Jahresber Dtsch Math-Ver (2011) 113: 1–2
DOI 10.1365/s13291-010-0012-5

Vorwort Heft 1-2011

Hans-Christoph Grunau

Online publiziert: 18. Dezember 2010

Am 21. März 2010 verstarb Fritz Grunewald vollkommen unerwartet im Alter von nur 60 Jahren. Angehörige, Freunde, Kollegen, Schüler waren schockiert und traurig. Der Tod dieses wichtigen Vertreters der Geometrie und der Gruppen- und Zahlentheorie war vielleicht auch deswegen für so Viele so bewegend, da Fritz Grunewald intensiv mit außerordentlich vielen Kolleginnen und Kollegen zusammengearbeitet hat. Nahezu alle seiner mehr als 100 mathematischen Arbeiten sind in Zusammenarbeit mit insgesamt 48 Koautorinnen und Koautoren entstanden. Den Autor Dan Segal des vorliegenden Nachrufs verbinden eine 37-jährige Freundschaft und 20 gemeinsame Publikationen mit Fritz Grunewald. Das englische Original dieses Beitrags, der von Gabriele Nebe ins Deutsche übersetzt wurde, wird im Bulletin of the London Mathematical Society erscheinen. Für deren Einverständnis mit der Publikation einer deutschen Version ist der Jahresbericht sehr dankbar.

Der zweite Beitrag im vorliegenden Heft ist ein Übersichtsartikel über „Random networks with concave preferential attachment rule“ von Steffen Dereich and Peter Mörters. Netzwerke sind überall zu beobachten; man kann sowohl an soziale Netzwerke, die mathematics genealogy oder an das world wide web denken. Eine zufällige und im Artikel genauer spezifizierte „konkave“ Regel für das Hinzufügen neuer Knoten und Kanten zugrundelegend studieren die Autoren typische Eigenschaften der daraus resultierenden zufälligen Netzwerke. Diese betreffen etwa die Beobachtungen, dass es meist sehr wenige ausgezeichnete Knoten gibt, die mit sehr vielen anderen Knoten verbunden sind oder dass meist der Abstand zwischen verschiedenen Knoten relativ gering ist.

H.-Ch. Grunau (✉)
Institut für Analysis und Numerik, Fakultät für Mathematik, Otto-von-Guericke-Universität, Postfach 4120, 39016 Magdeburg, Deutschland
e-mail: hans-christoph.grunau@ovgu.de

Die Buchbesprechungen nehmen in diesem Heft einen recht breiten Raum ein und widmen sich Neuerscheinungen aus den Themenbereichen: Mathematische Biologie, Ricci-Fluss und der Beweis des differenzierbaren $\frac{1}{4}$-pinching-Theorems, sowie angewandte harmonische Analysis.

Nachdem die online-Präsenz des Jahresberichts auf den DMV-Internetseiten – bedingt durch einen software-update gab es vorübergehend Einschränkungen – nun wieder voll funktionsfähig ist, wollen wir einen ersten Schritt in eine interaktive Richtung gehen. Auf den DMV-Seiten finden Sie nun auch ein Forum für Leserinnen und Leser, in denen Sie sich im Internet zum Jahresbericht äußern können: Möchten Sie Kritik oder Anregungen mitteilen? Welche Themen haben Sie besonders angesprochen? Haben Sie Vorschläge, welche Bücher besprochen werden sollten?

Im Moment sind die „Mathemacher“ schreibberechtigt, mittelfristig soll dieses auf die DMV-Mitglieder umgestellt werden. Nachdem Sie sich registriert haben, können Sie sich nach Anklicken von „Publikationen → Jahresbericht der DMV → Leserforum“ auf den DMV-Internetseiten anmelden und Beiträge hinzufügen. Einen ersten Beitrag habe ich schon verfasst, auf Ihre Reaktionen und weitere Meinungsäußerungen sind die Herausgeber sehr gespannt!

Jahresber Dtsch Math-Ver (2011) 113: 3–20
DOI 10.1365/s13291-010-0010-7

HISTORISCHE BEITRÄGE

Fritz Grunewald, 1949–2010

Dan Segal

Eingegangen: 5. Oktober 2010 / Online publiziert: 1. Dezember 2010

1 Einleitung

Fritz Grunewald war ein inspirierender Mathematiker, dessen bemerkenswert breites Wissen sich in seinen bedeutenden Beiträgen zu einer Fülle mathematischer Themen-

Fritz und Barbara Grunewald, 2009

Das englische Original wird im Bulletin of the London Mathematical Society erscheinen.
Aus dem Englischen übersetzt von Gabriele Nebe.

D. Segal (✉)
All Souls College, Oxford, OX1 4AL, UK
e-mail: dan.segal@all-souls.ox.ac.uk

bereiche widerspiegelt, wenn auch bei weitem nicht erschöpfend. Mathematik war für ihn immer ein gemeinschaftliches Unterfangen; bis auf zwei Ausnahmen entstanden seine zahlreichen Veröffentlichungen alle in Koautorschaft. Bei diesen Zusammenarbeiten brachte er originelle und weitreichende Ideen ein, deren Weiterverfolgung noch viele Mathematiker über lange Zeit beschäftigen wird. Fritz Grunewald hatte 48 Koautoren, von denen alle, mit denen ich gesprochen habe, den tiefgehenden Einfluß bestätigen, den die Arbeit mit Grunewald auf ihre eigene mathematische Entwicklung hatte; für mich selbst trifft dies auf alle Fälle zu.

Auch wenn er zunächst vorwiegend in der Gruppentheorie arbeitete, war Fritz von Beginn an ein mathematischer Universalist. Seine wichtigsten Beiträge zur Gruppentheorie entstanden aus seinem Zugang über Zahlentheorie und Geometrie; seine Arbeiten in der Zahlentheorie behandeln vor allem Themen im Bereich der arithmetischen Gruppen. Er war ein unermüdlicher Rechner, sowohl von Hand als auch mit dem Computer. Seine theoretischen Einsichten waren meist durch experimentelle Untersuchungen inspiriert. Auch wenn ich nicht glaube, dass er eine starke Meinung zur Philosophie der Mathematik hatte, war er in der Praxis sehr stark konstruktivistisch orientiert: sein tiefes und konkretes Verständnis der Theorie war durch Berechnung expliziter Beispiele geprägt und führte zum einen zu bedeutenden Vermutungen in der Zahlentheorie, zum anderen auch zu grundlegenden Entscheidbarkeitssätzen in der Algebra.

Von seiner Persönlichkeit her war er außerordentlich warmherzig, großzügig und offen. Er teilte seine Ideen und Einsichten auf gleicher Augenhöhe mit Studenten, Postdoktoranden und Professoren. Wo immer er hinreiste – und er reiste in die ganze Welt – war er von Mathematikern umgeben, die mit ihm diskutieren wollten, und er hatte Zeit für jeden einzelnen. Sein plötzlicher und unerwarteter Tod (wahrscheinlich durch eine Lungenembolie) am 21. März 2010 war ein verheerender Schlag nicht nur für seine Familie, sondern auch für seine vielen Anhänger und Mitarbeiter.

2 Persönliche Laufbahn

Fritz' Mutter Helene Weisbrod wuchs auf dem elterlichen Hof (den sie stolz den größten Hof in Lambsheim nannte) in der Nähe von Mannheim in der Pfalz auf. Nach dem 2. Weltkrieg heiratete sie den Zahnarzt Friedrich Grunewald und zog nach Bad Kreuznach, wo ihr einziger Sohn Fritz Alfred Joachim 1949 geboren wurde. Die Ehe war leider nur von kurzer Dauer; als Fritz 2 Jahre alt war, trennten sich seine Eltern, und seine Mutter nahm ihn mit auf den Hof nach Lambsheim, wo er aufwuchs. Der Großvater mütterlicherseits starb früh, so dass das Leben auf dem Hof von zwei starken Frauen, Helene und ihrer Mutter (immer noch eine beeindruckende Frau, als ich beide in den späten 70ern getroffen habe), geprägt wurde.

Helene heiratete bald wieder, blieb aber auf dem Hof. Fritz' Stiefvater Kurt Kinkel war auch eine dominante Persönlichkeit, die Beziehung zwischen ihm und dem jungen Fritz gestaltete sich schwierig. Kinkel verstand sich nicht gut mit Grunewald senior, wohingegen Fritz natürlich den Kontakt zu seinem Vater aufrechterhalten wollte. Diese Spannungen bestimmten seine Kindheit, als er 16 Jahre alt war wurden sie so stark, dass Fritz jeglichen Kontakt zu seinem Vater abbrach. Zu der Zeit war auch

Grunewald senior wieder verheiratet; seine Tochter Ulrike hat lebhafte Erinnerungen an ihren älteren Halbbruder und erinnert sich schmerzlich an den Abbruch der Beziehungen im Alter von nur 7 Jahren. Erst nach 20 Jahren nahm Fritz wieder Kontakt zu seinem Vater und Ulrike auf, die beiden lang getrennten Halbgeschwister wurden gute Freunde.

Friedrich Grunewald spielte in der Hockeyliga, und die sportliche Veranlagung haben auch Fritz und seine beiden Söhne geerbt. Sein jüngerer Sohn Andreas ist begeisterter Fußballer. Fritz selbst spielte ausgezeichnet Tischtennis in einem Bonner Verein in der Regionalliga.

Fritz besuchte das Albert-Einstein-Gymnasium in Frankenthal, einem kleinen Ort in der Nähe von Lambsheim. Er war ein guter Schüler und schon früh ein begeisterter Mathematiker; seine Schwester berichtet, dass er den häuslichen Spannungen durch intensive Rechnungen in seinem Zimmer entfloh. Das bestätigt die Aussagen vieler Mathematiker, die mit Fritz zusammenarbeiteten; seine natürliche Reaktion auf ein mathematisches Problem war es, sich zurückzuziehen und weitere Rechnungen anzustellen.

Nach seinem Abitur 1969 (als Jahrgangsbester) studierte er Mathematik und Physik in Göttingen. Einer seiner Lehrer war Professor Jens Mennicke.

Mennicke war erst kurz vorher durch seine Lösung des Kongruenzuntergruppenproblems für die $\mathrm{SL}_n(\mathbb{Z})$ bekannt geworden. Darin stellte er mit Hilfe ganzzahliger Matrixgruppen tiefe Beziehungen zwischen Algebra und Arithmetik her; ein Thema, das den Studenten Fritz geprägt und den Mathematiker Fritz lebenslang beschäftigt hat. 1971 wurde Mennicke auf einen Lehrstuhl an die erst kürzlich gegründete Universität Bielefeld berufen, um eine Gruppe brillianter Mathematiker, darunter Bernd Fischer, Friedhelm Waldhausen und Andreas Dress, zu verstärken. Fritz folgte ihm nach Bielefeld, wo er seine von Dress betreute Diplomarbeit über Heckeringe endlicher Gruppen anfertigte. Seine Dissertation, mit der er 1973 promoviert wurde, markiert den Beginn einer intensiven und langanhaltenden Zusammenarbeit zwischen Fritz und seinem Betreuer Mennicke, aus der 27 gemeinsame Veröffentlichungen entstanden, darunter Fritz' einziges größeres Buch. Nach seiner Promotion verbrachte Fritz ein Jahr als Postdoc am Queen Mary College in London. Wir teilten uns ein Büro, und es entstand nicht nur eine lebenslange Freundschaft, sondern auch Fritz' zweite langandauernde Kooperation (mit mir), aus der 20 gemeinsame Artikel hervorgingen. Seine Freundin Barbara, die er 1970 in Bielefeld kennengelernt hatte, folgte ihm nach London; sie heirateten 1974. Zurück in Bielefeld war Fritz bis 1977 wissenschaftlicher Assistent, bevor er sich nach einem zweijährigen Habilitationsstipendium im Jahre 1979 habilitierte. Auf der Suche nach neuen mathematischen Anregungen ging Fritz danach mit einem Heisenbergstipendium nach Bonn, dem zu der Zeit lebhaftesten mathematischen Zentrum Deutschlands, wo der berühmte Geometer Friedrich Hirzebruch die jährliche Arbeitstagung organisierte und gerade dabei war, das Max-Planck-Institut für Mathematik zu gründen. Die junge Familie (Fritz, Barbara, ihre 1976 geborene Tochter Natalie und ihr 1978 geborener Sohn Joachim) zog also nach Bonn, wo Fritz 1981 eine C3-Professur der Universität Bonn antrat. 1992 wurde er auf eine C4-Professur nach Düsseldorf berufen, wo er von 2000–2002 geschäftsführender Direktor des mathematischen Instituts war.

Auch nach der Geburt des dritten Kindes Andreas 1986 blieb Barbara berufstätig und verfolgte ihre Karriere als Jura-Professorin. Fritz beteiligte sich an den häuslichen und elterlichen Pflichten und teilte seine Zeit zwischen Kindern, Einkaufen, Kochen und der Arbeit an der Hochschule auf. Damals war dies für einen Universitätsprofessor sehr ungewöhnlich und im Kollegenkreis nicht unbedingt respektiert, aber Fritz setzte seine eigenen Prioritäten.

Fritz war bei den Studenten wegen seines sanften Naturells beliebt. Da er ungern jemanden abwies, betreute er meist viele Diplom- und Doktorarbeiten gleichzeitig. Jede Diplomarbeit war ein eigenes neues Forschungsprojekt, das er mit viel Einsatz betreute, so dass er neben seinen sichtbareren Veröffentlichungen noch zahlreiche kleinere Forschungskooperationen initiierte. Er betreute in etwa 70 Diplomarbeiten und 31 Dissertationen. Viele seiner Schüler haben erfolgreiche wissenschaftliche Karrieren eingeschlagen.

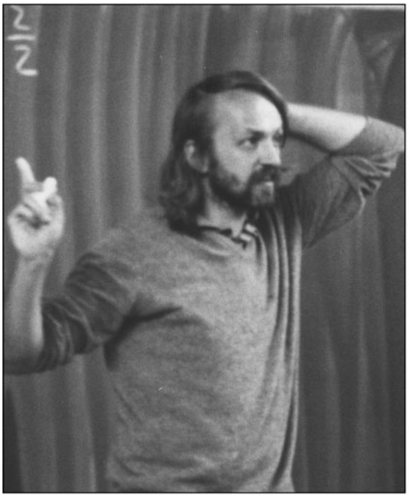
Neben seiner Arbeitsgruppe in Düsseldorf unterhielt Fritz einige langfristige mathematische Beziehungen u.a. zu Arbeitsgruppen in Belgien, Deutschland, Brasilien, Argentinien und Israel. Er reiste viel, organisierte zahlreiche internationale Konferenzen sowie vier Oberwolfach-Workshops. Obwohl er ein weltweit gefragter Experte war, erhielt Fritz wahrscheinlich weniger formale Anerkennung, als er verdient hätte. Erwähnenswert sind hier der Reinhard- und Emmi-Heynen-Preis der Universität Düsseldorf 2001 und die Einladung zum ICM in Madrid 2006. Die 5-tägige Konferenz „Group theory, number theory and geometry“ in Oxford zu Ehren seines 60. Geburtstags hatte über 100 Teilnehmer.

3 Grunewalds mathematisches Werk

3.1 Gruppentheorie

B(2,8). Fritz’ erstes größeres Forschungsprojekt und das Thema seiner Dissertation 1973 waren ein Ansatz zur Lösung des berühmten und immer noch offenen Burnside-Problems für Gruppen vom Exponenten 8. Mithilfe intensiver Rechnungen ohne Computereinsatz gelang es Fritz, für eine Familie endlich präsentierter Exponent-8-Gruppen, von denen man hofft, dass sie nicht zu weit von den allgemeinen Burnside-Gruppen entfernt sind, die Endlichkeit nachzuweisen. Diese Rechnungen, die in einen gemeinsamen Artikel mit Mennicke einflossen, wurden vom Referenten als „eher geeignet für das Guinness-Buch der Rekorde als für ein mathematisches Journal“ kommentiert. Die australischen Mathematiker George Havas und Mike Newman kamen 1977 anläßlich eines Workshops zu diesem Thema nach Bielefeld. Sie untersuchten das Burnside-Problem mit Computereinsatz, woraus die Arbeiten [5] und [13] sowie ein kürzerer Zugang zu den Ergebnissen von Grunewald und Mennicke entstanden.

Endliche Präsentierbarkeit. Das akademische Jahr 1973–74 verbrachte Fritz als Postdoc am Queen Mary College in London. Der Dekan, Karl Grünberg, entschied bei seiner Ankunft wegen seiner langen Haare und seines hippiehaften Aussehens, er möge das Büro mit mir teilen. Es entstand sofort eine enge Freundschaft und eine Kooperation, die mit Unterbrechungen 37 Jahre andauerte. Zu dem Zeitpunkt arbeitete Fritz gerade an seinem ersten Artikel (von insgesamt nur zweien) in Alleinautorschaft [3], der notwendige und hinreichende Kriterien für die endliche Präsentierbarkeit von gewissen Gruppenerweiterungen mithilfe von Relationenmoduln und



etwa 1978

1983

Bildarchiv des Mathematischen Forschungsinstituts Oberwolfach

Pisa 2008

Geburtstags-Konferenz 2009 in Oxford (mit Lubotzky und Segal)

von gewissen subdirekten Produkten freier Gruppen entwickelte. Diese Arbeit, die damals nicht viel Beachtung fand, wurde schließlich eine seiner meistzitierten, da sie einen ersten Schritt in ein sehr reichhaltiges Forschungsgebiet darstellte, das seinen Höhepunkt in der neuen Arbeit [78] von Bridson, Howie, Miller und Short fand.

Polyzyklische Gruppen. Als ein langandauerndes Forschungsprojekt begannen wir gemeinsam polyzyklische Gruppen zu untersuchen. Frühere Arbeiten von Baer und neuere von Remeslennikov deuteten an, dass diese Gruppen aus Sicht der algebraischen Zahlentheorie studiert werden sollten; noch neuere Ergebnisse von L. Auslander, Borel und Fred Pickel zeigten, dass auch lineare algebraische Gruppen hier eine

Schlüsselrolle spielen. Im Gegensatz zu mir besaß Fritz schon zu dieser Zeit fundierte Kenntnisse auf allen diesen Gebieten. Unsere erste gemeinsame Arbeit benutzt elementare algebraische Zahlentheorie zur Konstruktion interessanter Beispiele polyzyklischer Gruppen. Zurück in Bielefeld überzeugte Fritz seinen Betreuer Mennicke, mir eine Assistentenstelle anzubieten, so dass ich 1976 nach Bielefeld ging. Gemeinsam zeigten wir in [2], dass polyzyklische Gruppen „subgroup conjugacy separable" sind, und in einer Reihe von Arbeiten (zum Teil mit Pickel) bewiesen wir die Endlichkeit von Geschlechtern solcher Gruppen [6, 12, 22], eines der beiden wichtigsten offenen Probleme auf dem Gebiet: Jede Familie polyzyklischer Gruppen mit isomorpher proendlicher Komplettierung enthält nur endlich viele Isomorphieklassen; für nilpotente Gruppen wurde dies zuvor von Pickel gezeigt. Eine der wesentlichen Einsichten von Fritz in diesem Projekt kam aus der algebraischen Zahlentheorie: Chevalleys Satz über die Kongruenzuntergruppeneigenschaft von Einheitengruppen in algebraischen Zahlkörpern sollte als Schlüssel dienen, aber er war nicht stark genug und wurde von Fritz soweit verallgemeinert [9], um ihn für unsere Zwecke zu nutzen.

Dies war eine typische Erfahrung in der Zusammenarbeit mit Fritz. Nach viel technischer Arbeit steckten wir fest; er geht und kommt nach einiger Zeit wieder mit den Worten: „Ich weiß, wie wir X lösen". Er hatte nicht alle technischen Details ausgearbeitet, jedoch einen gut fundierten Plan, der uns meistens erlaubte, den Beweis fertigzustellen.

Der Begriff des „Geschlechts", der Familien von Gruppen mit isomorpher proendlicher Vervollständigung bezeichnet, ist ihm immer wieder in seiner Karriere begegnet.

Die am leichtesten zugängliche Klasse polyzyklischer Gruppen ist die der endlich erzeugten nilpotenten Gruppen. Einige Arbeiten von Fritz beschäftigen sich mit ihrer Klassifikation, sie benutzen Ideen aus der algebraischen Geometrie, Zahlentheorie und algebraische Gruppen [26].

Sein wichtigster Beitrag (mit D.S.) ist die Lösung des *Isomorphieproblems* [15], dem zweiten offenen Problem in dem Gebiet, für nilpotente Gruppen. (Die allgemeine Meinung ging hier eher von einer negativen Antwort aus.[1].) Wir konstruierten einen Algorithmus um zu entscheiden, ob zwei endlich präsentierte nilpotente Gruppen isomorph sind. (Adian und Rabin haben vorher das berühmte Ergebnis erzielt, dass für allgemeine endlich präsentierte Gruppen kein solcher Algorithmus existiert.) Es wurde klar, dass dieses Problem als Eigenschaft von Bahnen arithmetischer Gruppen zu interpretieren war; Pickel hat so das Geschlechts-Problem für nilpotente Gruppen gelöst, indem er es auf ein „lokal-global"-Endlichkeitsproblem für solche Bahnen reduzierte. Die Ergebnisse in [22] benutzten ähnliche Ideen, jetzt benötigten wir einen *Entscheidbarkeitssatz*.

Entscheidbarkeit. In seiner zweiten Arbeit in Alleinautorschaft [11] entwarf Fritz einen expliziten Algorithmus für Konjugiertheit in $\mathrm{GL}_n(\mathbb{Z})$, das erste allgemeine Ergebnis dieser Art für arithmetische Gruppen. Er war sich sicher, dass analoge Re-

[1] Die Entscheidbarkeit des Isomorphieproblems für alle polyzyklische Gruppen wurde schließlich in [86] bewiesen, als Fritz sich schon anderen Themen zugewandt hatte. Die Arbeit [86] verweist anerkennend auf Fritz' Beitrag.

sultate in sehr viel größerer Allgemeinheit richtig sind, und wie so oft lag er hier richtig. Mithilfe Borels und Harish-Chandras Reduktionstheorie bewiesen wir die Entscheidbarkeit des „Bahnenproblems“ für jede rationale Operation einer arithmetischen Gruppe auf einem $\mathbb{Z}$-Gitter und entwickelten mit denselben Methoden ein effektives Verfahren, endliche Erzeugendensysteme für arithmetische Gruppen zu konstruieren [8, 14]. Später verallgemeinerten wir alles auf S-arithmetische Gruppen [21],[28], wo wir zusätzlich die Theorie der Bruhat-Tits-Gebäude brauchten. (Wie so vieles, musste Fritz mir auch diese Theorie erst erklären.) Diese Ergebnisse hatten vielseitige Anwendungen: Grob gesprochen sollte jedes diophantische Problem mit linearer Gruppenoperation entscheidbar sein. Neben dem Isomorphieproblem für nilpotente Gruppen, erhielten wir die Entscheidbarkeit der Konjugiertheit in S-arithmetischen Gruppen sowie auch der Äquivalenz von Formen über ganzalgebraischen Zahlen (oder S-ganzen Zahlen). Eine weitere diophantische Anwendung ist die Frage nach der Lösbarkeit ganzzahliger quadratischer Gleichungen (in beliebig vielen Unbestimmten). In einer schwierigen Arbeit zeigte Siegel die Entscheidbarkeit dieses Problems. Ein einfacher Algorithmus wurde in [18] entwickelt, er benutzt die effektive Konstruierbarkeit endlicher Erzeugendensysteme ganzzahliger orthogonaler Gruppen, ein Spezialfall von [14]. 24 Jahre später fragte der Logiker Harvey Friedman, ob man auch die Lösbarkeit in positiven ganzen Zahlen entscheiden kann. Dies konnten wir in [55] positiv beantworten. Fritz sah, dass die Bahnen einer Fuchsschen Gruppe im Unendlichen dicht liegen und lieferte so den Schlüssel zur Verschärfung des Starken Approximationssatzes, die wir in [55] bewiesen und anwendeten.

Affine kristallographische Gruppen. L. Auslander vermutete 1964, dass die Fundamentalgruppe einer kompakten vollständigen affin flachen Mannigfaltigkeit virtuell polyzyklisch ist. Etwas allgemeiner ist eine affine kristallographische Gruppe (AKG) eine eigentlich diskontinuierliche Gruppe Γ affiner Transformationen eines reellen Vektorraums V mit kompaktem Fundamentalbereich. In [36] zeigte Fritz gemeinsam mit Margulis, dass Γ virtuell polyzyklisch ist, falls der lineare Anteil von Γ in einer Lie-Gruppe von Rang 1 liegt. Später hat Margulis mit Koautoren (Abels und Soifer) dies auf verschiedene orthogonale Gruppen $O(p,q)$ verallgemeinert, die volle Vermutung ist jedoch immer noch offen. Die Arbeit [41] (mit D.S.) ging in eine etwas andere Richtung: Bieberbachs Endlichkeitssätze für euklidische kristallographische Gruppen wurden auf allgemeine virtuell polyzyklische AKGn übertragen. Sie gelten also für alle AKGn, falls Auslanders Vermutung in dieser Allgemeinheit richtig ist. Der allgemeine Fall verhält sich jedoch nicht ganz analog zum euklidischen: Fritz konstruierte eine unendliche Familie paarweise kommensurabler aber nicht konjugierter AKGn. Gemeinsam mit Paul Igodt hat Fritz in diese Richtung weitergeforscht.

Das zweite größere Problem auf dem Gebiet war die (aus Arbeiten von Milnor hervorgegangene) Vermutung, dass jede torsionsfreie polyzyklische Gruppe eine AKG ist. Für den Spezialfall der *nilpotenten* Gruppen kann dies mit der Mal’cev-Korrespondenz auf eine Frage über rational nilpotente Liealgebren übertragen werden: Hat jede solche Liealgebra eine Struktur als *links-symmetrische Algebra*? Fritz und ich haben eine Zeit lang versucht, dies zu beweisen; zum Erstaunen aller hat Yves Benoist 1995 gezeigt, dass dies i.a. falsch ist [75]. Er konstruierte eine 11-dimensionale rationale nilpotente Liealgebra, die keinen 12-dimensionalen treuen

Modul besitzt. Der Aufsatz [43] (mit Dietrich Burde) entwickelte einen allgemeinen Kontext, aus dem viele solche Gegenbeispiele hervorgingen und der später von Burde weiterentwickelt wurde.

Arithmetische Gruppen. Arithmetische Gruppen haben Grunewalds mathematisches Werk dominiert, speziell die Arithmetik und Geometrie arithmetischer Untergruppen von SL_2. Ein großer Teil seines Buches [46] widmet sich diesem Thema, auf das ich später nochmal zurückkomme. Er war jedoch auch an algebraischen Eigenschaften allgemeiner arithmetischer Gruppen interessiert, die eine große Rolle in seinen oben beschriebenen Arbeiten spielten und zu denen er in einer Reihe von Arbeiten mit Platonov zurückkehrte.

Die grundlegenden Arbeiten [49] und [51] untersuchten drei verwandte Thematiken: Starrheit (im Sinne von Mostow und Margulis), endliche Erweiterungen arithmetischer Gruppen und nicht-abelsche Kohomologie. Das Hauptergebnis gibt Kriterien dafür, dass eine algebraische $\mathbb{Q}$-Gruppe starr ist, d.h. dass sich jeder Isomorphismus zwischen zwei arithmetischen Untergruppen zu einem (möglicherweise getwisteten) rationalen Isomorphismus zwischen den Zariski-Abschlüssen fortsetzt. Als Anwendung werden Bedingungen entwickelt, wann jede endliche Erweiterung einer arithmetischen Gruppe Γ arithmetisch ist; allgemein gilt dies z.B., wenn Γ auflösbar ist. Einen berühmten Satz von Borel und Harish-Chandra verallgemeinernd, bewiesen die Autoren, dass jede solche endliche Erweiterung einer arithmetischen Gruppe nur endlich viele Konjugiertenklassen endlicher Untergruppen hat. Bemerkenswerterweise ergab sich daraus die Endlichkeit der Kohomologie-Menge $H^1(G, \Delta)$ für endliche Gruppen G, die als Automorphismen auf einer arithmetischen Gruppe Δ operieren. Ein Spezialfall dieser Resultate wurde von Borel und Serre in ihrer Arbeit über Endlichkeitsaussagen in der Galois-Kohomologie bewiesen.

Die äußere Automorphismengruppe einer virtuell polyzyklischen Gruppe ist immer eine arithmetische Gruppe. Dies ist eine Folgerung der grundlegenden Untersuchung solcher Automorphismengruppen mit Oliver Baues [61], die auf den Ergebnissen von [49] und Vorarbeiten aus [41] aufbaut.

Zetafunktionen in der Gruppentheorie. Die beiden meistzitierten Arbeiten von Fritz sind [34] (mit D.S. und Geoff Smith) und [52] (mit Marcus du Sautoy). Als eingefleischter Zahlentheoretiker hat sich Fritz schon immer für arithmetische Folgen interessiert, die durch unendliche Gruppen definiert werden. Analog zu Dedekinds Zetafunktion eines Zahlkörpers ist die *Zetafunktion* einer Gruppe G definiert als

$$\zeta_G(s) := \sum_{n=1}^{\infty} a_n n^{-s}$$

wobei a_n die Anzahl der Untergruppen von Index n in G bezeichnet. Für endlich erzeugte nilpotente Gruppen besitzt ζ_G ein Euler-Produkt mit lokalen Faktoren

$$\zeta_{G,p}(s) = \sum_{n=0}^{\infty} a_{p^n} p^{-ns}.$$

Das Hauptergebnis von [34] sagt aus, dass für jede Primzahl p der lokale Faktor $\zeta_{G,p}(s)$ eine rationale Funktion $Q_p(p^{-s})$ in p^{-s} ist. Man hatte lange (und hat zum

Teil bis heute) keine Vorstellung von der Natur dieser rationalen Funktionen Q_p. Die oben zitierte Arbeit [34] enthält explizite Beispiele für solche Funktionen und einige Vermutungen. Sie diente als Anregung für viele Arbeiten verschiedener Autoren (insbesondere von du Sautoy und Voll) über die Abhängigkeit von Q_p von der Primzahl p, die Existenz ‚lokaler Funktionalgleichungen' und die analytischen Eigenschaften der globalen Funktion ζ_G. Die Arbeit [34] führte noch eine weitere Zetafunktion ein, die Igusa-Zetafunktion $\zeta_{\mathcal{G}}$ einer linearen algebraischen Gruppe $\mathcal{G}$. (Ist $\mathcal{G}$ die algebraische Gruppe zu $\mathrm{Aut}(G)$, so ist $\zeta_{\mathcal{G}}$ die erzeugende Funktion der Anzahl der Untergruppen H von Index n mit $\hat{H} = \hat{G}$ [2].)

Diese globalen Zetafunktionen verhalten sich i.a. nicht so gut wie die klassischen zahlentheoretischen Zetafunktionen; aber die Ähnlichkeit ist verlockend, und Fritz hat sich viele Jahre mit ihrem analytischen Verhalten beschäftigt. Aufgrund von umfangreichen Rechnungen formulierte er den Begriff der 'Phantom-Zetafunktion', eine 'gutartige' Funktion, die ζ_G bzw. $\zeta_{\mathcal{G}}$ in gewissen Sinne zu imitieren versuchen. Die Arbeiten [47] und [53] (mit du Sautoy) entwickelten eine Theorie dieser 'Phantome' und bestimmen sie explizit für Chevalley-Gruppen $\mathcal{G}$.

Die klassische analytische Zahlentheorie verwendet Zetafunktionen, um das Wachstum von Zahlenfolgen abzuschätzen. Der Durchbruch in diese Richtung gelang mit dem Artikel [52], der die Folge (s_n) mit $s_n = \sum_{k=1}^{n} a_k$ des Untergruppenwachstums einer endlich erzeugten nilpotenten Gruppe untersucht. Der Schlüsselbegriff hier ist das „Kegel-Integral", eine Art polynomiell definiertes p-adisches Integral. Die lokalen Faktoren $\zeta_{G,p}$ sind solche Kegel-Integrale. Fritz und du Sautoy wendeten Lang-Weil-Typ-Abschätzungen auf diese Integrale an, um zu zeigen, dass die Konvergenzabszisse a_G der Dirichlet-Reihe ζ_G rational ist. Mit Hilfe algebraischer Geometrie bewiesen sie, dass ζ_G durch eine geeignete Artinsche L-Funktion approximiert werden kann, und zeigten, dass ζ_G etwas links von der Geraden $\mathrm{Re}(s) = a_G$ meromorph fortsetzbar ist. Mit Standardmethoden der analytischen Zahlentheorie (Taubersche Sätze) erhielten sie die asymptotische Abschätzung

$$s_n \sim c n^{a_G} (\log n)^{\beta}$$

für geeignetes $c \in \mathbb{R}$ und $\beta \in \mathbb{Z}_{\geq 0}$.

Lubotzky schrieb dazu in den Math. Reviews: „With the current paper ... the authors do more than just solve some major problems: by a detailed analysis of the „p-adic cone integrals" ... the authors give quite an explicit method to compute $\zeta_{G,p}(s)$, by transforming the problem to the understanding of various explicitly presented rational varieties taken mod p. This gives new insight for future research and connections between subgroup growth, nilpotent groups and algebraic geometry over finite fields."

Proendliche Vervollständigungen. Von Beginn seiner beruflichen Karriere an faszinierte Fritz die Frage, was es für zwei Gruppen bedeutet, dieselbe proendliche Komplettierung zu besitzen. 1970 stellte Grothendieck die berühmte Frage, ob jeder Homomorphismus zweier residuell endlicher, endlich präsentierter Gruppen, der einen

[2] $\hat{G}$ bezeichnet die proendliche Komplettierung der Gruppe G.

Isomorphismus der proendlichen Vervollständigungen induziert, notwendig ein Isomorphismus ist. Fritz konstruierte 2004 mit Martin Bridson in [57] Gegenbeispiele, die auch eine weitere Frage Grothendiecks beantworteten: die Gruppen haben unendlichen Index in ihrem Tannaka-Dual.

Serre führte den Begriff „gut" zu sein für eine Gruppe G ein. Eine Gruppe heißt „gut", wenn die natürliche Abbildung $G \to \hat{G}$ für jedes $n \geq 0$ und jeden endlichen G-Modul M einen Isomorphismus zwischen $H^n(\hat{G}, M)$ und $H^n(G, M)$ induziert. Fritz zeigte in [64] (mit Andrei Jaikin-Zapirain und Pavel Zalesskii) dass seine Favoriten, die Bianchi-Gruppen, ebenso wie alle „limit groups" gut sind. Der Beweis für Bianchi-Gruppen wird im wesentlichen über 3-Mannigfaltigkeiten geführt und benutzt Haken-Hierarchien.

In weiterer Zusammenarbeit mit Zalesskii kam er auf die Frage der Größe eines Geschlechts einer Gruppe zurück, die er 1980 für polyzyklische Gruppen untersucht hatte. Das *Geschlecht* einer residuell endlichen Gruppe G ist die Menge aller Isomorphieklassen residuell endlicher Gruppen, die dieselbe proendliche Komplettierung wie G haben. Der erst nach seinem Tod veröffentliche Artikel [73] (mit Zalesskii) beweist für endlich erzeugte virtuell-freie Gruppen G, dass das Geschlecht von G nur endlich viele Isomorphieklassen endlich erzeugter virtuell-freier Gruppen enthält, und gibt sogar eine Formel für ihre Anzahl an. Die Arbeit eröffnet jede Menge neuer Herausforderungen und wird sicherlich noch weitere Forschungsprojekte zur Folge haben.

Die Automorphismengruppe von F_n. (Dank an A. Lubotzky) Sei $\pi : F \to G$ ein Epimorphismus einer freien Gruppe F mit n Erzeugern ($n \geq 2$) auf eine endliche Gruppe G. Dann ist

$$A(\pi) := \{\alpha \in \mathrm{Aut}(F) \mid \pi \circ \alpha = \pi\}$$

eine Untergruppe von endlichem Index in $\mathrm{Aut}(F)$, welche den Kern $R := \ker(\pi)$ festlässt und auf $\overline{R} := R/[R, R]$ durch G-Modul-Automorphismen operiert. Ein klassisches Ergebnis von Gaschütz zeigt, dass $\mathbb{Q} \otimes \overline{R}$ als $\mathbb{Q}[G]$-Modul isomorph ist zu $\mathbb{Q}[G]^{n-1} \oplus \mathbb{Q}$. Mit Alex Lubotzky untersuchte Fritz in [65] die Operation von $A(\pi)$ auf diesem Modul und bewies, dass, unter gewissen Voraussetzungen an π, das Bild von $A(\pi)$ eine arithmetische Untergruppe der algebraischen $\mathbb{Q}$-Gruppe aller $\mathbb{Q}[G]$-Modul-Automorphismen von $\mathbb{Q} \otimes \overline{R}$ ist. So erhält man sehr viele arithmetische Gruppen, die als (virtuelle) Quotienten von $\mathrm{Aut}(F)$ auftreten, wie z.B. $\mathrm{SL}_{(n-1)k}(\mathbb{Z})$ und $\mathrm{SL}_{n-1}(\mathbb{Z}[i])$.

Neben direkten Anwendungen, z.B. dass $\mathrm{Aut}(F_3)$ „groß[3]" ist und daher nicht die Kazhdan-Eigenschaft T hat, eröffnet dies viele neue Fragen; z.B. ob die bekannten Eigenschaften der Torelli-Gruppe (der Kern des natürlichen Epimorphismus $\mathrm{Aut}(F) \to \mathrm{GL}_n(\mathbb{Z})$) wie die endliche Erzeugbarkeit auch allgemeiner für die entsprechende Untergruppe von $A(\pi)$ gelten.

In der letzten Woche seines Lebens arbeitete Fritz mit Lubotzky an der Erweiterung der oben erwähnten Ideen auf Abbildungsklassengruppen. Sie entwickelten

[3] Eine Gruppe heißt *groß* falls sie eine Untergruppe von endlichem Index besitzt, die surjektiv auf eine nicht-abelsche freie Gruppe abbildet.

eine „symplektische Gaschütz-Theorie", in der die freie Gruppe F durch eine Flächengruppe Γ ersetzt wird. Sie konnten die so erhaltenen algebraischen Gruppen über die Darstellungstheorie der endlichen Gruppe G beschreiben; was noch fehlt, ist der Beweis, dass das Bild einer entsprechenden Untergruppe von $M = \mathrm{Out}(\Gamma)$ unter gewissen Voraussetzungen arithmetisch ist. Für abelsche Gruppen G hat dies Looijenga [85] gezeigt.

Verbale dynamische Systeme. (Dank an B. Kunyavskii und E. Plotkin) Typisch für Fritz' Arbeitsweise ist der Artikel [59] mit vielen Koautoren, der ein lebhaftes und noch immer andauerndes Forschungsprojekt anstieß, in welchem Fritz die treibende Kraft war. Die ursprüngliche Motivation war das Problem, eine explizite, einfach definierte Folge von Wörtern $u_n(x, y)$ so zu finden, dass eine endliche Gruppe G genau dann auflösbar ist, wenn $u_n(G, G) = 1$ ist für ein n (ganz analog zur bekannten Folge von Engel-Wörtern, die nilpotente Gruppen charakterisieren). Der erste Schritt in diesem Projekt – unsichtbar in der fertigen Veröffentlichung – war die Suche nach geeigneten Wörtern. Fritz hatte immer einen leistungsstarken Laptop bei sich, den er manchmal wochenlang laufen ließ, um Kandidaten für u_1 zu testen. Das clevere Zusammenspiel zwischen Mensch und Maschine in diesem Verfahren ist in [84] beschrieben. Ausgehend von einem geeigneten u_1 definierte er die u_n rekursiv durch

$$u_{n+1}(x, y) := [u_n(x, y)^x, u_n(x, y)^y].$$

Dann genügt es zu zeigen, dass jede minimal einfache Gruppe G Elemente a, b enthält mit

$$u_1(a, b) = u_2(a, b) \neq 1.$$

Betrachtet man jedes solche G als Matrixgruppe, so liefert dies ein Gleichungssystem an die Matrixeinträge; das ursprüngliche Problem ist also zu einem Problem in der algebraischen Geometrie über endlichen Körpern geworden. Seine Lösung ist eine Glanzleistung, die anspruchsvolle Werkzeuge aus der algebraischen Geometrie mit Computeralgebra kombiniert. Kurze Zeit später fanden J. Bray, J.S. Wilson und R.A. Wilson einen anderen, einfacheren Zugang zur Originalfrage [76]. Jedoch kommentierten die Autoren von [59] ihre Arbeit wie folgt: „We also develop a new method to study equations in the Suzuki groups. We believe that, in addition to the main result, the method of proof is of independent interest: it involves surprisingly diverse and deep methods from algebraic and arithmetic geometry, topology, group theory, and computer algebra (Singular and Magma)." Ein weiterer Schritt auf diesem neuen Weg ist der erst nach Fritz' Tod erschienene Artikel [70]: „We study dynamical systems arising from word maps on simple groups. . . . These results . . . give rise to some new phenomena and concepts in the arithmetic of dynamical systems."

Einige der Autoren von [59] setzten die Arbeit mit der Charakterisierung des auflösbaren Radikals $\mathcal{R}(G)$ einer beliebigen endlichen Gruppe G fort. In einer Reihe von Artikeln, die schließlich zu dem Hauptwerk [68] führten, zeigten die Autoren, dass $\mathcal{R}(G)$ genau aus den $y \in G$ besteht, für die je 4 Konjugierte von y eine auflösbare Untergruppe von G erzeugen. Dieses Ergebnis ist optimal. Falls zusätzlich y von Primzahlordnung mindestens 5 ist, dann gilt $y \in \mathcal{R}(G)$ genau dann, wenn je zwei Konjugierte von y eine auflösbare Untergruppe erzeugen. Diese Ergebnisse sind in etwa zur selben Zeit unabhängig von P. Flavell, S. Guest und R. Guralnick erzielt worden. Insbesondere folgt aus ihnen, dass eine endliche Gruppe G genau dann auflösbar ist, wenn jedes Paar konjugierter Elemente in einer auflösbaren Untergruppe von G liegt, womit gleichzeitig vielbeachtete Sätze von Baer/Suzuki und Thompson verallgemeinert werden.

3.2 Zahlentheorie und hyperbolische Mannigfaltigkeiten

(Dank an G. Harder, A. Reid, P. Sarnak, J. Schwermer)

Sein ganzes Leben lang interessierte sich Fritz für die Kohomologie arithmetischer Gruppen über Zahlkörpern. Er kam mit allen Facetten dieses Gebiets in Berührung: geometrische Untersuchung der zugehörigen lokalsymmetrischen Räume, explizite Konstruktionen von Fundamentalbereichen und den Beziehungen zur Theorie automorpher Formen.

Ein Großteil seiner Arbeit konzentriert sich auf arithmetisch definierte hyperbolische 3-Mannigfaltigkeiten. Diese kommen von arithmetisch definierten Kleinschen Gittern: diskreten Gruppen orientierungserhaltender Isometrien des 3-dimensionalen hyperbolischen Raums H^3. Es gibt zwei Sorten solcher Gruppen Γ, je nachdem ob H^3/Γ kompakt ist oder nicht. Fritz beschäftigte sich mehr mit letzteren, wie zum Beispiel den *Bianchi-Gruppen* $\mathrm{PGL}_2(\mathcal{O}_d)$ und Untergruppen von endlichem Index, wobei $\mathcal{O}_d$ den Ring der ganzen Zahlen im imaginärquadratischen Zahlkörper $\mathbb{Q}[\sqrt{d}]$ bezeichnet.

Fritz war einer der ersten, der einen Bezug zwischen speziellen kuspidalen automorphen Formen für Bianchi-Gruppen zu elliptischen Kurven herstellte. Ermutigt von G. Harder begann er 1970, Eigenformen für Hecke-Operatoren auf der Kohomologie einer Kongruenzuntergruppe $\Gamma(\mathcal{A})$ von $\mathrm{PGL}_2(\mathcal{O}_d)$ zu studieren. Das Ziel war, zu jeder solchen Eigenform eine über $\mathbb{Q}[\sqrt{d}]$ definierte elliptische Kurve E zu finden, die gute Reduktion außerhalb des Ideals $\mathcal{A}$ besitzt, so dass für eine große Zahl von Primidealen $\wp$ in $\mathcal{O}_d$ die Eigenwerte des Hecke-Operators $T_\wp$ mit denen des Frobenius $\Phi_\wp$ auf dem Tate-Modul von E übereinstimmen. Fritz fand durch seinen experimentellen Zugang viele Beispiele, die die vermutete Beziehung zwischen kuspidalen Formen und „Motiven“ bestätigten. Erste Ergebnisse enthält die Arbeit [4]. Das Preprint [10] dokumentiert weitere Rechnungen, ist aber leider, obwohl von Cremona [80] zitiert, nie veröffentlicht worden. Die Resultate sind in [23] dokumentiert. (Fritz sanfmütige Art verbarg sein eisernes Durchhaltevermögen, wenn es um ernsthafte Rechnungen ging. Er war zeitweise von der Benutzung des Rechnernetzes der Universität Bielefeld ausgeschlossen, nachdem sein Programm das gesamte System belegte: um die zeitintensiven Berechnungen durchzuführen erfand er eine Routine, die automatischen Zuteilungen der Rechenkapazität zu umgehen.)

Die Modularität rationaler elliptischer Kurven (Wiles, Taylor et al.) ist eines der bedeutensten Ergebnisse der letzten Jahrzehnte in der Zahlentheorie. Schon in einem sehr frühen Stadium deuteten Fritz’ Untersuchungen eine mögliche Verallgemeinerung auf andere Zahlkörper an. Einige seiner frühen Vermutungen wurden später von Berger, Harcos, Harris, Soudry und Taylor [77, 83, 87] bewiesen. Mithilfe ihrer Resultate kann einer automorphen Form eine Familie von Galois-Darstellungen zugeordnet werden. Zu jeder elliptischen Kurve gehört auch eine solche Familie von

Galois-Darstellungen; hat man also eine Idee, welche elliptische Kurve man der automorphen Form zuordnen muss, so kann man die Gleichheit der zugehörigen L-Reihen überprüfen [81]. Auch wenn diese neue Arbeit die Vermutung für imaginär quadratische Zahlkörper stützt, ist man noch weit von einem endgültigen Beweis entfernt. Insbesondere fehlt immer noch eine intrinsische Konstruktion für die elliptische Kurve, wie sie von Fritz angestrebt wurde, beispielsweise über eine Einbettung der Riemannschen Fläche in eine geeignete Bianchi-Orbifold.

Fritz' Zugang zur Kohomologie der Bianchi-Gruppen war immer sehr direkt. In [17, 19, 20] (mit Joachim Schwermer) bewiesen sie die Existenz einer sogenannten inneren Kohomologieklasse für fast alle Bianchi-Gruppen über eine explizite Konstruktion geometrischer Objekte aus einer detaillierten Kenntnis des zugehörigen Fundamentalbereichs. Der Artikel [20] war die Geburt des „Kuspidalen Kohomologieproblems", er beweist, dass nur für endlich viele Werte von d die Gruppe $\mathrm{PSL}(2, \mathcal{O}_d)$ triviale kuspidale Kohomologie besitzt. Aus topologischer Sicht hat dies die interessante Folgerung, dass nur endlich viele Bianchi-Orbifolds Q_d eine endliche Überlagerung erlauben, die ein Link-Komplement in S^3 ist. Nachfolgearbeiten (von verschiedenen Autoren, die schließlich zu dem Endergebnis von Vogtmann führen) zeigten genauer, dass es nur 14 solche Werte d gibt.

Mit Koautoren hat sich Fritz auch sehr detailliert mit Untergruppen von kleinem Index in Bianchi-Gruppen für gewisse Werte d beschäftigt. In [48] (mit U. Hirsch) stellte Fritz seine Kunst im Umgang mit topologischen Methoden unter Beweis. Dieses Paper enthält einige wundervoll detaillierte Konstruktionen von Henkel-Zerlegungen von Link-Komplementen, die die Bianchi-Orbifold Q_7 überlagern. Ein weiteres sehr vorausschauendes Ergebnis ist das von Grunewald-Schwermer [17]. Sie zeigten, dass die Bianchi-Gruppen groß (siehe Fußnote 3) sind. Es wird vermutet, dass alle Gitter in $\mathrm{PSL}(2, \mathbb{C})$ in diesem Sinne groß sind, eine Hauptrichtung der derzeitigen Forschung in der Topologie von 3-Mannigfaltigkeiten.

Um solche und verwandte arithmetische Fragestellungen zu untersuchen entwickelten Fritz und seine Koautoren (insbesondere Elstrodt und Mennicke) die analytische und arithmetische Theorie automorpher Formen auf hyperbolischen Mannigfaltigkeiten in 3 und mehr Dimensionen. Die verwendeten Methoden reichen von Topologie und Kohomologietheorie über Spektraltheorie und Analysis bis hin zur arithmetischen algebraischen Geometrie. Neben vielen anderen wichtigen Ergebnissen gaben sie Schranken in Richtung der verallgemeinerten Ramanujan/Selberg-Vermutung für die Spektra solcher hyperbolischen Mannigfaltigkeiten an [37]. Ihr Buch *Groups acting on hyperbolic space: harmonic analysis and number theory* [46] ist immer noch der klassische Text in diesem Gebiet. Es behandelt vollständig die hyperbolische Geometrie und zugehörige Topologie, die Spektraltheorie der Laplace- und Hecke-Operatoren ebenso wie die benötigte Zahlentheorie.

Das vor kurzem erschienene Paper [67], mit Finis und Tirao, enthält einen umfassenden Überblick über die aktuellen Kenntnisse über die Kohomologie arithmetischer und gewisser nicht arithmetischer hyperbolischer 3-Mannigfaltigkeiten. Wieder decken die experimentellen Ergebnisse eine Fülle neuer Phänomene und Fragen auf, die die Forschung auf dem Gebiet in den nächsten Jahren beeinflussen werden.

3.3 Algebraische Geometrie

(Dank an I. Bauer, F. Catanese)

Gruppenoperationen sind in der algebraischen Geometrie schon seit langem ein wichtiges Forschungsobjekt. Insbesondere bilden diese Operationen eine Quelle zur Konstruktion neuer algebraischer Varietäten, darunter exotische mit pathologischen Eigenschaften. In den letzten Jahren arbeitete Fritz gemeinsam mit Ingrid Bauer und Fabrizio Catanese an verschiedenen Projekten in dieser Richtung.

Sein erster wichtiger Beitrag zu algebraischen Flächen (im Anhang von [79]) war die Konstruktion von Flächen, die jetzt unter dem Namen *Kuga-Shavel-Grunewald*-Flächen bekannt sind. Diese sind kompakte Quotienten des Produkts zweier Kreisscheiben unter einer diskreten Untergruppe von $\mathrm{PGL}(2,\mathbb{R}) \times \mathrm{PGL}(2,\mathbb{R})$, für die jede kommensurable Untergruppe frei operiert. Seine fundierten Kenntnisse über Quaternionenalgebren halfen Fritz, die Existenz solcher starrer Flächen zu beweisen, die aus abzählbar unendlich vielen „QED-Klassen" bestehen.

Andere Arbeiten klassifizieren und konstruieren algebraische Flächen für den schwierigen Fall, in dem das geometrische Geschlecht gleich Null ist. Besonders interessant ist die explizite Bestimmung von Fundamentalgruppen, für die man leicht eine Präsentation angeben kann, die jedoch nur sehr schwer genau zu beschreiben sind. Mit Hilfe der Ergebnisse in [64], wo ein hinreichendes Kriterium entwickelt wird, wann Erweiterungen von guten Gruppen wieder gut sind, ergibt sich ein wichtiger Struktursatz.

Ein größeres und immer noch andauerndes Projekt [60, 69] beschäftigt sich mit der Operation der absoluten Galoisgruppe auf Varietäten, die über Zahlkörpern definiert sind, und der entsprechenden Operation auf ihren Fundamentalgruppen (die die proendliche Komplettierung erhält). Im zweiten Artikel werden einige interessante Operationen der absoluten Galoisgruppe auf der Menge der Zusammenhangskomponenten des Modulraums von minimalen Flächen vom allgemeinen Typ konstruiert. Es wird vermutet, dass eine dieser Operationen treu ist.

Ein weiteres Projekt führt die Untersuchung gewisser starrer algebraischer Flächen auf gruppentheoretische Fragestellungen zurück. Für eine gegebenen Gruppe G sucht man Äquivalenzklassen, sogenannte *Beauville-Strukturen* von Erzeugendensystemen a, b, c und x, y, z mit $abc = 1$ und $xyz = 1$ und einigen anderen komplizierteren Eigenschaften. Welche endlichen Gruppen haben eine Beauville-Struktur? Nach Vorarbeiten von Fritz, Bauer und Catanese griffen mehrere Mathematiker diese Frage auf: die Vermutung [58], dass alle nicht-abelschen endlichen einfachen Gruppen außer A_5 eine Beauville-Struktur besitzen, wurde erst kürzlich von R . Guralnick und G. Malle [82] bewiesen.

Danksagung Mein herzlichster Dank geht an Barbara Grunewald, Ulrike Grunewald und Wilhelm Singhof, die ihre Erinnerungen mit mir geteilt haben. Mathematische Anregungen habe ich von vielen Kollegen erhalten, die zum Teil im Text namentlich aufgeführt sind. Ich möchte mich auch bei Martin Bridson für seine redaktionelle Hilfe bedanken.

Ausgewählte Arbeiten Fritz Grunewalds sind unter den Referenzen [1–74] *aufgeführt. Eine fast vollständige Liste seiner mehr als 100 Artikel findet man in MathSciNet.*

Literatur

F. Grunewald – Ausgewählte Arbeiten

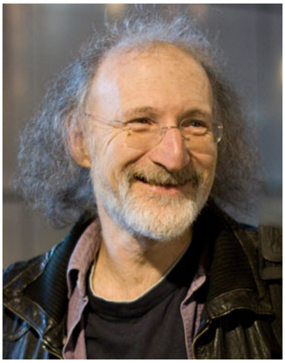
1. Grunewald, F., Zimmert, R.: Über einige rationale elliptische Kurven mit freiem Rang ≥ 8. J. Reine Angew. Math. **296**, 100–107 (1977). MR0466147 (57: 6028)
2. Grunewald, F., Segal, D.: Conjugacy in polycyclic groups. Commun. Algebra **6**(8), 775–798 (1978). MR0491984 (58: 11151)
3. Grunewald, F., Segal, D.: On some groups which cannot be finitely presented. J. Lond. Math. Soc. (2) **17**(3), 427–436 (1978). MR0500627 (80d:20033)
4. Grunewald, F., Helling, H., Mennicke, J.: SL_2 over complex quadratic number fields. I. Algebra Log. **17**(5), 512–580, 622 (1978). MR0555260 (81e:10021)
5. Grunewald, F., Havas, G., Mennicke, J.L., Newman, M.F.: Groups of exponent eight. Bull. Aust. Math. Soc **20**(1), 7–16 (1979). MR0544364 (80g:20044)
6. Grunewald, F., Pickel, P.F., Segal, D.: Finiteness theorems for polycyclic groups. Bull. Am. Math. Soc. **1**(3), 575–578 (1979). MR0526969 (80k:20026)
7. Grunewald, F., Segal, D.: Remarks on injective specializations. J. Algebra **61**(2), 538–547 (1979). MR0559854 (81a:20058)
8. Grunewald, F., Segal, D.: The solubility of certain decision problems in arithmetic and algebra. Bull. Am. Math. Soc. **1**(6), 915–918 (1979). MR0546317 (81b:10014)
9. Grunewald, F., Segal, D.: On congruence topologies in number fields. J. Reine Angew. Math. **311/312**, 389–396 (1979). MR0549980 (81e:12017)
10. Grunewald, F., Mennicke, J.: $\mathrm{SL}_2(\mathcal{O})$ and elliptic curves. Unpublished manuscript, Bielefeld (1979)
11. Grunewald, F., Mennicke, J.: Solution of the conjugacy problem in certain arithmetic groups. In: Word problems, II, Conf. on Decision Problems in Algebra, Oxford, 1976. Stud. Logic Foundations Math., Bd. 95, S. 101–139. North-Holland, Amsterdam/New York (1980). MR0579942 (81h:20054)
12. Grunewald, F., Pickel, P.F., Segal, D.: Polycyclic groups with isomorphic finite quotients. Ann. Math. (2) **111**(1), 155–195 (1980). MR0558400 (81i:20045)
13. Grunewald, F., Havas, G., Mennicke, J.L., Newman, M.F.: Groups of exponent eight. In: Burnside groups, Proc. Workshop, Univ. Bielefeld, Bielefeld, 1977. Lecture Notes in Math., Bd. 806, S. 49–188. Springer, Berlin (1980). MR0586045 (82d:20039a)
14. Grunewald, F., Segal, D.: Some general algorithms. I. Arithmetic groups. Ann. Math. (2) **112**(3), 531–583 (1980). MR0595206 (82d:20048a)
15. Grunewald, F., Segal, D.: Some general algorithms. II. Nilpotent groups. Ann. Math. (2) **112**(3), 585–617 (1980). MR0595207 (82d:20048b)
16. Grunewald, F., Mennicke, J.L.: Some 3-manifolds arising from $\mathrm{PSL}_2(\mathbb{Z}[i])$. Arch. Math. (Basel) **35**(3), 275–291 (1980). MR0583599 (82f:57009)
17. Grunewald, F., Schwermer, J.: Free nonabelian quotients of SL_2 over orders of imaginary quadratic numberfields. J. Algebra **69**(2), 298–304 (1981). MR0617080 (82i:10027)
18. Grunewald, F., Segal, D.: How to solve a quadratic equation in integers. Math. Proc. Camb. Philos. Soc. **89**(1), 1–5 (1981). MR0591965 (82j:10029)
19. Grunewald, F., Schwermer, J.: Arithmetic quotients of hyperbolic 3-space, cusp forms and link complements. Duke Math. J. **48**(2), 351–358 (1981). MR0620254 (82j:10046)
20. Grunewald, F., Schwermer, J.: A nonvanishing theorem for the cuspidal cohomology of SL_2 over imaginary quadratic integers. Math. Ann. **258**(2), 183–200 (1981/1982). MR0641824 (83c:10032)
21. Grunewald, F., Segal, D.: Résolution effective de quelques problèmes diophantiens sur les groupes algébriques linéaires. C. R. Acad. Sci. Paris Sér. I Math. **295**(8), 479–481 (1982). (French) [Effective solvability of certain Diophantine problems related to linear algebraic groups]. MR0684084 (84a:20044).
22. Grunewald, F., Segal, D.: Conjugacy of subgroups in arithmetic groups. Proc. Lond. Math. Soc. (3) **44**(1), 47–70 (1982). MR0642792 (84c:20052)
23. Elstrodt, J., Grunewald, F., Mennicke, J.: PSL(2) over imaginary quadratic integers. In: Arithmetic Conference, Metz, 1981. Astérisque, Bd. 94, S. 43–60. Soc. Math. France, Paris (1982). MR0702365 (84g:10051)

24. Elstrodt, J., Grunewald, F., Mennicke, J.: On the group $\mathrm{PSL}_2(\mathbb{Z}[i])$. In: Number theory days, 1980, Exeter, 1980. London Math. Soc. Lecture Note Ser., Bd. 56, S. 255–283. Cambridge Univ. Press, Cambridge/New York (1982). MR0697270 (84j:10024)
25. Elstrodt, J., Grunewald, F., Mennicke, J.: Discontinuous groups in three-dimensional hyperbolic space: analytic theory and arithmetic applications. Usp. Mat. Nauk **38**(1), 119–147 (1983). (Russian) Translated from the English by A.N. Parshin. MR0693720 (85g:11045).
26. Grunewald, F., Segal, D.: Reflections on the classification of torsion-free nilpotent groups. In: Group Theory, S. 121–158. Academic Press, London (1984). MR0780569 (86h:20048)
27. Elstrodt, J., Grunewald, F., Mennicke, J.: Eisenstein series on three-dimensional hyperbolic space and imaginary quadratic number fields. J. Reine Angew. Math. **360**, 160–213 (1985). MR0799662 (87c:11052)
28. Grunewald, F., Segal, D.: Decision problems concerning S-arithmetic groups. J. Symb. Logic **50**(3), 743–772 (1985). MR0805682 (87a:22023)
29. Elstrodt, J., Grunewald, F., Mennicke, J.: The Selberg zeta-function for cocompact discrete subgroups of $\mathrm{PSL}(2,\mathbb{C})$. In: Elementary and analytic theory of numbers, Warsaw, 1982. Banach Center Publ., Bd. 17, S. 83–120. PWN, Warsaw (1985). MR0840474 (87h:11044)
30. Elstrodt, J., Grunewald, F., Mennicke, J.: Eisenstein series for imaginary quadratic number fields. In: The Selberg trace formula and related topics, Brunswick, Maine, 1984. Contemp. Math., Bd. 53, S. 97–117. Amer. Math. Soc., Providence (1986). MR0853554 (88a:11050)
31. Elstrodt, J., Grunewald, F., Mennicke, J.: Zeta-functions of binary Hermitian forms and special values of Eisenstein series on three-dimensional hyperbolic space. Math. Ann. **277**(4), 655–708 (1987). MR0901712 (88m:11021)
32. Elstrodt, J., Grunewald, F., Mennicke, J.: Vahlen's group of Clifford matrices and spin-groups. Math. Z. **196**(3), 369–390 (1987). MR0913663 (89b:11031)
33. Elstrodt, J., Grunewald, F., Mennicke, J.: Séries de Poincaré sommes de Kloosterman et valeurs propres du laplacien pour les groupes de congruence agissant sur un espace hyperbolique. C. R. Acad. Sci. Paris Sér. I Math. **305**(1–3), 577–581 (1987). [Poincare series, Kloosterman sums and eigenvalues of the Laplacian for congruence groups acting on hyperbolic spaces]. MR0917572 (89c:11086)
34. Grunewald, F., Segal, D., Smith, G.C.: Subgroups of finite index in nilpotent groups. Invent. Math. **93**(1), 185–223 (1988). MR0943928 (89m:11084)
35. Elstrodt, J., Grunewald, F., Mennicke, J.: Arithmetic applications of the hyperbolic lattice point theorem. Proc. Lond. Math. Soc. (3) **57**(2), 239–283 (1988). MR0950591 (89g:11033)
36. Grunewald, F., Margulis, G.: Transitive and quasitransitive actions of affine groups preserving a generalized Lorentz-structure. J. Geom. Phys. **5**(4), 493–531 (1988). (1989). MR1075720 (91i:22016)
37. Elstrodt, J., Grunewald, F., Mennicke, J.: Kloosterman sums for Clifford algebras and a lower bound for the positive eigenvalues of the Laplacian for congruence subgroups acting on hyperbolic spaces. Invent. Math. **101**(3), 641–685 (1990). MR1062799 (91j:11038)
38. Grunewald, F., Schwermer, J.: Subgroups of Bianchi groups and arithmetic quotients of hyperbolic 3-space. Trans. Am. Math. Soc. **335**(1), 47–78 (1993). MR1020042 (93c:11024)
39. Blasius, D., Franke, J.: Grunewald, F., Cohomology of S-arithmetic subgroups in the number field case. Invent. Math. **116**(1–3), 75–93 (1994). MR1253189 (96h:11047)
40. Grunewald, F., Mennicke, J., Vaserstein, L.: On the groups $\mathrm{SL}_2(\mathbb{Z}[x])$ and $\mathrm{SL}_2(k[x,y])$. Isr. J. Math. **86**(13), 157–193 (1994). MR1276133 (95h:20061)
41. Grunewald, F., Segal, D.: On affine crystallographic groups. J. Differ. Geom. **40**(3), 563–594 (1994). MR1305981 (95j:57044)
42. Grunewald, F., Hirsch, U.: Link complements arising from arithmetic group actions. Int. J. Math. **6**(3), 337–370 (1995). MR1327153 (96a:57033)
43. Burde, D.: Grunewald, F., Modules for certain Lie algebras of maximal class. J. Pure Appl. Algebra **99**(3), 239–254 (1995). MR1332900 (96d:17007)
44. Grunewald, F., Huntebrinker, W.: A numerical study of eigenvalues of the hyperbolic Laplacian for polyhedra with one cusp. Exp. Math. **5**(1), 57–80 (1996). MR1412955 (98f:11052a)
45. Grunewald, F., Platonov, V.: On finite extensions of arithmetic groups. C. R. Acad. Sci. Paris Sér. I Math. **325**(11), 1153–1158 (1997). MR1490116 (99a:20045)
46. Elstrodt, J., Grunewald, F., Mennicke, J.: Groups acting on hyperbolic space. Harmonic analysis and number theory. Springer Monographs in Mathematics. Springer, Berlin (1998). xvi+524 pp. ISBN: 3-540-62745-6 MR1483315 (98g:11058)
47. Grunewald, F., du Sautoy, M.: Zeta functions of classical groups and their friendly ghosts. C. R. Acad. Sci. Paris Sér. I Math. **327**(1), 1–6 (1998). MR1650255 (2000b:11109)

48. Grunewald, F., Platonov, V.: Rigidity and automorphism groups of solvable arithmetic groups. C. R. Acad. Sci. Paris Sér. I Math. **327**(5), 427–432 (1998). MR1652546 (99i:20065)
49. Grunewald, F., Platonov, V.: Solvable arithmetic groups and arithmeticity problems. Int. J. Math. **10**(3), 327–366 (1999). MR1688145 (2000d:20066)
50. Grunewald, F., du Sautoy, M.: Analytic properties of Euler products of Igusa-type zeta functions and subgroup growth of nilpotent groups. C. R. Acad. Sci. Paris Sér. I Math. **329**(5), 351–356 (1999). MR1710072 (2000g:11110)
51. Grunewald, F., Platonov, V.: Rigidity results for groups with radical cohomology of finite groups and arithmeticity problems. Duke Math. J **100**(2), 321–358 (1999). MR1722957 (2000j:11079)
52. Grunewald, F., du Sautoy, M.: Analytic properties of zeta functions and subgroup growth. Ann. Math. (2) **152**(3), 793–833 (2000). MR1815702 (2002h:11084)
53. Grunewald, F., du Sautoy, M.: Zeta functions of groups: zeros and friendly ghosts. Am. J. Math. **124**(1), 1–48 (2002). MR1878998 (2003a:11119)
54. Bandman, T., Greuel, G.-M., Grunewald, F., Kunyavskii, B., Pfister, G., Plotkin, E.: Two-variable identities for finite solvable groups. C. R. Math. Acad. Sci. Paris **337**(9), 581–586 (2003). MR2017730 (2004i:20029)
55. Grunewald, F., Segal, D.: On the integer solutions of quadratic equations. J. Reine Angew. Math. **569**, 13–45 (2004). MR2055712 (2005d:11047)
56. Grunewald, F., Platonov, V.: New properties of lattices in Lie groups. C. R. Math. Acad. Sci. Paris **338**(4), 271–276 (2004). MR2076494 (2005b:22015)
57. Bridson, M., Grunewald, F.: Grothendieck's problems concerning profinite completions and representations of groups. Ann. Math. (2) **160**(1), 359–373 (2004). MR2119723 (2005k:20069)
58. Bauer, I., Catanese, F., Grunewald, F.: Beauville surfaces without real structures. In: Geometric Methods in Algebra and Number Theory. Progr. Math., Bd. 235, S. 1–42. Birkhäuser, Boston (2005). MR2159375 (2006f:14040)
59. Bandman, T., Greuel, G.-M., Grunewald, F., Kunyavskii, B., Pfister, G., Plotkin, E.: Identities for finite solvable groups and equations in finite simple groups. Compos. Math. **142**(3), 734–764 (2006). MR2231200 (2007d:20027)
60. Bauer, I., Catanese, F., Grunewald, F.: Chebycheff and Belyi polynomials, dessins d'enfants, Beauville surfaces and, group theory. Mediterr. J. Math. **3**(2), 121–146 (2006). MR2241319 (2007c:14006)
61. Baues, O., Grunewald, F.: Automorphism groups of polycyclic-by-finite groups and arithmetic groups. Publ. Math. Inst. Hautes études Sci. **104**, 213–268 (2006). MR2264837 (2008c:20070)
62. Grunewald, F., du Sautoy, M.: Zeta functions of groups and rings. In: International Congress of Mathematicians, Vol. II, S. 131–149. Eur. Math. Soc., Zürich (2006). MR2275592 (2008d:11102)
63. Bauer, I., Catanese, F., Grunewald, F.: The classification of surfaces with $p_g = q = 0$ isogenous to a product of curves. Pure Appl. Math. Q. **4**(2), 547–586 (2008). MR2400886 (2009a:14046)
64. Grunewald, F., Jaikin-Zapirain, A., Zalesskii, P.A.: Cohomological goodness and the profinite completion of Bianchi groups. Duke Math. J. **144**(1), 53–72 (2008). MR2429321 (2009e:20063)
65. Grunewald, F., Lubotzky, A.: Linear representations of the automorphism group of a free group. Geom. Funct. Anal. **18**(5), 1564–1608 (2009). MR2481737 (2010i:20039)
66. Gordeev, N., Grunewald, F., Kunyavski, B., Plotkin, E.: Baer-Suzuki theorem for the solvable radical of a finite group. C. R. Math. Acad. Sci. Paris **347**(5–6), 217–222 (2009). MR2537525 (2010g:20028)
67. Finis, T., Grunewald, F., Tirao, P.: The cohomology of lattices in SL(2, $\mathbb{C}$). Exp. Math. **19**(1), 29–63 (2010). MR2649984
68. Gordeev, N., Grunewald, F., Kunyavski, B., Plotkin, E.: From Thompson to Baer-Suzuki: a sharp characterization of the solvable radical. J. Algebra **323**(10), 2888–2904 (2010). MR2609180
69. Bauer, I., Catanese, F., Grunewald, F.: The Absolute Galois group acts faithfully on the connected components of the moduli space of surfaces of general type. arXiv:0706.1466
70. Bandman, T., Grunewald, F., Jones, N., Kunyavskii, B.: Geometry and arithmetic of verbal dynamical systems on simple groups. Groups Geom. Dyn. **4**, 607-655 (2010). doi:10.4171/GGD/98
71. Bauer, I., Catanese, F., Grunewald, F., Pignatelli, R.: Quotients of a product of curves by a finite group and their fundamental groups. arXiv:0809.3420
72. Grunewald, F., Jaikin-Zapirain, A., Pinto, A.G.S., Zalesskii, P.A.: Normal subgroups of profinite groups of non-negative deficiency. arXiv:0810.2027
73. Grunewald, F., Zalesskii, P.A.: Genus for groups. J. Algebra. doi:10.1016/j.jalgebra.2010.05.018
74. Gordeev, N., Grunewald, F., Kunyavski, B., Plotkin, E.: New trends in characterization of solvable groups. Preprint, MPIM 2010-35

Andere Literatur

75. Benoist, Y.: Une nilvariété non affine. J. Differ. Geom. **41**, 21–52 (1995)
76. Bray, J.N., Wilson, J.S., Wilson, R.A.: A characterization of finite soluble groups by laws in two variables. Bull. Lond. Math. Soc. **37**, 179–186 (2005)
77. Berger, T., Harcos, G.: ℓ-adic representations associated to modular forms over imaginary quadratic fields. Int. Math. Res. Notices **23** (2007)
78. Bridson, M., Howie, J., Miller, C.F. III, Short, H.: Subgroups of direct products of limit groups. Ann. Math. (2) **170**, 1447–1467 (2009)
79. Catanese, F.: Q.E.D. for algebraic varieties. With an appendix by Sönke Rollenske. J. Differ. Geom. **77**, 43–75 (2007)
80. Cremona, J.: Hyperbolic tesselations, modular symbols, and elliptic curves over complex quadratic fields. Compos. Math. **51**, 275–324 (1984)
81. Dieulefait, L., Guerberoff, L., Pacetti, A.: Proving modularity for a given elliptic curve over an imaginary quadratic field. Math. Comp. **79**, 1145–1170 (2010)
82. Guralnick, R., Malle, G.: Simple groups admit Beauville structures. arXiv:1009.6183
83. Harris, M., Soudry, D., Taylor, R.: ℓ-adic representations associated to modular forms over imaginary quadratic fields I. Lifting to $GSp_4(\mathbb{Q})$. Invent. Math. **112**, 377–411 (1993)
84. Kunyavskii, B., Plotkin, E., Shklyar, R.: A strategy for human-computer study of equations and identities in finite groups. Proc. Latv. Acad. Sci., Sect. B **57**, 97–101 (2003)
85. Looijenga, E.: Prym representations of mapping class groups. Geom. Dedic. **64**, 69–83 (1997)
86. Segal, D.: Decidable properties of polycyclic groups. Proc. Lond. Math. Soc. (3) **61**, 497–528 (1990)
87. Taylor, R.: ℓ-adic representations associated to modular forms over imaginary quadratic fields II. Invent. Math. **116**, 407–429 (1994)



Dan Segal is a Senior Research Fellow at All Souls College Oxford. Previously he held university posts in Manchester and London, and was a Wissenschaftlicher Assistent in Bielefeld from 1976–1979. He works mainly in group theory and is the author of "*Polycyclic Groups*" (Cambridge 1983), "*Words*" (Cambridge 2009), and a co-author of "*Analytic Pro-p Groups*" (Cambridge 1999) and "*Subgroup Growth*' (Birkhäuser 2003).

Jahresber Dtsch Math-Ver (2011) 113: 21–40
DOI 10.1365/s13291-010-0011-6

ÜBERSICHTSARTIKEL

Random Networks with Concave Preferential Attachment Rule

Steffen Dereich · Peter Mörters

Received: 29 July 2010 / Published online: 26 November 2010

Abstract Many of the phenomena in the complex world in which we live have a rough description as a large network of interacting components. Random network theory tries to describe the global structure of such networks from basic local principles. One such principle is the preferential attachment paradigm which suggests that networks are built by adding nodes and links successively, in such a way that new nodes prefer to be connected to existing nodes if they have a high degree. Our research gives the first comprehensive and mathematically rigorous treatment of the case when this preference follows a *nonlinear*, or more precisely concave, rule. We survey results obtained so far and some ongoing developments.

Keywords Barabasi-Albert model · Scale-free network · Nonlinear preferential attachment · Dynamic random graph · Maximal degree · Giant component · Cluster · Multitype branching random walk · Graph distance

Mathematics Subject Classification (2000) Primary 05C80 · Secondary 60C05 · 90B15

S. Dereich (✉)
Fachbereich Mathematik und Informatik, Philipps-Universität Marburg, Hans-Meerwein Straße, 35043 Marburg, Germany
e-mail: dereich@mathematik.uni-marburg.de

P. Mörters
Department of Mathematical Sciences, University of Bath, Claverton Down, Bath BA2 7AY, UK
e-mail: maspm@bath.ac.uk

1 Networks

Although networks are in principle simple objects, they can show immense complexity when their size is very large. They can therefore often offer a meaningful rough description of complex systems in nature, society or technology. Examples of the kind of networks we have in mind are the following:

- a *cell* may be described by its metabolism as a network of chemicals with edges representing chemical reactions transforming one substance into another one;
- a *social network* has human individuals as nodes and edges representing either friendship, acts of communication or other social interactions;
- in a *collaboration graph* the nodes represent scientists which are connected by an edge if they have collaborated or if they have authored a joint paper;
- the *world-wide web* consists of web pages connected by hyperlinks;
- the *internet* has routers and computers as nodes which have physical or wireless links.

The mathematical notion of networks is easy to derive.

Definition 1 A *network* is defined as a finite set $\mathcal{V}$ of nodes, or vertices, together with a set $\mathcal{E} \subset \mathcal{V} \times \mathcal{V}$ of links, or edges. The *degree* of a vertex $v \in \mathcal{V}$ is the number of vertices $w \in \mathcal{V}$ with $(w, v) \in \mathcal{E}$ (called the outdegree) plus the number of vertices $w \in \mathcal{V}$ with $(v, w) \in \mathcal{E}$ (called the indegree). Two vertices $v, w \in \mathcal{V}$ are *connected* if there exist finitely many vertices $v = v_0, v_1, \dots, v_n = w$ such that for every $i \in \{1, \dots, n\}$ we have $(v_{i-1}, v_i) \in \mathcal{E}$ or $(v_i, v_{i-1}) \in \mathcal{E}$. This defines an equivalence relation on $\mathcal{V}$ and therefore a partition of the set $\mathcal{V}$ of vertices into connected components.

At the beginning of the current millennium scientists from a variety of backgrounds have empirically observed features that many real networks have in common and they have suggested that the same basic principles determine the structure of these networks. The most notable of these features are the following:

- *Power law degree distribution.* In many networks the proportion of vertices having degree k is of the order $k^{-\tau}$, for some exponent $\tau \geq 1$, when the number of nodes is sufficiently large relative to k. Moreover, the power-law exponent τ has been identified as a crucial characteristic of the global network topology. Networks with a power law degree distribution are sometimes also called *scale-free*.
- *Existence of hubs.* In some networks there are a small number of highly connected nodes, which are pivotal in the sense that they are member to many of the shortest paths in the network. Their function is, loosely speaking, to hold the network together. As a result the global topology of the network is on the one hand *robust* under random removal of nodes, but on the other hand *highly vulnerable* under targeted removal of nodes, i.e. removal of the hubs.
- *Clustering.* Edges in large networks are typically not independent. For example, if some node has links to two other nodes, this increases the chance that there exists a link between these two nodes. This is sometimes crudely measured in terms of the clustering coefficient, which gives the proportion of pairs of edges $(u, v), (u, w) \in \mathcal{E}$ for which $(v, w) \in \mathcal{E}$. Loosely speaking, the clustering effect becomes manifest in a clustering coefficient which is not decaying with the network size.

- *Small world phenomenon.* This means that the distance between two randomly chosen nodes, and sometimes also the overall *diameter* of the network, is small. This phenomenon was first observed in social networks and is often confirmed by anecdotal evidence. For example it is said that in Great Britain nobody is further than five handshakes away from the Queen. Mathematically this means that in a network with n vertices, the typical distances are of order $\log n$, and in some cases even of order $\log\log n$.

A mathematical theory of such networks necessarily relies on models which are *probabilistic* in order to be able to remove unnecessary local detail from the picture, and *asymptotic* in the number of nodes, in order to capture effects due to the large size of the networks. The described features are however typically *not* present in the objects which were in the focus of twentieth century random graph theory. In particular, the much studied Erdős–Rényi graphs have empirical distributions converging in a strong sense to a Poisson distribution, which has exponentially decaying tails at infinity, have no hubs and exhibit no clustering effects.

The call for models of networks which have the desired properties was initially answered by some classes of models which were specifically constructed to possess at least one of these features. The most studied models of this type are

- *The configuration model.* Starting point for this model, which was first introduced by Bender and Canfield in [2], is a finite sequence $d_1, \ldots, d_n$ of nonnegative integers. The ith vertex is then given degree d_i and d_i 'half-edges' are drawn starting in the vertex i. Half-edges are matched uniformly at random with some small modification to avoid multiple edges and unmatchable half-edges. The configuration models with power-law degree sequences are often used to investigate the dependence of quantities like average distances on the power-law exponent, see e.g. [22].
- *The random intersection graphs.* Each vertex is assigned a set of features and two vertices are connected by an edge if they have a feature in common. This model, first studied by Singer [17], is designed to have the clustering features of real networks but fails to have a power-law degree distribution, see [18].
- *The small-world graphs.* In this model, first introduced by Watts and Strogatz in [23], one starts with a regular graph consisting of n cyclically arranged vertices, which are all connected by an edge to their k nearest neighbours. This graph is then successively modified, replacing each edge (v, w) with a small probability p by an edge linking v to a vertex uniformly chosen at random. Watts and Strogatz argue that, for intermediate values of p, the resulting graph is highly clustered and has the small world property.

Neither of these models offer a convincing *explanation* how the specific features of large networks arise. This however, in our opinion, should be one of the main goals of random network theory. Probably the best available explanation, and certainly the most studied one, is the *preferential attachment paradigm*, which we introduce in the next section.

2 The Preferential Attachment Paradigm

The ground-breaking idea of Barabási and Albert [1] was to base a network model on two simple principles: (i) networks are built dynamically by adding vertices and edges successively, and (ii) new vertices prefer to be attached to existing vertices which already have a high degree in the existing network. Krapivsky, Redner and Leyvraz [13] suggested that the strength of this preference can be modulated by a function $f\colon\{0,1,2,\dots\}\to(0,\infty)$ in the sense that the probability of a new vertex being linked to an existing vertex is proportional to the function f applied to its degree. This allows some freedom in the actual definition of the model, for example by varying the initial graph, the number of edges established when a new vertex is created or the dependence between those edges. It is, however, often argued that the qualitative features of the resulting network should *not* depend on the details of the definition, but only on the nature of the attachment function f.

Barabási and Albert [1] and their followers argue that, by using a *linear* function f of the current degree, we obtain networks whose degree distribution follows a power law. When f is *superlinear* the behaviour is more extreme and it is shown by Oliveira and Spencer [15] that a dominant vertex emerges, which attracts a positive proportion of all future edges. After n steps, this vertex has degree of order n, while the degrees of all other vertices remain bounded. In the most extreme cases eventually all vertices attach to the dominant vertex. The behaviour of the model for superlinear attachment function f is, of course, not in line with the structure of real networks. Therefore the focus of our project is on *sublinear*, or more precisely *concave*, attachment functions f. This allows us to study the transitions between the case of linear functions f, corresponding to the original suggestion of Barabási and Albert on the one hand, and constant functions f, corresponding to a complete switch–off of the preferential treatment of high degrees and hence behaviour analogous to the classical Erdős–Rényi graphs on the other hand. The main aim of our research is to identify the boundaries between the different types of behaviour in this class of models.

We choose a variant of the model which attaches every new node to a random number of existing nodes in a way which allows maximal independence between edges.

Definition 2 For any $0\le\gamma<1$ we call a concave function $f\colon\{0,1,2,\dots\}\to(0,\infty)$ with $f(0)\le 1$ and

$$\Delta f(k) := f(k+1) - f(k) \le \gamma \quad \text{for all } k\ge 0,$$

a γ*-attachment rule*, or simply *attachment rule*. Observe that any f satisfying these conditions is increasing with $f(k)\le k+1$ for all $k\ge 0$.

Given an attachment rule f, we define a growing sequence $(\mathcal{G}_n)_{n\in\mathbb{N}}$ of random networks by the following iterative scheme:

- the network $\mathcal{G}_1$ consists of a single vertex (labelled 1) without edges,
- at each time $n\ge 1$, given the network $\mathcal{G}_n$, we add a new vertex (labelled $n+1$) and

- insert for each old vertex $m \le n$ independently a directed edge $(m, n+1)$ with probability
$$\frac{f(\text{indegree of } m \text{ at time } n)}{n},$$
to obtain the network $\mathcal{G}_{n+1}$.

Remark 1 Edges in the random network $\mathcal{G}_n$ are dependent if they point towards the same vertex and independent otherwise. Formally we are dealing with directed networks, but indeed, by construction, all edges are pointing from the younger to the older vertex, so that the directions can trivially be recreated from the undirected (labelled) graph. All the notions of connectedness, which we discuss in this paper, are based on the *undirected* networks.

In the following sections we will survey the results obtained in [8–10] on this model. We will give brief sketches of the proofs, which are intended to give a flavour of the breadth of the methods used, and can be skipped by more casual readers.

3 Empirical Degree Distributions

We start by testing when our model has a power law degree distribution. To this end we denote by $\mathcal{Z}[m, n]$, for $m, n \in \mathbb{N}$, $m \le n$, the indegree of the mth vertex after the insertion of the nth vertex, and by $X_k(n)$ the proportion of nodes of indegree k at time n, that is
$$X_k(n) = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} \mathbf{1}\{\mathcal{Z}[i, n] = k\}.$$

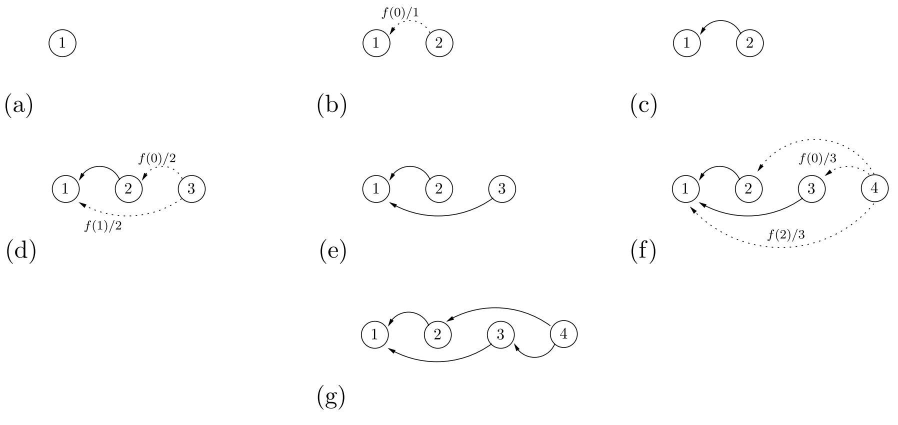


Fig. 1 (**a**) We start with a single vertex labelled 1, (**b**) then the vertex labelled 2 is introduced and linked to 1 with probability $f(0)/1$. (**c**) Suppose this link is established, then (**d**) a vertex labelled 3 is introduced and attached to vertex 1 with probability $f(1)/2$ and to vertex 2 with probability $f(0)/2$. (**e**) Suppose only the former link is established, then (**f**) a vertex labelled 4 is introduced and attached to vertex 1 with probability $f(2)/3$ and to vertex 2,3 with probability $f(0)/3$. Figure (**g**) shows the network after four steps

The random probability vector $X(n) = (X_k(n) \colon k \in \mathbb{N} \cup \{0\})$ is called the *empirical indegree distribution*. Our first theorem establishes convergence.

Theorem 1 (Asymptotic empirical indegree distribution, see Theorem 1.1(a) in [8]) *Let*

$$\mu_k = \frac{1}{1+f(k)} \prod_{l=0}^{k-1} \frac{f(l)}{1+f(l)} \quad \textit{for } k \in \mathbb{N} \cup \{0\},$$

which is a sequence of probability weights. Then, almost surely,

$$\lim_{n\to\infty} X(n) = \mu$$

in total variation norm.

Remark 2 Rudas et al. in [16] discuss a preferential attachment model in which every new vertex is connected to *exactly one* existing vertex chosen with a probability proportional to a function $w \colon \mathbb{N} \cup \{0\} \to (0, \infty)$ of its indegree. The asymptotic indegree distribution they obtain coincides with ours if f is chosen as an appropriate multiple of w.

Before discussing the implications of this result further we have a look at the outdegrees. Note first that, while the indegree of a vertex is dynamically changing as the network grows, the outdegree is fixed at the moment the vertex is introduced into the graph. The actual distribution of the outdegree of a vertex given the network at the time of its introduction depends on the empirical degree distribution of this network. Fortunately, this random distribution converges almost surely to a simple deterministic probability distribution.

Theorem 2 (Asymptotic outdegree distribution, see Theorem 1.1(b) in [8]) *The conditional distribution of the outdegree of the* $(n+1)$*st incoming node given the graph at time n converges almost surely in the total variation norm to the Poisson distribution with parameter*

$$\lambda := \int f \, d\mu < \infty,$$

where μ *is the asymptotic indegree distribution defined in Theorem 1.*

Remark 3 As the outdegree distribution of vertices is asymptotically Poissonian and therefore very light-tailed, it is the asymptotic empirical *indegree* distribution that determines the nature of our network. For example, the question whether a network has power-law behaviour can be decided from the asymptotic indegree distribution μ.

Example 1 Suppose $f(k) = \gamma k + \beta$ for fixed $\gamma, \beta \in (0, 1]$ and for all $k \in \mathbb{N} \cup \{0\}$. Then the asymptotic empirical indegree distribution can be expressed in terms of the

Γ-function,

$$\mu_k = \frac{1}{\gamma} \frac{\Gamma(k+\frac{\beta}{\gamma})\Gamma(\frac{\beta+1}{\gamma})}{\Gamma(k+\frac{1+\beta+\gamma}{\gamma})\Gamma(\frac{\beta}{\gamma})}.$$

By Stirling's formula, $\Gamma(t+a)/\Gamma(t) \sim t^a$ as t tends to infinity. Hence,

$$\mu_k \sim \frac{\Gamma(\frac{\beta+1}{\gamma})}{\gamma\Gamma(\frac{\beta}{\gamma})} k^{-(1+\frac{1}{\gamma})}, \quad \text{as } k \to \infty. \tag{1}$$

This is in line with earlier results for linear attachment functions, see Katona and Móri [12]. For a class of models where new vertices connect to a fixed number m of old ones chosen with a probability proportional to their degree plus a constant $a > -m$, Bollobás et al. [5], Móri [14] and van der Hofstad [20] obtain analogues of Theorem 1 with degree sequences (μ_k) of order $k^{-(3+a/m)}$. The tail behaviour of these models thus coincides if

$$\gamma = \frac{1}{2+a/m}.$$

Example 2 Suppose $f(k) \sim \gamma k^\alpha$, for $0 < \alpha < 1$ and $\gamma > 0$, then a straightforward analysis yields that

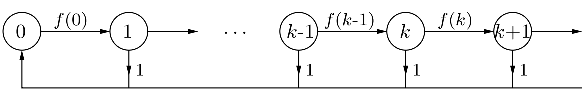
$$\log \mu_k \sim -\sum_{l=1}^{k+1} \log(1+(\gamma l^\alpha)^{-1}) \sim -\frac{1}{\gamma}\frac{1}{1-\alpha}k^{1-\alpha}.$$

Hence the asymptotic degree distribution has stretched exponential tails. In some cases of real networks this type of tails, rather than power-law behaviour, can be justified.

Sketch of proof Theorems 1 and 2 are not hard to prove. We can construct an inhomogeneous Markov chain such that at time n the state of the chain is the indegree of a uniformly chosen vertex of $\mathcal{G}_n$. Indeed, this chain starts with $X_1 = 0$, and if $X_n = k$ we pick

$$X_{n+1} = \begin{cases} k+1 & \text{with probability } \frac{f(k)}{n}\frac{n}{n+1}, \\ k & \text{with probability } (1-\frac{f(k)}{n})\frac{n}{n+1}, \\ 0 & \text{with probability } \frac{1}{n+1}. \end{cases}$$

For large times the chain can be approximated by the homogeneous continuous-time Markov chain given by the following diagram:



It is easily checked that the probability distribution $(\mu_k : k \geq 0)$ is the invariant distribution of this continuous-time Markov chain and the *expected* empirical indegree distribution converges to $(\mu_k : k \geq 0)$. An application of Chernoff's inequality shows that this convergence extends to the empirical indegree distributions themselves, proving Theorem 1.

To understand Theorem 2 we observe that, given $\mathcal{G}_n$, the outdegree of vertex n is the sum of n independent Bernoulli variables with individual means going to zero uniformly and overall mean $\int f\, dX(n)$. Hence it converges in distribution to a Poisson random variable with mean $\lim \int f\, dX(n)$, if this limit exists. It remains to use a (slightly technical) majorisation argument to show that $\lim \int f\, dX(n) = \int f\, d\mu$, where $\mu = \lim X(n)$ by Theorem 1. $\square$

4 Existence of a Perpetual Hub

In this section we ask whether the network has a hub in the following sense.

Definition 3 A vertex m is a *perpetual hub* if there is a time $N \geq m$ such that m is the vertex of maximal indegree in the network $\mathcal{G}_n$ for all times $n \geq N$.

The existence of a perpetual hub shows that there is a single dominant vertex in the network, though this vertex is a hub in a much weaker sense than that described in the introduction. This problem allows us to identify an interesting phase transition in the behaviour of preferential attachment networks.

Theorem 3 (Existence of a perpetual hub, see Theorem 1.5 in [8]) *A perpetual hub exists almost surely, if and only if*

$$\sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{f(k)^2} < \infty.$$

Otherwise, the time of birth (or, in other words, the label) of any vertex of maximal indegree in $\mathcal{G}_n$ tends to infinity in probability, as n goes to infinity.

Example 3 For special choices of f a much finer analysis of the behaviour of the vertex $m(n)$ of maximal indegree at time n is possible using large deviations theory. Let us assume, for example, that

$$f(k) \sim c\, k^{\alpha} \quad \text{for some } \alpha < \frac{1}{2},$$

which by Theorem 3 implies that no perpetual hub exists. Then, in probability,

$$\log m(n) \sim \frac{1}{2} \frac{(1-\alpha)^{\frac{1-2\alpha}{1-\alpha}}}{(1-2\alpha)c^{\frac{1}{1-\alpha}}} \times (\log n)^{\frac{1-2\alpha}{1-\alpha}},$$

and the maximal indegree $M(n)$ of the graph at time n satisfies

$$M(n) = (c(1-\alpha)\log n)^{\frac{1}{1-\alpha}} + (1+o(1))\frac{1}{2}\frac{1-\alpha}{1-2\alpha}\log n.$$

Here the first summand is the typical indegree of the first vertex at time n, and the second summand a positive correction due to the choice of the vertex with maximal indegree. This example is derived from Proposition 1.18 in [8].

Sketch of proof A major advantage of the setup in our model is that the evolution of the indegrees of the vertices are independent and relatively simple. In particular, when we rescale time as

$$\Psi(n) = \sum_{j=1}^{n-1} \frac{1}{j} \sim \log n \quad \text{for } n \in \mathbb{N},$$

and the indegrees as

$$\Phi(k) = \sum_{j=0}^{k-1} \frac{1}{f(j)} \quad \text{for } k \in \mathbb{N} \cup \{0\},$$

then a law of large numbers applies and shows that, for every $m \in \mathbb{N}$, we have

$$\lim_{n\to\infty} \frac{\Phi(\mathcal{Z}[m,n])}{\Psi(n)} = 1 \quad \text{almost surely.}$$

Moreover, denoting $\pi(t) = n$, where $n \in \mathbb{N}$ is maximal with $\Psi(n) \le t$, we can write the evolution of the indegrees in the new scale

$$Z[s,t] = \Phi(\mathcal{Z}[\pi(s),\pi(t)]) \quad \text{if } t \ge s \ge 0.$$

The fluctuations

$$M_s(t) = \begin{cases} 0 & \text{if } 0 \le t \le s, \\ Z[s,t] - (\Psi(\pi(t)) - \Psi(\pi(s))) & \text{if } t \ge s, \end{cases}$$

define a martingale. By estimating its quadratic variation process we see that this martingale converges almost surely if and only if the series in Theorem 3 converges.

First suppose the series converges. Then $M_0(t)$ converges to a finite limit, say $M[1]$, which means that the scaled indegree of the vertex labelled 1 at time $n \ge 1$ is

$$\Psi(n) + M[1] + o(1).$$

Now look at any competing vertex, say with label m, and note that the martingale $M_s(t)$ converges to a finite limit, say $M[m]$. Hence, at time $n \ge m$ its scaled indegree is

$$\Psi(n) - \Psi(m) + M[m] + o(1)$$

and in order to have a higher indegree than the first vertex for more than just a finite number of times, the martingale limit associated with vertex m needs to satisfy $M[m] \geq \Psi(m) + M[1]$. We see that the summand $\Psi[m]$ acts as a 'handicap', which is the larger the later a particle is born. A technical a-priori estimate ensures that there is a (random) threshold $M \in \mathbb{N}$ such that vertices born after time M can no longer compete. We then show that the distributions of the martingale limits have no atoms, which ensures that there is a unique vertex $m \in \{1, \dots, M\}$ maximising $M[m] - \Psi(m)$, and this vertex is therefore the perpetual hub.

Now suppose that the series does not converge. By the martingale central limit theorem, for any label m and $s = \Psi(m)$, the martingale $(M_s(t) : t \geq 0)$ satisfies

$$\left(\frac{1}{\sqrt{T}} M_s(\phi_{Tt}^{-1}) : t \geq 0 \right) \quad \Longrightarrow \quad (W_t : t \geq 0),$$

where convergence is in law on the Skorokhod space, the process on the right is standard Brownian motion and

$$\phi_t = \int_0^{\Phi^{-1}(t)} \frac{1}{f(\lfloor u \rfloor)^2} \, du,$$

is scaling independent of the choice of m. This implies that also

$$\left(\frac{1}{\sqrt{T}} (Z[0, \phi_{Tt}^{-1}] - Z[s, \phi_{Tt}^{-1}]) : t \geq 0 \right)$$

converges to Brownian motion, and thus changes sign infinitely often. Hence for every pair of vertices, the lead in the competition for the highest indegree changes hands infinitely often, and no vertex can be a perpetual hub. □

5 Existence of a Giant Component

We now address the question of connectedness in our network.

Definition 4 Denote by $\mathcal{C}_n$ the largest connected component in the network at time n (as defined in Definition 1). We say that *a giant component exists* in the network if there exists $p > 0$ such that

$$\lim_{n \to \infty} \frac{1}{n} \# \mathcal{C}_n = p \quad \text{in probability.}$$

Note that not the existence of the limit is the crucial part in this definition, but the fact that the largest connected component comprises a *positive fraction* of the nodes.

In network models where a new vertex establishes an edge to at least one old vertex, the entire network is connected. In analogy to the Erdős–Rényi model, we also expect in relatively homogeneous network models that if the mean number of edges per vertex exceeds one, there exists a giant component. We will see in Example 4 below that this is indeed the case in our model. If however the expected number of

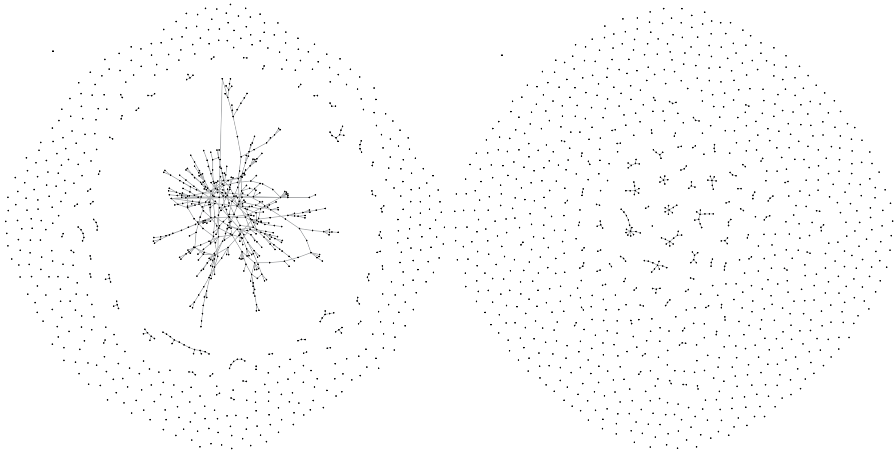


Fig. 2 Simulation of the network with $f(k) = \frac{1}{2}\sqrt{k} + x$, for $x = \frac{2}{5}, \frac{1}{10}$ and 1000 vertices, generated using the *Network Workbench Tool*, see [19]. *On the left*, the giant component is displayed in the centre surrounded by the smaller components. *On the right*, no giant component exists

edges per vertex is less than one, in general the question of existence of a giant component becomes very subtle, in particular in preferential attachment models where the principles underlying the construction are beneficial to the global connectivity. Before stating our most general result on the existence of a giant component, we look at the linear case $f(k) = \gamma k + \beta$, in which we obtain an explicit answer.

Theorem 4 (Existence of a giant component: linear case, see Proposition 1.2 in [9]) *If $f(k) = \gamma k + \beta$ for some $0 \le \gamma < 1, 0 < \beta \le 1$ then there exists a giant component if and only if*

$$\gamma \ge \frac{1}{2} \quad or \quad \beta > \beta_{\text{crit}} := \frac{(\frac{1}{2} - \gamma)^2}{1 - \gamma}.$$

Remark 4 This result corresponds to the following intuition: If $\gamma \ge \frac{1}{2}$ the preferential attachment is sufficiently strong to establish a giant component in the network for purely topological reasons and regardless of the edge density. However if $\gamma < \frac{1}{2}$ then the preferential attachment is weak and a giant component exists only if the edge density is large enough, i.e. if β exceeds the critical value β_{crit}.

The formulation of the result for the nonlinear case requires the study of some operators, whose precise rôle in the network will become apparent in the sketch of the proof. For the formal definition we use a pure birth Markov process $(Z_t : t \ge 0)$ started in zero with generator

$$Lg(k) = f(k)\Delta g(k),$$

which means that the process leaves state k with rate $f(k)$. Given a suitable parameter $0 < \alpha < 1$ we define a linear operator A_α on the Banach space $\mathbf{C}(\mathcal{S})$ of continuous, bounded functions on $\mathcal{S} := \{\ell\} \cup [0, \infty]$, by

$$A_\alpha g(\tau) := \int_0^\infty g(t)\, e^{\alpha t}\, d\mathsf{M}(t) + \int_0^\infty g(\ell)\, e^{-\alpha t}\, d\mathsf{M}^\tau(t),$$

where increasing functions M, resp. M^τ, $\tau \in \mathcal{S}$ are given by

$$\begin{aligned} \mathsf{M}(t) &= \int_0^t e^{-s}\mathbb{E}[f(Z_s)]\, ds, \qquad \mathsf{M}^\ell(t) = \mathbb{E}[Z_t], \\ \mathsf{M}^\tau(t) &= \mathbb{E}[Z_t \mid \Delta Z_\tau = 1] - \mathbf{1}_{[\tau,\infty)}(t) \quad \text{for } \tau \in [0,\infty), \\ \mathsf{M}^\infty(t) &= \lim_{\tau\to\infty} \mathsf{M}^\tau(t). \end{aligned}$$

If A_α is well-defined it is a compact operator. We denote by $\mathcal{I}$ the set of parameters where this is the case, and note that it is an open (but possibly empty) subinterval of $(0, 1)$.

Theorem 5 (Existence of a giant component, see Theorem 1.1 in [9]) *A giant component exists if and only if for all $\alpha \in \mathcal{I}$ the spectral radius $\rho(A_\alpha)$ exceeds one.*

Remark 5 Observe that the criterion above holds when $\mathcal{I} = \emptyset$.

The drawback of Theorem 5 is that the general criterion for existence of a giant component is infinite-dimensional. However, at what appears to be a small prize in accuracy we can replace it by explicit, finite-dimensional necessary or sufficient criteria. The criterion for existence in the following theorem is very accurate, but the criterion for nonexistence is quite crude. It should suffice to give a first impression.

Theorem 6 (Sufficient/necessary criteria, derived from Proposition 1.9. in [9]) *If*

$$\sum_{k=0}^{\infty} \prod_{j=0}^{k} \frac{f(j)}{\frac{1}{2} + f(j)} > \frac{1}{2},$$

then there exists a giant component. However, if

$$\sum_{k=0}^{\infty} \prod_{j=0}^{k} \frac{f(j+1)}{\frac{1}{2} + f(j+1)} \le \frac{1}{2},$$

then there exists no giant component.

Example 4 If the asymptotic mean outdegree of a vertex in our network is at least $\frac{1}{2}$, and hence the asymptotic mean degree per vertex is at least one, a giant component exists. Indeed, by Theorem 2, the asymptotic mean outdegree distribution of a vertex equals

$$\langle f, \mu \rangle = \sum_{k=0}^{\infty} \prod_{l=0}^{k} \frac{f(l)}{1 + f(l)},$$

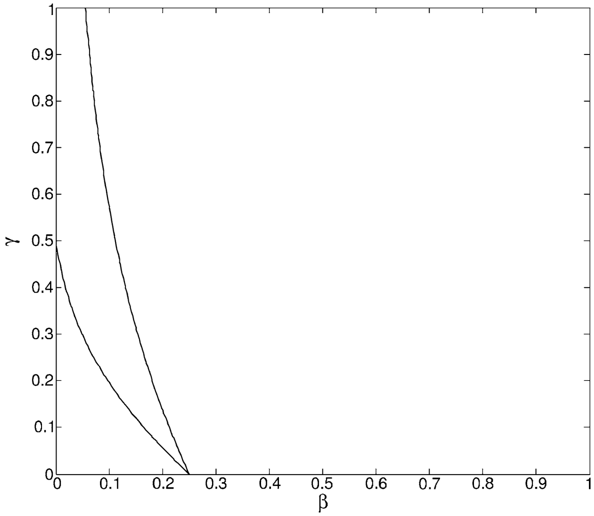


Fig. 3 For the attachment function $f(k) = \gamma\sqrt{k} + \beta$ we are interested in the boundary between the phase of nonexistence and the phase of existence of the giant component in the (β, γ)-plane. The figure shows a lower and upper bound for this boundary, using the criteria of Theorem 6

and hence the assumption implies

$$\sum_{k=0}^{\infty}\prod_{l=0}^{k}\frac{f(l)}{\frac{1}{2}+f(l)} > \sum_{k=0}^{\infty}\prod_{l=0}^{k}\frac{f(l)}{1+f(l)} \geq \frac{1}{2},$$

so that a giant component exists by Theorem 6.

Sketch of proof The key step is to explore the neighbourhood of a vertex in the network. Starting from a vertex v chosen uniformly from all vertices, we consider all the vertices which are connected to v by a single edge as the offspring of v. For each offspring vertex, we consider the vertices other than v which are connected to it by a single edge as its offspring, and for a while we can go on without creating a circle, describing the local neighbourhood of v by a tree. The key step in the proof is to define a *coupling* of this tree with the genealogical tree of a branching random walk, called the *idealised neighbourhood tree*, in such a way that the probability that the two trees match up to the occurrence of one of three stopping events explained below converges to one. The three stopping events are

(A) the number of vertices discovered exceeds a threshold value,
(B) a very old vertex is discovered, and
(C) there are no more vertices left to discover.

The local nature of the coupling allows us only to use thresholds of order $\log n$. Stopping in event (A) ensures that vertex v is in a component of at least threshold value, as does stopping in event (B), as a rough a-priori estimate shows that sufficiently old vertices are always in components exceeding the threshold size. Stopping in event (C), however, ensures that v is not in such a component. Denoting by $C_n(v)$ the size of the connected component of $\mathcal{G}_n$ containing v, we thus infer that, as $n \uparrow \infty$, we have

$$\mathbb{E}\Bigg[\frac{1}{n}\sum_{v=1}^{n}\mathbf{1}\{C_n(v) \text{ exceeds threshold}\}\Bigg] \sim \mathbb{P}(\text{coupling ends in (A) or (B)}).$$

A (tricky) variance estimate ensures that we can omit the expectation on the left and keep the equivalence with probability going to one. We use this to obtain information about the giant component using a technique called *sprinkling*: if a sufficiently large proportion of vertices is contained in medium sized components, then for a slightly increased attachment function these vertices are all connected. Roughly speaking we obtain from this that, with probability going to one, the proportion of vertices in the largest component of the network is asymptotically equivalent to the probability that our coupling ends in events (A) or (B).

To investigate the limit of the latter quantity we turn our attention to the idealised neighbourhood tree and first state its definition in terms of a multitype branching random walk. The particles in this process have *locations* on the real line and *types* in the space $\mathcal{S} = \{\ell\} \cup [0, \infty]$. The type of a particle is ℓ if its parent is located to its left, and otherwise it is the distance between the locations of the particle and its parent. The initial particle is of type ℓ with starting position $-X$, where X is standard exponentially distributed. Recall the definition of the pure birth Markov process $(Z_t : t \geq 0)$ and, for any $\tau \geq 0$, let $(Z_t^{(\tau)} : t \geq 0)$ be the same process conditioned to have a birth at time τ.

Each particle of type ℓ in position x generates offspring

- to its left with relative positions distributed according to a Poisson point process on $(-\infty, 0]$ with intensity measure $e^t \mathbb{E}[f(Z_{-t})]\, dt$;
- to its right with relative positions distributed like the jumps of the process $(Z_t : t \geq 0)$.

Each particle of type $\tau \geq 0$ in position x generates offspring

- to its left in the same manner as with a parent of type ℓ;
- to its right with relative positions distributed like the jumps of the process $(Z_t^{(\tau)} - \mathbf{1}_{[\tau,\infty)}(t) : t \geq 0)$.

Note that in this branching random walk every particle has finite offspring to the left, but *infinite* offspring to the right. The idealised neighbourhood tree arises when particles in the branching random walk (and all their descendants) are killed when they are located to the right of the origin.

It is not hard to figure out how this branching random walk arises as a limit of the local neighbourhoods in our network. Representing the location of a vertex $m \leq n$ at time n as $\Psi(m) - \Psi(n)$, where Ψ is the function used to rescale time in Sect. 4, we obtain that the initial vertex v, chosen uniformly from $\{1, \ldots, n\}$, is mapped onto $\Psi(v) - \Psi(n)$, which is asymptotically distributed like $-X$. The pure birth processes describing the relative positions of its offspring to the *left* has independent number of jumps in disjoint sets and hence converges in law to a Poisson point process on $(-\infty, 0]$ with intensity measure $e^t\, \mathbb{E}[f(Z_{-t})]\, dt$. The pure birth processes describing the relative positions of its offspring to the *right* converges in law to the process

$(Z_t : t \geq 0)$. The only relevant interference from previous exploration which influences the offspring distributions of later vertices is the existence of an edge connecting them to their parent vertex, if it is located to the right. It leads to an extra jump in the process $(Z_t : t \geq 0)$ at the relative position of the father, which influences the distribution but has to be discarded from the asymptotic offspring law.

The probability that our coupling ends in events (A) or (B) converges, as the network size goes to infinity, to the probability that the idealised neighbourhood tree is infinite. A giant component exists, if this 'survival' probability is positive, and in this case this is also the asymptotic proportion of vertices in the giant component. Techniques from branching random walks then enable us to give a necessary and sufficient criterion for a positive survival probability: These are based on introducing a score of $e^{-\alpha t}$ for a particle in the population located at position $t \in \mathbb{R}$, i.e. the further a particle is to the left the higher its score.

Loosely speaking, $A_\alpha \mathbf{1}_\sigma(\tau)$ is the expected score of the offspring of type σ by a particle of type τ located at the origin. If, for some α, the operator A_α has a spectral radius less than or equal to one, then the overall score of the population goes to zero, which means that the positions of all particles go to infinity and the killed process dies out. Conversely, if for all α the spectral radius of A_α exceeds one, this can be used to construct a particle whose location goes to $-\infty$, meaning that the killed process survives if the initial particle has started sufficiently far to the right. This characterises survival of the idealised neighbourhood tree in terms of the spectral radii of the operators $(A_\alpha : \alpha \in \mathcal{I})$, finishing the sketch of the proof of Theorem 5. $\square$

In the linear case, it turns out that conditioning $(Z_t : t \geq 0)$ on having a birth at time $\tau \geq 0$ and then subtracting $\mathbf{1}_{[\tau,\infty)}(t)$ leads to the same process for all values of τ. Hence one can collapse the typespace $\mathcal{S}$ to just two elements, corresponding to left and right descendants, and calculate the spectral radius of the operator A_α for any α explicitly, which leads to the result stated in Theorem 4. In the nonlinear case relatively rough upper and lower bounds for the spectral radius of A_α give the criteria in Theorem 6.

6 Robustness and Percolation

As the discussions of the previous section indicate, there are two different reasons why we may have a giant component: In some situations there exist a relatively small number of highly connected vertices linking up the vertices in the giant component of the network regardless of the overall edge density. In other situations there is a critical edge density marking the transition between nonexistence and existence of a giant component. Bollobás et al. [3] have shown that for their particular linear preferential attachment model the first situation prevails. To do this they use percolation, i.e. they randomly remove edges from the network, to reduce the edge density and then test whether there is still a giant component. If this is the case, they call the giant component robust. In this section we will perform this test of robustness for our model and obtain a full and explicit characterization of the robust case.

Definition 5 For a fixed parameter $0 < p < 1$, remove every edge in the network independently with probability $1 - p$ and call the resulting network the *percolated network*. We say that the giant component in a network is *robust*, if, for every $0 < p < 1$, the percolated network has a giant component.

Theorem 7 (Robustness, see Theorem 1.5 in [9]) *The giant component in the network is robust if and only if*

$$\inf_{n\in\mathbb{N}} \Delta f(n) \geq \frac{1}{2}.$$

In the non-robust case we can identify the critical percolation parameter in terms of the spectral radii of the operators $(A_\alpha : \alpha \in \mathcal{I})$.

Theorem 8 (Percolation, see Remark 1.6 in [9]) *The percolated network has a giant component if and only if the percolation parameter satisfies*

$$p > \frac{1}{\min_{\alpha\in\mathcal{I}} \rho(A_\alpha)}.$$

Remark 6 In the linear case $f(k) = \gamma k + \beta$ the network is robust if and only if $\gamma \geq \frac{1}{2}$. Moreover the percolated network has a giant component if and only if

$$p > \left(\frac{1}{2\gamma} - 1\right)\left(\sqrt{1 + \frac{\gamma}{\beta}} - 1\right),$$

where the right had side has to be interpreted as $\frac{1}{4\beta}$ if $\gamma = 0$.

Sketch of proof As in the previous section we can couple the neighbourhood of a uniformly picked vertex in the percolated network and the percolated idealised neighbourhood tree, i.e. the component of the root in the remainder of the idealised neighbourhood tree when every edge is removed independently with probability $1 - p$. An argument similar to the one sketched in Sect. 5 shows that the percolated network has a giant component if and only if this tree is infinite, which is the case if and only if

$$p > \frac{1}{\min_{\alpha\in\mathcal{I}} \rho(A_\alpha)},$$

with the right hand side interpreted as zero if $\mathcal{I} = \emptyset$.

By Theorem 6, the value of the series

$$2\sum_{k=0}^{\infty}\prod_{j=0}^{k}\frac{f(j)}{\frac{1}{2} + f(j)}$$

is a lower bound for the minimal spectral radius. This series diverges if

$$\inf_{n\in\mathbb{N}} \Delta f(n) = \lim_{n\to\infty}\frac{f(n)}{n} \geq \frac{1}{2},$$

where the equality follows from concavity of f. Conversely, if $\inf_n \Delta f(n) < \frac{1}{2}$, the series

$$2\sum_{k=0}^{\infty}\prod_{j=0}^{k}\frac{f(j+1)}{\frac{1}{2}+f(j+1)}$$

converges. Again by Theorem 6 this series is an upper bound for the minimal spectral radius. Hence for small values of p the idealised neighbourhood tree fails to be infinite, and the network is not robust. □

7 Small Worlds

An analysis of the *small world phenomenon* for the given class of preferential attachment models is currently undertaken by Dereich, Mönch and Mörters in [10] and [11]. Recall that the distance of two vertices $v, w \in \mathcal{V}$ in a network with edge set $\mathcal{E} \subset \mathcal{V} \times \mathcal{V}$ is

$$\begin{aligned} d(v,w) = \min\{n \geq 0 \colon \exists v = v_0, v_1, \ldots, v_n = w \\ \text{with } (v_{i-1}, v_i) \in \mathcal{E} \text{ or } (v_i, v_{i-1}) \in \mathcal{E}\ \forall i\}. \end{aligned}$$

The investigation in [10, 11] is naturally concentrated on the case where a giant component exists, and focuses on the typical distance between vertices in the giant component. We expect the occurrence of three different regimes, depending on the strength of the preference in the attachment rule.

In the case of strongest preferential attachment we have found that typical distances in the random network are doubly logarithmic. Moreover it turns out that the constant in front of the log log-term depends only on the asymptotic growth of the attachment rule.

Theorem 9 (Ultrasmall networks, Theorem 1 in [10]) *If the attachment rule satisfies*

$$\gamma := \inf_{n \in \mathbb{N}} \Delta f(n) > \frac{1}{2},$$

and V, W are two vertices independently picked from the largest connected component in $\mathcal{G}_n$, then, for every $\varepsilon > 0$,

$$(4-\varepsilon)\frac{\log\log n}{\log\frac{\gamma}{1-\gamma}} \leq d(V,W) \leq (4+\varepsilon)\frac{\log\log n}{\log\frac{\gamma}{1-\gamma}},$$

with probability converging to one.

Remark 7 (a) Precisely the same asymptotic behaviour of the typical distance can be shown in a variety of different preferential attachment models, see [10]. This robustness of typical distances is in stark contrast to the situation for the *diameter* of the giant component, which heavily depends on modeling details. For example, in our model even in the regime of strongest preferential attachment the diameter is logarithmic in the number of nodes, but it is doubly logarithmic in the corresponding regime for the preferential attachment models studied by Dommers et al. [7].

(b) Doubly logarithmic typical distances are expected to hold essentially whenever the asymptotic degree sequence satisfies $\mu_k \asymp k^{-\tau}$ for $2 < \tau < 3$. In our model this is equivalent to $\gamma > \frac{1}{2}$ (recall formula (1) to see this in the case of linear f). This behaviour of typical distances is also confirmed for some other models, in particular the configuration model, see van der Hofstad et al. [22]. The crucial difference is that in these models the constant 4 in the precise result needs to be replaced by 2, and this corresponds to a different internal structure of short paths in the network. A full discussion of this interesting phenomenon will be given in [10].

Results for other regimes are at present still on a conjectural level and will be discussed in the forthcoming work [11]. We conjecture the existence of two further regimes:

- A regime of *weak* preference, which occurs when

$$\inf_{n\in\mathbb{N}} \Delta f(n) < \frac{1}{2}$$

  and which is characterised by the fact that typical distances in the giant component are *logarithmic* in the number of nodes. This case is similar to the configuration model in the case of power-law exponents $\tau > 3$ and all tails that are lighter than power-laws, see [6, 21]. A more detailed conjecture is that for vertices V, W picked independently from the largest connected component in $\mathcal{G}_n$ and every $\varepsilon > 0$,

$$\frac{1-\varepsilon}{\inf_{0<\alpha<1} \log \varrho(A_\alpha)} \log n \le d(V,W) \le \frac{1+\varepsilon}{\inf_{0<\alpha<1} \log \varrho(A_\alpha)} \log n,$$

  with probability converging to one.
- A *critical* regime, which occurs when

$$\inf_{n\in\mathbb{N}} \Delta f(n) = \frac{1}{2},$$

  in which very rich and complex behaviour of the typical distances in the giant component is possible, depending on the fine structure of f. We expect however that, for every $\varepsilon > 0$,

$$d(V,W) \le (1+\varepsilon)\frac{\log n}{\log\log n},$$

  with probability converging to one and that a corresponding lower bound holds in the linear case.

Some progress in these questions has been made in the linear case for different variants of the model by Bollobás and Riordan [4] and by Dommers et al. [7]. The set-up of our model appears to be more favourable and therefore one would hope to obtain more precise results covering also truly nonlinear cases.

8 Some Remarks on Clustering

The *clustering properties* of preferential attachment networks with a concave attachment rule also warrant a thorough discussion. Note that our model has nontrivial edge dependence: conditional on the existence of the edge $(v, w) \in \mathcal{E}$ we have an increased likelihood of the existence of edges of the form (v, w') for $w' \in \mathcal{V}$. But this does not lead to large clustering coefficients, which are too low compared to those empirically found in real networks. It can be suspected that while the preferential attachment paradigm leads to networks with macroscopic features that match those of the examples listed in the introduction rather closely, quantities relying strongly on the local neighbourhoods of vertices like the clustering coefficients may not be well represented in our model.

The natural solution to this problem is to enhance the preferential attachment model, for example by giving nodes characteristic features that influence the attachment of other nodes or by favouring attachment to nodes which are directly linked to vertices of high degree. This may well lead to richer models which are still within the scope of rigorous mathematical treatment. Needless to say that scientists have pursued this line already to some extent, using nonrigorous analysis as well as empirical and numerical studies. But a lot of very interesting rigorous mathematics remains still to be done on this question.

Acknowledgements We would like to thank Christian Mönch for providing Figs. 2 and 3 and for his permission to include unpublished joint results. The second author would like to thank EPSRC for support through an *Advanced Research Fellowship*.

References

1. Barabási, A.-L., Albert, R.: Emergence of scaling in random networks. Science **286**(5439), 509–512 (1999)
2. Bender, E.A., Canfield, E.R.: The asymptotic number of labelled graphs with a given degree sequence. J. Comb. Theory **24**, 296–307 (1978)
3. Bollobás, B., Riordan, O.: Robustness and vulnerability of scale-free random graphs. Internet Math. **1**, 1–35 (2003)
4. Bollobás, B., Riordan, O.: The diameter of a scale-free random graph. Combinatorica **24**, 5–34 (2004)
5. Bollobás, B., Riordan, O., Spencer, J., Tusnády, G.: The degree sequence of a scale-free random graph process. Random Struct. Algorithms **18**, 279–290 (2001)
6. Chung, F., Lu, L.: The average distances in random graphs with given expected degrees. Proc. Natl. Acad. Sci. USA **99**, 15879–15882 (2002)
7. Dommers, S., van der Hofstad, R., Hooghiemstra, G.: Diameters in preferential attachment models. J. Stat. Phys. **139**, 72–107 (2010)
8. Dereich, S., Mörters, P.: Random networks with sublinear preferential attachment: degree evolutions. Electron. J. Probab. **14**, 1222–1267 (2009)
9. Dereich, S., Mörters, P.: Random networks with sublinear preferential attachment: the giant component. arXiv:1007.0899 (2010)
10. Dereich, S., Mönch, C., Mörters, P.: Typical distances in ultrasmall random networks (2010, in preparation)
11. Dereich, S., Mönch, C., Mörters, P.: Random networks with sublinear preferential attachment: small worlds (2011, in preparation)
12. Katona, Z., Móri, T.F.: A new class of scale free random graphs. Stat. Probab. Lett. **76**, 1587–1593 (2006)

13. Krapivsky, P.L., Redner, S., Leyvraz, F.: Connectivity of growing random networks. Phys. Rev. Lett. **85**, 4629 (2000)
14. Móri, T.F.: On random trees. Studia Sci. Math. Hung. **39**, 143–155 (2002)
15. Oliveira, R., Spencer, J.: Connectivity transitions in networks with super-linear preferential attachment. Internet Math. **2**, 121–163 (2005)
16. Rudas, A., Tóth, B., Valkó, B.: Random trees and general branching processes. Random Struct. Algorithms **31**, 186–202 (2007)
17. Singer, K.B.: Random intersection graphs. Ph.D. thesis, Johns Hopkins University (1995)
18. Stark, D.: The vertex degree distribution of random intersection graphs. Random Struct. Algorithms **24**, 249–258 (2004)
19. Team, N.W.B.: Network workbench tool. Indiana University, Northeastern University, and University of Michigan, page http://nwb.slis.indiana.edu (2006)
20. van der Hofstad, R.: Random graphs and complex networks. In: Lecture Notes, Eindhoven (2009)
21. van der Hofstad, R., Hooghiemstra, G., van Mieghem, P.: Distances in random graphs with finite variance degrees. Random Struct. Algorithms **27**, 76–123 (2005)
22. van der Hofstad, R., Hooghiemstra, G., Znamenski, D.: Distances in random graphs with finite mean and infinite variance degrees. Electron. J. Probab. **12**, 703–766 (2007)
23. Watts, D.J., Strogatz, S.H.: Collective dynamics of 'small-world' networks. Nature **393**, 440–442 (1998)

Steffen Dereich is Professor of Probability at the Phillips-Universität Marburg. He received his Ph.D. from the Technische Universität Berlin in 2003. His research is devoted to the analysis of stochastic processes with a focus on complexity and numerical applications. A more recent line of research is the analysis of complex networks which he initially started as DFG-Research Fellow at the University of Bath in 2007.

Peter Mörters is Professor of Probability at the University of Bath. He received his Ph.D. from University College London in 1995 and his Habilitation from Universität Kaiserslautern in 2001. In 2001 he joined the University of Bath and in 2006 he was promoted to a personal chair. From 2005 to 2010 he was an EPSRC Advanced Research Fellow. His interests cover a broad range of probability theory, including fractal properties of stochastic processes, large deviations, stochastic processes in random environments and random networks. With Yuval Peres (Microsoft) he is the author of a graduate text book entitled "Brownian motion" (Cambridge University Press, 2010).

Jahresber Dtsch Math-Ver (2011) 113: 41–44
DOI 10.1365/s13291-011-0015-x

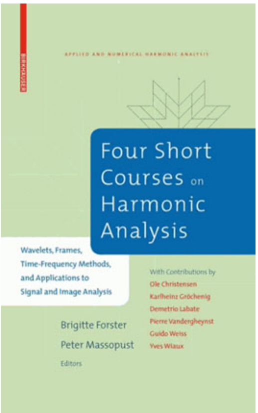
BUCHBESPRECHUNG

Brigitte Forster, Peter Massopust (eds.): "Four Short Courses on Harmonic Analysis"

Birkhäuser 2010, 249 pp.

Gitta Kutyniok

Online publiziert: 11. Februar 2011



Wir leben heutzutage in einer Welt, die von Daten beherrscht wird: Medizinische Daten, Telekommunikationsdaten, seismische Daten, astronomische Daten, und eine Vielzahl von anderen. Diese zu modellieren und Methodiken zu entwickeln, um diese effizient zu messen, zu analysieren, zu übertragen und zu speichern, stellt Mathematiker vor eine Reihe von hochinteressanten und schwierigen Problemen, deren Lösung oftmals die Entwicklung neuer mathematischer Theorien erfordert. Das Forschungsgebiet der Angewandten Harmonischen Analysis, in der das vorliegende Buch angesiedelt ist, kann als eines der zentralen Teilgebiete der Angewandten Mathematik angesehen werden, welches eine Vielzahl solcher Methodiken für sowohl kontinuierliche als auch digitale Daten – modelliert zum Beispiel als Funktionen oder Distributionen – liefert.

Die Geburtsstunde der Angewandten Harmonischen Analysis schlug schon im 18. Jahrhundert mit der Einführung der Fouriertransformation. Zunächst entwickelte sich die Harmonische Analysis in eine eher theoretische Richtung durch Betrachtung der Fouriertransformation auf lokalkompakten abelschen Gruppen, dann auf allgemeinen lokalkompakten Gruppen, welches das Forschungsgebiet der Abstrakten Harmonischen Analysis entstehen ließ. Im Bereich der Anwendungen entstand aber bald das Problem, dass die Fouriertransformation zwar Informationen über die vorhandenen Frequenzen in einem Signal liefert, allerdings keine lokalen Informationen enthält,

G. Kutyniok (✉)
Osnabrück, Deutschland
e-mail: kutyniok@math.uni-osnabrueck.de

geschweige denn fähig ist, Singularitäten zu erkennen. Zur Lösung dieser Problematik wurden in den 80ern Waveletsysteme eingeführt. Diese Systeme werden aus Dilatationen und Translationen einer Funktion erzeugt, und die assoziierte Wavelettransformation kann in der Tat hochgradig lokale Frequenzinformationen liefern. Die berühmte Arbeit von Daubechies von 1988 zu „Orthonormal bases of compactly supported wavelets" in Communications in Pure and Applied Mathematics, sowie ihr Buch „Ten Lectures on Wavelets" aus dem Jahre 1992 verhalfen der Wavelettheorie zum Durchbruch und legten den Grundstein für das heutzutage breite Anwendungsfeld von Wavelets unter anderem zur Lösung von elliptischen partiellen Differentialgleichungen oder dem Bilddatenkompressionsstandard JPEG2000. Diese Entwicklung etablierte gleichzeitig die Angewandte Harmonische Analysis als ein wichtiges Teilgebiet der Angewandten Mathematik.

Die Hauptmethodik der Angewandten Harmonischen Analysis ist die Verwendung eines zumeist an die betrachteten Daten – dies sind im Folgenden z. B. Funktionen – angepassten Darstellungssystems und die diesbezügliche Zerlegung der Daten. Diese Systeme werden normalerweise so konstruiert, dass deren Elemente den Fourierbereich in verschiedener Weise partitionieren, insbesondere in verschieden hohe Frequenzen, wodurch eine Multiskalenstruktur erreicht wind. Die hiermit berechneten Darstellungskoeffizienten werden dann für die Analyse und Kompression der Daten verwendet; natürlich muss auch sichergestellt sein, dass die Daten aus diesen Koeffizienten wieder vollständig zurückgewonnen werden können. Im Laufe der Zeit haben sich insbesondere die im Folgenden vorgestellten Teilgebiete herauskristallisiert, die verschiedene Aspekte dieser Methodik studieren. Hierbei spielen oft nicht nur Begrifflichkeiten und Techniken der Harmonischen Analysis eine Rolle, sondern auch der Approximationstheorie, Funktionalanalysis, Operatortheorie, Stochastik und mikrolokalen Analysis bis hin zur Numerischen Analysis und auch Optimierungstheorie.

Wavelettheorie. In der ‚klassischen' Wavelettheorie sind die meisten zentralen mathematischen Fragestellungen heutzutage bereits gelöst; dies gilt auch für das sehr verwandte Gebiet der Gabortheorie, welches sich mit der Zerlegung von Daten mittels Zeit-Frequenz-Systemen – auch als Gaborsysteme bezeichnet – bzw. der zugehörigen gefensterten Fouriertransformation befasst. Derzeitige Forschungsaktivitäten sind zumeist in Erweiterungen dieser zu finden, und ein zentrales Interesse besteht – motiviert durch Anwendungen – in der Entwicklung von Wavelets zur Analyse von Daten, die auf Mannigfaltigkeiten wie z. B. der Sphäre leben. Eine weitere aktive Forschungsrichtung beschäftigt sich mit der Waveletanalyse von hoch-dimensionalen Daten unter anderem gegeben auf Graphen; solche treten beispielsweise bei der Analyse und Organisation von Webseiten im Internet auf.

Geometrische Multiskalenanalysis. Multivariate Probleme sind typischerweise durch anisotrope – im Sinne von richtungsbezogene – Phänomene beherrscht, zum Beispiel Schockfronten in Lösungen von Transportgleichungen oder Kanten in Bildern. Allerdings liefern Wavelets nur optimale Approximationsraten des Fehlers der besten n-term Approximation von isotropen Phänomenen, welches durch die Tatsache illustriert wird, dass Waveletkoeffizienten Besovräume charakterisieren, diese Räume aber nicht fähig sind, geometrische Strukturen zu erkennen. Dieses Defizit von Waveletsystemen hat das Forschungsgebiet der geometrischen Multiskalenanalysis initiiert, welches sich die effiziente Analyse von multivariaten Daten, die geometrische Phänomene aufweisen, zum Ziel gesetzt hat. Die wohl bekanntesten hieraus entstandenen Darstellungssysteme sind zur Zeit Curvelets und Shearlets, wobei Shearlets den entscheidenden Vorteil haben, dass diese ein einheitliches Konzept für sowohl die kontinuierliche als auch die digitale Situation liefern, sowie aus Elementen mit kompakten Träger bestehen, also hochgradig lokalisiert ist.

Frametheorie. Oftmals ist eine Orthonormalbasis bei der Zerlegung von Daten nicht die beste Wahl, da diese nicht robust gegenüber Verlusten von einzelnen Koeffizienten ist. Ein weiteres Problem ist, dass eine Basis nur genau eine Zerlegung liefert, somit nicht die Möglichkeit bietet, eine ‚geeignetere‘ im Sinne von ‚wenigen‘ betragsmäßig großen Koeffizienten – heutzutage als ‚sparse‘ bezeichnet – zu wählen. Frames, die zuerst in Arbeiten von Duffin und Schaeffer um 1952 erwähnt wurden, sind vornehmlich redundante Darstellungssysteme, die stabile Zerlegungen – im Sinne von Normäquivalenz – von Vektoren aus Hilberträumen liefern. Die Frametheorie liefert heutzutage auf der theoretischeren Seite unter anderem wichtige Methodiken um die seit 1959 ungelöste Kadison-Singer-Vermutung aus der Operatortheorie anzugehen. Auf der angewandteren Seite erlauben Frames stabile, redundante Zerlegungen z. B. mit dem Ziel der robusten Datenübertragung. Ferner ist kürzlich eine Erweiterung des Framebegriffes, die sogenannten Fusion Frames, eingeführt worden, welche ein mathematisches Model für die verteilte Datenanalyse bieten.

Sparse Approximation/Compressed Sensing. Eine Vielzahl von Daten kann mit hoher Genauigkeit approximativ durch eine geringe Anzahl von nicht-verschwindenden Termen einer Basis oder eines Frames dargestellt werden; diese können somit ‚sparse approximiert‘ werden. Eine Anwendung hiervon ist die Kompression solcher Daten durch Speichern der wenigen nicht-verschwindenden Koeffizienten. Die Fähigkeit zu sparsen Approximationen wird heutzutage als neues Paradigma in der Datenanalyse und -verarbeitung gefeiert. Der Hauptgrund sind neue Resultate, die zeigen, dass für solche Daten nur sehr wenige lineare (zufällige) Messungen notwendig sind, um diese mittels ℓ_1-Minimierung vollständig rekonstruieren zu können. Diese Methodik wurde 2006 von Donoho als ‚Compressed Sensing‘ eingeführt (siehe auch die parallel erschienene Arbeit von Candes, Romberg und Tao) und hat ein neues Forschungsgebiet entstehen lassen, welches seitdem einen gleichsam kometenhaften Aufstieg verzeichnet.

Dictionary Learning. Es erscheint nur natürlich, die Frage nach besser den Daten angepassten Darstellungssystemen zu stellen, zielend auf sparsere Approximationen für eine spezielle Klasse von Daten. Beim Dictionary Learning wird ein Darstellungssystem mittels Testdaten gelernt, welches dann für die Analyse einer durch die Testdaten charakterisierten Klasse von Daten verwendet wird. Für Anwendungen sind diese Darstellungssysteme hochgradig effektiv; allerdings stehen diese Methodiken noch nicht auf festen mathematischen Füßen, und die Forschung in diesem spannenden Teilgebiet hat gerade erst begonnen.

Das vorliegende Buch besteht nun aus fünf Kapiteln, wovon das erste – von den Autoren verfasst – die mathematischen Grundlagen für die folgenden Kapitel bereitstellt, und die weiteren vier von führenden Experten basierend auf deren Vorträgen anlässlich einer Sommerschule geschrieben wurden. Diese vier ‚Short Courses‘ behandeln jeweils eine aktuelle Forschungsrichtung in der Angewandten Harmonischen Analysis, geben einen Überblick über die historische Entwicklung und präsentieren neuere Resultate.

Das einführende erste Kapitel stellt zunächst die wichtigsten Begrifflichkeiten und Resultate aus der Fourieranalyse vor und führt dann die gefensterte Fouriertransformation ein. In zwei weiteren Abschnitten wird die Wavelettransformation eingeführt, sowie ein kurzer Überblick über weitere Multiskalensysteme gegeben. Ein Student hat nach dem Lesen dieses Kapitels die notwendigen Grundlagen, um die folgenden vier ‚Short Courses' zu verstehen.

Der erste ‚Short Course' ist im Gebiet der Frametheorie anzusiedeln mit einem Hauptaugenmerk auf der Konstruktion von Frames. Der Autor Ole Christensen gibt zunächst eine Einführung in die Grundlagen der Frametheorie. Danach folgt ein kurzer Exkurs zu Gabor- und Waveletframes. Das Kapitel schließt mit neueren Forschungsergebnissen zu der Konstruktion von Gabor- und Waveletframes mittels B-Splines.

Im zweiten ‚Short Course' stellen Demetrio Labate und Guido Weiss das Konzept der ‚Composite Wavelets' als Erweiterung der Wavelettheorie vor. Sie zeigen auf, dass diese in der Tat einen wichtigen Beitrag zur geometrischen Multiskalenanalysis liefern, insbesondere da sie enge Bezüge zu Shearletsystemen aufweisen. Im letzten Abschnitt des Kapitels wird dann eine Einführung in die Shearlettheorie gegeben sowie die Fähigkeit von Shearlets diskutiert, sowohl Kanten in Bildern zu erkennen als auch optimal sparse Approximationen von anisotropen Phänomenen zu liefern.

Pierre Vandergheynst und Yves Wiaux sind die Autoren des dritten ‚Short Courses', welcher sich mit Theorie und Anwendungen von Wavelets auf der Sphäre befasst. Hierin werden zunächst Möglichkeiten der Definition einer Dilatation auf der Sphäre diskutiert, welches eine der Hauptschwierigkeiten der Definition von Wavelets auf der Sphäre darstellt. Anschließend werden zugehörge Algorithmen diskutiert, sowohl Zerlegungs- als auch Rekonstruktionsalgorithmen. Die Autoren schließen das Kapitel mit zwei Anwendungen aus dem Bereich der astronomischen sowie der medizinischen Datenanalyse.

Der vierte ‚Short Course' führt den Leser in den klassischen harmonisch analytischen Bereich der Banachalgebren, insbesondere des Wiener Lemmas. Karlheinz Gröchenig stellt hierin zunächst das klassische Wiener Lemma, welches Aussagen über absolut konvergente Fourierreihen trifft, sowie dessen Beweis vor. Anschließend diskutiert er verschiedene Variationen hiervon und schließt mit einer Anwendung auf die Theorie der drahtlosen Kommunikation.

Abschließend kann man sagen, dass sich das Werk für jeden empfiehlt, der sich einen Einblick in aktuelle Entwicklungen und Methoden in der Angewandten Harmonischen Analysis verschaffen möchte.

Jahresber Dtsch Math-Ver (2011) 113: 45–48
DOI 10.1365/s13291-011-0013-z

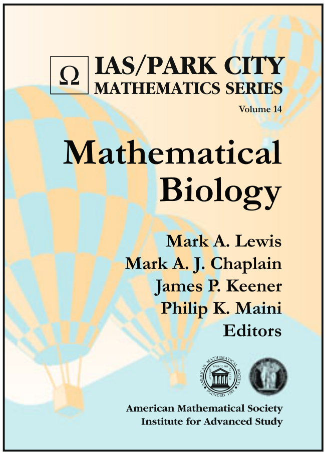
BUCHBESPRECHUNG

M.A. Lewis, M.A.J. Chaplain, J.P. Keener, P.K. Maini (eds.): "Mathematical Biology"

Am. Math. Soc., 2009, 398 pp.

Odo Diekmann

Published online: 9 February 2011



As with many other subjects, there are myriad ways to organise material for a course on mathematical biology. Neither a designated list of topics nor a best way to balance biological motivation/interpretation and mathematical methodology does exist. The background and interests of both the lecturer and the students are decisive factors when determining the structure of the course. Yet I recommend anyone who is planning to teach such a course (as well as anyone eager to obtain a glimpse of the subject) to consult this book. It offers a bird's-eye view of biochemical dynamics, spatial ecology, population dynamics, epidemiology of infectious diseases, qualitative descriptions of oscillators, tumour growth and neurodynamics. It nicely illustrates how, very often, mathematical models serve as thought experiments that, in a long and gradual process, enhance our understanding. It will appeal more to applications oriented mathematicians that want to learn about biology than to biologists that want to learn about mathematics (for those may be L.A. Segel's 'Modeling dynamic phenomena in molecular and cellular biology', Cambridge University Press, 1984, is still the best place to start). It offers inspiring examples of how to use analysis (in particular the theory of ODE and PDE) to gain insights in the way phenomena relate to underlying mechanisms. Somewhat surprisingly, it has hardly anything on offer for those who want to know how stochastic modelling of discrete objects is

O. Diekmann (✉)
Utrecht, The Netherlands
e-mail: O.Diekmann@uu.nl

used in a biological context (see for instance the book ‘Probability Models for DNA sequence evolution’ by R. Durrett, Springer, 2008, or the book ‘Chance in Biology: using probability to explore nature’ by M. Denny and S. Gaines, Princeton University Press, 2000).

In the introductory first chapter, Jim Keener starts out by explaining the bookkeeping of change, in particular the conservation law and the notion of flux. Concerning rates of creation/annihilation or, rather, transformation, a fundamental starting point is the Law of Mass Action, originating in the context of chemical reactions (but far more widely applicable). Next one may use time scale arguments (such as QSSA: Quasi-Steady-State-Approximation) to reduce the number of variables but still have a mechanistically interpretable nonlinear expression for the rate of change. The chapter next explains

– how bistability may lead to hysteresis and how understanding this phenomenon helps to obtain insights into quorum sensing of bacteria;
– how one can combine phase plane analysis and time scale arguments to understand oscillations in excitable systems and how this helps to obtain insights in the dynamics of calcium inside cardiac cells.

In the second chapter, Mark Lewis, Thomas Hillen and Frithjof Lutscher address the issue of population growth by way of spatial expansion, with special attention for situations with systematic movement, like streaming rivers (or, nearer to home, your own intestines). Here the fundamental concept, asymptotic speed of propagation, was developed by Don Aronson and Hans Weinberger in the seventies of the last century. They were inspired by earlier work of Fisher and KPP (Kolmogorov, Petrovsky, Piskounov) about (convergence to) travelling waves. Aronson and Weinberger showed that, under certain mild conditions, the asymptotic speed of propagation is exactly the minimal speed for which a travelling wave solution exists (a key point being that the latter is computable). Such results ignore the finiteness of the world, but Lewis et al. also discuss growth in finite domains where individuals perish upon crossing (a specific part of) the boundary. How large should such a domain be in order to support population growth? How does the critical domain size depend on the convection speed, i.e., the speed of the systematic movement? (If your intuition tells you that the answer should involve the propagation speed for the situation without convection, you may compliment yourself.)

In a long third chapter Jim Cushing provides a guided tour through stability and bifurcation in discrete time models for (st)age-structured populations, with attention for both field observations and lab experiments with flour beetles. The starter is a primer on deriving equations from first principles (which is, in fact, much more tricky in the discrete time setting; in continuous time, contributions to the rate of change are independent and can be added, while in discrete time there is no systematic procedure to disentangle the various effects). There are two main dishes: bifurcations and parameter estimation from actual data (the latter does in fact involve stochastic considerations about environmental and demographic noise and uses maximum likelihood estimation). And two desserts: periodically fluctuating environments and multi-species competition.

Since infectious diseases trouble man, there is both a need for forecasting and a wealth of data concerning past incidence. David Earn starts from a purely statistical analysis of time series and next introduces mechanistic elements into the description in order to unravel the driving force behind recurrent outbreaks of childhood diseases, like pre-vaccination measles. This reads like a nice detective story, with Schenzle, who pinpointed the influence of the school term system, in the role of Sherlock Holmes. (Incidentally, as ever so often the text suggests that the beautiful and celebrated 1927 paper of Kermack and McKendrick is about a simple system of three ODE; it isn't; it derives and analyses an 'infinitely' more general Volterra integral equation; the ODE system yields an equivalent description of a very special case; but somehow the general case was so much ahead of time that it got lost; still it is remarkable, ironic and sad that, despite a reprint in the Bulletin of Mathematical Biology, the most quoted paper in mathematical epidemiology is hardly ever read).

In the next chapter, Leon Glass presents himself as standing on the shoulders of giants like René Thom and Art Winfree when deriving qualitative understanding by investigating what restrictions topology puts to dynamics. The main subject is the resetting of the phase of an oscillator after perturbation and the main application is in cardiac dynamics. What is not discussed is how low-dimensional qualitative caricatures yield search images for dealing with the outcome of computational experiments with high-dimensional models that have the ambition to be quantitatively accurate. In fact, unless I missed it, the statement that pen and paper analysis of a caricature and simulation studies of a complicated model can reinforce each other and can TOGETHER lead to much more insight than any of the two separately, is not found in the entire book. Yet, implicitly, it pervades both this chapter and the book as a whole.

Like infectious diseases, cancer brings misery to man and therefore a tremendous experimental as well as mental effort is devoted to attempts to conquer it. In a tour de force Helen Byrne exhibits the recent and rapid development in mathematical modelling of tumour growth, including the trigger of vascularisation (angiogenesis). From ODE to PDE to multi-scale (the latter means that sub-models for processes at diverse spatial and time-scales are coupled, usually in a computer model). Although the challenge is enormous and the results are impressive, the reader is left in the dark concerning the impact of the modelling work on clinical practice?

Can the human brain understand its own functioning? Rather than going into the richness 'constructable' by a self-referential system (for this see/read Douglas Hofstadter's book 'I Am a Strange Loop'), Paul Bressloff concentrates in the last chapter on the signals that brain cells send to each other and how this leads to temporal as well as spatio-temporal patterns. So once more differential equations, excitability, oscillations, but now much attention for coupling (almost) identical units and an attempt to understand overall behaviour from the behaviour of its components. And once more the dual conclusion: there is much progress and yet we are nowhere near a compehensive understanding (note that it is NOT known how exactly information is encoded in spike trains! and neither is it known how exactly information is stored by way of reinforcement of connections in a network). Given this limitation, the chapter provides a very well structured and readable survey of a large body of literature. It provides a sort of beginners guide (the fact that chapters are independent of each other is both an advantage and a disadvantage: the reader interested in neuroscience does not have to consult the chapters by Keener and by Glass, yet the very same reader would have benefitted from doing so).

What is omitted? Too much to list! But it couldn't possibly have been different, biology is simply huge and one sometimes has to sacrifice breadth for depth. So let me just mention two subjects that came to my mind:

– Immunology (note that Helen Byrne briefly mentions that the immune system might be 'recruited' to help fighting a tumour). Some people say that, in terms of signal recognition and information processing, our immune system performs a more complicated task than our brain.
– Evolution. In 1973 T. Dobzhansky said: Nothing in biology makes sense except in the light of evolution. Yet no word about evolution in this book (incidentally, I have always found the ingenious angiogenesis process quite puzzling as cancer cells are doomed to die with their host; so it must somehow be a by-product of something that does make evolutionary sense).

All in all, however, I find this a delightful and illuminating book that provides excellent material for teaching a graduate course in applied mathematics, while simultaneously showing some of the mysteries, challenges and miracles that characterise the immense subject of biology.

Jahresber Dtsch Math-Ver (2011) 113: 49–54
DOI 10.1365/s13291-011-0014-y

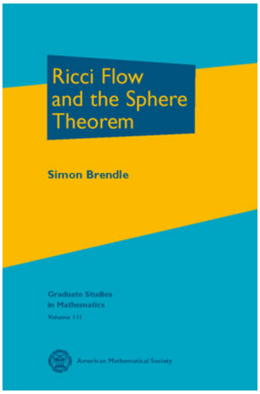
BUCHBESPRECHUNG

Simon Brendle: "Ricci Flow and the Sphere Theorem"

Am. Math. Soc. 2010, 176 pp.

Klaus Ecker

Published online: 8 February 2011



This monograph gives an account of the recent proof of the famous *Differentiable Sphere Theorem* due to the Simon Brendle and Richard Schoen. Their method relies on Hamilton's Ricci flow for metrics on manifolds. Let us first review the relevant background material following the first two chapters of this book.

For a smooth Riemannian manifold (M, g) we define the *Riemann curvature tensor* by

$$-R(X, Y, Z, W) = g(\nabla_X \nabla_Y Z - \nabla_Y \nabla_X Z - \nabla_{[X,Y]} Z, W)$$

for vector fields X, Y, Z, W on M where ∇ denotes the unique way of covariantly differentiating vector fields in the direction of other vector fields (this rule produces again vector fields and is invariant under coordinate transformations) which is compatible with the metric (a kind of product rule condition) and torsion-free, that is $[X, Y] = \nabla_X Y - \nabla_Y X$. Hence the curvature tensor in some sense measures the defect in commuting second derivatives of vector fields. The third term on the right hand side is included to ensure that R is a tensor field in all four entries. The curvature tensor satisfies the symmetry condition

$$R(X, Y, Z, W) = -R(Y, X, Z, W) = R(Z, W, X, Y).$$

Therefore, one may view it as a symmetric bilinear form on the space of 2-forms on M. The *curvature operator* $\mathcal{R}$ is defined on pairs of 2-forms by

$$\mathcal{R}(X \wedge Y, Z \wedge W) = R(X, Y, Z, W).$$

K. Ecker (✉)
FU Berlin, Germany
e-mail: kecker@zedat.fu-berlin.de

(M, g) is said to have *nonnegative (positive) curvature operator* if $\mathcal{R}(\omega, \omega) \geq (>)\ 0$ for all 2-forms ω on M.

Probably the most important curvature quantities are the *sectional curvatures* of M. These can be intuitively understood as the Gauß curvatures of two-dimensional cross-sections of M where the Gauß curvature at a point of M can in turn be determined by measuring the deviation of the angle sum of infinitesimal geodesic triangles from 180 degrees inside that cross-section near that point. The Gauß curvature of a 2-sphere is positive as this angle sum exceeds π, on the plane equal to zero and on a saddle surface negative. In terms of the curvature tensor, the sectional curvature in the 'direction' of a 2-plane Π inside the tangent space of M is defined by

$$K(\Pi) = \frac{R(X, Y, X, Y)}{|X|^2|Y|^2 - \langle X, Y\rangle^2}$$

where X, Y is a basis of Π and $\langle\cdot,\cdot\rangle$ denotes the metric g. One easily checks that the sectional curvature is independent of the choice of basis. The sectional curvatures of the standard unit sphere all equal 1, the ones for hyperbolic space equal -1 and the product $S^2 \times \mathbb{R}$ has sectional curvatures equal to $1, 0$ and 0 everywhere. In three dimensions, the condition of having nonnegative (positive) sectional curvatures is equivalent to the condition of nonnegative (positive) curvature operator. However, in higher dimensions the latter is a much stronger condition. For instance, the sectional curvatures of the 4-manifold $\mathbb{C}P^2$ (complex projective space) all have values $1/4$ and 1 but $\mathbb{C}P^2$ does not have positive curvature operator. The *Ricci tensor* of (M, g) is defined by

$$Ric(X, Y) = \sum_{k=1}^{n} R(X, e_k, Y, e_k)$$

and the *scalar curvature* by

$$scal = \sum_{k=1}^{n} Ric(e_k, e_k)$$

where the $\{e_1, \ldots, e_n\}$ form a local orthonormal frame on M. Being averages of the curvature tensor, these quantities contain less information about the manifold. However, in three dimensions the Riemann tensor can be recovered from the Ricci tensor, so no information is lost there.

In the book by Brendle, several additional curvature conditions on Riemannian manifolds are considered. One is the condition of a *strictly δ-pinched manifold in the global sense* for $\delta \in (0, 1)$. This refers to the condition that the sectional curvatures of (M, g) lie in the interval $(\delta, 1]$. For the weak form of the condition, they are required to lie in the closed interval $[\delta, 1]$ instead. Thus $\mathbb{C}P^2$ is weakly but not strictly 1/4-pinched in the global sense. Brendle also defines the condition of (M, g) being *strictly δ-pinched in the pointwise sense*. Here, the inequality $0 < \delta K(\Pi_1) < K(\Pi_2)$ for all points $p \in M$ and all 2-planes Π_1, Π_2 inside the tangent space T_pM is required. For the weak form of this definition only $\leq$ is assumed above. These conditions control ratios of sectional curvatures across M rather than their range of values.

The famous *Topological Sphere Theorem* by Berger [1] and Klingenberg [6] states that every compact, simply connected Riemannian manifold which is strictly 1/4-

pinched in the global sense must be homeomorphic to the standard sphere S^n. In 1956, Milnor [8] had shown that there exist smooth manifolds which are homeomorphic but not diffeomorphic to S^7 (so-called exotic 7-spheres). This shows that additional conditions have to be imposed in order for a manifold to be diffeomorphic to S^n. A natural question is whether the condition of (M, g) being strictly 1/4-pinched in the global sense would be sufficient to guarantee this. This has become a longstanding open problem known as the *Differentiable Sphere Theorem (Conjecture).*

In 1982, Hamilton [4] introduced an evolution method for metrics on Riemannian manifolds, the so-called Ricci flow, and used this to derive two important topological classification results: In three dimensions, the condition of positive Ricci curvature on a compact manifold (M, g) as well as simple connectedness are sufficient to guarantee that M is diffeomorphic to S^3 while in four dimensions the Ricci curvature condition is replaced by the positivity of the curvature operator [5]. In 2008, Böhm and Wilking [2] could show, again using Ricci flow, that positivity of the curvature operator is a sufficient condition in all dimensions for a manifold to admit a metric with all sectional curvatures equal to 1 and hence to be diffeomorphic to S^n up to quotients by certain finite group actions.

Hamilton's Ricci flow for a 'time-dependent' family of metrics $g(t)$ on a manifold M is defined by the evolution law

$$\frac{\partial}{\partial t} g(t)(X, Y) = -2Ric_{g(t)}(X, Y)$$

where we start with some metric $g(0) = g_0$. This evolution equation implies an equation for the curvature tensor which simplifies significantly if we consider instead the curvature operator and write everything in a suitable time-dependent frame. The curvature operator then satisfies the equation

$$\left(\frac{\partial}{\partial t} - \Delta\right)\mathcal{R} = \mathcal{R}^2 + \mathcal{R}^\# \equiv \mathcal{Q}(\mathcal{R})$$

which is a reaction-diffusion equation. Here Δ is the Laplace-Beltrami operator applied to tensors on M. The right hand side $\mathcal{Q}(\mathcal{R})$ is quadratic in $\mathcal{R}$ and has a certain algebraic structure encapsulated in the expression $\mathcal{R}^\#$. Understanding this is crucial for a detailed analysis of the behaviour of this equation. The reaction term can cause singularities in finite time for certain initial metrics. For example, a round S^3 and some 3-manifolds close to it 'contract' in finite time T. To understand what is happening asymptotically to the geometry one considers instead a volume normalized Ricci flow (or any other time-dependently rescaled flow which ensures bounded curvatures) for closed manifolds. For certain initial metrics, the diffusive effect of the Ricci flow dominates after normalization. In fact, for simply connected closed 3-manifolds (M, g_0) of positive Ricci curvature Hamilton [4] showed in 1982 that this curvature condition is preserved and that the volume normalized Ricci flow converges smoothly to the standard S^3. Therefore, the initial manifold must have been diffeomorphic to the 3-sphere.

One of the main tools used in the analysis is Hamilton's maximum principle for the curvature tensor [5] which roughly states the following: Let F be a closed, convex and $O(n)$-invariant subset of the set of all multilinear 4-tensors on $\mathbb{R}^n$ which have the symmetries of the curvature tensor (actually we freely alternate between the usage of the curvature tensor and the curvature operator here) and in addition satisfy a permutation relation known as the first Bianchi identity (which the curvature tensor of the manifold also satisfies). Suppose that F is invariant under the ordinary differential equation

$$\frac{d}{dt}\mathcal{R} = \mathcal{Q}(\mathcal{R})$$

where $\mathcal{Q}(\mathcal{R})$ appears in the evolution equation for $\mathcal{R}$ valid under Ricci flow. Moreover, suppose that M is a compact manifold and $g(t)$, $t \in [0, T)$ solves the Ricci flow. Assume furthermore that the curvature operator of $(M, g(0))$ satisfies $\mathcal{R}(p, 0) \in F_{(p,0)}$ for all $p \in M$. Then $\mathcal{R}(p, t) \in F_{(p,t)}$ for all $t \in [0, T)$.

Another crucial result of Hamilton requires an additional condition for the sets F considered in the statement of the maximum principle. This involves the notion of a *pinching set* which is somehow related to our conditions of pointwise curvature pinching considered earlier, in that it involves a condition controlling the ratio of sectional curvatures: In fact, in addition to the conditions on F required for the maximum principle we also ask that for each $\delta \in (0, 1)$ the set of $\mathcal{R} \in F$ which are not weakly δ-pinched (we do not use the term 'in the pointwise sense' here as F is a fixed set in the space of multilinear 4-tensors on $\mathbb{R}^n$) is a bounded set. This roughly amounts to saying that the inequality in the pinching definition holds for every $\delta \in (0, 1)$ up to some constant depending on this δ. Such sets F are called *pinching sets*.

Hamilton then showed in [4] that if M is a compact manifold of dimension $n \geq 3$ with a metric g_0 of positive scalar curvature, if there is a pinching set F such that the curvature operator of g_0 is contained in F at all points in M and if $g(t)$ is a solution of Ricci flow on a maximal time interval $[0, T)$ with initial metric g_0, then as $t \to T$, the metrics $\frac{1}{2(n-1)(T-t)} g(t)$ converge in C^∞ to a metric having all sectional curvatures equal to 1. The latter can be topologically classified. In fact, they are equal to S^n up to quotients by finite group actions. This convergence result strongly relies on derivative estimates for the curvature tensor which are derived in Chapter 3 of this book.

All convergence results on Ricci flow starting with (M, g_0) where g_0 satisfies certain curvature conditions such as positivity of the Ricci curvature or the curvature operator were shown by first proving that the curvature condition is preserved by the flow and then finding a suitable pinching set. That the positivity of the curvature operator is preserved by Ricci flow is quite easy to see, since the right hand side expression of the ordinary differential equation considered for the maximum principle satisfies $\mathcal{Q}(\mathcal{R}) \geq 0$ whenever the curvature operator vanishes, so the time-derivative of $\mathcal{R}$ cannot be negative definite then. This in turn implies that $\mathcal{R}$ can never become negative definite if it is initially positive definite.

However, finding a suitable pinching set is usually very involved and relies on a subtle analysis of the algebraic structure of $\mathcal{Q}(\mathcal{R})$. In [5], Hamilton discovered a certain Lie algebra structure and used this to study the case $n = 4$. Böhm and Wilking [2] found additional structures which eventually let them settle the case of positive curvature operator in all dimensions. The book by Brendle gives a very detailed account of all these developments.

The main theorem of the book (proved in Chapters 7 and 8) is the Differentiable Sphere Theorem due to Brendle and Schoen. To explain this we have to introduce yet another curvature condition which plays an important role in their work and also in the work of Nguyen [9]. This condition also features prominently in the paper by Micallef and Moore [7] (it was actually introduced there) which contains one of the first topological classification theorems for 4-manifolds. We say that a manifold (M, g) has *nonnegative isotropic curvature* if the condition

$$R(e_1, e_3, e_1, e_3) + R(e_1, e_4, e_1, e_4) + R(e_2, e_3, e_2, e_3) \\ + R(e_2, e_4, e_2, e_4) - 2R(e_1, e_2, e_3, e_4) \geq 0$$

holds for all orthonormal 4-frames $\{e, e_2.e_3.e_4\}$ on M. There is a more natural way of stating this condition which uses a complexification of the tangent space. In Chapter 7 of Brendle's book, relations between this and other curvature conditions are derived which are stated in a useful flow chart on page 100. It is important for the solution of the Differentiable Sphere Theorem that the condition of $1/4$-pinching in the pointwise sense implies both the conditions of nonnegative scalar curvature (actually even nonnegative sectional curvature) which is required for the initial metric in the pinching set theorem of Hamilton stated above and the condition of nonnegative isotropic curvature.

The main breaktrough due to Brendle and Schoen [3] and independently Nguyen [9] has been to show that the condition of nonnegative isotropic curvature is preserved by Ricci flow. This is a remarkable achievement which uses very subtle algebraic arguments combined with identities obtained by calculating the first and second variation of the isotropic curvature expression with respect to variations of the coordinate frames at a minimum point of this expression. In particular, important information for $\mathcal{Q}(\mathcal{R})$ is obtained at points where the isotropic curvature condition 'reaches' zero. All this is carried out in Chapter 7. Chapter 8 then establishes the existence of a pinching set as required by Hamilton in order to guarantee convergence of the rescaled flow (as defined above) to a metric with sectional curvatures equal to 1 everywhere. Important here is the observation that the set of curvature operators with nonnegative curvature form a closed, convex cone inside the set of all curvature operators but additional conditions relating the Ricci curvature to the scalar curvature have to be imposed to arrive at the final version of the pinching set.

The later chapters of this monograph contain further new topological classification results for manifolds satisfying a variety of curvature conditions. The book concludes with an interesting problem section. This is an excellent self-contained account of exciting new developments in mathematics suitable for both researchers and students interested in differential geometry and topology and in some of the analytic techniques used in Ricci flow. I very strongly recommend it.

References

1. Berger, M.: Les variétés Riemannienes 1/4-pincées. Ann. Sc. Norm. Super. Pisa, Cl. Sci. **14**, 161–170 (1960)
2. Böhm, C., Wilking, B.: Manifolds with positive curvature operator are space forms. Ann. Math. **167**(2), 1079–1097 (2008)

3. Brendle, S., Schoen, R.: Manifolds with 1/4-pinched curvature are space forms. J. Am. Math. Soc. **22**, 287–307 (2009)
4. Hamilton, R.S.: Three-manifolds with positive Ricci curvature. J. Differ. Geom. **17**(2), 255–306 (1982)
5. Hamilton, R.S.: Four-manifolds with positive curvature operator. J. Differ. Geom. **24**, 153–179 (1986)
6. Klingenberg, W.: Über Riemannsche Mannigfaltigkeiten mit positiver Krümmung. Comment. Math. Helv. **35**, 47–54 (1961)
7. Micallef, M., Moore, J.D.: Minimal two-spheres and the topology of manifolds with curvature on totally isotropic two-planes. Ann. Math. **127**(2), 199–227 (1988)
8. Milnor, J.: On manifolds homeomorphic to the 7-sphere. Ann. Math. **64**(2), 399–405 (1956)
9. Nguyen, H.: Isotropic curvature and the Ricci flow. Int. Math. Res. Not. **3**, 536–558 (2010)