Johnson-Laird & Byrne, 2002), zu überlegen, inwieweit derartige Fähigkeiten inhaltsübergreifend erworben werden können oder ob sie nicht, zumindest bei Novizen, zunächst an einen spezifischen Kontext (z. B. den üblichen Sätzen und Aussagen der elementaren Euklidischen Geometrie) gebunden sind und später darauf basierend abstrahiert werden.

Insofern ist die Frage nicht endgültig geklärt, ob sich das Verständnis logischer Konstrukte – vor allem bei Novizen – von der Verfügbarkeit von Wissenskomponenten im jeweiligen mathematischen Inhaltsbereich trennen lässt.

5.2 Mathematisches Basiswissen

In fast jeder der klassischen kognitiven Stufentheorien, die auf mathematische Denkprozesse angewendet werden, finden sich argumentative Fähigkeiten auf den höheren Niveaus, und Fähigkeiten zum deduktiven Denken stellen oft das höchste Niveau dar (z. B. Hiele & Hiele-Geldorf, 1978). Die niedrigeren Niveaus, die entsprechend als Voraussetzungen für diese höheren Niveaus betrachtet werden, beinhalten in jedem Fall inhaltliches Wissen, wobei auch dieses in der Qualität und Vernetzung abgestuft betrachtet wird. Nun ist plausibel, dass für mathematisches Argumentieren und Beweisen ein grundlegendes Wissen über Konzepte und Fakten notwendig ist. Schwieriger ist die Frage zu beantworten, welcher Art dieses Wissen sein muss, um für Argumentationsprozesse adäquat nutzbar zu sein. Neben unterschiedlichem Umfang kann das verfügbare Wissen individuell sehr unterschiedlich organisiert sein, beispielsweise in Bezug auf die flexible Nutzbarkeit in verschiedenen Kontexten oder in seiner Vernetzung von Begriffen durch inhaltliche Beziehungen (Jong & Fergusson-Hessler, 1996). So deutet die Fähigkeit zur Lösung einfacher Probleme im Inhaltsbereich zwar auf einen gewissen Umfang an Basiswissen hin, sagt jedoch zunächst nichts über die Nutzung in komplexeren Situationen wie Argumentationsproblemen aus. Beispielsweise zog eine Studie von Ufer, Heinze und Reiss (2008b) zwei verschiedene Maße für Basiswissen heran, um deren Prädiktionskraft für geometrische Beweiskompetenz bei Sekundarstufenschülern zu untersuchen. Die Fähigkeit zur Lösung elementarer geometrischer Berechnungsaufgaben, wie sie im Unterricht einen großen Teil der Zeit einnehmen, erwies sich als wesentlich weniger mit geometrischer Beweiskompetenz verknüpft als ein Maß für konzeptuelles Wissen, das über eine Multiple-Choice-Test erhoben wurde. Darüber hinaus zeigte sich in einer binationalen Studie in Deutschland und Taiwan (Heinze, Ufer, Cheng & Lin, 2008), dass der Zusammenhang zum konzeptuellen Wissen in der taiwanesischen Teilstichprobe signifikant stärker war als in der deutschen Teilstichprobe. Ein Erklärungsansatz für diese Beobachtung ist, dass die ostasiatischen Schülerinnen und Schüler entweder über ein besser vernetztes Basiswissen verfügen oder es besser für die Lösung geometrischer Beweisaufgaben nutzen können.

Es gibt verschiedene Aspekte von Inhaltswissen, denen eine Rolle bei der Konstruktion von mathematischen Argumentationen zugesprochen werden kann. Zunächst ist deklaratives Wissen über grundlegende Begriffe, Definitionen und Sätze sicher wichtig. Es ist jedoch anzunehmen, dass dieses Wissen erst bei der endgültigen Formulierung einer Schlusskette eine tragende Rolle spielt. In dem vorangehenden Planungsprozess, in dem eine erste grobe Beweis- oder Argumentationsidee entwickelt wird, ist möglicherweise nicht das genaue Detailwissen ausschlaggebend, sondern eher Überblickswissen über Beziehungen und mögliche hilfreiche Kombinationen mathematischer Konzepte.

Vor allem bei Personen, die in einem Inhaltsbereich bereits eine größere Zahl von Beweisen nachvollzogen oder selbst konstruiert haben, ist darüber hinaus damit zu rechnen, dass häufig vorkommende Argumente als automatisierte kognitive Programme mit bestimmten Problemmerkmalen (sog. *cues*) verknüpft sind, die deren Anwendung nahelegen. In der elementaren euklidischen Geometrie können solche Hinweise bestimmte Konfigurationen in der zugrunde liegenden Figur sein, deren Wiedererkennen zur automatischen Durchführung eines bestimmten Schlusses führt. Diese Idee der *perceptual chunks* wurde von Koedinger und Anderson (1990) für Computersimulationen des Beweisprozesses im Rahmen der Kongruenzgeometrie vorgeschlagen und auch von Ufer, Heinze und Reiss (2008a) als eine mögliche Erklärung für den sprunghaften Anstieg von Lösungsraten einzelner Items im Laufe der Sekundarstufe I vorgeschlagen. Eine Absicherung dieses Effekts auf empirischer Basis steht allerdings noch aus. Schwierig gestaltet sich dies insbesondere in Inhaltsbereichen, bei denen kognitive Repräsentationen der Problemsituation nicht so einfach zu identifizieren sind wie in der elementaren euklidischen Geometrie (wo die zugrunde liegende Figur oft ein gutes Modell dieser kognitiven Repräsentation darstellt).

5.3 Mathematisch-strategisches Wissen

Die beschriebenen automatisierten Beweisschritte können die Komplexität eines Beweisproblems erheblich reduzieren, indem sie die mentale Repräsentation des Problems effektiver oder genauer strukturieren. Andererseits können derartige Umstrukturierungen auch in die falsche Richtung führen, so dass ein sinnvolles Weiterarbeiten in der neuen Problemrepräsentation nicht möglich ist. Fast jeder Mathematiker bzw. jede Mathematikerin kennt die Situation, in einem Problem „festgefahren“ zu sein; oft ergibt sich eine Lösung auf einem ganz anderen Weg erst mit etwas Abstand. Auch sonst erfolgt die Wahl des „nächsten Schritts“ für einen Beweis nicht zufällig, sondern auf der Basis von Überblickswissen, das potentiell hilfreiche Schritte von wahrscheinlich nicht zielführenden Schritten unterscheiden lässt.

Obwohl also klar ist, dass das oben beschriebene Detailwissen sicher notwendig für die Abfassung akzeptabler mathematischer Argumentationen und Beweise ist, kann davon ausgegangen werden, dass es alleine nicht ausreicht, um Beweisprobleme selbstständig effektiv zu lösen. So zeigt die Interviewstudie von Heinze (2004) mit Schülerinnen und Schülern der Sekundarstufe I, dass auch Lernende, die über das notwendige Wissen zur Konstruktion aller Schritte einer Argumentation verfügen, teilweise nicht in der Lage sind, diese zu einer kohärenten Argumentationskette zusammenzusetzen. Ein Vergleich der Beweisprozesse einiger Studierender und Doktoranden zu einfachen Aussagen der elementaren Gruppentheorie von Weber (2001) lässt inhaltsspezifisches strategischen Wissens als Ursache für die Leistungsunterschiede annehmen.

So nutzten sowohl Doktoranden als auch Studierende isomorphie-invariante Eigenschaften, um zwei Gruppen auf Isomorphie zu untersuchen (z. B. $\mathbb{Z}_{n!}$ und $\mathbb{S}_n$ bzw. $\mathbb{Z}$ und $\mathbb{Q}$). Während die Doktoranden jedoch schnell geeignete (die Gruppen unterscheidende) Merkmale untersuchten, begannen die Studierenden mit dem Versuch, Isomorphismen zu konstruieren, sobald sich die beiden (endlichen) Gruppen als gleich groß herausgestellt hatten.

Weiterhin nennt Weber (2001) in diesem Zusammenhang das Wissen über potentielle Anwendungskontexte von bekannten Sätzen und Konzepten. Er stellt fest, dass die Doktoranden anhand bestimmter Problemmerkmale erkannten, welche mathematischen Werkzeuge wahrscheinlich zielführend sein würden und welche nicht und dies auch explizit berichten konnten. Dieses Phänomen, dass Problemmerkmale (sogenannte cues) zur Auswahl von Lösungsstrategien genutzt werden, ist auch aus der Experten-Novizen-Forschung in der Naturwissenschaftsdidaktik bekannt (Chi, Feltovich & Glaser, 1981). Insbesondere sahen die Doktoranden bei Weber, wann formal-syntaktische Ansätze (symbolische Umformungen) hilfreich und zielführend sein würden und wann nicht, wohingegen die Studierenden oft auf formal-syntaktische Ansätze zurückgriffen, auch wenn sie prinzipiell über das notwendige Wissen für ein inhaltliches Vorgehen verfügten. Der überzeugendste Hinweis darauf, dass Doktoranden über Wissensstrukturen verfügen, die eine gezielte und ökonomische Auswahl von Lösungswegen ermöglichen, ist die deutlich niedrigere Anzahl irrelevanter Argumente, die von ihnen im Vergleich zu den Studierenden während der Beweisprozesse geäußert wurden.

Mathematisch-strategisches Wissen, das derart ökonomische Entscheidungen zwischen verschiedenen möglichen Lösungswegen erlaubt, ist dadurch charakterisiert, dass es zwar stark bereichsspezifisch ist, jedoch nicht unbedingt so detailliert sein muss, wie das in 5.2 beschriebene Basiswissen. Es wird zur Planung einer relativ groben Argumentationskette benötigt. Für die konkrete Ausformulierung einer Argumentation oder eines Beweises sind dann präzisere Kenntnisse von inhaltlichen Fakten notwendig. Genau die Fähigkeit, Beziehungen zwischen einzelnen Konzepten und Problemsituationen herzustellen ohne alle Einzelinformationen aktivieren zu müssen, könnte allerdings den Vorteil von Überblickswissen ausmachen.

Zur Frage, wie dieses inhaltlich-strategische Wissen aufgebaut wird und wie es gefördert werden kann, äußert sich Weber (2001) allerdings nur vage. Er stellt heraus, dass sich dieses Wissen vermutlich allenfalls bei wenigen und äußerst begabten Studierenden von selbst ausbildet. Wie allerdings eine Unterstützung beim Erwerb dieses Wissens aussehen kann, das ist traditionell eine der zentralen Fragen der Fachdidaktik.

5.4 Problemlösestrategien

In jeglicher Problemlösesituation und damit auch bei der Suche nach mathematischen Argumentationen zur Klärung einer Hypothese, ist inhaltliches Wissen zwar sicher notwendig, hilfreich ist es aber nur, wenn es im Rahmen der Problemlösung auch aktiviert werden kann. Dass dies nicht immer geschieht, ist aus empirischen Studien hinreichend bekannt und im Grunde charakteristisch für Problemsituationen. Diese zeichnen sich nicht nur dadurch aus, dass Lösungsschritte unbekannt sind, sondern auch dadurch, dass die Generierung dieser Schritte ein gewisses Maß an Schwierigkeit aufweist (Dörner, 1979). Stockt der Problemlöseprozess, weil keine sinnvollen Wissenskomponenten identifiziert werden können, so müssen Strategien zur Umorganisation des Problems angewendet werden. Im optimalen Fall kann mit einer entsprechend veränderten Sichtweise des Problems ein weiterer Lösungsschritt vorgenommen werden.

Obwohl Strategien verschiedener Art traditionell eine zentrale Rolle in der Problemlöseforschung einnehmen (z. B. Polya, 1945) ist eine klare Abgrenzung zwischen Problemlösestrategien und inhaltsbezogenem Wissen bis heute schwierig. Dies liegt vor allem daran, dass Strategien zum Lösen mathematischer Probleme mehr oder weniger allgemein anwendbar sein können. Chinnappan und Lawson (1996) unterscheiden zwischen *aufgabenspezifischen Strategien, domänenspezifischen Strategien* sowie allgemeiner anwendbaren *Monitoringstrategien* und *metakognitiven Heuristiken.* Während aufgabenspezifische Strategien nur eine enge Klasse von Problemen (z. B. das Lösen linearer Gleichungen) betreffen, sind domänenspezifische Strategien für einen größeren, aber dennoch begrenzten Bereich von Problemen anwendbar (z. B. Algebraisierung des Problems, Suche nach Invarianten). Monitoringstrategien dienen der Überwachung des eigenen Denkens und Handelns. Dazu gehören das Planen des weiteren Vorgehens sowie die Änderung eines gefassten Lösungsplans, falls kein Fortschritt erzielt werden kann. Metakognitive Heuristiken sind sehr allgemein anwendbare Problemlösestrategien, wie beispielsweise das Zerlegen eines Problems in Teilprobleme oder die Ziel-Mittel-Analyse, bei der zunächst die für das Problem zur Verfügung stehenden Hilfsmittel (hier Sätze, alternative Formulierungen, ...) aktiviert werden.

Ein klassisches und immer wieder repliziertes Ergebnis der mathematikbezogenen Problemlöseforschung (z. B. Schoenfeld, 1989) ist, dass sich Novizen bei der Koordination ihres Problemlöseprozesses klar von Experten unterscheiden. Experten stellen der eigentlichen Problemlösung in der Regel eine mehr oder weniger lange Planungs- und Überblicksphase voraus. Auch später reflektieren sie immer wieder den eigenen Fortschritt und die gewählten Strategien, um Ansätze und Problemrepräsentationen gegebenenfalls wechseln zu können. Bei weniger erfahrenen Personen wurde hingegen beobachtet, dass sie sich relativ schnell für eine Lösungsstrategie entscheiden und diese über viel längere Zeiträume weiterverfolgen, auch wenn die gewählte Strategie keinen Fortschritt erbringt. Insbesondere sind Strategiewechsel selten zu beobachten. Komplexe mathematische Tätigkeiten wie das Beweisen verlangen jedoch in der Regel das reflektierte Wechseln von Strategien (siehe z. B. die verschiedenen Phasen des Prozessmodells von Boero). So zeigte sich in Bezug auf das Beweisen in der Geometrie, dass Schülerinnen und Schüler besonders bei der Generierung einer groben Idee für einen Beweis erhebliche Probleme hatten, auch wenn ihnen das notwendige Faktenwissen zur Verfügung stand (Heinze, 2004). Eine Erklärung hierfür ist, dass explorative Phasen, die der Erkundung des Beweisproblems und der Generierung eben dieser groben Beweisidee dienen, bei Novizen meist nicht zu beobachten sind oder nur sehr kurz ausfallen. Ein Grund dafür könnte sein, dass diese Phasen auch im Unterricht kaum thematisiert werden (Heinze & Reiss, 2004). Gegenstand ist hier – wie auch in der universitären Lehre – meist nicht das Vorgehen beim Finden einer Beweisidee bzw. eines Beweises (mit den dazugehörigen Irrwegen), sondern lediglich das Produkt, der fertige Beweis. Bei den Lernenden kann sich so der Eindruck einstellen, der Beweis sei „vom Himmel gefallen", ohne dass sie Möglichkeiten an die Hand bekommen, solche Ideen selbst zu generieren.

Was Novizen also zu fehlen scheint, sind sinnvolle Monitoringstrategien, die eine Strukturierung des Lösungsprozesses erlauben. Nun ist die Trainierbarkeit sehr allgemeiner Problemlösestrategien ein strittiges Thema. Einige Forscher (z. B. Sweller, 1990) bezweifeln, dass allgemeine Strategien überhaupt in einer Art und Weise vermittelt werden können, die einen Transfer auf Probleme verschiedener Art in unterschiedlichen Inhaltsbereichen erlaubt. Ein Ausweg kann sein, typische Problemlöseprozesse mit den dazugehörigen strategischen Überlegungen und ggf. auch Irrwegen abzubilden und so mögliche Lösungsprozesse für die Lerner transparent zu machen. Dabei werden zunächst domänenspezifische Monitoringstrategien (Chinnappan & Lawson, 1996) vermittelt, die dazu befähigen das eigene Vorgehen an dem typischen Problemlöseprozess zu orientieren. Darüber hinaus sollten für die einzelnen Teile des Problemlöseprozesses relevante, engere Strategien vermittelt werden (z. B. Betrachten mehrerer Beispiele). Die angesprochenen Monitoringstrategien orientieren sich an einem Prozessmodell der zu vermittelnden Fähigkeit. Für das Beweisen in der Geometrie wurde beispielsweise das Prozessmodell von Boero mit Hilfe sogenannter *heuristischer Lösungsbeispiele* genutzt und es konnten positive Effekte auf die Fähigkeit zur Konstruktion geometrischer Beweise festgestellt werden (Reiss & Renkl, 2002; Reiss et al., 2006).

6 Bedeutung der verschiedenen Prädiktoren

Obwohl ein signifikanter Einfluss der beschriebenen Wissenskomponenten und Fähigkeiten auf die Fähigkeit zur Konstruktion von Beweisen in fast allen Fällen nachgewiesen ist, gibt es nur wenig Evidenz zur relativen Bedeutung der Faktoren. Erwartungsgemäß stellte sich in der Untersuchung von Ufer, Heinze und Reiss (2008b) ein sehr großer Einfluss von konzeptuellem Wissen in der Geometrie heraus. Eine geringere Prädiktionskraft für geometrische Beweiskompetenz zeigten dagegen die Fähigkeit zur Lösung einfacher Berechnungsprobleme im selben Inhaltsbereich sowie Problemlösefähigkeiten in einem mathematiknahen, aber nicht direkt mit den geometrischen Inhalten verbundenen Kontext. Ähnlich geringe Zusammenhänge zeigten zwei Untersuchungen (Ufer et al., 2009) für das Methodenwissen. Um jedoch die Interaktion der Prädiktoren genauer zu klären, fehlen einerseits korrelative Studien mit genaueren Erhebungsinstrumenten, die alle Prädiktoren untersuchen. Andererseits lässt sich der Einfluss mit dem Ziel einer optimalen Förderung fast nur im Rahmen von Trainingsstudien einschätzen, die es nur in geringem Umfang gibt.

Generell ist bekannt, dass Experten und Novizen mangelndes (aber nicht gänzlich fehlendes) Inhaltswissen durch die Anwendung mehr oder weniger komplexer Problemlösestrategien zu einem gewissen Maße ausgleichen können und umgekehrt. Entsprechend dienen Problemlösestrategien im Rahmen unbekannter neuer Aufgaben dazu, konzeptuelles Wissen zu erweitern und in seiner Struktur zu optimieren (z. B. im Sinne von mathematisch-strategischem Wissen). Auf der anderen Seite unterstützt aber gut strukturiertes Wissen die effektive Anwendung von Problemlösestrategien (Alexander, 2003), da Probleme ggf. schnell und effektiv in andere, äquivalente Repräsentationen übergeführt werden können.

Trotz dieser wechselseitigen Beziehungen gibt es sicherlich zumindest in den Bereichen von inhaltlichem Basiswissen und Methodenwissen ein Grundwissen, das nicht ohne Weiteres durch strategische Kompetenzen ausgeglichen werden kann. Insbesondere die Natur mathematischer Beweise sowie die Bedeutung von Gegenbeispielen sind (für den Mathematiker relativ offenkundige) Teile der mathematischen Kultur, die von Novizen zunächst explizit sowie im Rahmen von Beispielen erlernt werden müssen. Auch effektive Problemlösestrategien bringen offenbar nicht alle Lerner mit, vor allem wenn es um die kognitive Koordination von Lösungsprozessen geht. Diese lassen sich auch im Rahmen von traditionellen Lehr- und Lernformen durchaus thematisieren. Wie letztlich mathematisch-strategisches Wissen erworben wird, ist zunächst unklar, wenn man von der Annahme absieht, dass es sich als Erfahrungswissen bei erfolgreichen und erfolglosen Beweisversuchen aufbaut.

7 Implikationen

Aus den bisher vorliegenden empirischen Ergebnissen lassen sich sicher keine zweifelsfreien Erfolg garantierende Richtlinien für die universitäre Lehre im Bereich der Ausbildung von Studierenden des Fachs Mathematik (sei es in Fachstudiengängen oder in der Lehrerausbildung) ableiten. Dennoch geben sie einige Hinweise für Akzente im Bereich der Lehre.

In jedem Fall wird erwartet, dass die Studierenden am Ende ihrer Ausbildung in der Lage sind, Beweise und mathematische Argumentationen zu bewerten, ggf. anzupassen und auch selbst zu konstruieren. Dazu gehört ein Verständnis für die axiomatische Struktur mathematischen Wissens (Aspekt Beweisform des Methodenwissens) sowie für den erforderlichen Grad an formaler Abfassung von Beweisen und Argumentationen in verschiedenen Kontexten. Weiterhin sollten die Studierenden in der Lage sein, nicht nur gültige Beweise (*démonstration* im Sinne von Balacheff, 1999) zu formulieren, sondern diese so abzufassen, dass der (kundige) Leser ein breiteres Verständnis für die grundlegende Idee hinter dem Beweis über die reine Absicherung der zu beweisenden Aussage erhält (*preuve*).

Darüber hinaus sollten die Studierenden in der Lage sein, auch einfache und schwere offene Vermutungen zu untersuchen, ggf. zu widerlegen und in Richtung einer beweisbaren Aussage weiterzuentwickeln oder sie als harte Probleme zu erkennen, deren Lösung den gegebenen Rahmen übersteigt. Letzteres ist vor allem auch für zukünftige Lehrkräfte von Interesse (die sich beim derzeitigen Bedarf übrigens nicht nur in den Lehramtsstudiengängen finden). Gerade im schulischen Kontext sind Lehrkräfte immer wieder gefordert, Lösungen, Vermutungen und Vorschläge von Schülerinnen und Schülern nicht nur schnell zu evaluieren, sondern diese auch in einer Weise aufzugreifen, die zu fruchtbaren Lernprozessen führen kann. Das muss nicht unbedingt bedeuten, dass sofort eine korrekte stromlinienförmige Lösung präsentiert werden kann. Vielmehr sollten die Lehrenden in der Lage sein, die Vermutung in die der Lerngruppe bekannte mathematische Rahmentheorie einzuordnen und Schritte aufzuzeigen, die eine weitere Untersuchung ermöglichen. Dazu gehört die Wahl von Repräsentationen zur Darstellung eines Problems genauso wie die Wahl von Strategien der Generierung weiterer Evidenz zur Untersuchung der Vermutung (z. B. Untersuchung von Extrembeispielen o. Ä.). All dies betrifft mathematische Argumentationskompetenz in einem Umfang, der weit über die Konstruktion korrekter Beweise für gegebene Aussagen hinausgeht, aber sehr viel stärker die eigentlich zentralen Bereiche mathematischen Arbeitens berührt.

Ein Erwerb dieser Kompetenzen setzt natürlich die Verfügbarkeit entsprechender Übungsfelder voraus. Im universitären Kontext sind Tutorien und Übungsgruppen die traditionellen Kontexte für diese Lernprozesse. Die Vermittelbarkeit von Problemlösestrategien, die Transfer auch auf andere Inhaltsbereiche ermöglichen, wird von der Forschung prinzipiell als sehr schwierig dargestellt. Deshalb sind gerade an dieser Stelle Interventionen wichtig, wenn man nicht auf das Prinzip des „survival of the fittest" setzen möchte. Inhalt dieser Interventionen können Prozessmodelle mathematischen Arbeitens sein, die die Strukturierung des Problemlöseprozesses erlauben. Diese können durchaus explizit thematisiert werden, ähnlich hilfreich kann jedoch eine implizite Vermittlung durch den Dozenten sein, indem dieser nicht nur den fertigen Beweis vorführt, sondern auch Bemerkungen zu einem typischen (nicht notwendigerweise seinem eigenen) Problemlöseprozess beim Beweisen kommuniziert. Darüber hinaus dürften Veranstaltungsformen, die die Begleitung der Lernenden im Problemlöseprozess und kleine Hilfestellungen erlauben (auch in Richtung von potentiell lehrreichen Irrwegen) ein wichtiges Element der Ausbildung sein.

Wenn es um die selbständige Abfassung von Beweisen geht, müssen die Studierenden darüber hinaus in der Lage sein einzuschätzen, ob die von ihnen niedergeschriebene Argumentation als gültig erachtet werden kann oder nicht. Die Kriterien für die Akzeptanz von Beweisen sind jedoch nur teilweise als explizites Wissen verfügbar, beispielsweise die Aspekte des Methodenwissens (Ufer et al., 2009). Darüber hinaus gibt es jedoch einige eher „weiche" Kriterien, wie beispielsweise der erforderliche Grad an Formalisierung der Argumentation. Das zentrale Kriterium, die prinzipielle Formalisierbarkeit der Argumente, ist hier für die Mathematik relativ kohärent. Welche konkreten Anforderungen aber z. B. im Rahmen einer zu bewertenden Arbeit oder für die Akzeptanz in einer bestimmten Zeitschrift gestellt werden, ist meist nicht explizit festgeschrieben, sondern wird eher durch ständiges Feedback von Experten erworben. Hier ist ein individuelles Feedback notwendig, das zwischen dem Inhalt der Argumentation (der Grundidee, soweit rekonstruierbar) und ihrer Abfassung unterscheidet.

Der Bereich, der sich in bisherigen Studien als stärkster Prädiktor für Beweiskompetenz erwies, ist erwartungsgemäß mathematisches Basiswissen. Dass es hierbei um mehr geht als die Fähigkeit, Definitionen und Sätze zu reproduzieren ist jedem Dozenten klar. Der Aufbau von gut vernetztem Wissen, das aufgrund vielfältiger Verknüpfungen auch mathematisch-strategisches Wissen beinhaltet, ist ein zentraler Zielbereich der mathematischen Ausbildung. Für die universitäre Lehre ist von Interesse, dass dazu nicht nur die Fähigkeit zur korrekten Nutzung der Konzepte in Beweis- und Anwendungssituationen gehört, sondern auch die Fähigkeit zu „informellem Nachdenken" über diese Konzepte. Dieses informelle Nachdenken basiert wahrscheinlich auch auf mentalen Modellen (wie stellen Sie sich eine Kugel oder einen affinen Unterraum im $\mathbb{R}^n$ vor?), die ein unvollständiges Abbild des eigentlichen axiomatischen Begriffsumfangs darstellen. Damit dienen sie als prinzipiell fehleranfällige Heuristiken, die zwar durch formalere Überlegungen geprüft werden müssen, denen jedoch für die Exploration von Problemen eine zentrale Rolle zukommt. Diese mentalen Modelle bauen sich nicht unbedingt bei allen Studierenden von selbst auf. Eine große Hilfe können beispielsweise geschickt gewählte informelle Skizzen sein, die zur Erklärung der eigentlichen Beweisidee dienen. Auch hier gilt – wie für die Vermittlung von Problemlösestrategien –, dass nicht allein der fertige Beweis Teil der Lehre sein sollte, sondern auch die Überlegungen, die den Weg dorthin weisen.

Zusammenfassend öffnen die berichteten fachdidaktischen Forschungsergebnisse den Blick auf drei Bereiche, die für die universitäre Ausbildung von Mathematiklehrkräften und Mathematikern über die traditionelle Vermittlung einer „Definition-Satz-Beweis-Mathematik" hinaus von Bedeutung sein können und sollten:

- Die Förderung von Strategien zur Strukturierung des mathematischen Arbeitsprozesses,
- die Vermittlung von Methodenwissen über die Natur mathematischer Beweise und Argumentationen, sowie
- der Aufbau von flexibel nutzbarem Basiswissen, das auch informelle mentale Repräsentation der Konzepte berücksichtigt.

Selbstverständlich gibt es darüber hinaus weitere Bereiche, die mit der Fähigkeit zu reflektiertem mathematischen Arbeiten zusammenhängen. Zu nennen sind hier motivationale und affektive Dispositionen der Studierenden, die sicher zu einem nicht unerheblichen Anteil von der Gestaltung von Lern-Lehr-Prozessen abhängen. Der Art und Weise wie Studierende das spätere Unterrichtsfach in der Ausbildung erleben wird ein großer Einfluss auf die Unterrichtsgestaltung beigemessen. Unklar ist in welchem Maße dies durch fachdidaktisches Wissen und fachdidaktische Kompetenzen ausgeglichen werden kann. Zumindest Altman (1983) sieht dies eher pessimistisch wenn er behauptet: *Teachers teach as they were taught, not as they were taught to teach.* Wenn also Curricula und Standards fordern, dass Lernende nicht nur mathematische Konzepte und Ideen nach vorgegebenen Schemata anwenden, sondern auch kreativ damit umgehen können, muss dies wohl auch für die universitäre (Lehramts-)Ausbildung gelten. Gerade Argumentieren, Begründen und Beweisen können hier ein Lernfeld darstellen, das – mit entsprechender Vorbereitung und Anleitung – einen Einblick in zentrale Bereiche mathematischen Arbeitens ermöglicht.

Literatur

Alexander, P. A. (2003). The development of expertise: The journey from acclimation to proficiency. *Educational Researcher, 32*(8), 10–14.

Altman, H. (1983). Training foreign language teachers for learner-centered instruction: deep structures, surface structures, and transformations. In J. E. Alatis, H. H. Stern & P. Strevens (Hg.), *GURT '83: Applied linguistics and the preparation of second language teachers: Towards a rationale* (S. 19–26). Washingtion, D.C.: Georgetown University Press.

Balacheff, N. (1999). Is argumentation an obstacle? Invitation to a debate ... *International Newsletter on the Teaching and Learning of Mathematical Proof, 05/06.* Available from `www.lettredelapreuve.it/Newsletter/990506Theme/990506ThemeUK.html`

Barkai, R., Tsamir, P., Tirosh, D. & Dreyfus, T. (2002). Proving or refuting arithmetic claims: The case of elementary school teachers. In A. D. Cockburn & E. Nardi (Hg.), *Proceedings of the 26th Conference of the International Group for the Psychology of Mathematics Education* (Bd. 2, S. 57 – 64). Norwich: PME.

Boero, P. (1999). Argumentation and mathematical proof: A complex, productive, unavoidable relationship in mathematics and mathematics education. *International Newsletter on the Teaching and Learning of Mathematical Proof (7/8).* Available from `www.lettredelapreuve.it/Newsletter/990708Theme/990708ThemeUK.html`

Boero, P., Garuti, R. & Mariotti, M. A. (1996). Some dynamic mental processes underlying producing and proving conjectures. In L. Puig & A. Gutierrez (Hg.), *Proceedings of the 20th Conference of the International Group for the Psychology of Mathematics Education* (Bd. 2, S. 121 – 128). Valencia, Spain: PME.

Chen, I.-E. & Lin, F.-L. (2000). A thinking model of mathematics conjecturing. In T. Nakahara & M. Koyama (Hg.), *Proceedings of the 24th Conference of the International Group for the Psychology of Mathematics Education* (Bd. 1, S. 147). Hiroshima: PME.

Chi, M. T. H., Feltovich, P. J. & Glaser, R. (1981). Categorization and representation of physics problems by experts and novices. *Cognitive Science, 5*(2), 121 – 152.

Chinnappan, M. & Lawson, M. J. (1996). The effects of training in the use of executive strategies in geometry problem solving. *Learning and Instruction, 6*(1), 1 – 17.

Dorner, D. (1979). *Problemlösen als Informationsverarbeitung.* Stuttgart: Kohlhammer.

Duval, R. (2002). Proof understanding in mathematics: What ways for students? In F. L. Lin (Hg.), *Proceedings of the International Conference on Mathematics – Understanding Proving and Proving to Understand* (S. 61 – 77). Taipei: NSC and NTNU.

Duval, R. (2007). Cognitive functioning and the understanding of mathematical processes of proof. In P. Boero (Hg.), *Theorems in school. from history, epistemology and cognition to classroom practice* (S. 137 – 162). Rotterdam/Taipei: Sense Publishers.

Freudenthal, H. (1973). *Mathematik als pädagogische Aufgabe.* Stuttgart: Klett.

Healy, L. & Hoyles, C. (1998). *Justifying and proving in school mathematics: Technical report on the nationwide survey.* London: Institute of Education.

Heintz, B. (2000). *Die Innenwelt der Mathematik: Zur Kultur und Praxis einer beweisenden Disziplin*. Wien: Springer.

Heinze, A. (2004). Schülerprobleme beim Lösen von geometrischen Beweisaufgaben – eine Interviewstudie. *Zentralblatt fur Didaktik der Mathematik, 36*(5), 150 – 161.

Heinze, A., Cheng, Y.-H., Ufer, S., Lin, F.-L. & Reiss, K. (2008). Strategies to foster students competencies in constructing multi-steps geometric proofs: teaching experiments in taiwan and germany. *ZDM – International Journal on Mathematics Education, 40*(3), 443 – 453.

Heinze, A. & Reiss, K. (2004). Teaching of proof at lower secondary level – a video study. *Zentralblatt für Didaktik der Mathematik, 36*(3), 98 – 104.

Heinze, A., Reiss, K. & Rudolph, F. (2005). Mathematics achievement and interest in mathematics from a differential perspective. *Zentralblatt für Didaktik der Mathematik, 37*(3), 212 – 220.

Heinze, A., Ufer, S., Cheng, Y.-H. & Lin, F.-L. (2008). Geometric proof competency and its individual predictors: A taiwanese-german study. In *Proceedings of the 11th Internatinal Congress on Mathematical Education.* Monterrey, Mexico: ICMI.

Hiele, P. van & Hiele-Geldorf, D. van. (1978). Die Bedeutung der Denkebenen im Unterrichtssystem nach der didaktischen Methode. In H. Steiner (Hg.), *Didaktik der Mathematik.* Darmstadt.

Inglis, M., Mejia-Ramos, J. P. & Simpson, A. (2007). Modelling mathematical argumentation: the importance of qualification. *Educational Studies in Mathematics, 66,* 3 – 21.

Johnson-Laird, P. N. (1983). *Mental models – towards a cognitive science of language, inference, and conciousness.* Cambridge, Massachusetts: Harvard University Press.

Johnson-Laird, P. N. (2006). *How we reason.* Oxford: University Press.
Johnson-Laird, P. N. & Byrne, R. M. (2002). Conditionals: A theory of meaning, pragmatics, and inference. *Psychological Review, 109*(4), 646–678.
Jong, T. de & Fergusson-Hessler, M. G. (1996). Types and qualities of knowledge. *Educational Psychologist, 31*(2), 105–113.
Koedinger, K. R. (1998). Conjecturing and argumentation in high-school geometry students. In R. Lehrer & D. Chazan (Hg.), *Designing learning environements for developing understanding of geometry and space* (S. 319–347). Mahwah, NJ: Lawrence Erlbaum Associates.
Koedinger, K. R. & Anderson, J. R. (1990). Abstract planning and perceptual chunks: Elements of expertise in geometry. *Cognitive Science, 14,* 511–550.
Küchemann, D. & Hoyles, C. (2002). Students' understanding of a logical implication and its converse. In A. Cockburn & E. Nardi (Hg.), *Proceedings of the 26rd Conference of the International Group for the Psychology of Mathematics Education* (S. 241–248). Norwich: PME.
Kultusministerkonferenz. (2003). *Bildungsstandards im Fach Mathematik fur den mittleren Schulabschluss.* Bonn: KMK.
Kultusministerkonferenz. (2004a). *Bildungsstandards im Fach Mathematik fur den Hauptschulabschluss.* Bonn: KMK.
Kultusministerkonferenz. (2004b). *Bildungsstandards im Fach Mathematik fur den Primärbereich.* Bonn: KMK.
Lin, F.-L. (2000). *Investigating local learning issues in mathematics education from international perspectives.* (Keynote Speech on Second International Conference on Science, Mathematics and Technology Education, Jan 10–13, Taipei, Taiwan)
Lin, F.-L. (2005). Modeling student's learning on mathematical proof and refutation. In H. L. Chick & J. L. Vincent (Hg.), *Proceedings of the 29th Conference of the International Group for the Psychology of Mathematics Education* (Bd. 1, S. 3–18). Melbourne: PME.
Manin, Y. (1977). *A course in mathematical logic.* New York, Heidelberg, Berlin: Springer.
Mason, J. & Pimm, D. (1984). Generic examples: Seeing the general in the particular. *Educational Studies in Mathematics, 15*(3), 277–289.
National Council of Teachers of Mathematics. (2000). *Principles and standards for school mathematics.* Reston, VA.
Pedemonte, B. (2007). How can the relationship between argumentation and proof be analysed? *Educational Studies in Mathematics, 66,* 23–41.
Perelman, C. (1970). *Le champ de Vargumentation.* Bruxelles: Presses Universitaires.
Polya, G. (1945). *How to solve it.* Princeton University Press.
Polya, G. & Szego, G. (1925). *Aufgaben und Lehrsätze aus der Analysis I.* New York: Springer.
Reiss, K. (2009). Wege zum Beweisen. Einen „Habit of Mind" im Mathematikunterricht etablieren. *mathematik lehren, 155,* 4–9.
Reiss, K., Heinze, A., Kuntze, S., Kessler, S., Rudolph-Albert, F. & Renkl, A. (2006). Mathematiklernen mit heuristischen Losungsbeispielen. In M. Prenzel & L. Allolio-Näcke (Hg.), *Untersuchungen zur Bildungsqualität von Schule.* Münster: Waxmann.
Reiss, K., Klieme, E. & Heinze, A. (2001). Prerequisites for the understanding of proofs in the geometry classroom. In M. van den Heuvel-Panhuizen (Hg.), *Proceedings of the 25th Conference of the International Group for the Psychology of Mathematics Education* (Bd. 4, S. 97–104). Utrecht, The Netherlands: PME.
Reiss, K. & Renkl, A. (2002). Learning to prove: The idea of heuristic examples. *Zentralblatt für Didaktik der Mathematik, 34*(1), 29–35.
Reiss, K. & Thomas, J. (2000). Wissenschaftliches Denken beim Beweisen in der Geometrie. Ergebnisse einer Studie mit Schülerinnen und Schülern der gymnasialen Oberstufe. *Mathematica didactica, 23*(1), 96–112.
Reiss, K. & Winkelmann, H. (2008). Step by step. Ein Kompetenzstufenmodell für das Fach Mathematik. *Grundschule, 40*(10), 18–21.

Schoenfeld, A. H. (1989). Teaching mathematical thinking and problem solving. In L. B. Resnick & B. Klopfer (Hg.), *Toward the thinking curriculum: Current cognitive research.* Washington, DC: American Society for Curriculum Development.
Schoenfeld, A. H. (1992). Learning to think mathematically: Problem solving, metacognition and sense-making in mathematics teaching and learning. In D. A. Grouws (Hg.), *Handbook of research on mathematics teaching and learning* (S. 334–370). New York: Simon & Schuster.
Sweller, J. (1990). On the limited evidence for the effectiveness of teaching general problem-solving strategies. *Journal for Research in Mathematics Education, 21*(5), 411–415.
Thurston, W. P. (1994). On proof and progress in mathematics. *Bulletin of the American Mathematical Society, 30*(2), 161–177.
Toulmin, S. E. (1958). *The uses of argument.* Cambridge, UK: University Press.
Toulmin, S. E. (1996). *Der Gebrauch von Argumenten.* Weinheim und Basel: Beltz Athenaum.
Ufer, S., Heinze, A., Kuntze, S. & Rudolph-Albert, F. (2009). Beweisen und Begrunden im Mathematikunterricht. Die Rolle von Methodenwissen für das Beweisen in der Geometrie. *Journal für Mathematik-Didaktik, 30*(1), 30–54.
Ufer, S., Heinze, A. & Reiss, K. (2008a). Development of geometric proof competency from grade 7 to 9: A longitudinal study. In *Proceedings of the 11th Internatinal Congress on Mathematical Education.* Monterrey, Mexico: ICMI.
Ufer, S., Heinze, A. & Reiss, K. (2008b). Individual predictors of geometrical proof competence. In O. Figueras & A. Sepúlveda (Hg.), *Proceedings of the Joint Meeting of the 32nd Conference of the International Group for the Psychology of Mathematics Education, and the XX North American Chapter* (Bd. 1, S. 361–368). Morelia, Mexico: PME.
Usiskin, Z. (1982). *Van Hiele levels and achievement in secondary school geometry. CDASSG project.* Illinios: Chicago University.
Weber, K. (2001). Student difficulty in constructing proofs: The need for strategic knowledge. *Educational Studies in Mathematics, 48,* 101–119.
Yackel, E. & Cobb, P. (1996). Sociomathematical norms, argumentation, and autonomy in mathematics. *Journal for Research in Mathematics Education, 27*(4), 458–477.

Knot Invariants: Low Dimensional Topology and Combinatorics

András I. Stipsicz

Abstract

- Mathematics Subject Classification: 57R58, 57M25
- Keywords and Phrases: Knots, Seifert surfaces, Alexander polynomial, knot Floer homology, Ozsváth-Szabó homology

After reviewing some basic concepts of knot theory, we describe the Alexander polynomial of a knot using Kauffman states, and sketch the holomorphic and the combinatorial definitions of knot Floer homologies.

Eingegangen: 15. 09. 2009

András I. Stipsicz, Rényi Institute of Mathematics, Hungarian Academy of Sciences, H-1053 Budapest, Hungary, stipsicz@math-inst.hu

DMV
JAHRESBERICHT
DER DMV

1 Introduction

Knots are among the simplest geometric objects, nevertheless their study leads to a fascinating theory. Usually we tie knots on ropes. Then, by moving the ends of the rope, the knot can be untied. For a mathematical theory that can distinguish knots, therefore, one requires the knot to form a loop, that is, after the knot is tied on the rope, we glue the two ends of the rope together in order to prevent this simple way of untying. Here is the formal definition:

Definition A differentiable embedding of the circle

$$S^1 = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid x^2 + y^2 = 1\}$$

into the 3-dimensional Euclidean space $\mathbb{R}^3$ is called a *knot*. Two knots K_1 and K_2 are said to be *isotopic* if one can be smoothly deformed into the other. This means that there is a differentiable family K_t of knots parametrized by $t \in [1,2]$. An equivalence class of knots under the relation of isotopy is called a *knot type*.

Sometimes it is more convenient to think of a knot as sitting inside the 3-sphere S^3, i.e. the one-point compactification $\mathbb{R}^3 \cup \{\infty\}$ of $\mathbb{R}^3$, and one may also study knots in arbitrary 3-dimensional manifolds. Also, it is customary simply to say 'knot' instead of 'knot type' if the meaning is clear from the context.

Knot theory has a long and rich history. The mathematical study of knots dates back to the nineteenth century when Lord Kelvin proposed a model for atoms based on knots in the ether, leading his collaborator P. Tait to a systematic study of knots. For more about the historic aspects, the reader is advised to turn to [2, 7]. For more on knot theory and further references to the literature we advise the unexperienced reader to start with [1], while for a more advanced treatment of this beautiful topic we recommend [3, 4, 8, 20].

Our goal in the present article is to describe a recent development in knot theory: the introduction of knot Floer homology by Ozsváth-Szabó and Rasmussen. We are going to present this newly invented homology theory by showing its strong connections to a more classical chapter of the theory, the Alexander polynomial. No previous knowledge of homology theory will be assumed, as we are going to construct the knot Floer homology from first principles. The building blocks of any homology theory are a so-called chain complex and a differential on it (all this will be defined in Section 4). The attribute 'Floer', in honor of the mathematician who first described a homology theory of that type, refers to the fact that the differential is defined by counting certain holomorphic curves.

Although both the Alexander polynomial and the knot Floer homology rely on sophisticated mathematical constructions, they admit nice descriptions through simple but ingenious combinatorics. In this paper we would like to emphasize this simplicity. Since we plan to focus exclusively on knot Floer homology, we will leave a number of fascinating developments of knot theory untouched, e.g. the Jones polynomial or Khovanov homology. Similarly, although many other branches of topology apply results of knot theory, none of these beautiful applications will be discussed in the present survey.

2 Invariants of knots

Despite the simplicity of their definition, knots may be quite complicated. A natural way to present a knot is through a *planar projection*: we fix a plane in $\mathbb{R}^3$ and consider the image of the knot on the plane under orthogonal projection. For almost all planes the projection will be injective with finitely many exceptions, where we will have double points, also called *crossings.* We always assume that our projection is 'generic' in this sense. Furthermore, at the crossings we apply the convention that the strand passing under is drawn interrupted. With this convention the projection determines the knot up to isotopy, i.e. the knot type. An example of such a projection is shown in Figure 1. That particular projection gives the knot it represents its name: the trefoil. A list of knot projections with at most 11 crossings can be found in [20], and for at most 8 crossings in [8, page 5].

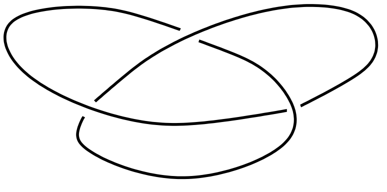


Figure 1. A projection of the (left-handed) trefoil.

In fact, knot projections can be used conveniently in the study of knots, since there are simple moves which transform two projections into each other, provided they are projections of the same knot type. The exact statement is given by the following theorem.

Theorem 2.1 (Reidemeister's theorem) *Two projections correspond to isotopic knots if and only if the projections can be connected by isotopies of the diagrams in the plane and a finite sequence of modifications R_1, R_2 and R_3 shown in Figure 2. These modifications are called Reidemeister moves.*

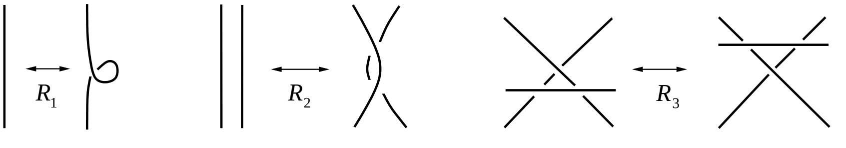


Figure 2. The Reidemeister moves R_1, R_2 and R_3.

There is, unfortunately, no upper bound on the number of necessary moves. If we find a connecting sequence between two projections, we have verified that the projections correspond to the same knot type. It is less clear how to show that two projections correspond to *different* knots. An effective method for distinguishing knots is the introduction of *knot invariants.* Such invariants can be properties, functions (e.g. polynomials) or even more abstract algebraic objects, such as groups (as we will see with the example of knot Floer homology) or algebras. Knot invariants can be conveniently defined from projections by showing that the result does not change under the Reidemeister moves of Figure 2. We start with a simple example: 3-colorability. For the following definition, notice that exactly three strands meet at each crossing of a knot projection.

Definition A projection of a knot is called 3-*colorable* if we can color the arcs in the projection with three colors R, B and G in such a way that an arc has a single color, every color appears in the projection, and at a crossing either all three or exactly one color is present.

I leave to the reader the pleasure to check that none of the moves R_1, R_2, R_3 changes 3-colorability of the projection. With Reidemeister's theorem, this implies the following statement:

Theorem 2.2 3-*colorability is a property of the knot and is independent of the chosen projection.*

Since the projection of the trefoil given by Figure 1 obviously admits a 3-coloring, while the standard projection of the unknot (a circle in the plane) does not, we conclude:

Corollary 2.3 *The trefoil knot is different from the unknot. In other words, the trefoil knot cannot be untied (or unknotted) without cutting and regluing it.*

Of course, any knot is either 3-colorable, or it is not. The members within one of these two classes of knots we cannot, as yet, distinguish. For instance, the 3-colorability property does not distinguish the left-handed trefoil L of Figure 3 from the right-handed trefoil R of the same figure.

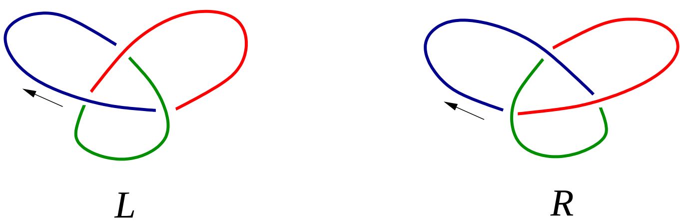


Figure 3. Left- and right-handed trefoil knots.

Note that, more generally, by reversing the under- and over-crossings, any diagram can be modified to a projection of another knot, called the *mirror* of the original knot, and 3-colorability cannot distinguish any knot from its mirror.

Next we define two fundamental concepts of knots: the genus of a knot and the fibered property. In order to define the genus, we need to invoke the following fundamental result:

Theorem 2.4 (Seifert's Theorem) *Every knot in* $\mathbb{R}^3$ *is the boundary of an orientable surface.*

By ‘surface’ we mean an *embedded* surface, i.e. a surface without self-intersections. Any such (orientable) surface with boundary equal to a given knot is called a *Seifert surface* of that knot.

This result seems quite surprising when one first hears it, but the proof is in fact not very difficult. Color the regions cut out by a given knot projection in chessboard fashion in black and white (with the unbounded ‘outer’ region in white, say). Now connect all black disk-like regions by twisted bands at the crossings. This algorithm produces an embedded surface whose boundary is the given knot. Unfortunately, this surface will in general not be orientable, but a slight modification of the algorithm can be used to find an orientable Seifert surface, see [8, Theorem 2.2]. The number of ‘holes’ of this orientable surface is called its *genus*. The indicated algorithm will usually produce a surface of very large genus, and there may be surfaces of smaller genus with the same knot as boundary.

Definition The genus of a knot is the minimum of the genera of its Seifert surfaces:

$$g(K) := \min\{g(F) \mid F \subset \mathbb{R}^3 \text{ orientable surface}, \quad \partial F = K\}.$$

The genus $g(K)$ can be viewed as a measure of the complexity of the knot K. For instance, the unknot (and only the unknot) has genus 0, while both trefoils L and R of Figure 3 are of genus 1. (In general, a knot and its mirror have the same genus.) There are knots of arbitrarily large genus.

Definition A knot $K \subset S^3$ is called *fibered* if its complement $S^3 \setminus K$ can be presented as a family of surfaces, more precisely, if there is a map

$$\phi\colon S^3 \setminus K \to S^1$$

such that for each $t \in S^1$ the fiber $\phi^{-1}(t)$ is (the interior) of a Seifert surface of K, which is homeomorphic to a (non-compact) 2-dimensional surface F. For technical reasons we require the map to satisfy the *local triviality property*: for every segment $I \subset S^1$ (with $I \neq S^1$) the inverse image $\phi^{-1}(I)$ must be homeomorphic to the product $I \times F$.

Informally, a fibered knot $K \subset S^3$ is built from ‘lower-dimensional pieces': the complement can be presented as the quotient of $[0, 1] \times F$ under some map $f\colon F \to F$ which glues $\{0\} \times F$ to $\{1\} \times F$ to form $S^3 \setminus K$. This description naturally provides the above fibration of the complement over S^1. Notice that the closure of each fiber $\phi^{-1}(t)$ is a Seifert surface for K.

For an example, take a look at Figure 4. Here we regard S^3 as $\mathbb{R}^3 \cup \{\infty\}$, and you have to rotate the picture by 180° around the vertical axis (which passes through the point ∞) as shown to get $\mathbb{R}^3 \cup \{\infty\}$. The two thickened points give the unknot under this rotation; each indicated arc between the two points yields a disk. (The two horizontal half-lines starting at the thickened points, together with the point ∞, also constitute such an arc.) So here F is an open 2-disk, and the gluing map f is the identity – the complement of the unknot in S^3 is an open solid 2-torus.

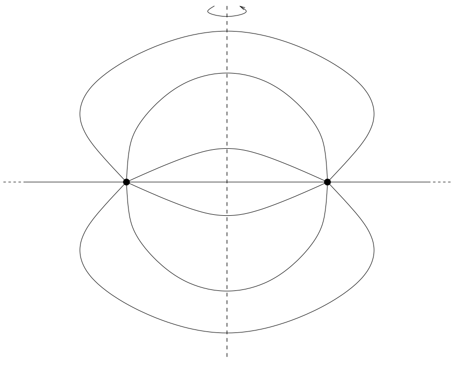


Figure 4. The unknot is fibered.

The genus and fiberability are geometric properties of a knot, which turn out to be important in applications of knot theory in other fields of mathematics, for example, in the theory of smooth 4-manifolds. It is usually quite hard, however, to determine the genus of a knot directly from the definition. Applying the described algorithm for finding a Seifert surface we can give an upper bound for $g(K)$ from any projection of K, but in general it is not clear how far this upper bound deviates from the actual value of $g(K)$. Similarly, it is difficult to decide from a projection whether a knot is fibered or not, unless the actual fibration is directly visible. As we will see, suitable invariants can estimate, or even determine the genus and fiberability.

3 The Alexander polynomial

The Alexander polynomial, invented by J. W. Alexander in 1923, served as one of the few important invariants of knots until the discovery of the Jones polynomial around 1988 (which led to the introduction of a host of other knot invariants). The original definition of the Alexander polynomial $\Delta_K(t)$ of a knot K involved a great deal of topology and algebra; a more combinatorial definition, relying on a projection of the knot, was found by L. Kauffman. In the sequel we will describe this latter approach.

Suppose that $\overline{K}$ is a given projection of the knot K. Let $Cr(\overline{K})$ denote the set of crossings in the projection. Choose a distinguished arc of the projection, which we will mark with an X, and let $D(\overline{K})$ denote the set of domains in the plane (i.e. the connected components of the complement of $\overline{K}$) which do not contain the marking X on their boundary.

Definition A bijection

$\sigma\colon Cr(\overline{K}) \to D(\overline{K})$

is called a *Kauffman state* if it associates with each crossing $c_i \in Cr(\overline{K})$ a domain $\sigma(c_i) \in D(\overline{K})$ which has c_i in its boundary. For a projection $\overline{K}$ with a chosen marking X we denote the set of all Kauffman states by $Kauff(\overline{K})$.

In other words, a Kauffman state is a choice of a quadrant at each crossing, subject to the requirement that domains with the marking X on their boundary may not be chosen, and each other domain may be chosen exactly once. For example, the usual projection of the trefoil knot admits three Kauffman states, indicated by the circles, the rectangles and the triangles of Figure 5.

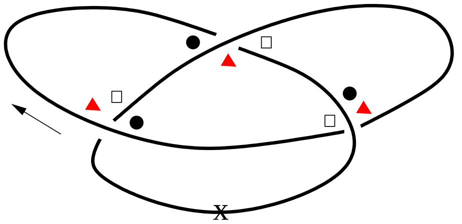


Figure 5. The Kauffman states of the standard projection of the trefoil. The arrow indicates an orientation on the knot.

Given a marked projection $\overline{K}$ of a knot K, equip it with an orientation (i.e. a direction of traversal). For a Kauffman state σ of this projection, define the half-integer

$$s(\sigma) = \sum_{c_i \in Cr(\overline{K})} s(\sigma(c_i))$$

and the integer

$$d(\sigma) = \sum_{c_i \in Cr(\overline{K})} d(\sigma(c_i)),$$

where the local coefficient $s(\sigma(c_i))$ and $d(\sigma(c_i))$ for σ at a crossing $c_i \in Cr(V)$ are given by Figure 6.

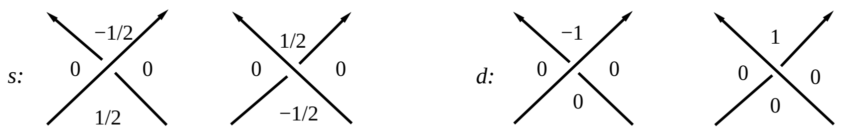


Figure 6. Local coefficients s and d at a crossing c_i.

With all these preparations in place, we are ready to define the Alexander polynomial of K as the sum

$$\Delta_K(t) = \sum_{\sigma \in Kauff(\overline{K})} (-1)^{d(\sigma)} t^{s(\sigma)} \in \mathbb{Z}[t^{-\frac{1}{2}}, t^{\frac{1}{2}}].$$

Notice that *a priori* this Laurent polynomial (possibly involving terms with half-integer exponents) might depend on the chosen projection. The following theorem, however, shows that it does not.

Theorem 3.1 *The Alexander polynomial $\Delta_K(t)$ is an element of $\mathbb{Z}[t, t^{-1}]$ and is an invariant of the (unoriented) knot K.*

The idea of the proof is very similar to the proof of 3-colorability being an invariant: one has to verify that the quantity $\Delta_K(t)$ does not change under the Reidemeister moves R_1, R_2, R_3. For this, one needs to find a convenient correspondence between the Kauffman states before and after a Reidemeister move.

As an example, we compute the quantities for the left-handed trefoil knot L of Figure 5 with the clockwise orientation (as it is indicated on Figure 5):

$$d(c) = 0, s(c) = -1; \quad d(r) = 2, s(r) = 1; \quad d(t) = 1, s(t) = 0,$$

where c stands for the Kauffman state denoted by circles on Figure 5, r for the one denoted by rectangles and t is the one given by the triangles. The Alexander polynomial of the knot of Figure 1 is therefore equal to $t - 1 + t^{-1}$. For the mirror image R of L (with the orientation shown by Figure 3) we have the same Kauffman states, but the d- and s-functions are given by $(d, s) = (0, 1), (-2, -1), (-1, 0)$. It is now easy to see that the Alexander polynomial will be the same for the two trefoils. In fact, the equality of Alexander polynomials holds for any knot and its mirror.

Further examples of knots are shown in Figure 7; these are the so-called *twist* knots T_n and *pretzel* knots $P(p, q, r)$, respectively. A somewhat lengthy but simple computation shows that for n and p, q, r odd we have

$$\Delta_{T_n}(t) = \frac{n+1}{2} t - n + \frac{n+1}{2} t^{-1},$$

and

$$\Delta_{P(p,q,r)}(t) = Dt - 2D + 1 + Dt^{-1},$$

where we write p, q, r as $p = 2a + 1, q = 2b + 1, r = 2c + 1$, and then define $D = ab + ac + bc + a + b + c + 1$.

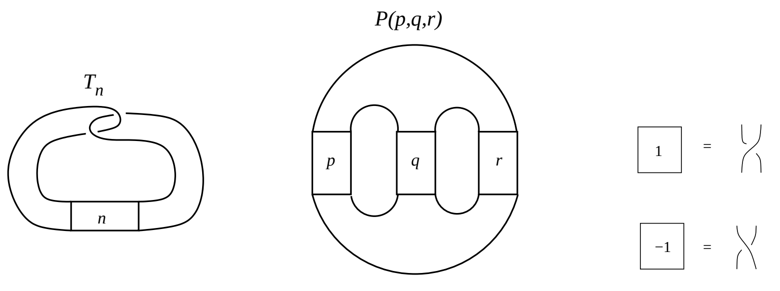


Figure 7. Some examples: twist and pretzel knots. The number in a box denotes the amount of half-twists (right-handed for positive, and left-handed for negative integers, cf. the right-hand side of the figure).

After all these preparations we are ready to state a theorem that provides a connection between the Alexander polynomial $\Delta_K(t)$ and the geometric properties of the knot K.

Theorem 3.2 *The Alexander polynomial $\Delta_K(t)$ of a knot K satisfies $\Delta_K(t) = \Delta_K(t^{-1})$, and so $\Delta_K(t)$ can be written in the form*

$$\Delta_K(t) = a_0 + \sum_{i=1}^{n} a_i(t^i + t^{-i}),$$

where n is taken to be the highest power of t appearing in $\Delta_K(t)$, i.e. $a_n \neq 0$. Then

- *$n \leq g(K)$;*
- *for a fibered knot K we have $n = g(K)$ and $a_n = \pm 1$.*

According to this theorem, the Alexander polynomial provides a lower bound for the genus of the knot, and an obstruction to fiberedness: if a_n is not ± 1 then the knot is not fibered. For example, the twist knot T_n is not fibered for any odd n greater than 1 (T_1 is the left-handed trefoil knot, which happens to be fibered). The Alexander polynomial in general, however, does not provide precise information: for example, the pretzel knot $K = P(-3, 5, 7)$ has $\Delta_K(t) = 1$, although it can be shown (by other means) that the knot is non-trivial, hence has $g(K) > 0$.

In short, the Alexander polynomial is an invariant which is relatively easy to compute and also gives a good insight into the geometry of the knot, although in some cases it does not provide the precise answer we are looking for. A more 'faithful' invariant will be provided by *knot Floer homology*, which we will discuss in the following section.

4 Knot Floer homology

Chain complexes

A standard way of producing invariants in topology is by computing *homologies*. The general scheme is the following: for a given object (which might be a topological space, a pair of topological spaces, a knot, etc.) we make further choices, then define a chain complex – which might depend on the further choices made – and then take the *homology* of the chain complex, and hope that the dependence on the further choices will disappear in this step. First we recall the concept of chain complexes and homologies, and then we produce chain complexes for a knot based on one of its projections.

Suppose that C_i ($i = 0, \dots, n+1$) are given finite-dimensional vector spaces and $\partial_i\colon C_i \to C_{i-1}$ are linear maps. Suppose further that $\dim C_0 = \dim C_{n+1} = 0$.

Definition The pair $(C_i, \partial_i)_{i=0}^{n+1}$ is a *chain complex* if $\partial_i \circ \partial_{i+1} = 0$ (that is, $\operatorname{im} \partial_{i+1} \leq \ker \partial_i$) for all $i = 0, \dots, n$. The factor $H_i = \ker \partial_i / \operatorname{im} \partial_{i+1}$ is called the i^{th} *homology group* of the chain complex.

It is easy to see that

$$\sum_i (-1)^i \dim C_i = \sum_i (-1)^i \dim H_i.$$

Indeed, for a chain complex of the form $0 \to C_1 \xrightarrow{f} C_2 \to 0$ this statement reduces to

$$\dim H_2 - \dim H_1 = \dim C_2 - \dim \mathrm{im} f - \dim \ker f = \dim C_2 - \dim C_1,$$

where the last step follows from the homomorphism theorem in basic linear algebra. The general case is just the appropriate repetition of that argument.

Now we are in the position to define a family of chain complexes associated to the projection of a knot. To this end, suppose that $\overline{K}$ is a chosen marked projection of a given knot K. For $d, s \in \mathbb{Z}$ let $C_d(K,s)$ denote the $\mathbb{Z}_2$-vector space generated by those Kauffman states of $\overline{K}$ which satisfy $d(\sigma) = d$ and $s(\sigma) = s$. Using these vector spaces we would like to define a chain complex

$$\big(C_d(K,s), \partial_d(K,s)\big)_d$$

for every fixed s. The linear map $\partial_d(K,s)$, however, will be defined in a rather technical way. Before we give the definition, notice that by the definition of the Alexander polynomial we have $\sum_d (-1)^d \dim C_d(K,s) = a_s$ (with a_s denoting the coefficient of t^s in $\Delta_K(t) = a_0 + \sum_{i=1}^n a_i(t^i + t^{-i})$.) Therefore, for any boundary map we will have

$$\sum_d (-1)^d \dim H_d(K,s) = a_s.$$

Of course, the homology groups will be knot invariants only for suitably chosen boundary maps. The above identity shows that the homology theory will determine the Alexander polynomial $\Delta_K(t)$, hence we will get an invariant containing at least as much information about the knot as $\Delta_K(t)$ does.

For the definition of $\partial_d(K,s)$ we will need an alternative description of the Kauffman states. Think of the projection $\overline{K}$ as a subset of $\mathbb{R}^3$ (rather than a subset of a plane), and let Σ be the boundary of a tubular neighborhood of that subset. For the usual projection of the trefoil knot, for example, this is a surface of genus 4, see Figure 9. Consider the contours of the 'inner' domains (i.e. those intersection circles of the projection plane with Σ which bound compact connected pieces in the complement of the projection), and call them the *α-curves of the projection.* If the projection has k double points, then there are $k+1$ such curves. We will choose the same number of β-curves: at a crossing of the projection, Figures 8(a) and (b) show our choice of a *β-curve.* In this way we get *k β-curves of the projection.* In addition, at the distinguished edge (marked with X) we add one more β-curve, as instructed by Figure 8(c), resulting in an equal number of β- and α-curves. For simplicity, let $k+1$ be denoted by g.

In summary, at the end of this procedure we will have a surface Σ of genus g, together with g α-curves and g β-curves on Σ. Let us fix two points w and v on the two sides of the β-curve near the distinguished edge, as shown by Figure 8(c). By the choice of the β-curves at the intersections, it is not hard to see the following: if we pass from w to v in the complement of the α-curves (simply by crossing the β-curve near the distinguished edge), while we go from v to w in the complement of the β-curves, we recover the knot K we started with. So the five-tuple $(\Sigma, \{\alpha_1, \ldots, \alpha_g\}, \{\beta_1, \ldots, \beta_g\}, v, w)$ can be used to encode the knot K.

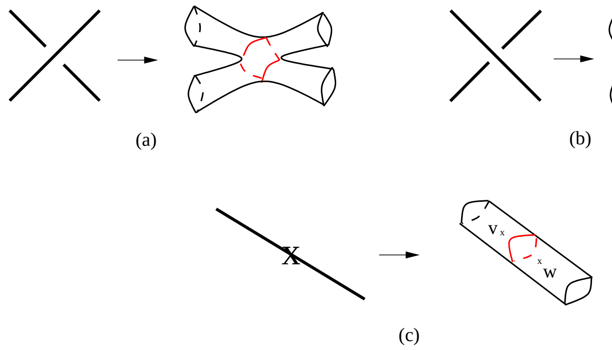


Figure 8. The instructions for the β-curves.

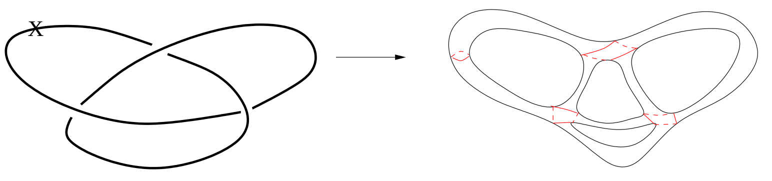


Figure 9. The β-curves for the usual projection of the trefoil knot.

Topologically, the product $\alpha_1 \times \ldots \times \alpha_g$ is a g-dimensional torus, i.e. the product of g circles, in $\Sigma \times \ldots \times \Sigma =: \Sigma^g$; similarly for the β-curves. The order of the curves is a matter of choice. In order to define an object independent of this choice, regard the tori in the 'symmetric power' $\mathrm{Sym}^g(\Sigma) = \Sigma^g / S_g$, where we consider unordered g-tuples of points of Σ; here S_g denotes the symmetric group on g letters. We obtain two g-dimensional tori $\mathbf{T}_\alpha, \mathbf{T}_\beta \subset \mathrm{Sym}^g(\Sigma)$ in the $2g$-dimensional space $\mathrm{Sym}^g(\Sigma)$.

Remark The symmetric power of a manifold is usually a topological space with singularities. When we start with a two-dimensional surface (as we did above), the result will be a smooth manifold. This can be seen by the following local consideration: Associate with each unordered g-tuple of points in the plane $\mathbb{R}^2 = \mathbb{C}$ the normalized complex polynomial with these points as zeros; the coefficients of that polynomial provide coordinates for the g-fold symmetric product of $\mathbb{R}^2$.

Lemma 4.1 *The Kauffman states of the knot projection are in one-to-one correspondence with the intersection points* $\mathbf{T}_\alpha \cap \mathbf{T}_\beta \subset \mathrm{Sym}^g(\Sigma)$.

The idea of the proof of this statement is pretty simple: an element of $\mathbf{T}_\alpha \cap \mathbf{T}_\beta$ is an (unordered) g-tuple $\{x_1, \ldots, x_g\}$ for which $x_i \in \alpha_i \cap \beta_{\pi(i)}$ for some permutation $\pi \in S_g$. We do not have a choice for the coordinate on the β-circle near the distinguished edge (since it intersects a single α-curve in a single point), and on all other β-circles the choice of the α-intersection specifies a quadrant, and therefore a Kauffman state.

Now we are ready to define the differential

$$\partial_d = \partial_d(K, s)\colon C_d(K, s) \to C_{d-1}(K, s),$$

where $C_d(K, s)$ is generated by the corresponding Kauffman states. Since the vector space $C_d(K, s)$ is generated by certain intersection points of $\mathbf{T}_\alpha$ and $\mathbf{T}_\beta$, and we want to define a linear map, we only need to describe the coefficients n_{xy} in the expansion

$$\partial_d x = \sum_y n_{xy} y,$$

where x is a generator of $C_d(K, s)$, and y runs over the generators in the vector space $C_{d-1}(K, s)$. To achieve this description, we appeal to Lemma 4.1 and think of x and y as points in $\mathbf{T}_\alpha \cap \mathbf{T}_\beta$. Let $\mathbb{D} = \{z \in \mathbb{C} \mid z\bar{z} \leq 1\}$ denote the unit disk in the complex plane. With these notations in place, n_{xy} will denote the (mod 2) number of (almost) holomorphic maps $u\colon \mathbb{D} \to \mathrm{Sym}^g(\Sigma)$ for which

- $u(\{z \mid z\bar{z} = 1,\ \mathrm{Re}(z) < 0\}) \subset \mathbf{T}_\beta$,
- $u(\{z \mid z\bar{z} = 1,\ \mathrm{Re}(z) > 0\}) \subset \mathbf{T}_\alpha$,
- $u(i) = x, u(-i) = y$,
- with $V_p := \{p\} \times \mathrm{Sym}^{g-1}(\Sigma)$ we have $u(\mathbb{D}) \cap V_v = \emptyset$ and $u(\mathbb{D}) \cap V_w = \emptyset$.

Notice that in order to talk about complex differentiability, we need to fix an almost complex structure on $\mathrm{Sym}^g(\Sigma)$. This is always possible, and at the end of the procedure we will need to verify that the resulting homology theory does not depend on this further choice (although the resulting chain complex might). By linear extension of $\partial_d(K, s)$ from the basis to all of $C_d(K, s)$, we get the desired linear transformation.

Theorem 4.2 (Ozsváth-Szabó) *The map $\partial_d = \partial_d(K, s)$ satisfies $\partial_d \circ \partial_{d+1} = 0$, therefore for each fixed s we have a chain complex $(C_d(K, s), \partial_d(K, s))$. The homology groups $\{H_d(K, s)\}_d$ of this chain complex provide an invariant of the knot $K \subset S^3$, i.e. the homologies are independent of the chosen projection of K and the chosen almost complex structure on $\mathrm{Sym}^g(\Sigma)$.*

The resulting homology groups $\{H_d(K, s)\}_d$ are called the *knot Floer homology groups* of the knot K. The next important result regarding these homology groups follows from results of Ozsváth-Szabó, Juhász and Ni.

Theorem 4.3 *Suppose that K is a knot with Alexander polynomial $\Delta_K(t) = a_0 + \sum_{i=1}^n a_i(t^i + t^{-i})$. Then:*

- $\sum_d (-1)^d \dim H_d(K, s) = a_s$*, and the group $H_d(K, s)$ is isomorphic to $H_{d-2s}(K, -s)$;*
- $g(K) = \max\{s \mid H_d(K, s) \neq 0$ *for some* $d\}$*;*
- *the knot K is fibered if and only if $\sum_d H_d(K, g(K)) = \mathbb{Z}_2$, that is, for some d the group $H_d(K, g(K))$ is isomorphic to $\mathbb{Z}_2$ and, with the fixed $s = g(K)$, it vanishes for all other d's.*

In short, the knot Floer homology groups compute the genus of the knot and provide a way to determine whether the knot is fibered or not. For the standard three-crossing projections of the two trefoil knots L and R the computation becomes particularly simple, since from the gradings of the Kauffman states we conclude that all differentials vanish: for any fixed s there is a single d with non-trivial $C_d(K,s)$. Therefore we get that

$$H_0(L,-1) = H_1(L,0) = H_2(L,1) = \mathbb{Z}_2$$

$$H_{-2}(R,-1) = H_{-1}(R,0) = H_0(R,1) = \mathbb{Z}_2,$$

and all other homology groups are trivial. Observe that with the aid of the knot Floer homology groups we can at last distinguish the two trefoil knots from each other.

The proofs of Theorems 4.2 and 4.3 above require deep complex (and almost complex) geometry, resting on fundamental results of Gromov [6] and Floer [5]. We are not planning to go into any details of those arguments here.

The situation at the moment is that we have an invariant (the Alexander polynomial) which is easy to compute and gives – sometimes non-sharp – bounds, and we have another, more involved concept (knot Floer homology) providing an invariant which gives exact answers. Since the determination of the number of holomorphic maps (needed for computing the coefficients n_{xy} in the boundary operator) is typically a very difficult problem, at first glance knot Floer homology does not seem to be a computable invariant. This status has changed recently:

Theorem 4.4 *The homology groups $H_d(K,s)$ can be computed by purely combinatorial means.*

In [11] knot Floer homology has been extended to *singular knots* (knots in $\mathbb{R}^3$ with transverse self-intersections), and in [18] a combinatorial computation scheme for $H_d(K,s)$ for any knot K and integers d,s has been found. Along a different path, Manolescu-Ozsváth-Sarkar [9] applied the formulation of grid diagrams and found a particularly simple combinatorial way to compute knot Floer homology. In the following we will give a short introduction to this latter approach.

Grid diagrams

Suppose that we have an $n \times n$ grid where in each column and in each row exactly one O and one X has been placed (in different squares). By connecting the O's and the X's in the columns first, and then in the rows (with the convention that the horizontal segment passes under the vertical one), after slightly rounding the corners we get the projection of a link, i.e. a multicomponent knot.

Conversely, it is easy to see that any projection of a knot (or even a link) can be modified to have only horizontal and vertical segments and such that the vertical is always over the horizontal. (See Figure 10, which shows this modification, together with an example of the left-handed trefoil L in grid position.) Such a diagram, in turn, can be depicted by an $n \times n$ grid for some n as above. Suppose therefore that the knot in question is given by a grid diagram.

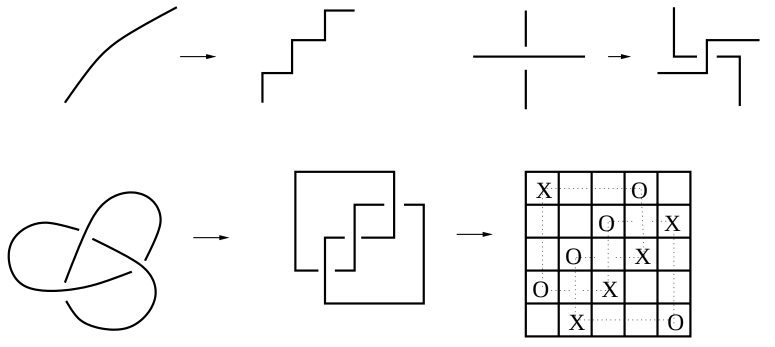


Figure 10. Knots and grid positions.

The idea of the definition of a chain complex is then a simple adaptation of our previous reasonings. Regard the square of the grid as the presentation of the torus T (with the identification of the bottom and the top, as well as the rightmost and the leftmost edges), and regard the horizontal lines as α-curves, and the vertical ones as β-curves. Notice that on the torus these lines become circles. With this convention, an element of $\mathbf{T}_\alpha \cap \mathbf{T}_\beta \subset \mathrm{Sym}^n(T)$ corresponds to a permutation of $\{1, \ldots, n\}$ by assigning to i the index of the β-curve containing $x_i \in \alpha_i$. The definition of the d- and s-gradings is slightly more complicated, but still combinatorial (and we will omit the presentation of these definitions). The linear map $\partial_d(K, s)$ in this setting can be defined as follows. Pick two generators x and y, and determine the coefficient n_{xy} using the following recipe:

- Declare $n_{xy} = 0$ if the two permutations corresponding to x and y do *not* differ by a transposition.
- If the difference of x and y is a transposition, then the differing coordinates determine four rectangles in the grid. The orientation of the torus provides orientations on these rectangles, which in turn orient their sides. For two rectangles this orientation convention directs the two α-edges from the x-coordinates to the y-coordinates, while for the other two rectangles the α-edges point from y to x. We say that the former two rectangles go *from x to y*, while the latter two *from y to x*. Now define n_{xy} as the mod 2 number of *empty* rectangles from x to y, i.e. the number of those rectangles which go from x to y, contain no O, no X and no further coordinates of x (and y, since those further coordinates are all equal).

As before, the linear extension of ∂_d from the basis provides the desired linear map of the chain complex. Using fairly simple complex analysis (relying on the Riemann mapping theorem), the resulting chain complex can be identified with the result of an appropriate modification of the holomorphic theory, leading us to the following theorem.

Theorem 4.5 (Manolescu-Ozsváth-Sarkar, [9]) *The homology of the resulting chain complex of the above combinatorial theory is isomorphic to the vector space*

$$H_d(K, s) \otimes (\mathbb{Z}_2 \oplus \mathbb{Z}_2)^{\otimes(n-1)}$$

we get from the (almost) holomorphic considerations. Consequently, combinatorial computations can be used to determine the knot Floer homology of the knot K.

At this stage, the holomorphic theory is still needed to show that the resulting groups are invariants (i.e. independent of the chosen grid diagram). Soon after the appearance of [9] it was shown by purely combinatorial means that the resulting groups are independent of the choice of the grid presentation of the knot [10]. The authors of [10] used a Reidemeister-type theory for grid diagrams developed by P. Cromwell [4]. According to the result of [10] we therefore have an entirely combinatorial theory for knot Floer homology in $\mathbb{R}^3$.

In conclusion, by considering knot Floer homologies instead of Alexander polynomials, we got knot invariants which can precisely determine interesting geometric properties of knots, and the computability of the invariant did not get significantly more complicated (at least from the theoretical point of view), since the seemingly necessary holomorphic considerations can be avoided by the application of grid diagrams. An interesting question might be raised regarding the complexity of the computations needed; these studies are yet to be carried out. In any case, the theory of knot Floer homologies provides a nice bridge between combinatorics and the geometry of knots.

5 Further results

In this final section we mention a few further possible generalizations, modifications and variations of the theory.

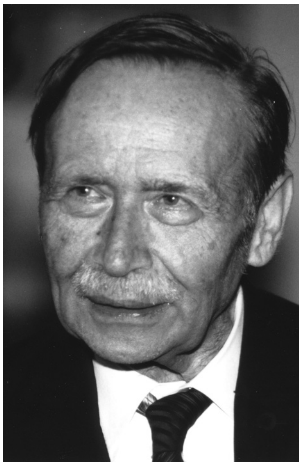
- Instead of $\mathbb{Z}_2$-coefficients one can use $\mathbb{Z}$-coefficients. This requires to fix orientation conventions (which has been worked out by Manolescu-Ozsváth-Szabó-Thurston [10]), and leads to a potentially richer theory.
- Instead of considering knots in $\mathbb{R}^3$ or in S^3, we can take embedded images of S^1 in arbitrary (closed) 3-manifolds. The holomorphic theory has been worked out independently by Ozsváth-Szabó [15, 17] and Rasmussen [19]. When considering the unknot, i.e. the bounding circle of an embedded disk, in a given 3-manifold, we get invariants of 3-manifolds, the *Ozsváth-Szabó homology groups*, appearing first in [13, 14]. In 2006 Sarkar and Wang [21] showed that these extended invariants can be computed combinatorially. Recently Ozsváth-Stipsicz-Szabó [12] showed that the entire theory admits a purely combinatorial definition.
- Instead of $\mathbb{Z}_2$-vector spaces or $\mathbb{Z}$-modules, we can consider modules over the polynomial ring $\mathbb{Z}_2[U]$ or over $\mathbb{Z}[U]$. Using this more general theory (from which the old theory can be computed by setting $U = 0$), invariants of 4-dimensional manifolds can be defined, see [16]. These invariants seem to carry the same amount of differential topological information as the famous Seiberg-Witten invariants. These more refined 3-manifold invariants and the 4-dimensional invariants cannot, as yet, be computed combinatorially.

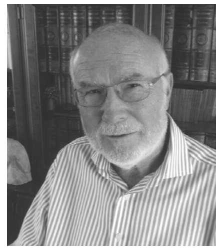
- The invariants can be used very effectively in studying contact 3-manifolds and Legendrian knots in contact 3-manifolds.

Acknowledgement: The author would like to thank Hansjörg Geiges for numerous suggestions, which improved the presentation of the paper siginficantly.

References

[1] C. Adams, *The knot book. An elementary introduction to the mathematical theory of knots.* W. H. Freeman and Company, New York, 1994.
[2] M. Atiyah, *The geometry and physics of knots*, Cambridge University Press, Cambridge 1990.
[3] G. Burde and H. Zieschang, *Knots*, deGruyter Studies in Mathematics, **5**, 1985.
[4] P. Cromwell, *Knots and links*, Cambridge University Press, Cambridge 2004.
[5] A. Floer, *Witten's complex and infinite-dimensional Morse theory*, J. Differential Geom. **30** (1989), 207–221.
[6] M. Gromov, *Pseudoholomorphic curves in symplectic manifolds*, Invent. Math. **82** (1985), 307–347.
[7] C. Gordon, *Some aspects of classical knot theory*, (Proc. Sem. Plans-sur-Bex 1977), Lecture Notes in Mathematics **685**, pp. 1–60. Springer, Berlin, 1978.
[8] R. Lickorish, *An introduction to knot theory*, Graduate Texts in Mathematics, **175** Springer-Verlag, New York, 1997.
[9] C. Manolescu, P. Ozsváth and S. Sarkar, *A combinatorial description of knot Floer homology*, Ann. of Math. **169** (2009), 633–660.
[10] C. Manolescu, P. Ozsváth, Z. Szabó and D. Thurston, *On combinatorial link Floer homology*, Geom. Topol. **11** (2007), 2339–2412.
[11] P. Ozsváth, A. Stipsicz and Z. Szabó, *Floer homology and singular knots*, J. Topol., to appear, arXiv:0705.2661
[12] P. Ozsváth, A. Stipsicz and Z. Szabó, *Combinatorial Heegaard Floer homology and nice Heegaard diagrams*, in preparation, 2009.
[13] P. Ozsváth and Z. Szabó, *Holomorphic disks and topological invariants for closed three-manifolds*, Ann. of Math. **159** (2004), 1027–1158.
[14] P. Ozsváth and Z. Szabó, *Holomorphic disks and three-manifold invariants: properties and applications*, Ann. of Math. **159** (2004), 1159–1245.
[15] P. Ozsváth and Z. Szabó, *Holomorphic disks and knot invariants* Adv. Math. **186** (2004), 58–116.
[16] P. Ozsváth and Z. Szabó, *Holomorphic triangle invariants and the topology of symplectic four-manifolds*, Duke Math. J. **121** (2004), 1–34.
[17] P. Ozsváth and Z. Szabó, *Holomorphic disks, link invariants and the multi-variable Alexander polynomial*, Algebr. Geom. Topol. **8** (2008), 615–692.
[18] P. Ozsváth and Z. Szabó, *A cube of resolution for knot Floer homology*, J. Topol., to appear, arXiv:0705.3852
[19] J. Rasmussen, *Floer homology of surgeries on two-bridge knots*, Algebr. Geom. Topol. **2** (2002), 757–789.
[20] D. Rolfsen, *Knots and links*, Mathematics Lecture Series **7**, Publish or Perish 1976.
[21] S. Sarkar and J. Wang, *An algorithm for computing some Heegaard Floer homologies*, arXiv:-math/0607777





Jörg M. Wills

Edmund Hlawka (1916 – 2009)

Jörg M. Wills

Abstract

- Mathematics Subject Classification: 11Hxx,11Jxx, 11Kxx, 52Cxx, 05B40
- Keywords and Phrases: Geometry of Numbers, Uniform Distribution, Diophantine Approximation, Convex Bodies, Probability, Integration

Am 19. Februar 2009 ist Edmund Hlawka in Wien verstorben. Er war einer der bedeutendsten und einflussreichsten Mathematiker Österreichs durch sein mathematisches Werk und durch die große Zahl seiner prominenten Schüler.

On February 19, 2009 Edmund Hlawka passed away. He was one of the most eminent mathematicians of Austria because of his mathematical work and because of his many important students, who are distributed all over the world.

Eingegangen: 12. 08. 2009

Jörg M. Wills, Universität Siegen, Emmy-Noether-Campus,
Walter-Flex-Straße 3, D-57068 Siegen, wills@mathematik.uni-siegen.de

DMV
JAHRESBERICHT
DER DMV

Anfang dieses Jahres, am 19. Februar 2009, ist Edmund Hlawka in seiner Wohnung in Wien verstorben. Damit ist eine Epoche zu Ende gegangen, denn Hlawka war einer der größten Mathematiker Österreichs im 20. Jahrhundert. Setzt man Kurt Gödel, der seine große Zeit in den 30er Jahren hatte, in die erste Hälfte, so kann man Edmund Hlawka ohne Übertreibung als Österreichs bedeutendsten und durch seine Schüler auch erfolgreichsten Mathematiker der zweiten Hälfte des 20. Jahrhunderts bezeichnen.

Jugend und Studium

Edmund Hlawka wurde am 05.11.1916 in Bruck an der Mur geboren, als Sohn eines Ingenieurs, der dort während des ersten Weltkriegs beschäftigt war. Nach dem Krieg zog die Familie zurück nach Wien, wo Edmund Hlawka im Dritten Bezirk aufwuchs und zur Schule ging. Es war derselbe Bezirk, in dem auch die großen Physiker Ludwig Boltzmann und Erwin Schrödinger gelebt hatten, wie Hlawka später gerne erzählte. Nach der Matura (Abitur) studierte Hlawka von 1934 bis 1938 an der Universität Wien Mathematik und Physik. Seine Lehrer waren u. a. der Analytiker Wilhelm Wirtinger, der Topologe Karl Menger, der Differentialgeometer Karl Mayrhofer sowie Kurt Gödel, der damals schon weltberühmt war. Hlawka hat in seinen lesenswerten „Erinnerungen an Kurt Gödel“ eindrucksvoll und unterhaltsam beschrieben, wie er Gödel in der Bibliothek erlebt hat und wie schwer ihm Gödels Vorlesung 1935, also am Anfang seines Studiums, gefallen ist. Weitere Lehrer Hlawkas waren die Zahlentheoretiker Nikolaus Hofreiter und Philipp Furtwängler, bei denen Hlawka 1938 seine Dissertation mit dem Thema „Über die Approximation von zwei komplexen inhomogenen Linearformen“ schrieb. Auch seine frühen Publikationen behandelten unter dem Einfluss Furtwänglers Diophantische Approximationen. Philipp Furtwängler, ein Cousin des berühmten Dirigenten Wilhelm Furtwängler, war in Elze bei Hannover geboren, hatte in Göttingen studiert und bei Felix Klein promoviert. So reicht eine der Wurzeln Hlawkas nach Göttingen. Aber es gibt noch zwei weitere Verbindungen Hlawkas mit Göttingen, und die sind mit den Namen der zwei großen Hermanns aus Göttingen verbunden, mit Hermann Minkowski und Hermann Weyl. Wir beginnen mit Minkowski.

Geometrie der Zahlen

Im Jahr 1891 schuf Hermann Minkowski die Geometrie der Zahlen, um schwierige zahlentheoretische Sätze kürzer und verständlicher mit eleganten geometrischen (insbesondere konvex-geometrischen) Methoden zu beweisen. Ausgangspunkt war die Theorie der quadratischen Formen und Sätze von Hermite, Dirichlet, Jacobi und anderen. Entscheidend für die Theorie ist das Wechselspiel von Gittern und konvexen Körpern (bzw. Sternkörpern). Minkowskis fundamentaler Satz lautet:

Im euklidischen Raum $E^d, d \geq 2$, sei ein Gitter L mit Determinante $\det L$ gegeben und ein zum Nullpunkt symmetrischer konvexer Körper K mit Volumen größer oder gleich $2^d \det L$. Dann enthält der konvexe Körper mindestens einen vom Ursprung verschiedenen Gitterpunkt.

Dieser einfach zu beweisende Satz hat viele Anwendungen: Der konvexe Körper entspricht den zahlentheoretischen Restriktionen, der vom Ursprung verschiedene Gitterpunkt einer nichttrivialen Lösung des Problems. Minkowski selbst hat diesen Satz noch gewaltig verschärft (2. Hauptsatz) und nur beiläufig sei erwähnt, dass Methoden dieser Art heute eine Rolle in diskreter Optimierung und diskreter Geometrie spielen. Das Gegenstück zum Fundamentalsatz der Geometrie der Zahlen ist der berühmte Satz von Minkowski-Hlawka. In seiner elementaren Form lautet er:

Gegeben sei ein Körper K mit Volumen < 1. Dann gibt es ein Gitter mit Determinante 1, das höchstens den Ursprung mit K gemeinsam hat.

Minkowski gibt den Beweis dieses Satzes nur für die Kugel an, vermutete aber, dass er allgemein gilt. Hlawka konnte ihn 1943/44 allgemein beweisen (sogar für Jordanmessbare Mengen). Der Beweis machte ihn sofort bekannt in der Welt der Mathematiker. Er hob Hlawka in die Liga der großen Minkowski-Nachfolger wie Blichfeldt, Siegel, Davenport, Rogers und Mahler.

In der genannten schlichten Form sieht man dem Satz von Minkowski-Hlawka seine Bedeutung nicht an. Angewandt auf zentralsymmetrische konvexe Körper liefert er aber eine untere Schranke 2^{-d} für die Gitterpackungsdichte zentralsymmetrischer konvexer Körper, insbesondere der Kugel. Wegen der zentralen Bedeutung dieses Problems für Zahlentheorie, diskrete Geometrie und Codierungstheorie hat man von Anfang an versucht, Hlawkas Beweis und Ergebnis zu verbessern. Andere Beweise stammen von Siegel, A. Weil, Mahler, Davenport, Cassels und vor allem von Rogers. Damit einher gingen Verschärfungsversuche prominenter Autoren. Die besten sind von W. M. Schmidt, dem bekannten Hlawka-Schüler und von K. Ball. Obwohl diese Beweise sehr scharfsinnig und elegant sind, verbessern sie die Minkowski-Hlawka-Schranke nur marginal um einen linearen Faktor d. Dagegen ist die obere Schranke für gitterförmige Kugelpackungen von Blichfeldt und später von Rogers, die bei $\sqrt{2}^{-d}$ lag, in den 70er Jahren von den russischen Mathematikern Sidelnikov, Kabatjanski und Levenstein signifikant verbessert worden. Wegen des exponentiellen Charakters beider Schranken ist die Lücke dazwischen immer noch riesig, und eine Lösung des Problems wohl noch in weiter Ferne. Erschwert wird die Suche nach konkreten dichtesten Kugelpackungen noch dadurch, dass die Beweise des Satzes von Minkowski-Hlawka alle nicht konstruktiv sind, sondern auf Mittelwertbildungen beruhen.

Gleichverteilung

Im Jahr 1916, im Geburtsjahr Hlawkas, begründete Hermann Weyl die Gleichverteilungstheorie, ein Teilgebiet der analytischen Zahlentheorie. Das ursprüngliche und elementarste Problem ist einfach zu formulieren: Zu einer Irrationalzahl α und der Folge ihrer ganzzahligen Vielfachen $k\alpha$ betrachte man deren Reste $\bmod 1$, also die nichtganzen Anteile. Wie sind sie verteilt?

Weyl und andere haben das Problem durch einen simplen Kunstgriff noch durchsichtiger gemacht: Man wickelt die Zahlengerade auf einen Kreis mit Umfang 1 auf. Wie sind die Glieder der Folge auf dem Kreis verteilt? Nach Kronecker liegen sie auf dem Kreis dicht, d. h. jeder Kreispunkt ist Häufungspunkt. Aber es gilt noch viel mehr: Die Punkte sind dort gleichverteilt, d. h. je zwei Bögen gleicher Länge auf dem Kreis enthalten asymptotisch gleich viele Punkte der Folge.

Weyl bewies das mit ebenso eleganten wie (heute) einfachen Mitteln der Analysis, Mittelwerte, Riemann-integrierbare Funktionen. Hlawka war begeistert von dem Problem und von Weyls Lösungsansatz. Er hat die Thematik in alle Richtungen verallgemeinert, z. B. auf andere zahlentheoretische Folgen; und er hat vor allem die Anwendungen auf diverse andere Gebiete behandelt. Wir lassen dazu Edmund Hlawka selbst zu Wort kommen (Beiträge zur Theorie der Gleichverteilung, 1988):

> „Man kann die Frage stellen, welchen Zweck die Theorie hat. Sie gestattet wichtige Anwendungen nicht nur in der Zahlentheorie, sondern auch in der Numerik und vor allem bei der Berechnung hochdimensionaler Integrale, bei der Pseudo-Monte-Carlo-Methode sowie Anwendungen in Physik und Technik (Kubaturformeln, Interpolation, Integral- und Differentialgleichungen, Wahrscheinlichkeitsrechnung, Pythagoräische Tripel, Kinetische Gastheorie, Relativitätstheorie, Entropie, um nur einige Beispiele zu erwähnen)."

So weit Hlawka, und man spürt seine Begeisterung für die Thematik. Kein Wunder, dass Edmund Hlawka auf diesem Gebiet besonders viele Schüler gehabt hat. Gleichverteilung ist neben der Geometrie der Zahlen Hlawkas zweites großes Arbeitsgebiet gewesen. Natürlich gab es noch weitere Themen, die er bearbeitet hat, aber diese dürfen wir überspringen, um uns dem (Hochschul-)Lehrer Edmund Hlawka zuzuwenden.

Der Lehrer

Edmund Hlawka war ein überaus erfolgreicher Hochschullehrer. Im Laufe seiner langjährigen Lehrtätigkeit an der Universität Wien (bis 1981) und an der TU Wien (1981–87) haben Generationen von Mathematikern, Physikern, Chemikern, Ingenieuren und Schullehrern seine Vorlesungen gehört. Etwa 800 Schullehrer haben bei ihm die Lehramtsprüfung in Mathematik abgelegt und durch ihren Unterricht die Mathematik in Österreich in den letzten 50 Jahren geprägt. Und eine vergleichbare Zahl an Ingenieuren, Naturwissenschaftlern und Mathematikern haben ihre Examina in Mathematik bei ihm abgelegt. Am erstaunlichsten aber ist die Zahl von über 130 Mathematikern, die Edmund Hlawka als ersten oder zweiten Berichter ihrer Dissertation als Doktorvater hatten. Diese beachtliche Anzahl bekommt ihren Glanz aber erst dadurch, dass sich darunter eine große Zahl renommierter Forscher befindet, die inzwischen auf der ganzen Welt verteilt sind.

An erster Stelle zu nennen ist hier Wolfgang Schmidt, der früh verstorbene Walter Philipp, dann Peter Gruber, Harald Niederreiter, Hermann Maurer und Robert Tichy. Die Liste der Schüler beginnt 1947 mit Karl Prachar, 1948 Walter Knödel, dann 1950 Wilfried Nöbauer und 1951 Johann Pfanzagl. Schon die Liste dieser ersten vier renommierten Namen zeigt die Vielfalt der mathematischen Interessen Hlawkas. In der langen Liste seiner Schüler, die von A bis Z, von Martin Aigner bis Peter Zinterhof und Chuanming Zong reicht, sollen noch einige wichtige Namen genannt werden (in alphabetischer Folge):

Johann Cigler, Dietmar Dorninger, Peter Flor, Peter Gerl, Wilfried Hazod, Gilbert Helmberg, Wilfried Imrich, Werner Kuich, Ludwig Reich, Hans-Christian Reichel, Gert Sabidussi, Klaus Schmidt, Fritz Schweiger, Johann Schoissengeier und Rudolf Taschner. Alle Namen aufzulisten, verbietet sich hier, und es ist sicher, dass einige wichtige Namen ausgelassen worden sind.

Was ist das Geheimnis von Edmund Hlawkas großem Erfolg als Lehrer? An erster Stelle ist es sicher der erfolgreiche und vielseitige Forscher, der seine Schüler inspiriert hat, und natürlich hat auch Hlawkas starke und interessante Persönlichkeit, auf die am Schluss noch eingegangen wird, Einfluss gehabt. Aber es kommt noch ein interessantes Detail hinzu, auf das wohl zuerst Peter Gruber hingewiesen hat: Hlawkas Arbeiten sind wie ungeschliffene Diamanten. Junge ambitionierte Mathematiker, die seine Arbeiten lesen, haben den Eindruck, hier oder dort noch etwas polieren oder verbessern zu können, vielleicht auch mehr. Ein gutes Beispiel für einen solchen unpolierten Diamanten ist Hlawkas Beweis des Satzes von Minkowski-Hlawka. Verglichen damit ist der Beweis von Rogers (mit den Restklassen bezüglich einer großen Primzahl) perfekt und poliert und könnte (im Sinne Erdös') aus „dem Buch" stammen.

Ehrungen

Edmund Hlawka hat in seinem akademischen Leben ungewöhnlich viele und vielfältige Ehrungen und Würdigungen erhalten. Er hat 1981 die Ehrendoktorwürde der Universität Wien erhalten, ebenso den Ehrendoktor der Universität Salzburg. Später kamen noch die Ehrendoktorwürden der Universität Graz, der TU Graz und der Universität Erlangen hinzu. Bei der Verleihung des Ehrendoktors in Erlangen 1992, wo der Verfasser die Ehre und das Vergnügen hatte, den Festvortrag zu halten, wurde Hlawka in der Ehrendoktorurkunde der Fakultät wie folgt gewürdigt:

> „Die Friedrich-Alexander-Universität ehrt in Herrn Hlawka einen Mathematiker von seltener Universalität, ungewöhnlicher Ausstrahlung und außergewöhnlicher schulbildender Kraft."

Dieses Zitat unterstreicht noch einmal die im vorigen Abschnitt erwähnten Qualitäten Hlawkas als Lehrer.

Edmund Hlawka war Mitglied der Österreichischen Akademie der Wissenschaften, ebenso der Leopoldina, der Deutschen Akademie der Wissenschaften. Er war korrespondierendes Mitglied der Rheinisch-Westfälischen und der Bayrischen Akademie der Wissenschaften sowie der Akademie von Bologna. Er hatte Rufe an die Universitäten von Graz und von Freiburg, die er aber nicht annahm; er blieb lieber in Wien. Dagegen verbrachte er einige kürzere Aufenthalte am Institute for Advanced Studies in Princeton, am Caltec in Pasadena und an der Sorbonne. Von den übrigen Ehrungen sind besonders erwähnenswert der Erwin-Schrödinger-Preis der Österreichischen Akademie der Wissenschaften, die Gauß-Medaille der Akademie der Wissenschaften der DDR, der Heinemann-Preis der Göttinger Akademie der Wissenschaften, die Ehrenmedaille der Stadt Wien in Gold, das Große Goldene Ehrenzeichen für Verdienste um die Republik Österreich mit dem Stern, die Exner- und die Prechtl-Medaille, die Ehrenmitgliedschaft der ÖMG und die Goldene Ehrennadel der DMV. Sogar ein Asteroid (Nr. 107639) ist nach Edmund Hlawka benannt worden. Trotz all dieser Ehrungen ist Edmund Hlawka zeitlebens ein liebenswerter und bescheidener Mensch geblieben.

Der Mensch

Edmund Hlawka war ein interessanter und unterhaltsamer Gesellschafter, der keineswegs nur an Mathematik, sondern auch an vielen Bereichen von Kultur, Politik und Leben interessiert war. Der Verfasser hatte Hlawka auf der DMV-Tagung 1967 in Karlsruhe kennengelernt, ebenso seinen Schüler Peter Gruber und ein halbes Jahr später Fritz Schweiger. Seitdem gab es immer wieder Kontakte, gelegentlich auf Tagungen, vor allem aber in Wien und im gastlichen Haus der Familie Gruber, wo Edmund Hlawka immer der interessante und geistvolle Mittelpunkt war.

Natürlich gab und gibt es über eine so prominente Persönlichkeit Anekdoten, und im Falle Hlawka sind dies besonders viele, die es eigentlich verdienten, schriftlich fixiert zu werden. Einige dieser Anekdoten erzählte Hlawka gern selbst, andere nicht so sehr. Eine davon, die wohl berühmteste, die von vielen Seiten verbürgt ist und die auch ein wenig über Hlawka aussagt, möchte ich hier wiedergeben. Dazu muss man voranschicken, dass Hlawka seine Vorlesungen weitgehend frei hielt und nur wenige schwierige Formeln auf kleinen Zettelchen notierte. Da er täglich mit der Tram (Straßenbahn) zur Uni fuhr, konnte er sich dort noch etwas vorbereiten und Notizen auf dem Billett (Fahrkarte) machen. Eines Tages in einer Vorlesung zückte er wieder einmal das Billett, stutzte, schaute an die Tafel, dann auf das Billett und sagte erstaunt: *„Da hat mir doch der Schaffner die Potenz wegzwackt!"*.

Vor etwa 20 Jahren, als Martin Aigner und ich in einer Weinstube in Linz nach einem oder zwei Gläschen Wein Edmund Hlawka einmal nach dem Wahrheitsgehalt dieser Anekdote fragten, reagierte er mit gut gespielter, aber im Kern voll verständlicher Entrüstung: *„Ich möchte diese Anekdote nicht mehr kommentieren. Ich will nicht durch meine Anekdoten überleben, sondern durch meine Mathematik und meine Schüler."*

Edmund Hlawka war seit 1943 mit seiner Frau Rosa, geborene Reiterer, verheiratet. Sie war Studienrätin; sie hatten keine Kinder. Und sie nahm ihm die meiste Alltagsarbeit ab. Als Rosa Hlawka 1991, also 18 Jahre vor ihm, starb, dachte jeder, dass Edmund Hlawka nicht mehr im Alltag zurechtkommen würde. Das Gegenteil war jedoch der Fall; er war eher noch aktiver als in den Jahren zuvor. Natürlich hatte er Hilfe, vor allem durch die Familie seiner Schwägerin Gerti Schauer, aber auch durch Peter Gruber und seine Frau Isolde. Die Familien Gruber und Hlawka waren seit den 70er Jahren sehr gut befreundet. Die Familien Schauer und Gruber kümmerten sich um den Witwer. Peter Gruber war in den letzten Jahren Hlawkas engster Kollege, bester Freund und die Verbindung zur mathematischen Außenwelt.

Dieser Bericht begann mit der Bemerkung, dass mit dem 19. Februar 2009 eine Epoche endete. Das ist nur die halbe Wahrheit: Edmund Hlawka lebt weiter durch den Satz von Minkowski-Hlawka, durch seine anderen mathematischen Ergebnisse, durch seine Schüler, als große Persönlichkeit und vielleicht auch durch die eine oder andere Anekdote.

Literatur

[1] Edmund Hlawka: *Selecta*. Edits. P. M. Gruber, W. M. Schmidt. Springer-Verlag, Berlin, New York 1990.

[2] Edmund Hlawka: *Classics of World Science*. Edit. S. Moskaliuk, Austro-Ukr. Inst. for Math. Phys., Wien, Kiev 2001.