Jahresber Dtsch Math-Ver (2011) 113:55–56
DOI 10.1365/s13291-011-0018-7

Vorwort Heft 2-2011

Hans-Christoph Grunau

Am 26. Juni 2010 verstarb in Karlsruhe im Alter von 83 Jahren Wolfgang Walter, der das Gebiet der Differentialgleichungen in den letzten gut 50 Jahren mit zahlreichen wesentlichen Beiträgen bereichert hat. Von unnatürlichen Trennungslinien wie etwa der zwischen „gewöhnlichen" und „partiellen" Differentialgleichungen hielt er nicht viel; in beiden Bereichen war er gleichermaßen heimisch und hat großen Gewinn aus deren Wechselspiel gezogen und fasziniert die sich entwickelnden Möglichkeiten computergestützten Beweisens verfolgt. In seinem Arbeitsbereich hat er die Bedeutung von *Ungleichungen* immer wieder hervorgehoben, deren konsequente Untersuchung und Verwendung maßgeblich zu den großen Fortschritten in der *nichtlinearen* Theorie von Differentialgleichungen beigetragen hat. Über dieses Gebiet hinausgehend hat er als Mitorganisator der „General Inequalities"-Tagungsserie Ungleichungen als verbindendes methodisches Element verschiedener mathematischer Teildisziplinen in den Vordergrund gestellt. Weithin bekannt ist Wolfgang Walter auch als Autor einer Reihe von Lehrbüchern, in denen man für grundlegende und weiterführende Vorlesungen gleichermaßen wahre Schätze an eleganten Beweisen und Herleitungen findet. Den vorliegenden Nachruf hat Wolfgang Reichel verfasst, der 1996 bei Wolfgang Walter promoviert hat und ein sehr lebendiges Bild von dessen Persönlichkeit entstehen lässt.

Wilhelm Stannat präsentiert in seinem Übersichtsartikel einige neuere Entwicklungen im Bereich der partiellen stochastischen Differentialgleichungen. Nach einer ausführlichen Einführung und der Darstellung einer Reihe physikalischer Beispiele setzt er den Schwerpunkt dabei auf die Untersuchung der Übergangshalbgruppen

H.-Ch. Grunau (✉)
Institut für Analysis und Numerik, Fakultät für Mathematik, Otto-von-Guericke-Universität,
Postfach 4120, 39016, Magdeburg, Deutschland
e-mail: hans-christoph.grunau@ovgu.de

der Lösungen solcher Gleichungen. In diesem Zusammenhang stellen sich die Fragen nach der Existenz einer invarianten Verteilung sowie nach der möglichen Beschreibung und Eindeutigkeit des zugehörigen Kolmogorov-Operators. Der Artikel präsentiert hier eine Vielzahl neuerer Resultate und Kriterien, mit denen sich diese und verwandte Fragen in vielen Situationen beantworten lassen.

Die Buchbesprechungen spannen in diesem Heft einen weiten inhaltlichen Bogen und behandeln Neuerscheinungen zur mathematischen Theorie der Supraleitung, zur Numerik nichtlokaler Operatoren und zur algebraischen Geometrie in Kodierungstheorie und Kryptographie.

Seit einigen Monaten ist auf den DMV-Webseiten auch ein Leserforum zum Jahresbericht installiert. Wie Sie dort sehen können, ist es nun für DMV-Mitglieder ziemlich einfach geworden, sich zum Jahresbericht zu äußern, sich an Diskussionen zu beteiligen oder neue Diskussionen zu beginnen. Auf Ihre Beiträge sind die Herausgeber unverändert sehr gespannt!

Jahresber Dtsch Math-Ver (2011) 113:57–79
DOI 10.1365/s13291-011-0017-8

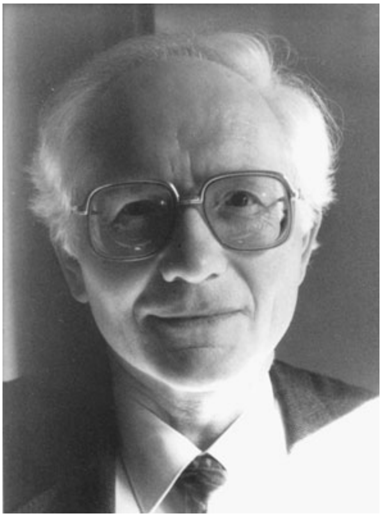
HISTORISCHE BEITRÄGE

In Memoriam Wolfgang Walter (1927–2010)

Wolfgang Reichel

Eingegangen: 3. März 2011 / Online publiziert: 19. April 2011

Foto von Wolfgang Walter aus dem Bildarchiv des Mathematischen Forschungsinstituts Oberwolfach



Zusammenfassung Am 26. Juni 2010 verstarb Wolfgang Walter im Alter von 83 Jahren in Karlsruhe. Durch seine Beiträge zur Theorie der Differentialungleichungen wurde er international bekannt. Seine Lehrbücher sind weit verbreitet und werden von Studierenden und Lehrenden gerne benutzt. Als Hochschullehrer, Wissenschaftler, Buchautor, Mitherausgeber von Zeitschriften und Organisator von Konferenzen hat er die Mathematik nachhaltig bereichert und über viele Jahre mitgestaltet.

Schlüsselwörter Differentialungleichungen · Quasimonotonie · Parabolische Systeme · Hängebrücken · Wandernde Wellen · Nichtlineare Oszillationen

Mathematics Subject Classification (2000) Primary: 01A70 · 35K40 · Secondary: 74J30 · 35L75

W. Reichel (✉)
Institut für Analysis, Karlsruher Institut für Technologie (KIT), 76128 Karlsruhe, Deutschland
e-mail: Wolfgang.Reichel@kit.edu

Professor emeritus Dr. Wolfgang Walter verstarb am 26. Juni 2010 im Alter von 83 Jahren in Karlsruhe. Mit ihm verlor die Gemeinschaft der Mathematikerinnen und Mathematiker einen engagierten Hochschullehrer, einen begeisterten Forscher, einen angesehenen Kollegen. Die Familie Walter verlor mit ihm den Ehemann, Bruder, Vater, Schwiegervater und Großvater.

Um den Lesern die Gelegenheit zu geben, die Stationen in Wolfgang Walters Leben mitzuverfolgen, ist dieser Nachruf fast durchgehend in der Gegenwartsform geschrieben.

1 Studium und Promotion in Tübingen (1947–1956)

Wolfgang Walter wird am 2. Mai 1927 in Schwäbisch Gmünd geboren. Seine Schulzeit wird 1943 abrupt unterbrochen durch seine Einberufung zunächst als Flakhelfer und später als Soldat an der Ostfront, gefolgt von Verwundung und amerikanischer Kriegsgefangenschaft. Nach seiner Entlassung Ende 1946 schließt er seine Schulausbildung ab und studiert von 1947 bis 1952 Mathematik und Physik an der Universität Tübingen. Er legt 1952 die erste Dienstprüfung und 1955 nach eineinhalbjähriger Referendarzeit die zweite Dienstprüfung für das Lehramt an Höheren Schulen ab. Es folgt seine Promotionszeit bei Erich Kamke mit dem Abschluss der Promotion im Jahr 1956 über das Thema „Mittelwertsätze und ihre Verwendung zur Lösung von Randwertaufgaben“. Kamkes Einfluss auf Wolfgang Walters wissenschaftliche Entwicklung ist Zeit seines Lebens deutlich spürbar. Stets spricht Walter mit größtem Respekt von seinem wissenschaftlichen Lehrer und Förderer. Er legt großen Wert auf die Würdigung von Kamkes Verdiensten bei der Neubegründung der Theorie gewöhnlicher und partieller Differentialgleichungen, vgl. [21]. Aber vor allem thematisch und methodisch hat Kamke enormen Einfluss auf Wolfgang Walters wissenschaftliches Werk. Kamkes Bücher über Differentialgleichungen sind Standardwerke der Dreißiger bis Fünfziger Jahre. Sein Bemühen um äußerste Klarheit, Strenge und Präzision im Umgang mit Differentialgleichungen findet deutlichen Widerhall in Wolfgang Walters Publikationen. Kamkes Formulierung der Eindeutigkeitsbedingungen für Lösungen von Anfangswertproblemen bei gewöhnlichen Differentialgleichungen, seine Formulierung der Monotoniesätze, die Verwendung der Methode der sukzessiven Approximationen sowie Prüfers Polarkoordinatenmethode zur Lösung Sturm-Liouvillescher Randwertaufgaben finden Eingang und Würdigung in Walters Lehrbuch über gewöhnliche Differentialgleichungen [27] und werden dort in eleganter Form, prägnanter Darstellung und konsequenter begrifflicher Erweiterung zum Standardrepertoire für Vorlesungen über gewöhnliche Differentialgleichungen.

2 Familiengründung und erster USA-Aufenthalt (1957–1962)

Im Jahr 1957 heiraten Wolfgang Walter und Irmgard Scheu, verlassen im selben Jahr Tübingen und beginnen gemeinsam einen neuen Lebensabschnitt in Karlsruhe. Zunächst arbeitet Wolfgang Walter an der Universität Karlsruhe als Assistent bei Johannes Weissinger. Es folgt 1958–1959 an der University of Maryland, College Park, der erste von zahlreichen USA-Aufenthalten. Das Ehepaar Walter fährt per Schiffspassage von Le Havre über den Atlantik und erlebt bei der Ankunft im Hafen von New York einen äußerst emotionalen Moment. Auch noch Jahrzehnte später lässt Wolfgang Walter diesen Augenblick, in dem er und seine Frau zum ersten Mal die Freiheitsstatue sehen und hoffnungsvoll einer gemeinsamen Zukunft entgegenblicken, in seinen Erinnerungen wiederaufleben und teilt ihn mit Kollegen und Freunden. Kurz nach der Ankunft in den Vereinigten Staaten wird er zum ersten Mal Vater. Es ist die Zeit des kalten Krieges unmittelbar nach dem Sputnik-Schock, in der er die Dynamik des wissenschaftlichen Aufbruchs in den USA fasziniert miterlebt.

Nach seiner Rückkehr nach Karlsruhe habilitiert er sich 1960 mit einer Arbeit über Existenz- und Eindeutigkeitssätze für eine spezielle Klasse von partiellen Differentialgleichungen. Seine Habilitationsschrift wird mit dem Dozentenpreis der Karl-Freudenberg-Stiftung ausgezeichnet. Noch im selben Jahr wird er Dozent und ein Jahr später wissenschaftlicher Rat.

Im gleichen Zeitraum wächst durch die Geburt der Kinder seine Familie; nach Wolfgang (1959 in den USA) werden Susanne (1962) und Katrin (1963) geboren.

3 Professor in Karlsruhe (1963–1995)

Nach einem abgelehnten Ruf an die Universität Wien im Jahr 1962 erfolgt 1963 seine Berufung auf ein neu eingerichtetes Ordinariat für Mathematik an der Universität Karlsruhe, das er bis zu seiner Emeritierung im Jahre 1995 innehat. Die lange Zeitspanne von 32 Jahren, in denen er als Professor im aktiven Dienst der Universität Karlsruhe steht, stellt eine äußerst produktive Phase seiner akademischen Karriere dar.

1965 erhält Wolfgang Walter gleich drei Rufe auf Ordinariate an den Universitäten Hamburg, Erlangen-Nürnberg und an die University of Notre Dame, Indiana. Es folgen im Jahr 1971 drei weitere Rufe auf Positionen als full professor an die University of Delaware, an die State University of New York (SUNY) und an die Michigan State University. Eine besondere Auszeichnung ist der Ruf an die University of Delaware auf einen für ihn neu geschaffenen Unidel-Stiftungslehrstuhl. Trotz insgesamt sieben Rufen bleibt Wolfgang Walter an der Universität Karlsruhe. Der Aufbau der Fakultät für Mathematik in den Jahrzehnten nach dem zweiten Weltkrieg und die Wiederaufnahme der internationalen wissenschaftlichen Beziehungen, insbesondere zu Instituten in den USA, sind dabei sicherlich eine starke Motivation für ihn. In Karlsruhe findet er passende Strukturen vor, die ihm seine erfolgreiche Arbeit in Forschung und Lehre ermöglichen und seine administrativen Pflichten in der akademischen Selbstverwaltung erleichtern. Die höchst effiziente Zusammenarbeit mit seiner langjährigen Sekretärin Irene Jendrasik bietet eine sehr gute Rahmenbedingung für seine wissenschaftliche Produktivität. Gemeinsam setzen Irene Jendrasik und Wolfgang Walter bei der Editierung wissenschaftlicher Texte konsequent auf

Textverarbeitungssysteme und gehören zu den ersten Benutzern von LaTeX an der Karlsruher Fakultät.

Von 1975 bis 1977 leitet er die Geschicke der Fakultät für Mathematik als Dekan. Seine gut vorbereiteten und stets kurz und knapp gehaltenen Sitzungen finden den Beifall des Kollegiums. Seine persönliche Integrität, seine herzliche, freundliche und humorvolle Art des Umgangs bringt ihm die Wertschätzung seiner Karlsruher Kollegen ein.

Wolfgang Walter besitzt eine starke Affinität zu den akademischen Institutionen in den USA und zu den Vereinigten Staaten selbst. Sie ist begründet einerseits im Vertrauen gegenüber den US-amerikanischen Befreiern, das während seiner Zeit in Gefangenschaft herangewachsen war, und andererseits in der weltöffnenden Erfahrung seines ersten USA-Aufenthaltes in den Jahren 1958 bis 1959. Zudem lebt seine Schwester seit den Fünfziger Jahren in den USA. Mitte der Sechziger bzw. Anfang der Siebziger Jahre, als die Rufe aus den USA kommen, zieht die Familie Walter ernsthaft eine Übersiedlung in die USA in Erwägung. Durch mehrere längere Aufenthalte in Begleitung seiner Familie ist Wolfgang Walter mit dem US-amerikanischen Hochschulsystem vertraut und macht gute Erfahrungen mit dem Leben in den USA. Er kennt die Vorzüge und Nachteile des Lebens und Forschens auf beiden Seiten des Atlantiks genau, als er sich schließlich für den Verbleib in Karlsruhe entscheidet. Auch danach findet er weiterhin die meisten seiner wissenschaftlichen Kontakte in den USA. Während seiner gesamten wissenschaftlichen Tätigkeit ist er mindestens elf Mal zu Aufenthalten, die mehrere Monate bis hin zu einem ganzen akademischen Jahr dauern, als Gastprofessor an nordamerikanischen Universitäten. Gerne berichten Irmgard und Wolfgang Walter auch noch Jahre später davon, wie wohl sich ihre Familie bei diesen Aufenthalten gefühlt hat.

4 Buchautor und akademischer Lehrer

Sein erstes, 1964 erschienenes Buch über Differential- und Integralungleichungen [20] sowie dessen 1970 erschienene englischsprachige Erweiterung [22] haben Wolfgang Walter unter Fachkollegen bekannt gemacht. In Karlsruhe verfolgt er das Ziel, die Ausbildung der Studierenden in der Analysis auf eine neue Basis zu stellen. Anfänglich gibt er zu seinen Vorlesungen eigene Skripten heraus, aus denen im Laufe der Jahre schließlich Lehrbücher werden.

Sein erstes Lehrbuch über Distributionentheorie [25] erscheint 1970, sein zweites über Potentialtheorie [23] 1971. Beiden Büchern gemeinsam ist der knappe, klare Stil, in dem sich sowohl Leser als auch Autor auf die wesentlichen Elemente der Theorie und ihren Anwendungen konzentrieren. In erfrischend kurzer Darstellung wird der Leser der Distributionentheorie vom einfachen Kalkül der Distributionen bis hin zum Satz von Paley-Wiener geführt. Mit einem auf Heinz König zurückgehenden einfachen Beweis des Satzes von Malgrange-Ehrenpreis zur Existenz von Grundlösungen für partielle Differentialgleichungen mit konstanten Koeffizienten und einem Kapitel über Sobolevräume beendet Wolfgang Walter seine Distributionentheorie und verdeutlicht, dass ihm vor allem die Anwendungen auf partielle Differentialgleichungen am Herzen liegen. In seiner Potentialtheorie weht ebenfalls ein frischer Wind.

Nach den Kapiteln über harmonische Funktionen und Einfach- und Doppelschichtpotentiale finden sich gleich drei methodisch unterschiedliche Beweise für die Existenz von Lösungen des Dirichletschen Randwertproblems: ein Beweis mittels Fredholmscher Integralgleichungen, ein zweiter basierend auf der Perronschen Methode von Ober- bzw. Unterfunktionen und ein dritter Beweis mit Hilfe von Differenzenverfahren auf Gittern inklusive Konvergenzbetrachtung beim Grenzübergang der Gitterweite gegen Null.

1972 erscheint Wolfgang Walters beliebtestes Lehrbuch über Gewöhnliche Differentialgleichungen [27] mit insgesamt sieben Auflagen, einer später erschienenen Übersetzung ins Englische [26] sowie lizenzierten und sehr erfolgreichen Nachdrucken in China. Mit steigender Auflage und steter Erprobung des Lehrstoffes im Hörsaal entsteht ein Gesamtwerk, in dem Wolfgang Walter abwechselt zwischen konsequenter Verwendung des Banachschen Fixpunktsatzes, funktionalanalytischen Argumenten, Methoden der Differentialungleichungen, Phasenebenenargumenten, Floquet-Theorie, Attraktoren, Lyapunov-Funktionen und Stabilitätsbegriffen. Stets visiert er den mit den vorhandenen Hilfsmitteln bestmöglichen Satz an. Dieses Buch ist am stärksten von Wolfgang Walters Streben nach einem ebenso knappen wie lesbaren Stil geprägt.

Zwischen 1985 und 2002 erscheinen mehrere Auflagen von Wolfgang Walters Analysis 1 [28] und Analysis 2 [29] im Springer Verlag in der Reihe „Grundwissen Mathematik“. In dieser Reihe wird der neuartige Ansatz verfolgt, die Grundbegriffe der Analysis in ihrem historischen Entwicklungsprozess darzustellen. Dabei nehmen Autor und Leser eine Perspektive ein, in der sie das Ringen um die Begriffe der modernen Analysis wie Stetigkeit, Grenzwert, Funktion, Konvergenz miterleben und gleichzeitig ihre Bedeutung bei der Lösung wichtiger Probleme erkennen, z.B. beim Nachweis der Keplerschen Gesetze aus dem Newtonschen Gravitationsgesetz. Durch viele historisch interessante Details und Anmerkungen, die Wolfgang Walter mit viel Liebe recherchiert, wird das Lesen zum Vergnügen. Gleichzeitig bleibt er seinem Stil, die wichtigen Sätze und Beweise knapp und prägnant darzustellen, treu. Im zweiten Band des Analysis-Lehrbuches treten die historischen Erläuterungen zugunsten der modernen Darstellung in den Hintergrund. Dafür finden sich in der Darstellung der Theorie des Lebesgueschen Integrals, im Beweis des Transformationssatzes für Lebesgueintegrale mit Hilfe des Sardschen Lemmas und in der Konvergenztheorie der Fourierreihen die von Lehrenden und Studierenden gleichermaßen geschätzten Höhepunkte seiner Lehrbücher.

Auch in seinen Vorlesungen ist das Streben nach Effizienz greifbar. Er hält mit Freude seine Vorlesungen und versteht es, Studierende für Themen der angewandten Analysis zu begeistern. Aus seinen Vorlesungen und Seminaren gehen zahlreiche Diplomanden hervor. Elf Doktoranden erlangen mit Hilfe seiner Betreuung den Doktorgrad und fünf Wissenschaftler seiner engeren Arbeitsgruppe habilitieren sich. Mit seinen Kollegen und Mitarbeitern diskutiert er gerne und ausgiebig an der Tafel in seinem Büro oder auf einer Papierserviette beim gemeinsamen Mittagessen. Seine Denk- und Schlussweisen trägt er in bewundernswerter Klarheit vor. Oft sind sie neuartig und überraschend und bereichern diejenigen, die von ihm Mathematik lernen und mit ihm über Mathematik diskutieren.

Liste der Doktoranden	*Liste der Habilitationen*
Herbert Weigel, 1968	Klaus Ritter, 1968
Klaus Deimling, 1969	Klaus Deimling, 1971
Gerhard Schleinkofer, 1969	Peter Volkmann, 1975
Alexander Voigt, 1971	Roland Lemmert, 1979
Roland Lemmert, 1974	Reinhard Redlinger, 1988
Gerhard Lamott, 1976	
Jörg Heuß, 1979	
Dietrich Wendland, 1981	
Reinhard Redlinger, 1982	
Volkmar Weckesser, 1993	
Wolfgang Reichel, 1996	

5 Wissenschaftliches Werk

Neben seinen 8 Büchern verfasst Wolfgang Walter über 130 wissenschaftliche Publikationen, die inzwischen mehr als 600-mal zitiert worden sind. Seine Themengebiete sind vielfältig, insbesondere interessieren ihn gewöhnliche und partielle Differentialgleichungen sowie angewandte und numerische Mathematik. Auf internationalen Kongressen erfahren seine wissenschaftlichen Vorträge Anerkennung. Seine Beiträge auf dem Gebiet der Differentialungleichungen sind bahnbrechend und grundlegend für eine Vielzahl weiterer Untersuchungen. Bis heute entfalten seine prägnant geschriebenen Publikationen ihre inspirierende Wirkung und zeigen, wie stark die Theorie der Differentialgleichungen von der Idee der Ungleichungen profitiert. Wolfgang Walter sieht die Trennung von gewöhnlichen und partiellen Differentialgleichungen undogmatisch und widmet sich beiden Feldern mit großem Interesse.

Eine besondere Stellung unter seinen Koautoren nehmen Ray Redheffer, UCLA (21 gemeinsame Arbeiten) und Joe McKenna, Univ. of Connecticut (8 gemeinsame Arbeiten) ein. Mit beiden verbindet ihn nicht nur eine fruchtbare mathematische Kooperation sondern auch eine private Freundschaft, die sich auf die Familien Walter, Redheffer und McKenna erstreckt.

Anlässlich seines 66. Geburtstages wird Wolfgang Walter Band 3 der World Scientific Series in Applicable Analysis [1] gewidmet. Auf knapp 600 Seiten sind Beiträge von Wissenschaftlerinnen und Wissenschaftlern enthalten über das Thema Ungleichungen und ihre Anwendungen in den Gebieten Analysis, Wirtschaftswissenschaften, Differential- und Funktionalgleichungen. Im ersten Beitrag dieses Bandes findet sich „R.M. Redheffer's 66th birthday tribute to Wolfgang Walter" [15]. Diesem lesenswerten Beitrag über Wolfgang Walters wissenschaftliches Werk kommt eine besondere Rolle zu, da die Würdigung zu seinen Lebzeiten stattfindet und von ihm als ehrenvolle Auszeichnung betrachtet wird. Aus diesem Grund soll hier keine Wiederholung oder Kopie vorgenommen werden. Statt dessen findet sich am Ende dieses Nachrufes in Abschnitt 9 eine exemplarische Würdigung von Wolfgang Walters wissenschaftlichen Beiträgen in Form einiger detaillierter Auszüge, die sinngemäß, aber nicht wörtlich aus seinen Arbeiten stammen.

6 Zeitschriften, Tagungen, Ämter

Nicht nur durch seine eigenen wissenschaftlichen Beiträge bereichert Wolfgang Walter die Mathematik. Auch als Mitherausgeber der Zeitschriften *Applicable Analysis* ab 1971, *Journal of Nonlinear Analysis – TMA* ab 1976, *Journal of Dynamic Systems and Applications* ab 1992 und *Journal of Inequalities and Applications* ab 1997 ist er einer großen Zahl von Mathematikern bekannt. Ebenfalls gibt er die Springer Reihe *Grundwissen Mathematik* und die *Scientific Series in Applicable Analysis* (WSSAA, World Sci. Publ., River Edge, NJ) mit heraus.

Als 1976 die erste „General Inequalities"-Tagung in Oberwolfach stattfindet, ist Wolfgang Walter von Anfang an dabei. In seiner wissenschaftlichen Karriere lässt er sich seit langem vom Thema Ungleichungen leiten. Integralungleichungen, Normabschätzungen, Ober- und Unterfunktionen interessieren ihn ebenso wie später die verifizierte Einschließung von Lösungen gewöhnlicher Differentialgleichungen mittels computerunterstützter Methoden der Intervallarithmetik. Ab 1978 gehört er dem Leitungsgremium der Tagungsreihe an und übernimmt ab 1983 die Herausgabe und Editierung der Tagungsbände „General Inequalities 3–7". Die Tagungen haben einen internationalen Charakter und sind von der Idee durchdrungen, die Mathematik einmal nicht nach Disziplinen einzuteilen und zu separieren, sondern vielmehr einen vereinigenden Gedanken in den Vordergrund zu stellen. Dazu eignet sich das Thema Ungleichungen bestens – nicht zuletzt aufgrund der herausragenden Leistungen von Hardy, Littlewood und Pólya sowie Beckenbach und Bellman. Bei vielen „General Inequalities"-Tagungen werden in den Nächten Ungleichungen bewiesen oder widerlegt, die tags zuvor zur Diskussion gestellt worden sind. Mit den „General Inequalities"-Tagungen gelingen Wolfgang Walter wichtige Beiträge zur Internationalisierung der Mathematik und zur Verbreitung und Weitergabe wissenschaftlicher Forschungsresultate.

Wolfgang Walter hat ein engagiertes Interesse am wissenschaftlichen Fortschritt, an der Unterstützung seiner Kollegen und an der Förderung junger Nachwuchswissenschaftler. Er ist Mitglied der DMV und der GAMM sowie der AMS, MAA und SIAM. Die unnatürliche Einteilung in „Reine" und „Angewandte" Mathematik ist ihm fremd. Als einen wichtigen Teil seines mathematischen Lebenswerks betrachtet er den Fortschritt in der angewandten Analysis und der numerischen Mathematik. Daher fühlt er sich der GAMM besonders verbunden und fördert sie in vielerlei Hinsicht. Er ist von 1986 bis 1989 Präsident und von 1989 bis 1992 Vizepräsident der GAMM. Als 1987 die erste ICIAM Konferenz (International Conference on Industrial and Applied Mathematics) in Paris stattfindet, ist Wolfgang Walter von Beginn an involviert und fördert nach Kräften diese Konferenz, die 2011 zum siebten Mal stattfinden wird. Er ist Mitbegründer des Richard-von-Mises-Preises der GAMM, ist Mitglied des Preiskomitees und unterstützt den GAMM-Vorstand als beratendes Mitglied bis weit nach seiner Emeritierung.

7 Persönliche Begegnungen

In Wolfgang Walters Leben spielen zahlreiche Begegnungen mit Kollegen, Koautoren und Freunden eine wichtige Rolle. Ohne Anspruch auf Vollständigkeit seien mit

George Knightly, Jean Mawhin, Djairo de Figueiredo, Alexander Weinstein, Hans Weinberger, Bill Ames, Ivo Babuška, Norrie Everitt, Catherine Bandle, Bernd Kawohl, Vangipuram Lakshmikantham, László Losonczi, Russell Thompson einige Persönlichkeiten aus dem Umfeld seiner mathematischen Tätigkeit genannt, zu denen er über viele Jahre kollegiale Verbindungen bis hin zu guten Freundschaften pflegt.

Die besonders intensiven Beziehungen zu seinen langjährigen Freunden und Koautoren Ray Redheffer und Joe McKenna wurden bereits erwähnt und werden in Abschnitt 9 nochmals zur Sprache kommen. Am besten wird dies durch die nachfolgenden Erinnerungen von Joe McKenna selbst beschrieben.

Memories of Wolfgang Walter. By Joe McKenna, Univ. of Connecticut

I first met Wolfgang Walter in Texas, at a conference in 1980, almost exactly thirty years to the day before his death. At the time, I was a young associate professor and he struck me as very old and distinguished. (He was younger than I am now!)

He also impressed me with a beautiful lecture on differential inequalities. We talked and our conversations evolved to the point where he was to spend a semester of an upcoming sabbatical in Gainesville in the autumn of 1982. My hope was to use the visit to learn about the field of differential inequalities. During that time, we worked on a competing species problem with Dirichlet boundary conditions and got some partial results. The problem remains open.

Later, I visited him in Karlsruhe several times, in the summers of 1984 and 1986. We still worked on differential inequalities for finite difference equations, but also on results using degree theory and nonlinear functional analysis. Later, he visited me in Storrs, in 1988. There we worked on a travelling wave problem for a suspension bridge equation. This involved nothing more advanced than calculus and we found explicit solutions of the nonlinear equation. The area started by this paper is still quite active today. Later, in the nineties, I visited Karlsruhe again, and (with his then student Wolfgang Reichel), we worked on radially symmetric solutions of semilinear equations with boundary blowup. This involved ordinary differential equation techniques.

Over the years, my family and his became very close and my children have happy memories of visits to the house on Breslauerstrasse. Looking back, I am struck mainly by the variety of different problems Wolfgang Walter would tackle with gusto. He loved all mathematics and would tackle any problem, regardless of what was involved in the solution. A truly natural mathematician.

Die Musik spielt in Wolfgang Walters Leben eine wichtige Rolle. Er singt gerne, spielt gut Klavier und hat bereits als Student in Tübingen Vorlesungen über Musiktheorie besucht. Im Hause Walter wird gerne und oft gesungen und musiziert. Mit seinem Freund und Koautor Ray Redheffer verbindet ihn neben der Liebe zur Mathematik auch die Freude am Klavierspielen. Bei zahlreichen Oberwolfach-Tagungen nutzt Wolfgang Walter die Gelegenheit, um mit gleichgesinnten Kolleginnen und Kollegen Musik zu spielen. In diesem Zusammenhang ergibt sich zu seinen Kollegen Ulrich Kulisch (Univ. Karlsruhe) und Klaus Kirchgässner (Univ. Stuttgart) eine enge freundschaftliche Beziehung. Die folgenden Erinnerungen von Ulrich Kulisch zeichnen den Beginn dieser Freundschaft nach und zeigen, wie die Musik zu einem Leitthema dieser Freundschaft wurde.

Erinnerungen an Wolfgang Walter. Von Ulrich Kulisch, Univ. Karlsruhe

Anfang 1969 erhielten sowohl Wolfgang Walter als auch ich ein Angebot für einen Forschungsaufenthalt am Mathematics Research Center (MRC) der University of Wisconsin. Die Karlsruher Fakultät genehmigte beide Forschungsaufenthalte für das Wintersemester 1969/70. Am 1. August 1969 reiste ich mit Familie dorthin ab. Wir hatten damals zwei Töchter im Alter von zwei Jahren und drei Monaten.

Am MRC wurde mir ein Zimmer zugewiesen. Im Nachbarzimmer saß Klaus Kirchgässner, ein Zimmer weiter George Knightly. Beide waren uns bei der Überwindung der Anfangsschwierigkeiten (Beschaffung von Auto, Wohnung, Möbeln, Kinderbetten usw.) behilflich. Sie machten mir auch klar, dass es hier üblich sei, mittags zum Joggen zu gehen.

Am 1. September traf dann Familie Walter ein. Sie hatten drei Schulkinder im Alter bis zu zehn Jahren und mussten sich daher in den University Houses einmieten. Aber sie hatten ja schon Amerika-Erfahrung. Sie wussten, dass man zunächst einmal die ganze Wohnung durchputzen und in Ordnung bringen musste. Wolfgang griff zu Pinsel und Farbe und zimmerte angekaufte Möbel zurecht. Auch Familie Knightly hatte Schulkinder und wohnte in den University Houses. Als die Anfangsschwierigkeiten überwunden waren, wurde auch Wolfgang Walter davon überzeugt, dass man mittags zum Joggen geht.

In Wisconsin gab es einen bereits damals berühmten amerikanischen Architekten namens Frank Lloyd Wright. Man erzählte uns, dass es in der Nähe des Ortes Spring Green am Wisconsin River etwa 50 Meilen nordöstlich von Madison ein von ihm erbautes, architektonisch interessantes Restaurant gibt. Nachdem alle einigermaßen eingerichtet waren, hatte Familie Walter die Idee, am nächsten Sonntag dorthin zum Mittagessen zu fahren. Wir hätten eine so weite Reise in eine unbekannte Gegend mit unserer kleinen Tochter damals wohl nicht gewagt, aber in Begleitung von Frau Walter als Ärztin willigten wir ein. Es lief alles sehr harmonisch ab und auch unsere kleine Tochter benahm sich zufriedenstellend. Gegen Ende unseres Ausfluges boten Irmgard und Wolfgang Walter uns das „Du“ an. Dies war der Anfang unserer inzwischen über 40-jährigen Freundschaft.

Von da ab traf man sich in Madison ziemlich regelmäßig bei uns, bei Familie Walter, bei Familie Knightly oder bei anderen Kollegen oder Freunden. Klaus Kirchgässner reiste bereits im November wieder ab. Bei Treffen im Hause Walter wurde immer musiziert. Sie hatten selbstverständlich ein Klavier gemietet und verfügten als Familie bereits damals über ein beachtliches Repertoire im Gesang, das mit den Jahren beständig erweitert wurde. Irmgard und Wolfgang Walter hatten sich in einem Singkreis an der Universität Tübingen, den er gegen Ende seines Studiums selbst leitete, kennen gelernt.

Im April 1970 reiste auch Familie Walter wieder ab. Ich habe sie mit schwankendem Auto nach Chicago zum Flughafen gefahren. Dies war die Zeit, als unsere kleine Tochter anfing zu sprechen. „Mein Wolfgang" gehörte zu ihren ersten Worten, die sie sagen konnte, wenn er sie auf den Arm nahm.

Als alle wieder in Karlsruhe waren, ging es mit gemeinsamen Wochenendausflügen weiter. Irgendwann stellte Irmgard fest, dass ich einmal Cello gespielt hatte. Ich hatte ja bis zum Abitur die Lehrerbildungsanstalt in Freising besucht. Entweder Geige oder Klavier war für jeden Schüler Pflicht. Ein zweites Instrument war erwünscht. Dies war bei mir das Cello. So wurde sofort ein Klaviertrio ins Leben gerufen mit Irmgard und Wolfgang Walter am Klavier, Klaus Kirchgässner als Geiger und ich mit dem Cello. Von da ab trafen wir uns 30 Jahre lang reihum etwa vier Mal im Jahr und spielten Klaviertrios. Wir hatten alle viel Freude daran.

8 Professor Emeritus (1995–2010)

Am Ende des Sommersemesters 1995 läßt sich Wolfgang Walter von seinen Lehrverpflichtungen entbinden und im Herbst desselben Jahres nimmt Michael Plum als sein Nachfolger den Ruf nach Karlsruhe an. Mit seiner Emeritierung ändert sich der typische Arbeitstag von Wolfgang Walter nur wenig. Spätestens nach Abschluss der letzten von ihm betreuten Doktorarbeit im Januar 1996 sind die regelmäßigen Verpflichtungen zwar entfallen, aber seine Publikationstätigkeit bleibt in den Jahren nach seiner Emeritierung auf hohem Niveau. Allein im Zeitraum 1995–2003 erscheinen 17 Beiträge in wissenschaftlichen Zeitschriften. Er wird als Vortragender auf internationale Konferenzen eingeladen und reist 1999 für eine Reihe von Vorlesungen zu einer internationalen Sommerschule nach Chile. Er nimmt bis Ende der Neunziger Jahre regelmäßig an wissenschaftlichen Tagungen teil, spricht in Seminaren und Kolloquien und steht in engem Kontakt zu seinen Koautoren und Freunden Joe McKenna und Ray Redheffer. Ray Redheffer, dessen Ehefrau Heddy 1994 starb, heiratet 1997 Wolfgang Walters langjährige Sekretärin Irene Jendrasik. Vom Tod seines Freundes Ray Redheffer im Jahr 2005 ist Wolfgang Walter tief betroffen.

Seine Lehrbücher werden weiterhin von ihm intensiv gepflegt und regelmäßig erscheinen Neuauflagen. Die aufwändige Übersetzung und Umstrukturierung der Gewöhnlichen Differentialgleichungen ins Englische [26] erscheint im Jahr 1998. Die Analysis 1 [28] geht 2002 in die siebte, die Analysis 2 [29] 2002 in die fünfte Auflage und die Gewöhnlichen Differentialgleichungen [27] gehen 2000 ebenfalls in die siebte Auflage.

Auch in den ersten Jahren des neuen Jahrtausends bleibt Wolfgang Walter wissenschaftlich aktiv und ist als Mitherausgeber mehrerer wissenschaftlicher Zeitschriften weiterhin an der Front der Forschung und am Puls der Zeit. Er nimmt aktiv am universitären Leben teil, seine mathematische Expertise und sein persönlicher Rat werden an der Fakultät für Mathematik geschätzt und es vergeht kaum ein Tag, an dem er nicht sowohl vormittags als auch nachmittags sein Büro am Institut für Analysis aufsucht und arbeitet.

Auch privat erlebt Wolfgang Walter wie in den Jahrzehnten zuvor glückliche Jahre. Seine Kinder haben im Leben Fuß gefasst und er ist mehrfach Großvater geworden. Alle mir bekannten Zeitzeugen stimmen in der Einschätzung überein, dass Wolfgang

Walters wissenschaftliche Karriere und sein großes familiäres Glück sich gegenseitig bedingen.

Leider ist es Wolfgang Walter aufgrund einer Erkrankung nicht vergönnt, die letzten Jahre seines Lebens so vital und aktiv wie zuvor erleben zu können. Obwohl die Zeichen einer schweren und unheilbaren Krankheit sichtbarer werden, erlebt Wolfgang Walter seinen 80. Geburtstag im Kreis seiner Kollegen und seiner Familie bei einem zu seinen Ehren veranstalteten Festkolloquium an der Universität Karlsruhe. Auch an seinen 81. Geburtstag erinnere ich mich gerne. Bei meinem Besuch im Haus der Familie Walter anlässlich dieses Geburtstages lebt die alte Vertrautheit zwischen ihm als Lehrer und mir als seinem Schüler noch einmal auf. Bei unserer letzten, herzlichen Verabschiedung planen wir ein Wiedersehen, das leider nicht mehr stattfindet.

Seine Familie gibt ihm Kraft und Unterstützung in den beiden letzten Jahren seines Lebens und nur wenige, sehr enge Freunde können ihn regelmäßig besuchen. Wolfgang Walter stirbt am 26. Juni 2010 im Alter von 83 Jahren in Karlsruhe. Seine Kolleginnen und Kollegen, insbesondere in Karlsruhe, seine Mitarbeiterinnen und Mitarbeiter, seine Schüler, Freunde und Koautoren vermissen ihn. Seine exakte Arbeitsweise, seine Liebe zum Detail, sein immerwährender Drang nach Verbesserung, seine Fähigkeit, Fragen zu stellen und neue Einsichten zu gewinnen, haben ihn ausgezeichnet. Durch sein Werk bleibt die Erinnerung an ihn erhalten, die von ihm gewonnenen Erkenntnisse werden zukünftige Forschung inspirieren und sein mathematisches Erbe wird weiteren Generationen den Weg weisen.

9 Ausschnitte aus Wolfgang Walters wissenschaftlichem Werk

9.1 Systeme parabolischer Differentialungleichungen

Sein am häufigsten zitiertes wissenschaftliches Werk ist das 1970 erschienene Buch „Differential and Integral Inequalities“ [22], welches die englische Übersetzung und Erweiterung seines 1964 erschienenen Buches über „Differential- und Integralungleichungen“ [20] darstellt. Die englische Ausgabe von 1970 hat seine Karriere stark gefördert, ihn international bekannt gemacht und wird auch weiterhin häufig zitiert (über 700 Zitate in google scholar). Aus dem Umfeld dieses Werkes möchte ich einige Ergebnisse über Systeme parabolischer Differentialgleichungen erläutern.

Es sei $D \subset \mathbb{R}^N$ eine beschränkte, offene Menge, $T > 0$ und $G = D \times (0, T]$ der zugeordnete parabolische Zylinder. Auf G betrachtet man das folgende System parabolischer Differentialgleichungen für die vektorwertige Funktion $u = (u^1, \dots, u^n) : \overline{G} \to \mathbb{R}^n$

$$u_t^k = f^k(x, t, u, u_x^k, u_{xx}^k) \quad \text{in } G,\ k = 1, \dots, n, \tag{1}$$

bzw. in Kurzschreibweise

$$u_t = f(x, t, u, u_x, u_{xx}) \quad \text{in } G. \tag{2}$$

Dabei steht u_t^k für die partielle Ableitung nach t, u_x^k für den Gradienten, und u_{xx}^k für die Hesse-Matrix der Funktion u^k. Das System (1) wird zum parabolischen System, indem vorausgesetzt wird, dass die Funktionen $f^k(x,t,z,q,r)$ wachsend in der Variablen $r \in S^N$ sind, d.h. falls für zwei symmetrische $N \times N$-Matrizen $r, s \in S^N$ gilt: aus $r \geq s$ (im Sinne von $r - s$ positiv semi-definit) folgt $f^k(x,t,z,q,r) \geq f^k(x,t,z,q,s)$ für alle Werte $(x,t,z,q) \in G \times \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^N$. Oftmals wird das System (1) ergänzt durch Anfangsbedingungen bei $t = 0$ und Randbedingungen auf ∂D, d.h. es werden die Werte von u auf dem parabolischen Rand $\Gamma = \overline{G} \setminus G = (\overline{D} \times \{0\}) \cup (\partial D \times (0,T])$ vorgeschrieben.

Als einfacher Fall sei das semilineare Beispiel $f^k(x,t,z,q,r) = \operatorname{spur} r + g^k(z) + h^k(z^k)$, $k = 1,\ldots,n$, genannt. Da $\operatorname{spur} u^k_{xx} = \sum_{\lambda=1}^N \partial^2_{x_\lambda x_\lambda} u^k$ gerade der Laplace-Operator Δ angewandt auf u^k ist, reduziert sich das parabolische System (1) in diesem Fall auf

$$u^k_t = \Delta u^k + g^k(u) + h^k(u^k) \quad \text{in } G,\ k = 1,\ldots,n.$$

Eine grundsätzliche Frage, die man für das parabolische System (1) stellen kann, ist die Folgende: führen geordnete Anfangs- und Randdaten zu geordneten Lösungen, d.h. folgt für zwei Lösungen $u, \tilde{u}$ mit $u \leq \tilde{u}$ auf Γ die Beziehung $u \leq \tilde{u}$ in G? In vielen physikalischen, chemischen oder biologischen Anwendungen, in denen durch (1) die Konzentration von Stoffen, Chemikalien oder Populationen modelliert wird, ist ein solches qualitatives Verhalten eine sehr wichtige Information. Die Ordnung $u \leq \tilde{u}$ wird dabei komponentenweise verstanden, d.h. zwei Vektoren $y = (y^1,\ldots,y^n)$, $z = (z^1,\ldots,z^n) \in \mathbb{R}^n$ erfüllen die Relation

$$y \leq z, \quad \text{falls gilt} \quad y^i \leq z^i \quad \text{für } i = 1,\ldots,n,$$

und

$$y \ll z, \quad \text{falls gilt} \quad y^i < z^i \quad \text{für } i = 1,\ldots,n.$$

Ein Satz, der es erlaubt, aus der Ordnung zweier Lösungen von (1) auf dem parabolischen Rand Γ auf die Ordnung der Lösungen im parabolischen Zylinder G zu schließen, wird als „Monotoniesatz“ oder „Vergleichssatz“ bezeichnet.

Im skalaren Fall $n = 1$ gelten Monotoniesätze unter geeigneten Annahmen an die Lipschitz-Stetigkeit der rechten Seite bzgl. der Variablen z für parabolische Gleichungen ebenso wie auch für gewöhnliche Differentialgleichungen; zu erwähnen sind dabei die Arbeiten von Nagumo [13, 14] und Westphal [30]. Mit den Arbeiten von Müller [11, 12] und Kamke [5] wurde eine strukturelle Bedingung bei Systemen von gewöhnlichen Differentialgleichungen bekannt, die für Monotoniesätze sorgte. Dieser Bedingung gibt Walter den Namen „Quasimonotonie“, vgl. [20, 22], und sie lautet im Kontext des parabolischen Systems (1) wie folgt:

Definition 1 (Quasimonotonie[1]) Die in (2) auftretende Funktion $f = (f^1,\ldots,f^n)$ mit Komponentenfunktionen $f^k(x,t,z,q,r), k = 1,\ldots,n$ heißt quasimonoton

[1] Anstelle der Begriffe „quasimonoton wachsend“, „quasimonoton fallend“ findet man in der Literatur gelegentlich die Ausdrücke „kooperativ“, „kompetitiv“ (engl. „cooperative“, „competitive“).

wachsend in z, falls für alle $(x,t,q,r) \in G \times \mathbb{R}^N \times S^N$, alle $y,z \in \mathbb{R}^n$ und alle $k \in \{1,\dots,n\}$ gilt:

$$y \le z, \qquad y^k = z^k \quad \Rightarrow \quad f^k(x,t,y,q,r) \le f^k(x,t,z,q,r).$$

Hier wurde zur Vereinfachung angenommen, dass die Funktionen f^k für alle $z \in \mathbb{R}^n$ definiert sind. In diesem Fall bedeutet „Quasimonotonie" von $f(x,t,z,q,r)$ bzgl. der Variablen z kurz gesprochen, dass $f^k(x,t,z,q,r)$ als Funktion von z monoton wachsend ist bezüglich jeder Komponente z^i, $i \neq k$. Betrachtet man das semilineare Beispiel $f^k(x,t,z,q,r) = \operatorname{spur} r + g^k(z) + h^k(z^k)$, so ist Quasimonotonie von $f = (f^1,\dots,f^n)$ in z gleichbedeutend mit Quasimonotonie von $g = (g^1,\dots,g^n)$ in z, d.h. es werden an die Funktionen h^k keinerlei Bedingungen gestellt. Sind die Funktionen $g^k(z) = \sum_{i=1}^N g_i^k z^i$ linear mit $g_i^k \in \mathbb{R}$, so ist g quasimonoton wachsend in z genau dann, wenn die Einträge der Matrix $(g_i^k)_{k,i=1}^N$ außerhalb der Diagonale nichtnegativ sind.

Im Folgenden sei für die Funktion $f = (f^1,\dots,f^n)$ stets vorausgesetzt, dass $f^k(x,t,z,q,r)$ wachsend in $r \in S^N$ ist. Außerdem sollen die auftretenden Funktionen $u,v,w : \overline{G} \to \mathbb{R}^n$ stetig auf $\overline{G}$ sein und in G stetige Ableitungen u_t, u_x, u_{xx}, v_t, v_x, v_{xx}, w_t, w_x, w_{xx} besitzen.

Ausgehend von dem von Walter geprägten Begriff der „Quasimonotonie" lassen sich die folgenden beiden, auf Mlak [9] zurückgehenden Vergleichssätze (Satz 1, Satz 2) formulieren. Die Beweise sind nicht wörtlich, aber doch sinngemäß und im Stil von Wolfgang Walter übernommen und folgen seinem Credo [24]:

> The main results on differential inequalities are simple and elementary and should be proved accordingly. Heavier machinery, in particular existence theory, should only be used when necessary.

Satz 1 (Vergleichsprinzip (I)) *Die Funktion $f = f(x,t,z,q,r)$ sei quasimonoton wachsend in z. Für zwei Funktionen $v,w : \overline{G} \to \mathbb{R}^n$ gelte*

$$v_t - f(x,t,v,v_x,v_{xx}) \ll w_t - f(x,t,w,w_x,w_{xx}) \quad \textit{in } G. \tag{3}$$

Dann folgt aus $v \ll w$ auf Γ die Beziehung $v \ll w$ in G.

Beweis Falls die Aussage falsch ist, so existiert ein Punkt $(\bar{x},\bar{t}) \in \overline{G}$, so dass für die Funktion $u = w - v$ gilt

$$u(\bar{x},\bar{t}) \ge 0, \qquad u^k(\bar{x},\bar{t}) = 0 \quad \text{für ein } k \in \{1,\dots,n\},$$
$$u(x,t) \gg 0, \quad \forall x \in G, 0 \le t < \bar{t}.$$

Aufgrund der Annahmen über v, w auf Γ ist $\bar{x} \in G$ und $\bar{t} > 0$. Es folgt daher

$$u_x^k(\bar{x},\bar{t}) = 0, \qquad u_{xx}^k(\bar{x},\bar{t}) \ge 0 \quad \text{und} \quad u_t^k(\bar{x},\bar{t}) \le 0.$$

Aus (3) folgt im Punkt $(\bar{x},\bar{t})$ der Widerspruch

$$\begin{aligned} u_t^k &> f^k(\bar{x}, \bar{t}, w, w_x^k, w_{xx}^k) - f^k(\bar{x}, \bar{t}, v, v_x^k, v_{xx}^k) \\ &\geq f^k(\bar{x}, \bar{t}, w, v_x^k, v_{xx}^k) - f^k(\bar{x}, \bar{t}, v, v_x^k, v_{xx}^k) \\ &\geq 0. \end{aligned}$$

Im Übergang von der ersten zur zweiten Zeile wurde die Monotonie von $f^k(x, t, z, q, r)$ bzgl. $r \in S^N$ benutzt und im Übergang von der zweiten zur dritten Zeile die Quasimonotonie von f. □

Der Beweis dieses ersten Vergleichsprinzips ist sehr elementar und benötigt neben der Quasimonotonie fast keine Voraussetzungen an f. Lässt man in (3) und bei $v \ll w$ auf Γ die schwachen Ungleichheitszeichen $\leq$ zu, so gilt ebenfalls ein Vergleichsprinzip – allerdings benötigt man dann zusätzlich eine Form von einseitiger Lipschitzbedingung (5) bzw. (5′) für $f(x, t, z, q, r)$ bzgl. z.

Satz 2 (Vergleichsprinzip (II)) *Die Funktion $f = f(x, t, z, q, r)$ sei quasimonoton wachsend in z. Für zwei Funktionen $v, w : \overline{G} \to \mathbb{R}^n$ gelte*

$$v_t - f(x, t, v, v_x, v_{xx}) \leq w_t - f(x, t, w, w_x, w_{xx}) \quad \text{in } G. \tag{4}$$

Ferner sei $\mathbf{e} = (1, \ldots, 1) \in \mathbb{R}^n$ und es gebe Konstanten $K, \Lambda > 0$, so dass für $k = 1, \ldots, n$ und alle $(x, t) \in G$, $\lambda \in (0, \Lambda)$ gilt

$$f^k(x, t, w + \lambda\mathbf{e}, w_x, w_{xx}) - f^k(x, t, w, w_x, w_{xx}) \leq K\lambda. \tag{5}$$

Dann folgt aus $v \leq w$ auf Γ die Beziehung $v \leq w$ in G.

Beweis Sei $w_\epsilon := w + \epsilon e^{\bar{K}t}\mathbf{e}$ für $\bar{K} > K$ und $\epsilon > 0$ hinreichend klein. Dann gilt aufgrund der einseitigen Lipschitzbedingung (5)

$$\begin{aligned} w_{\epsilon,t}^k - f^k(x, t, w_\epsilon, w_{\epsilon,x}, w_{\epsilon,xx}) &= w_t^k + \bar{K}\epsilon e^{\bar{K}t} - f^k(x, t, w_\epsilon, w_x, w_{xx}) \\ &> w_t^k - f^k(x, t, w, w_x, w_{xx}), \end{aligned}$$

und Satz 1 angewandt auf das Funktionenpaar v, w_ϵ liefert $v \ll w_\epsilon$ in G, woraus für $\epsilon \to 0$ die Behauptung folgt. □

In Satz 2 kann man anstelle von (5) auch die Bedingung

$$f^k(x, t, v, v_x, v_{xx}) - f^k(x, t, v - \lambda\mathbf{e}, v_x, v_{xx}) \leq K\lambda \tag{5′}$$

verwenden. Im semilinearen Beispiel $f^k(x, t, z, q, r) = \operatorname{spur} r + g^k(z) + h^k(z^k)$ sind (5), (5′) erfüllt, wenn $g^k \in C^1(\mathbb{R}^n)$ und h^k monoton fallend auf $\mathbb{R}$ ist.

Satz 2 lässt sich insbesondere dann auf Funktionen u, v, w anwenden, wenn (5), (5′) gilt sowie

$$\begin{aligned} &v_t \leq f(x, t, v, v_x, v_{xx}), \qquad u_t = f(x, t, u, u_x, u_{xx}), \\ &w_t \geq f(x, t, w, w_x, w_{xx}) \text{ in } G \end{aligned}$$

und $v \le u \le w$ auf Γ. Die Folgerung $v \le u \le w$ in G liefert damit Einschließungen von Lösungen u des parabolischen Systems (2).

Der von Walter eingeführte Begriff der „Quasimonotonie" erweist sich als sehr erfolgreich, denn mit Hilfe dieses Begriffes können zahlreiche Ergebnisse für parabolische Systeme bewiesen werden. Von Volkmann [19] wird der Begriff „Quasimonotonie" verallgemeinert für Funktionen, die ihre Werte in topologischen Vektorräumen annehmen; dies zieht auf dem Gebiet der gewöhnlichen und partiellen Differentialgleichungen in Banachräumen sowie in der nichtlinearen Funktionalanalysis eine Vielzahl von Ergebnissen und Publikationen nach sich.

In Walters Buch [22] finden sich wesentlich allgemeinere Versionen der obigen beiden Sätze. Unter anderem interessiert er sich auch sehr für den Fall, dass das zugrundeliegende parabolische System keine Quasimonotonie-Eigenschaft hat. In diesem Zusammenhang findet Walter folgenden Satz, der im Falle gewöhnlicher Differentialgleichungssysteme erster Ordnung auf Müller [12] zurückgeht. Dabei ist die verwendete einseitige Lipschitzbedingung (6), (7) an $f(x,t,z,q,r)$ bzgl. z stärker als diejenige von Satz 2. Für das semilineare Beispiel $f^k(x,t,z,q,r) = \operatorname{spur} r + g^k(z) + h^k(z^k)$ ist (6), (7) erfüllt, wenn $g^k \in C^1(\mathbb{R}^n)$ und h^k monoton fallend auf $\mathbb{R}$ ist.

Satz 3 (Vergleichsprinzip (III)) *Für zwei Funktionen $v, w : \overline{G} \to \mathbb{R}^n$ mit $v \le w$ in $\overline{G}$ und für $k = 1, \dots, n$ gelte*

$$v_t^k \le f^k(x,t,z,v_x^k,v_{xx}^k) \quad \textit{in } G$$
$$\textit{für alle } z \in \mathbb{R}^n \textit{ mit } v(x,t) \le z \le w(x,t),\, v^k(x,t) = z^k,$$
$$w_t^k \ge f^k(x,t,z,w_x^k,w_{xx}^k) \quad \textit{in } G$$
$$\textit{für alle } z \in \mathbb{R}^n \textit{ mit } v(x,t) \le z \le w(x,t),\, w^k(x,t) = z^k.$$

Ferner gebe es Konstanten $K, \Lambda > 0$, so dass für $k = 1, \dots, n$ und alle $(x,t) \in G$, $z, \tilde{z} \in \mathbb{R}^n$ mit $v(x,t) \le z \le w(x,t)$, $\|z - \tilde{z}\|_\infty \le \Lambda$ gilt:

$$f^k(x,t,z,v_x,v_{xx}) - f^k(x,t,\tilde{z},v_x,v_{xx}) \le K\|z-\tilde{z}\|_\infty \textit{ für } z^k \ge \tilde{z}^k \tag{6}$$

und

$$f^k(x,t,\tilde{z},w_x,w_{xx}) - f^k(x,t,z,w_x,w_{xx}) \le K\|z-\tilde{z}\|_\infty \textit{ für } \tilde{z}^k \ge z^k. \tag{7}$$

Ist u Lösung von (2), dann folgt aus $v \le u \le w$ auf Γ die Einschließung $v \le u \le w$ in G.

Beweis Zuerst wird die entsprechende Aussage bewiesen, falls in den Differentialungleichungen für v, w die Relationen $\le, \ge$ durch strikte Ungleichungen $<, >$ ersetzt werden und ebenso die Voraussetzung $v \le u \le w$ auf Γ durch $v \ll u \ll w$ auf Γ ersetzt wird. Falls etwa die Behauptung $v \ll u$ in $\overline{G}$ nicht gilt, so existiert wie im Beweis von Satz 1 ein Punkt $(\bar{x},\bar{t}) \in G$ mit

$$v(\bar{x},\bar{t}) \le u(\bar{x},\bar{t}), \qquad v^k(\bar{x},\bar{t}) = u^k(\bar{x},\bar{t}) \quad \text{für ein } k \in \{1,\dots,n\},$$
$$v(x,t) \ll u(x,t), \quad \forall x \in G, 0 \le t < \bar{t}$$

sowie

$$v_x^k(\bar{x},\bar{t}) = u_x^k(\bar{x},\bar{t}), \qquad v_{xx}^k(\bar{x},\bar{t}) \le u_{xx}^k(\bar{x},\bar{t}) \quad \text{und} \quad v_t^k(\bar{x},\bar{t}) \ge u_t^k(\bar{x},\bar{t}).$$

Mit Hilfe der Differentialungleichung für v, in der $z = u(\bar{x},\bar{t})$ zulässig ist, folgt im Punkt $(\bar{x},\bar{t})$ der Widerspruch

$$v_t^k < f^k(\bar{x},\bar{t},u(\bar{x},\bar{t}),v_x^k,v_{xx}^k) \le f^k(\bar{x},\bar{t},u(\bar{x},\bar{t}),u_x^k,u_{xx}^k) = u_t^k.$$

Analog beweist man die Ungleichung $u \ll w$ in $\overline{G}$. Die Behauptung mit den schwachen Ungleichheitszeichen wird bewiesen, indem man v, w durch $v_\epsilon = v - \epsilon e^{\tilde{K}t}\mathbf{e}$, $w_\epsilon = w + \epsilon e^{\tilde{K}t}\mathbf{e}$ mit $\epsilon > 0$, $\tilde{K} > K$ ersetzt, die Lipschitzbedingung (6), (7) ausnutzt, um den Satz mit strikten Ungleichheitszeichen anwenden zu können, und schließlich $\epsilon \searrow 0$ streben lässt. □

Satz 3 nimmt eine sehr prägnante Form an im Fall $n = 2$, $v(x,t) = \text{const.} = (\alpha,\gamma) \in \mathbb{R}^2$, $w(x,t) = \text{const.} = (\beta,\delta) \in \mathbb{R}^2$. In diesem Fall reduzieren sich die Voraussetzungen von Satz 3 an $f = (f^1, f^2)$ neben der einseitigen Lipschitzbedingung (6), (7) auf die beiden Bedingungen

$$f^1(x,t,(\alpha,z^2),0,0) \ge 0 \ge f^1(x,t,(\beta,z^2),0,0) \quad \text{in } G \text{ für alle } z^2 \in [\gamma,\delta],$$
$$f^2(x,t,(z^1,\gamma),0,0) \ge 0 \ge f^2(x,t,(z^1,\delta),0,0) \quad \text{in } G \text{ für alle } z^1 \in [\alpha,\beta].$$

Betrachtet man das von v und w aufgespannte Rechteck $R = [\alpha,\beta] \times [\gamma,\delta] \subset \mathbb{R}^2$, so besagt Satz 3, dass für Lösungen u von (2) aus $u(\Gamma) \subset R$ die Aussage $u(G) \subset R$ folgt. In diesem Zusammenhang spricht man davon, dass R ein invariantes Rechteck ist. Die Bedingungen an f lassen sich in diesem Fall so verstehen, dass gilt

$$f(x,t,z,0,0) \cdot \nu(z) \le 0 \quad \text{für alle } z \in \partial R,$$

wobei $\nu(z)$ den äußeren Normalenvektor von R in z bezeichnet. Diese Bedingung an f kann man so interpretieren, dass der parabolische Fluss, der durch das Vektorfeld f repräsentiert wird, in die Menge R hineinzeigt.

Es stellt sich die allgemeinere Frage, unter welchen Bedingungen eine Teilmenge $S \subset \mathbb{R}^n$ die Eigenschaft der Invarianz besitzt, d.h. unter welchen Bedingungen an S folgt für Lösungen u von (2) aus $u(\Gamma) \subset S$ die Aussage $u(G) \subset S$? Gemeinsam mit Ray Redheffer geht Wolfgang Walter dieser Frage in mehreren Arbeiten, vgl. [16, 17], nach und es gelingt ihnen, die Frage zu beantworten für semilineare parabolische Systeme der Form

$$u_t^k = Lu^k + g^k(x,t,u,u_x) \quad \text{in } G,\ k = 1,\dots,n \tag{8}$$

mit einem Operator $L = \sum_{\lambda,\mu=1}^N a_{\lambda\mu}(x,t)\partial^2_{x_\lambda x_\mu} + \sum_{\lambda=1}^N b_\lambda(x,t)\partial_{x_\lambda}$, der für alle n Gleichungen des Systems derselbe ist und für dessen Koeffizienten nur die positive Semidefinitheit der Matrix $(a_{\lambda\mu})_{\lambda,\mu=1}^N$ vorausgesetzt werden muss. Unter Lipschitzbedingungen an die Funktionen $g^k(x,t,z,q)$ bzgl. der Variablen $z \in \mathbb{R}^n$ lautet die

Antwort, dass die Bedingung

$$g(x,t,z,q)\cdot\nu(z)\le 0 \quad \text{für alle } z\in\partial S$$
$$\text{und alle } q=(q^1,\dots,q^N)\in\mathbb{R}^{Nn}, q^\lambda\in\mathbb{R}^n \text{ mit } q^\lambda\cdot\nu(z)=0, \lambda=1,\dots,N,$$

wobei $\nu(z)$ eine äußere Normale an S in z bezeichnet, und die Konvexität der abgeschlossenen Menge $S\subset\mathbb{R}^n$ eine hinreichende Bedingung für ihre Invarianz unter (8) ist. Invarianzaussagen dieser Form spielen eine wesentliche Rolle z.B. bei der Untersuchung des Langzeitverhaltens der Lösungen von Systemen von Reaktions-Diffusionsgleichungen.

9.2 Hängebrückenmodelle

1987 veröffentlichen Lazer und McKenna eine Arbeit [6] über ein Modell zur Beschreibung von Hängebrücken. In diesem Modell werden das Brückenbett als elastischer Balken und die Kabel der Hängebrücke als Federn modelliert, deren Rückstellkraft bei Streckung gemäß dem Hookeschen Gesetz angenommen wird, während sie (in Abweichung vom Hookeschen Gesetz) keine Rückstellkraft bei Kompression aufweisen. Für die Auslenkung $u(x,t)$ eines solchen Brückenbetts schlagen Lazer und McKenna die Wellengleichung

$$u_{tt}+K_1u_{xxxx}+K_2u^+=W(x)+\epsilon f(x,t)$$

vor. Dabei sind K_1, $K_2>0$ positive Konstanten, $u>0$ entspricht einer Auslenkung nach unten, $u^+=\max\{u,0\}$, $W(x)$ ist die Massendichte der eindimensional modellierten Brücke und $\epsilon f(x,t)$ modelliert eine kleine äußere Kraft (z.B. Wind). Unter geeigneter Reskalierung der Variablen und unter der Annahme homogener Massenverteilung lässt sich dieses Modell reduzieren zu

$$u_{tt}+u_{xxxx}+bu^+=1+\epsilon h(x,t) \tag{9}$$

mit $b>0$, $\epsilon\in\mathbb{R}$ klein. Als Walter über McKenna von diesem Modell erfährt, ist er davon sofort angetan und beginnt mit McKenna an zwei Aspekten zu arbeiten: periodische, stehende Wellen [7] und wandernde Wellen [8].

Bei der Untersuchung periodischer, stehender Wellen betrachten McKenna und Walter (9) auf $Q=(-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2})\times(-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2})$, ergänzen (9) mit Randbedingungen („hinged boundary conditions“)

$$u\left(-\frac{\pi}{2},t\right)=u\left(\frac{\pi}{2},t\right)=u_{xx}\left(-\frac{\pi}{2},t\right)=u_{xx}\left(\frac{\pi}{2},t\right)=0 \tag{10}$$

und beweisen folgendes Ergebnis, vgl. [7].

Satz 4 *Sei $h\in L^2(Q)$ gerade in x,t mit $\|h\|_{L^2(Q)}=1$ und $3<b<15$. Dann existiert $\epsilon_0>0$ so, dass für $|\epsilon|<\epsilon_0$ die Gleichung (9) auf Q mit Randbedingungen (10) mindestens zwei zeitlich π-periodische Lösungen besitzt, die gerade in x,t sind.*

Der Operator $L = \frac{\partial^2}{\partial t^2} + \frac{\partial^4}{\partial x^4}$ mit Randbedingungen (10) und π-Periodizität in t ist selbstadjungiert auf dem Hilbertraum H der in x und t geraden L^2-integrierbaren Funktionen auf Q. Sein Spektrum ist daher reell, aber nach oben und unten unbeschränkt. Die Eigenwerte von L in der Nähe von 0 sind gegeben durch $\lambda_{-2} = -15, \lambda_{-1} = -3, \lambda_1 = 1, \lambda_2 = 17$. Die Bedingung an b in Satz 4 bedeutet also, dass $-b$ zwischen zwei aufeinanderfolgenden Eigenwerten von L liegt. Würde man anstelle von (9) die zugehörige lineare Gleichung $u_{tt} + u_{xxxx} + bu = 1 + \epsilon h(x, t)$ betrachten, so gäbe es nur eine eindeutige Lösung mit Randbedingung (10), die gerade in x, t und π-periodisch in t ist. Satz 4 belegt also, dass die Nichtlinearität u^+ in (9) neue Lösungen hervorbringt, die es im linearen Modell nicht gibt. Als McKenna und Walter Satz 4 beweisen, können sie auf ihre reichhaltige Erfahrung im Beweis von Existenzsätzen für nichtlineare Randwertprobleme zurückgreifen, bei denen die auftretende Nichtlinearität in Resonanz mit dem Spektrum des linearisierten Problems steht.

Die im Folgenden geschilderte Beweisidee von McKenna und Walter ist ein schönes Beispiel für die Ausnutzung von a-priori-Schranken im Wechselspiel mit dem auf Leray und Schauder zurückgehenden topologischen Abbildungsgrad. Der Abbildungsgrad ist eine ganzzahlige Abbildung d_{LS}, die einer beschränkten, offenen, nichtleeren Menge $\Omega \subset X$ eines Banachraumes X, einer Abbildung $\mathrm{Id} - F : \overline{\Omega} \to X$ sowie einem Element $z \in X$, $z \notin (\mathrm{Id} - F)(\partial\Omega)$ eine ganze Zahl zuordnet. Dabei ist z.B. vorauszusetzen, dass $F : \overline{\Omega} \to X$ stetig ist und beschränkte, abgeschlossene Mengen auf kompakte Mengen abbildet. Falls $\mathrm{d}_{LS}(\mathrm{Id} - F, \Omega, z) \neq 0$ ist, so besitzt die Gleichung $x - F(x) = z$ eine Lösung $x \in \Omega$. Anstatt $\mathrm{d}_{LS}(\mathrm{Id} - F, \Omega, z)$ schreibt man auch $\mathrm{d}_{LS}(u - F(u), \Omega, z)$.

Beweisskizze

(a) Schwache Lösungen von (9), (10) erhält man als Lösungen der Gleichung

$$u - L^{-1}(1 - bu^+ + \epsilon h) = 0$$

im Hilbertraum $(H, \|\cdot\|)$ der in x und t geraden L^2-integrierbaren Funktionen auf Q. Dabei steht L^{-1} für den Lösungsoperator zum linearen Problem $Lw = f$ mit Randbedingungen (10) und π-Periodizität in t für die Lösung w.

(b) Fixiert man eine kleine positive Zahl $\alpha > 0$, betrachtet $b \in [-1+\alpha, 15-\alpha]$ sowie $\epsilon \in [-1, 1]$ und berücksichtigt die Normierung $\|h\| = 1$, so existiert ein $R_0 > 0$ derart, dass für jede Lösung u von (9), (10) die a-priori-Schranke $\|u\| < R_0$ gilt. Denn falls es keine solche Schranke gäbe, dann würde eine Folge u_k von Lösungen existieren mit $\|u_k\| \to \infty$ und $w_k := u_k/\|u_k\| \to w_0$ für $k \to \infty$, wobei w_0 eine nicht-triviale Lösung von $Lw_0 + bw_0^+ = 0$ mit „hinged boundary conditions" wäre. Ein Widerspruch – denn die Existenz einer solchen nicht-trivialen Lösung hatten McKenna und Walter bereits zuvor ausschließen können.

(c) Mit Hilfe der a-priori-Schranke und der Invarianz des Leray-Schauder-Abbildungsgrades bzgl. des Homotopieparameters $b \in [-1 + \alpha, 15 - \alpha]$ folgt für alle Radien $R \geq R_0$

$$\mathrm{d}_{LS}(u - L^{-1}(1 - bu^+ + \epsilon h), B_R(0), 0) = \mathrm{d}_{LS}(u - L^{-1}(1 + \epsilon h), B_R(0), 0) = 1. \tag{11}$$

(d) Als nächstes zeigen McKenna und Walter, dass das elliptische Randwertproblem

$$y^{(iv)} + by^+ = 1 \text{ in } \left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right) \quad \text{mit } y\left(\pm\frac{\pi}{2}\right) = y_{xx}\left(\pm\frac{\pi}{2}\right) = 0$$

genau eine Lösung besitzt. Diese Lösung $y \in H$ ist auch eine stationäre Lösung von (9), (10) im Fall $\epsilon = 0$. Betrachtet man eine Kugel $B_\gamma(y)$ mit hinreichend kleinem Radius $\gamma > 0$ so zeigen McKenna, Walter, dass das folgende Problem mit $u^- = -\min\{u, 0\}$

$$Lu + bu = 1 + \lambda(\epsilon h - bu^-) \quad \text{in } Q \text{ mit Randbedingungen (10)}$$

für $\lambda \in [0, 1]$ und $|\epsilon| < \epsilon_0$ keine Lösung auf $\partial B_\gamma(y)$ hat. Daher ist folgende Berechnung des Abbildungsgrades unter Ausnutzung der Homotopieinvarianz in $\lambda \in [0, 1]$ gerechtfertigt:

$$\begin{aligned} &\mathrm{d}_{LS}(u - L^{-1}(1 - bu^+ + \epsilon h), B_\gamma(y), 0) \\ &\quad = \mathrm{d}_{LS}(u - L^{-1}(1 - bu + \lambda(\epsilon h - bu^-)), B_\gamma(y), 0) \\ &\quad = \mathrm{d}_{LS}(u - L^{-1}(1 - bu), B_\gamma(y), 0) \\ &\quad = \mathrm{d}_{LS}(u + L^{-1}(bu), B_\gamma(0), 0) \\ &\quad = -1, \end{aligned} \tag{12}$$

wobei für die letzte Auswertung des Abbildungsgrades entscheidend ist, dass unter der Bedingung $3 < b < 15$ der Operator $\mathrm{Id} + bL^{-1}$ auf H nur einen negativen Eigenwert besitzt. Schließlich folgt aus (11), (12) und der Ausschöpfungseigenschaft des Abbildungsgrades, dass (9), (10) mindestens zwei in x, t gerade und in der Zeit π-periodische Lösungen besitzt: eine in $B_\gamma(y)$ und eine in $B_R(0) \setminus \overline{B_\gamma(y)}$ für $R \geq R_0$.

□

Sucht man für (9) Lösungen in Form wandernder anstatt stehender Wellen, so betrachtet man (9) für $(x, t) \in \mathbb{R}^2$. Außerdem steht in diesem Fall die äußere Kraft $h(x, t)$ nicht im Vordergrund, so dass man $\epsilon = 0$ wählt. Mit Hilfe des Ansatzes

$$u(x, t) = \frac{1}{b} y(b^{-1/4} x - b^{-1/2} ct)$$

reduziert sich (9) auf

$$y^{(iv)} + c^2 y'' + y^+ = 1 \tag{13}$$

bzw., indem man $z = y - 1$ setzt, auf

$$z^{(iv)} + c^2 z'' + z = 0 \quad \text{falls } z(x) \geq -1, \tag{14}$$

$$z^{(iv)} + c^2 z'' - 1 = 0 \quad \text{falls } z(x) \leq -1. \tag{15}$$

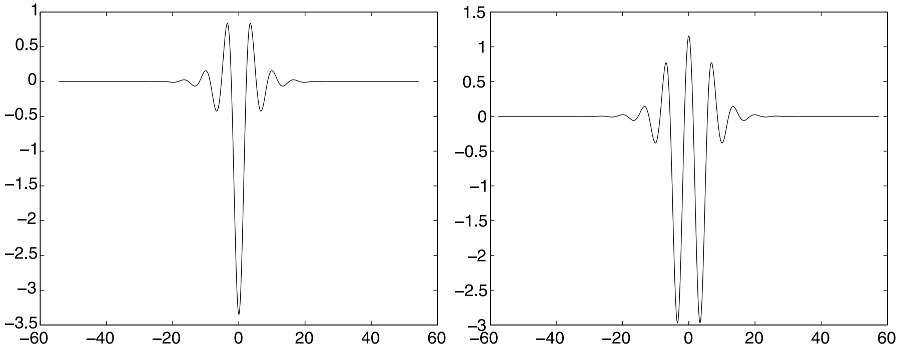


Abb. 1 Links „Travelling wave" wie in McKenna, Walter [8]. Rechts „Travelling wave" wie in Breuer, Horák, McKenna und Plum [2]

Gesucht werden „homokline" Lösungen mit $z(x) \to 0$ (exponentiell) für $|x| \to \infty$. In ihrer zweiten Arbeit [8] konstruieren McKenna und Walter explizite Lösungen, indem sie auf einem Intervall $[-r, r]$ eine gerade Lösung von (15) an der Stelle $t = \pm r$ mit einer exponentiell gegen 0 fallenden Lösung von (14) zusammenpassen. Die vier Übergangsbedingungen, die entstehen, um eine glatte Lösung zu erhalten, führen auf transzendente Gleichungen für die freien Parameter der Lösungsscharen und für die Wellengeschwindigkeit c. Die Suche nach Lösungen der transzendenten Gleichungen ist in geschlossener Form nicht möglich. Daher benutzen McKenna und Walter Standardsoftware zur numerischen Berechnung der Nullstellen der transzendenten Gleichungen. Sobald die Parameter und die Wellengeschwindigkeit c numerisch bestimmt sind, ist anschließend noch zu überprüfen, dass die Lösungen tatsächlich ≥ -1 auf $(-\infty, -r)$, (r, ∞) bzw. ≤ -1 auf $[-r, r]$ sind. Es stellt sich heraus, dass die Wellengeschwindigkeit c in einem Intervall $[c_1, c_2]$ liegt mit $0 < c_1 < c_2 < \sqrt{2}$. Obwohl hierbei nur relativ einfache Rechnungen notwendig sind, finden McKenna und Walter in [8] auf diese Weise einige sehr interessante „travelling wave"-Lösungen von (14), (15), die den in Abb. 1 dargestellten sehr ähnlich sind.[2]

Die beiden Arbeiten [7, 8] von McKenna und Walter, die bisher 28 bzw. 24 Mal zitiert wurden, haben weitere interessante Forschungsarbeiten nach sich gezogen, über die hier in einer kurzen Übersicht berichtet wird:

(1) Chen und McKenna [3] gaben 1995 einen Beweis der Existenz von Lösungen von (13) für alle Wellengeschwindigkeiten $c \in (0, \sqrt{2})$ mit Hilfe variationeller Methoden. Gleichzeitig benutzten sie einen von Choi und McKenna [4] entwickelten numerischen Mountain Pass Algorithmus, um Approximationen der wandernden Wellen konkret zu bestimmen. Ebenso wurden hier erstmalig die Stabilitäts- und Interaktionseigenschaften dieser wandernden Wellen numerisch untersucht.

(2) Chen und McKenna erkannten, dass die Nichtlinearität $(z + 1)^+ - 1$ für numerische Rechnungen wenig geeignet war, und schlugen vor, sie durch $e^z - 1$ zu

[2] Die Graphiken aus [8] sind nicht erhalten. Die Graphiken aus Abb. 1 stammen aus dem Besitz von J. Horák.

ersetzen. Diese Nichtlinearität hat für $z \ll -1$ und für $z > 0$ (aber nicht zu groß) praktisch denselben Effekt wie die zuvor betrachtete.

(3) Smets und van den Berg [18] bewiesen 2002 die Existenz von mindestens einer abklingenden Lösung der Gleichung $z^{(iv)} + c^2 z'' + e^z - 1 = 0$ für fast alle Wellengeschwindigkeiten $c \in (0, \sqrt{2})$ ebenfalls unter Verwendung variationeller Methoden.

(4) 2006 untersuchten Breuer, Horák, McKenna und Plum [2] die Gleichung $z^{(iv)} + c^2 z'' + e^z - 1 = 0$ hinsichtlich Existenz abklingender Lösungen. Mit Hilfe computerunterstützter Methoden gelang ihnen der analytische Nachweis und die rigorose Einschließung von 36 unterschiedlichen Lösungen bei der Wellengeschwindigkeit $c = 1.3$, vgl. Abb. 1. Dieses Resultat steht in bemerkenswertem Kontrast zum Ergebnis von Smets und van den Berg: die Aussage *mindestens eine Lösung für fast alle c* steht der Aussage *mindestens 36 Lösungen bei festem* $c = 1.3$ gegenüber.

(5) 2002 publizierte Moore eine Arbeit [10], in der neben longitudinalen Oszillationen auch Torsionsoszillationen quer zum Brückenbett modelliert wurden. Mit Hilfe von Abbildungsgradtheorie konnte Moore die Existenz periodischer Schwingungen nachweisen. Auffällig war bei den numerischen Experimenten, dass große longitudinale Oszillationen, die durch kleine Torsionsoszillationen gestört werden, beinahe ansatzlos in starke Torsionsoszillationen übergehen können. Vergleichbare Beobachtungen wurden 1940 von Augenzeugen beim Einsturz der Tacoma Narrows Bridge gemacht, siehe z.B. http://de.wikipedia.org/wiki/Tacoma-Narrows-Brücke.

Wolfgang Walter hat die Weiterentwicklung der Arbeiten zu Hängebrücken aufmerksam und mit großem Interesse verfolgt. Die Benutzung unterschiedlicher Methoden aus der Analysis partieller Differentialgleichungen, der Numerik und der Modellierung, die bei diesem Problem nötig und von gleichrangiger Bedeutung sind, entspricht sehr gut seiner Vorstellung von Mathematik.

Danksagung Für die Unterstützung bei der Verfassung dieses Nachrufes danke ich sehr der Familie Walter, Ulrich Kulisch und Joe McKenna sowie Marion Ewald, Hans-Christoph Grunau, Gerd Herzog, Jiří Horák, Roland Lemmert, Michael Plum, Irene Redheffer, Reinhard Redlinger, Klaus Ritter, Alexander Voigt, Herbert Weigel und dem Bildarchiv des Mathematischen Forschungsinstituts Oberwolfach.

Literatur

1. Agarwal, R.P. (ed.): Inequalities and Applications. World Scientific Series in Applicable Analysis, Bd. 3. World Scientific, River Edge (1994) xii+592 S.
2. Breuer, B., Horák, J., McKenna, P.J., Plum, M.: A computer-assisted existence and multiplicity proof for travelling waves in a nonlinearly supported beam. J. Differ. Equ. **224**, 60–97 (2006)
3. Chen, Y., McKenna, P.J.: Traveling waves in a nonlinearly suspended beam: theoretical results and numerical observations. J. Differ. Equ. **136**, 325–355 (1997)
4. Choi, Y.S., McKenna, P.J.: A mountain pass method for the numerical solution of semilinear elliptic problems. Nonlinear Anal. **20**, 417–437 (1993)
5. Kamke, E.: Zur Theorie der Systeme gewöhnlicher Differentialgleichungen II. Acta Math. **58**, 57–85 (1932)
6. Lazer, A.C., McKenna, P.J.: Large scale oscillating behaviour in loaded asymmetric systems. Ann. Inst. Henri Poincare, Anal. Non Lineaire **4**, 244–274 (1987)

7. McKenna, P.J., Walter, W.: Nonlinear oscillations in a suspension bridge. Arch. Ration. Mech. Anal. **98**(2), 167–177 (1987)
8. McKenna, P.J., Walter, W.: Travelling waves in a suspension bridge. SIAM J. Appl. Math. **50**(3), 703–715 (1990)
9. Mlak, W.: Differential inequalities of parabolic type. Ann. Pol. Math. **3**, 349–354 (1957)
10. Moore, K.S.: Large torsional oscillations in a suspension bridge: multiple periodic solutions to a nonlinear wave equation. SIAM J. Math. Anal. **33**, 1411–1429 (2002)
11. Müller, M.: Über das Fundamentaltheorem in der Theorie der gewöhnlichen Differentialgleichungen. Math. Z. **26**, 619–645 (1926)
12. Müller, M.: Über die Eindeutigkeit der Integrale eines Systems gewöhnlicher Differentialgleichungen und die Konvergenz einer Gattung von Verfahren zur Approximation dieser Integrale. Sitz.-ber. Heidelberg. Akad. Wiss., Math.-Naturw. Kl., 9. Abh. (1927)
13. Nagumo, M.: Miszellen zur Theorie der partiellen Differentialgleichungen, Teil III (japanisch). Kansū-Hōteisiki, 15, 15–26 (1935 oder 1939). Referenziert in [14]
14. Nagumo, M., Simoda, S.: Note sur l'inégalité différentielle concernant les équations du type parabolique. Proc. Jpn. Acad. **27**, 536–539 (1951)
15. Redheffer, R.M.: Wolfgang Walter. Inequalities and applications. World Scientific Series in Applicable Analysis, Bd. 3, S. 1–16. World Sci., River Edge (1994). Erschienen in [1]
16. Redheffer, R.M., Walter, W.: Invariant sets for systems of partial differential equations. I. Parabolic equations. Arch. Ration. Mech. Anal. **67**(1), 41–52 (1978)
17. Redheffer, R.M., Walter, W.: Invariant sets for systems of partial differential equations. II. First-order and elliptic equations. Arch. Ration. Mech. Anal. **73**(1), 19–29 (1980)
18. Smets, D., van den Berg, J.B.: Homoclinic solutions for Swift-Hohenberg and suspension bridge type equations. J. Differ. Equ. **184**, 78–96 (2002)
19. Volkmann, P.: Gewöhnliche Differentialungleichungen mit quasimonoton wachsenden Funktionen in topologischen Vektorräumen. Math. Z. **127**, 157–164 (1972)
20. Walter, W.: Differential- und Integral-Ungleichungen und ihre Anwendung bei Abschätzungs- und Eindeutigkeitsproblemen. Springer Tracts in Natural Philosophy, Bd. 2. Springer, Berlin (1964). xiii+269 S.
21. Walter, W.: Das wissenschaftliche Werk von Erich Kamke. Jber. Deutsch. Math.-Verein. 69(4), Abt. 1, 193–205 (1967/68)
22. Walter, W.: Differential and integral inequalities. Übersetzt aus dem Deutschen von Lisa Rosenblatt und Lawrence Shampine. Ergebnisse der Mathematik und ihrer Grenzgebiete, Bd. 55. Springer, New York (1970). x+352 S.
23. Walter, W.: Einführung in die Potentialtheorie. Mit einem Kapitel über elliptische Differentialgleichungen 2. Ordnung. B. I.-Hochschulskripten, No. 765a*. Bibliographisches Institut, Mannheim (1971). 174 S.
24. Walter, W.: Differential inequalities. Inequalities (Birmingham, 1987), S. 249–283. Lecture Notes in Pure and Appl. Math., Bd. 129. Dekker, New York (1991)
25. Walter, W.: Einführung in die Theorie der Distributionen. 3. Aufl. Bibliographisches Institut, Mannheim (1994). xiv+240 S.
26. Walter, W.: Ordinary differential equations (Übersetzung der 6. deutschen Aufl. (1996) von Russell Thompson). Graduate Texts in Mathematics, Bd. 182. Springer, New York (1998). xii+380 S.
27. Walter, W.: Gewöhnliche Differentialgleichungen. Eine Einführung. 7. Aufl. Springer-Lehrbuch. Springer, Berlin (2000). xiv+402 S.
28. Walter, W.: Analysis 1. 7. Aufl. Springer-Lehrbuch. Springer, Berlin (2004). xvi+398 S.
29. Walter, W.: Analysis 2. 5. erw. Aufl. Springer-Lehrbuch. Springer, Berlin (2002). xiv+408 S.
30. Westphal, H.: Zur Abschätzung der Lösungen nichtlinearer parabolischer Differentialgleichungen. Math. Z. **51**, 690–695 (1949)

Wolfgang Reichel ist seit 2007 Professor für mathematische Physik am Karlsruher Institut für Technologie (KIT). Er hat 1996 in Karlsruhe bei Wolfgang Walter promoviert und sich 2002 in Basel habilitiert. In den Jahren 1997–2006 war er an Universitäten in Minneapolis, Köln, Basel, Aachen, Zürich und Giessen tätig. Seine Forschungsinteressen liegen auf dem Gebiet der partiellen Differentialgleichungen, der variationellen Methoden und der nichtlinearen Analysis.

Jahresber Dtsch Math-Ver (2011) 113:81–109
DOI 10.1365/s13291-011-0016-9

ÜBERSICHTSARTIKEL

Stochastic Partial Differential Equations: Kolmogorov Operators and Invariant Measures

Wilhelm Stannat

Received: 15 October 2010 / Published online: 10 February 2011

Abstract Stochastic partial differential equations are an important tool in the modelling and analysis of complex random dynamical systems. We present a survey on the semigroup approach to their solution and on the main concepts applied today to analyze them. In particular, we review recent results obtained on the existence of invariant measures, (improved) moment estimates and their support properties, as well as uniqueness results for associated Kolmogorov operators. The survey is complemented with various illustrations and a discussion of those examples that have been essential for the development of the theory.

Keywords Stochastic partial differential equations · Mild solutions · Kolmogorov operators · Invariant measures · Moment estimates · Krylov–Bogoliubov theory · L^p-uniqueness

Mathematics Subject Classification (2000) 60H15 · 28D10 · 35R15 · 35R60 · 60-02

W. Stannat (✉)
Fachbereich Mathematik, Technische Universität Darmstadt, Schloßgartenstraße 7,
64289 Darmstadt, Germany
e-mail: stannat@mathematik.tu-darmstadt.de

1 Introduction

The modelling and analysis of random dynamical systems with high complexity and infinitely many degrees of freedom is one of the biggest and persistent challenges in stochastics. A common (physical) perspective in stochastics is to think of random dynamical systems, if appropriate, as a system of randomly moving and interacting particles. Whereas random motion and interaction are often described only locally (e.g. for a finite number of neighbouring particles), one is on the other hand interested in calculating global statistical quantities of the whole system.

The first theories developed in order to understand complex systems started from heuristic considerations on the microscopic level and aimed at describing one or few statistical quantities. As an example, Brownian motion and associated stochastic differential equations proved to be a very successful way in kinetic gas theory to describe the motion of one or few gas molecules. Combining this with the ergodic hypothesis, assuming a one-particle motion to be a typical representative for the whole system, leads to the desired macroscopic quantities, like e.g. pressure in the above example.

Diffusion approximations for one or few statistical quantities of a system have been derived later, partly, in order to substantiate the ergodic hypothesis. Assuming the Markov property of the particle motions, the analytical treatment of Markov processes, developed by Kolmogorov, allowed to describe the transition probabilities of one or few particles as the solution of a Cauchy problem for its infinitesimal generator, which, in many cases, can be represented as an elliptic partial differential operator of up to second order. Although the interplay between the stochastic process and its infinitesimal generator in general is quite involved, this approach turned out to be extremely useful. One example is the concept of martingale solutions of stochastic differential equations.

The further development of the mathematical theory of stochastic processes, in particular in infinite dimensional state spaces, finally allowed to deal with infinitely many particles. In this context, stochastic partial differential equations provide an approach to rigorously model and analyze all statistical information contained in the whole system (see e.g. [13]).

Consider as an example microscopic fluctuations in heat propagation. Let Δ be the Laplace operator on $[0, 1]$ with Neumann boundary conditions. We regard the associated heat equation

$$u_t(t,\xi) = \frac{1}{2}\Delta u(t,\xi), \qquad u(0,\xi) = u_0(\xi), \tag{1}$$

as an evolution equation on $L^2([0, 1])$. $u(t,\xi)$ may be represented as the statistical average

$$u(t,\xi) = E\left(u_0(B(t))\right) \tag{2}$$

of the observable u_0 w.r.t. a single Brownian particle $B(t)$, $t \ge 0$, starting in ξ and moving on $[0, 1]$ with reflecting boundary conditions. The distribution $\mu_t(\xi,\cdot) = P \circ B(t)^{-1}$ of $B(t)$ under P, given by $\int u_0(\bar{\xi})\mu_t(\xi, d\bar{\xi}) = E(u_0(B(t)) \mid B(0) = \xi)$, is a solution of the Fokker-Planck equation

$$d\mu_t = \frac{1}{2}\Delta^*\mu_t\,dt, \qquad \mu_0 = \delta_\xi, \tag{3}$$

on the space of probability measures on [0, 1]. Here, Δ^* denotes the dual operator of Δ, acting on finite signed measures having a smooth density.

Alternatively, we may regard (3) also as the asymptotic distribution of independent copies $B_n(t)$, $n = 1, 2, \dots$, of $B(t)$. Indeed, the strong law of large numbers, applied to the sequence of independent and identically distributed random variables $u_0(B_1(t)), u_0(B_2(t)), \dots$, implies that

$$\lim_{N\to\infty} \frac{1}{N}\sum_{n=1}^{N} u_0(B_n(t)) = E\left(u_0(B(t))\right) = u(t,\xi)$$

P-a.s., so that in particular

$$\lim_{N\to\infty} \eta_t^{(N)} = \mu_t \quad \text{weakly } P-a.s.,$$

where $\eta_t^{(N)} = \frac{1}{N}\sum_{n=1}^{N} \delta_{B_n(t)}$ denotes the empirical distribution of the first N Brownian particles. The fluctuations around this limit are described by the standardized empirical distributions

$$\eta_t^{(N),*} = \sqrt{N}\left(\eta_t^{(N)} - \mu_t\right)$$

and can be shown to converge in distribution to a centered Gaussian process $X(t)$, $t \geq 0$, formally solving the stochastic partial differential equation

$$dX(t) = \frac{1}{2}\Delta^* X(t)\,dt + \frac{1}{2}\left(\frac{d}{d\xi}\right)^* \sqrt{\frac{d\mu_t}{d\xi}}\,dW(t) \tag{4}$$

where $(W(t))_{t\geq 0}$ is a cylindrical Wiener process on $L^2([0,1])$ (see [22] for the case of the real line). $(\frac{d}{d\xi})^*$ denotes the adjoint of the differential operator $\frac{d}{d\xi}$, and $\frac{d\mu_t}{d\xi}$ is the density of μ_t w.r.t. the Lebesgue measure. Equation (4) is a perturbation of the Fokker-Planck equation (3) with an exterior stochastic forcing term having zero expectation. Equation (4) can be solved in the mild sense on a space of distributions.

This time the statistical average $U(t) = E(U_0(X(t)))$ of an observable U_0 (considered as a function on $L^2([0,1])$) is a solution of the following heat equation

$$dU(t) = L_t U(t)\,dt, \qquad U(0) = U_0 \tag{5}$$

where

$$\begin{aligned} L_t U_0(x) = {} & \frac{1}{2}\langle \Delta x, U_0'(x)\rangle_{L^2([0,1])} \\ & + \frac{1}{2}\mathrm{tr}_{\,L^2([0,1])}\left(-\left(\frac{d}{d\xi}\right)^*\left(\frac{d\mu_t}{d\xi}\frac{d}{d\xi}\right)U_0''(x)\right) \end{aligned} \tag{6}$$

is the (time-dependent) forward generator of (4). U_0' (resp. U_0'') denotes the first (resp. second) Frechet derivative of U_0 and tr denotes the trace of a linear operator. Note that the heat equation (1) turns up in the first order part of L_t, whereas the second order part in (6) describes the microscopic fluctuations. In particular, for a linear observable

$U_0(x) = \langle u_0, x\rangle_{L^2([0,1]}$ (5) reduces to (1), because $L_t U_0(x) = \frac{1}{2}\langle \Delta x, u_0\rangle_{L^2([0,1]} = \frac{1}{2}\langle \Delta u_0, x\rangle_{L^2([0,1]}$ and $U(t) = \langle e^{\frac{t}{2}\Delta} u_0, x\rangle_{L^2([0,1]}$.

Stochastic evolution equations of type (4), describing microscopic fluctuations, arise in various applications. Some of them, that have been essential for the development of the theory of stochastic partial differential equations, are presented in the following examples:

Example 1.1 Ornstein-Uhlenbeck equations

$$dX(t) = AX(t)\,dt + C\,dW(t) \tag{7}$$

on some separable real Hilbert space H, where A and C are linear operators on H.

Equations of this type have been the starting point of the theory, playing the central role in the stochastic approach to Euclidean quantum field theory. It is also important for the Malliavin calculus and the analysis on Wiener space. In fact, the Kolmogorov operator associated with (7) plays the same role as the Laplacian on $\mathbb{R}^d$ and its associated gradient is just the Malliavin gradient (see the monographs [27] and [31]).

Example 1.2 Stochastic reaction diffusion equations

$$dX(t) = \left[\Delta X(t) - f(X(t))\right] dt + (-\Delta)^{-\beta}\,dW(t)$$

- on $L^2([0,1])$
- $f(t) = a_{2n+1}t^{2n+1} + \cdots + a_1 t$ with $a_{2n+1} < 0$

describing the spatial concentration of a diffusing substance undergoing some chemical reaction.

In the development of the theory, stochastic reaction diffusion equations serve as a prototype for stochastic evolution equations with nonlinear drift terms satisfying a monotonicity condition (in the highest order term) (see the papers [8] and [9]).

Example 1.3 Stochastic Navier-Stokes equations

$$\begin{cases} dX(t) = [\gamma\Delta_S X(t) - \Pi(X(t)\cdot\nabla)X(t)]\,dt + C\,dW(t) \\ \operatorname{div} X(t) = 0 \end{cases}$$

- on the space $L_0^2([0,1]^d;\mathbb{R}^d)$ of divergence free, square-integrable vector-fields $x : [0,1]^d \to \mathbb{R}^d$, $d = 2, 3$,
- $\Pi : L^2([0,1]^d;\mathbb{R}^d) \to L_0^2([0,1]^d;\mathbb{R}^d)$ – Helmholtz projection,
- $\Delta_S = \Pi\Delta$ – Stokes operator with periodic boundary conditions,

describing microscopic fluctuations of the velocity field X of an incompressible fluid.

The interest in this equation arose of course from its deterministic counterpart. The are some reasons for a vague hope that the noise term has a smoothing effect on the resulting equation. So far however, no substantial results in this direction have been obtained. However, a smoothing effect of a noise term on a partial differential equation has been identified indeed in the recent paper [18] in the case of a linear transport equation with a multiplicative noise term. Apart from its own interest the stochastic Navier-Stokes equations also serve as a prototype for stochastic evolution equations with a drift part having a conserved quantitity.

Example 1.4 Zakai equation

$$dX(t) = L^* X(t)\,dt + G(X(t))\,dY(t)$$

describing the unnormalized conditional density of an Ito diffusion $(M(t))_{t\geq 0}$ on $\mathbb{R}^d$ with generator L (called the signal), observed with independent additive noise $(e_t)_{t\geq 0}$

$$dY(t) = G(M(t))\,dt + de_t$$

- $G : \mathbb{R}^d \to \mathbb{R}^p$ measurable,
- $(e_t)_{t\geq 0}$ p-dim. Brownian motion, independent of $(M(t))_{t\geq 0}$.

Note that in contrast to the previous examples the exterior forcing term is not a cylindrical Wiener process, but the observation process $(Y(t))_{t\geq 0}$ that drives the distribution of the signal, given as a solution of the Fokker-Planck equation $dX(t) = L^* X(t)\,dt$, towards the given observation. Here, L^* is the (formal) adjoint of the linear operator L.

It is one of the main issues of the theory of stochastic partial differential equations to set up a rigorous mathematical theory covering all these examples. Basically three different approaches to the solution of equations like (4) have been developed: perhaps the most successful approach has been the semigroup approach (see the monograph [10] by G. Da Prato and J. Zabczyk) because it is quite close to the theory of abstract evolution equations. Further approaches that proved to be also quite successful are the martingale approach (see the survey article by B. Rozovskii in [7]) and the more recent theory of variational solutions as presented in the monograph [28] by C. Prevot and M. Röckner. It cannot be the aim of this survey to summarize and to compare the pros and cons of the various existence and uniqueness results that can be obtained within the three approaches. Instead, we shortly develop the semigroup approach up to a point, where we can talk about the introductory examples in sufficient generality and will then focus on the further qualitative and quantitative properties of solutions of stochastic evolution equations.

As an abstract generalization of (4) let us consider the following semilinear stochastic evolution equation with time-independent coefficients

$$\begin{cases} dX(t) = [AX(t) + B(X(t))]\,dt + C(X(t))dW(t), \\ X(0) = \xi \in H \end{cases} \tag{8}$$

on some separable real Hilbert space H. Here, $(W(t))_{t\geq 0}$ is a cylindrical Wiener process on a possibly different second separable real Hilbert space U, defined on some underlying probability space $(\Omega, \mathcal{F}, P)$, and adapted to some filtration $(\mathcal{F}_t)_{t\geq 0}$ that is assumed to be right-continuous and complete in the sense that $\mathcal{F}_0$ contains all P-null sets. The basic theory of stochastic evolution equations, including a brief introduction into Gaussian measures on Hilbert-spaces, cylindrical Wiener processes and stochastic integration in Hilbert spaces, can be found in the excellent monographs [10] and [28].

We will make the following basic assumptions on the coefficients:

- A with domain $D(A)$ is the infinitesimal generator of a C_0-semigroup $(e^{tA})_{t\geq 0}$ on H,
- $B : H \to H$ is a measurable vector-field,
- $C : H \to L(U, H)$ is strongly measurable,
- ξ is an H-valued $\mathcal{F}_0$-measurable random variable.

Here, $L(U, H)$ denotes the space of all bounded linear operators from U to H and strong measurability of C means that for all $h \in H$ the mapping $u \mapsto C(u)h$, $U \to H$, is measurable. Unless otherwise stated, measurability, throughout the whole survey, always refers to the corresponding Borel σ-algebras, in this case $\mathcal{B}(U)$ and $\mathcal{B}(H)$.

Any solution $(X(t))_{t\geq 0}$ of (8) will be required to be $(\mathcal{F}_t)_{t\geq 0}$-adapted and predictable, i.e.

$$X(\cdot) : [0, \infty[\times \Omega \to H$$

is $\mathcal{P}/\mathcal{B}(H)$ measurable, where

$$\mathcal{P} := \sigma\left(\{]s, t] \times F_s \mid 0 \leq s < t,\, F_s \in \mathcal{F}_s\} \cup \{\{0\} \times F_0 \mid F_0 \in \mathcal{F}_0\}\right)$$

denotes the predictable σ-algebra associated with $(\mathcal{F}_t)_{t\geq 0}$.

Definition 1.5 (strong solutions) A $D(A)$-valued predictable process $(X(t))_{t\geq 0}$ satisfying the integral equation

$$X(t) = \xi + \int_0^t [AX(s) + B(X(s))]\, ds + \int_0^t C(X(s))\, dW(s)$$

$t \geq 0$, is called an (analytically) strong solution

As, similar to the theory of deterministic evolution equations, the notion of a strong solution is rather restrictive, we introduce the concept of mild solutions:

Definition 1.6 (mild solutions) An H-valued predictable process $(X(t))_{t\geq 0}$ satisfying the integral equation

$$X(t) = e^{tA}\xi + \int_0^t e^{(t-s)A} B(X(s))\, ds + \int_0^t e^{(t-s)A} C(X(s)) dW(s)$$

$t \geq 0$, is called a mild solution.

In both definitions it is tacitly assumed that all the integrals, the Bochner-integral $\int_0^t [AX(s) + B(X(s))]\, ds$ (resp. $\int_0^t e^{(t-s)A} B(X(s))\, ds$) and the stochastic integral $\int_0^t C(X(s))\, dW(s)$ (resp. $\int_0^t e^{(t-s)A} C(X(s)) dW(s)$) are well-defined. The stochastic integral

$$W_{A,C}(t) := \int_0^t e^{(t-s)A} C(X(s))\, dW(s), \quad t \geq 0,$$

appearing in the mild formulation is called the stochastic convolution (of the Wiener process with the semigroup $(e^{tA})_{t\geq 0}$). Similar to the deterministic case, a strong solution to (8) is also a mild solution (see the Appendix F of [28], also for precise statements concerning the converse implication). Further remarks concerning the mild solution, including in particular a discussion of the properties of the stochastic convolution, are contained in the Appendix A to this article.

As a typical example for a basic result concerning existence and uniqueness of mild solutions, based on Banach's fixed point theorem, consider the following theorem for semilinear equations with Lipschitz continuous nonlinearities that may be found (up to some minor modification) in [10]. In this theorem, $L_2(U, H)$ denotes the space of all Hilbert-Schmidt operators $L : U \to H$ endowed with the Hilbert-Schmidt norm.

Theorem 1.7 *Let B be continuous, C strongly continuous, assume that $e^{tA}C(x) \in L_2(U, H)$ for all x and that there exists $\kappa \in L^1_{\mathrm{loc}}([0, \infty))$ such that*

(i) $\|e^{tA}B(x)\|_H^2 + \|e^{tA}C(x)\|^2_{L_2(U,H)} \leq \kappa(t)(1 + \|x\|^2)$ *for all* $x \in H$,
(ii) $\|e^{tA}(B(x) - B(y))\|_H^2 + \|e^{tA}(C(x) - C(y))\|^2_{L_2(U,H)} \leq \kappa(t)\|x - y\|_H^2$ *for all* $x, y \in H$.

Let $p \geq 2$ and the initial condition ξ be such that $E(\|\xi\|_H^p) < \infty$. Then there exists a unique mild solution X of (8) satisfying

$$\sup_{t\in[0,T]} E\left(\|X(t)\|_H^p\right) \leq C_T\left(1 + E\left(\|\xi\|_H^p\right)\right).$$

If, in addition, for some $\alpha \in \,]0, \frac{1}{2}[$

$$\int_0^1 t^{-2\alpha}\kappa(t)\, dt < \infty$$

then X has a modification with continuous sample paths.

Remark 1.8

(i) Theorem 1.7 can be generalized to equations with locally Lipschitz continuous drift B, bounded on bounded subsets of H (or a suitable subspace of H), satisfying a one-sided linear growth condition (see [25], [10]). This extension allows to treat the above examples in sufficient generality, apart from the stochastic Navier-Stokes equations (see (iii)).
(ii) A second major generalization of Theorem 1.7 considered in the literature concerns dissipative equations, i.e., equations with coefficients satisfying a one-sided Lipschitz condition of the type

$$2\langle B(x) - B(y), x - y\rangle_H + \|C(x) - C(y)\|^2_{L_2(U,H)} \leq \kappa\|x - y\|_H^2$$

for any $x, y \in H$ (see [26] for a general uniqueness result, [10] and [8] for existence results).

(iii) In the case of the stochastic Navier-Stokes equations in 3d, existence and uniqueness of a strong solution can be obtained only locally, i.e., up to some stopping time, in analogy with the deterministic case. A typical result is contained in [6] in the case of stochastic Navier-Stokes equations with Dirichlet boundary conditions on bounded domains $\mathcal{O} \subset \mathbb{R}^3$ having C^2-boundary. Similar to the deterministic case, existence of global solutions can be obtained only in a weak sense (see in particular the seminal paper [17] for existence of global martingale solutions).

(iv) Theorem 1.7 is applied in various approximation schemes, in particular Yoshida- and Galerkin-approximations, including Wiener-Chaos expansions, to obtain existence of global martingale solutions for stochastic evolution equations with non-Lipschitz coefficients using a compactness method similar to the deterministic case (we refer once again to the survey article by B. Rozovskii in [7]).

1.1 Additive Noise

In the case where the dispersion coefficient C does not depend on the solution, (8) is called a stochastic evolution equation with additive noise. In this particular case the stochastic convolution $W_{A,C}(t) = \int_0^t e^{(t-s)A} C\, dW(s)$ is independent of X and we can decompose the mild solution as

$$X(t) = Y(t) + W_{A,C}(t), \quad t \geq 0$$

where $Y(t)$ is a stochastic process of bounded variation satisfying the integral equation

$$Y(t) = e^{tA}\xi + \int_0^t B(Y(s) + W_{A,C}(s))\, ds, \quad t \geq 0. \tag{9}$$

Conditioned on $W_{A,C}(\cdot) = w(\cdot)$ this may be regarded as the mild solution to the deterministic evolution equation

$$\dot{Y} = AY + B(t, Y) \tag{10}$$

with the time-dependent vector-field $B(t, y) = B(y + w(t))$. Moreover, the distribution of $W_{A,C}(t)$ is Gaussian with mean zero and covariance operator

$$\int_0^t e^{sA} C C^* e^{sA^*}\, ds\,.$$

Note that $Y(t)$ and $W_{A,C}(t)$ are not independent, except in trivial cases. However, knowing their joint distribution implies knowledge of the distribution of $X(t)$.

2 Basic Concepts Analyzing Solutions of (8)

The most important concepts applied to analyze solutions of stochastic evolution equations are:

2.1 Martingale property,
2.2 Transition semigroup and Markov property,
2.3 Kolmogorov operator.

Whereas the first two concepts are classical, and thus have been applied to the analysis of stochastic evolution equations from the very beginning, a thorough study of the associated Kolmogorov operator has been initiated significantly later (see for example the survey article [29] by M. Röckner and the monograph [12] by G. Da Prato and J. Zabczyk).

2.1 Martingale Property

Let $(X(t))_{t\geq 0}$ be a strong solution of (8). Then

$$M(t) := X(t) - \xi - \int_0^t [AX(s) + B(X(s))]\, ds = \int_0^t C(X(s))\, dW(s)$$

is an H-valued martingale with quadratic variation process $\langle M(\cdot)\rangle_t = \int_0^t CC^*(X(s))ds$. This implies that for any element $u_0 \in D(A^*)$

$$\begin{aligned} M_t^{[u_0]} &:= \langle X(t), u_0\rangle - \langle \xi, u_0\rangle \\ &\quad - \int_0^t \left[\langle X(s), A^* u_0\rangle + \langle B(X(s)), u_0\rangle\right] ds \end{aligned} \tag{11}$$

is a (real-valued) martingale with quadratic variation

$$\langle M^{[u_0]}\rangle_t = \int_0^t \|C(X(s))^* u_0\|_U^2\, ds. \tag{12}$$

Suppose that conversely we are given an H-valued continuous stochastic process $(X(t))_{t\geq 0}$, defined on some underlying probability space $(\Omega, \mathcal{F}, P)$, and some filtration $(\mathcal{F}_t)_{t\geq 0}$, such that for all $u_0 \in D(A^*)$ the process $M_t^{[u_0]}$ defined by (11) is an $(\mathcal{F}_t)_{t\geq 0}$-martingale with quadratic variation given as in (12), then the martingale representation theorem (Theorem 8.2 in [10]) implies that there exists a probability space $(\tilde{\Omega}, \tilde{\mathcal{F}}, \tilde{P})$, a filtration $(\tilde{\mathcal{F}}_t)_{t\geq 0}$ and a U-valued cylindrical Wiener process $(\tilde{W}_t)_{t\geq 0}$, defined on $(\Omega \times \tilde{\Omega}, \mathcal{F} \otimes \tilde{\mathcal{F}}, P \otimes \tilde{P})$, adapted to the filtration $(\mathcal{F}_t \otimes \tilde{\mathcal{F}}_t)_{t\geq 0}$ such that $M_t^{[u_0]}$ can be represented as a stochastic integral w.r.t. $(\tilde{W}_t)_{t\geq 0}$

$$M_t^{[u_0]} = \int_0^t \langle u_0, C(X(s))\, d\tilde{W}(s)\rangle, \quad t \geq 0.$$

It follows that the tupel $((X(t))_{t\geq 0}, (\tilde{W}(t))_{t\geq 0})$ is a (weak) solution of (8). In particular, the driving Wiener process $(\tilde{W}(t))_{t\geq 0}$ is part of the solution and not a priori given, contrary to the case of a strong or a mild solution.

The fact that for a martingale solution of (8) the driving noise term is part of the solution and not a priori given allows to use approximation schemes similar to the deterministic case, e.g. Galerkin approximations, to construct weak solutions (see Chapter 8 of [10]). This way, the Lipschitz assumptions of Theorem 1.7 on the coefficients of (8) can be relaxed considerably.

2.2 Transition Semigroup and Markov Property

Suppose that for all initial conditions $x \in H$ (8) has a unique mild solution $X(t,x)$ and that the family of transition probabilities

$$x \mapsto p_t(x,A) := P\left(X(t,x) \in A\right), \qquad H \to \mathbb{R}$$

is measurable for all $t \geq 0$ and $A \in \mathcal{B}(H)$. In this case the family of transition probabilities defines a stochastic kernel on $(H, \mathcal{B}(H))$ with associated integral operators

$$P_t F(x) := E(F(X(t,x))), \quad t \geq 0$$

operating on the space $\mathcal{B}_b(H)$ of bounded Borel measurable functions $F : H \to \mathbb{R}$. The mild solution of (8) then satisfies the following (simple) Markov property

$$E\left(F(X(s+t,\xi) \mid \mathcal{F}_s\right) = P_t F(X(s,\xi)), \quad P-a.s.$$

for any $s, t \geq 0$, which implies the Chapman-Kolmogorov equation $P_{s+t} = P_s \circ P_t$, i.e., the semigroup property for the family $(P_t)_{t\geq 0}$.

Definition 2.1 $(P_t)_{t\geq 0}$ is said to have the **Feller property** if $P_t(C_b(H)) \subset C_b(H)$ for all $t \geq 0$. Here, $C_b(H)$ denotes the space of bounded continuous functions $F : H \to \mathbb{R}$. If in addition $P_t(\mathcal{B}_b(H)) \subset C_b(H)$ for all $t > 0$, $(P_t)_{t\geq 0}$ is said to have the **strong Feller property**.

The (strong) Feller property of a semigroup $(P_t)_{t\geq 0}$ of Markovian integral operators has been identified in the classical theory of Markov processes on a locally compact state space as a generic property that implies the existence of an associated (strong) Markov process (see [3]). A large part of the potential theory, developed for (strong) Markov processes on locally compact state spaces, can be carried over to the case where the transition semigroup associated with (8) is (strong) Feller.

A sufficient condition for the Feller property is the continuous dependence in probability of the mild solution $X(t,x)$ w.r.t. its initial condition, i.e., $\lim_{n\to\infty} \|x_n - x\|_H = 0$ implies

$$\lim_{n\to\infty} \|X(t,x_n) - X(t,x)\|_H = 0 \quad \text{in probability}$$

which holds under the following estimate

$$E\left(\|X(t,x) - X(t,y)\|_H^2\right) \leq C_t \|x-y\|_H^2 \tag{13}$$

for any two initial conditions $x, y \in H$, using Chebychev's inequality. Estimate (13) is implied by the assumptions made in Theorem 1.7 if one assumes in addition that $\kappa \in L^2_{loc}([0,\infty))$. Various generalizations can be found in the literature, see for example [5].

2.3 Kolmogorov Operator

As emphasized in the previous subsection the Markov property of the solution of (8) implies the semigroup property for the associated transition semigroup $(p_t)_{t\geq 0}$ (resp. for the corresponding integral operators $(P_t)_{t\geq 0}$). Similar to the heat equation (1) satisfied by the transition semigroup of a 1-dimensional Brownian motion on $[0, 1]$ with reflecting boundary conditions, the function $P_t F$ should formally satisfy the (forward) Kolmogorov equation

$$\frac{d}{dt} P_t F(x) = L P_t F(x) \tag{14}$$

where

$$\begin{aligned} LF(x) = \frac{1}{2} \operatorname{tr}(C(x)C(x)^* F''(x)) + \langle x, A^* F'(x)\rangle_H \\ + \langle B(x), F'(x)\rangle_H \end{aligned} \tag{15}$$

is called the Kolmogorov operator associated with (8) in honor of Kolmogorov who was the first to formulate and to solve the forward and backward partial differential equations satisfied by the transition probabilities of one-dimensional diffusion processes (see [23]). Note that L is a differential operator of second order and its precise domain of definition consists of all twice Frechet-differentiable functions $F : H \to \mathbb{R}$ satisfying $F'(x) \in D(A^*)$ for all $x \in H$. An appropriate subspace of smooth test-functions is provided by the space

$$\begin{aligned} \mathcal{F}C_b^2(D(A^*)) = \{F(x) = \varphi\left(\langle x, e_1\rangle, \ldots, \langle x, e_n\rangle\right) \mid n \geq 1, \varphi \in C_b^2(\mathbb{R}^n), \\ e_1, \ldots, e_n \in D(A^*)\} \end{aligned}$$

of twice Frechet-differentiable finitely based cylindrical test functions. If $F \in \mathcal{F}C_b^2(D(A^*))$ admits the representation $F(x) = \varphi(\langle x, e_1\rangle, \ldots, \langle x, e_n\rangle)$, then (15) reduces to the following expression

$$\begin{aligned} LF(x) &= \frac{1}{2} \sum_{k,l=1}^{n} \langle C(x)C(x)^* e_k, e_l\rangle \varphi_{x_k x_l}(\langle x, e_1\rangle, \ldots, \langle x, e_n\rangle) \\ &\quad + \sum_{k=1}^{n} (\langle x, A^* e_k\rangle + \langle B(x), e_k\rangle) \varphi_{x_k}(\langle x, e_1\rangle, \ldots, \langle x, e_n\rangle) . \end{aligned}$$

The importance of the Kolmogorov operator consists of the fact that it is explicitly given on smooth functions in contrast to the transition semigroup and that many quantities associated with (8) can be estimated using L rather than $(p_t)_{t\geq 0}$. The drawback of the Kolmogorov operator L however is that it might not uniquely determine the transition semigroup because the solution of the forward Kolmogorov equation might be nonunique. Rigorous results concerning existence and uniqueness of solutions of (14) in the infinite dimensional case can be found in the monograph [12].

Suppose that for all $x \in H$ (8) has a unique strong solution $(X(t,x))_{t\geq 0}$ with initial condition x. Then Ito's formula (see Theorem 4.17 in [10]) implies for suitable F in the domain of definition of the associated Kolmogorov operator L that

$$\begin{aligned} F(X(t,x)) = F(x) + \int_0^t LF(X(s,x))\,ds \\ + \int_0^t \langle F'(X(s,x)), C(X(s,x))dW(s)\rangle. \end{aligned} \tag{16}$$

If $E(\int_0^t |LF(X(s,x))| + \|C(X(s,x))^* F'(X(s,x))\|^2\,ds) < \infty$, $t \geq 0$, then (16) implies, taking expectations, that

$$P_t F(x) = F(x) + \int_0^t P_s LF(x)\,ds$$

so that similar to (14)

$$\frac{d}{dt} P_t F(x) = P_t LF(x) \tag{17}$$

but with P_t and L interchanged. It requires further mathematical theory to identify sufficient conditions under which both (14) and (17) are in fact equivalent.

3 Invariant Measures

Many important properties of random dynamical systems modelled by (8) can be read off from the long-time behaviour of its solution $(X(t))_{t\geq 0}$. One can distinguish between its pathwise behaviour and the statistical behaviour given in terms of the transition probabilities $(p_t)_{t\geq 0}$. In this section we will concentrate on the latter and introduce the basic concepts needed for a study of the long-time behaviour of $(p_t)_{t\geq 0}$ and the associated semigroup $(P_t)_{t\geq 0}$.

An important question in the understanding of the qualitative behaviour of $(X(t))_{t\geq 0}$ for large time is the existence of stationary states of its transition probabilities, since they correspond to a situation where the system described by $(X(t))_{t\geq 0}$ is in equilibrium. In contrast to the deterministic case, this is meant as a statistical equilibrium rather than a pathwise equilibrium. Further questions then address the qualitative properties of stationary states, e.g. their stability properties and support properties.

It is natural to define a stationary state for the transition probabilities $(p_t)_{t\geq 0}$ of (8) as a probability measure μ on H having the property that if the solution $X(t)$ has distribution μ at some time point, say t_0, then the distribution of $X(t)$ will be the same for all later times $t \geq t_0$, hence invariant under time evolution. Using the Markov property this implies in particular for all $s \geq 0$ that

$$\begin{aligned} \int P_s F(x)\,\mu(dx) = E\left(P_s F(X(t_0))\right) = E\left(E\left(F(X(t_0+s)) \mid \mathcal{F}_{t_0}\right)\right) \\ = E\left(F(X(t_0+s))\right) = \int F(x)\mu(dx). \end{aligned}$$

An important subclass of stationary states is given by the class of (time-) reversible states for $(X(t))_{t\geq 0}$. By this we mean a probability measure μ with the property, that if the solution of (8) has distribution μ at time t, the joint distribution of $(X(t), X(t+s))$ is the same as the joint distribution of the time-reversed process $(X(t+s), X(t))$. In particular,

$$E\left(F(X(t))G(X(t+s))\right) = E\left(F(X(t+s))G(X(t))\right)$$

or equivalently, using the Markov property,

$$\begin{aligned}\int F(x)P_sG(x)\mu(dx) &= E\left(F(X(t))P_sG(X(t))\right)\\ &= E\left(F(X(t))E\left(G(X(t+s)) \mid \mathcal{F}_t\right)\right)\\ &= E\left(F(X(t))G(X(t+s))\right) = E\left(F(X(t+s))G(X(t))\right)\\ &= \int P_sF(x)G(x)\mu(dx).\end{aligned}$$

Since the semigroup $(P_t)_{t\geq 0}$ associated with (8) is in most cases not explicitly given, it is convenient to look for alternative characterizations of invariance and reversibility in terms of the associated Kolmogorov operator L. This motivates the following

Definition 3.1 A probability measure μ on (the Borel σ-algebra of) H is called

(i) **invariant** if

$$\int P_tF\,d\mu = \int F\,d\mu\ \forall t \geq 0,\ \forall F \in \mathcal{B}_b(H),$$

(ii) **infinitesimally invariant** if

$$L(\mathcal{F}C_b^2(D(A^*))) \subset L^1(\mu) \quad \text{and} \quad \int LF\,d\mu = 0,\ \forall F \in \mathcal{F}C_b^2(D(A^*)),$$

(iii) **reversible** if

$$\int P_tF\,G\,d\mu = \int F\,P_tG\,d\mu,\ \forall t \geq 0,\ \forall F, G \in \mathcal{B}_b(H),$$

(iv) **symmetrizing** if $L(\mathcal{F}C_b^2(D(A^*))) \subset L^1(\mu)$ and

$$\int LF\,G\,d\mu = \int F\,LG\,d\mu,\ \forall F, G \in \mathcal{F}C_b^2(D(A^*)).$$

Remark 3.2 Under weak assumptions on the coefficients, the following implications hold:

$$\begin{array}{ccc}\mu \text{ reversible} & \Rightarrow & \mu \text{ symmetrizing}\\ \Downarrow & & \Downarrow\\ \mu \text{ invariant} & \Rightarrow & \mu \text{ infinitesimally invariant.}\end{array}$$

The implications "μ reversible $\Rightarrow$ μ invariant" (resp. "μ symmetrizing $\Rightarrow$ μ infinitesimally invariant") are obvious: simply choose $G \equiv 1$, then μ reversible (for the semigroup $(P_t)_{t\geq 0}$) implies

$$\int P_t F\, d\mu = \int P_t F\, 1\, d\mu = \int F\, P_t 1\, d\mu = \int F\, d\mu$$

since $P_t 1 = 1$ (resp. $\int LF\, d\mu = \int LF\, 1\, d\mu = \int F\, L1\, d\mu = 0$ since $L1 = 0$). The remaining two implications "μ reversible $\Rightarrow$ μ symmetrizing" (resp. "μ invariant $\Rightarrow$ μ infinitesimally invariant") follow from differentiating the semigroup in $t = 0$:

$$\int LF\, G\, d\mu = \frac{d}{dt} \int P_t F\, G\, d\mu_{|t=0} = \frac{d}{dt} \int F\, P_t G\, d\mu_{|t=0} = \int F\, LG\, d\mu$$

(resp. $\int LF\, d\mu = \frac{d}{dt} \int P_t F\, d\mu_{|t=0} = \frac{d}{dt} \int F\, d\mu_{|t=0} = 0$). None of the converse implications hold true in general. Some finite-dimensional counterexamples may be found in [4].

3.1 Existence of Invariant Measures—Krylov-Bogoliubov Theory

The existence of invariant measures for (8) is strongly related to its stability properties. This was first observed and exploited in the finite dimensional case by R.Z. Hasminskii in [19]. A crucial role is played by the family μ_T, $T \geq 0$, of mean occupation time measures

$$\mu_T(A) := \frac{1}{T} \int_0^T P(X(t) \in A)\, dt, \quad A \in \mathcal{B}(H)$$

of the solution to (8). Indeed, if the system described by $(X(t))_{t\geq 0}$ approaches a stationary state it will spend with high probability most of the time in bounded, in fact even relatively compact, subregions of its state space. The resulting property for its mean occupation time measures is called tightness. This is the basic observation exploited in the Krylov-Bogoliubov theory.

Theorem 3.3 (*Krylov-Bogoliubov*)
Assume that for some $T_0 > 0$

- *the transition semigroup $(P_t)_{t\geq 0}$ associated with (8) is Feller,*
- *the family $(\mu_T)_{T\geq T_0}$ of mean occupation time measures is tight, i.e., for all $\varepsilon > 0$ there exists a compact subset $K_\varepsilon \subset H$ with $\mu_T(K_\varepsilon) \geq 1 - \varepsilon$, $T \geq T_0$.*

Then there exists an invariant measure μ for (8). Moreover, every limit μ_∞ of some weakly convergent subsequence $(\mu_{T_n})_{n\geq 1}$ with $T_n \to \infty$, is an invariant measure.

The tightness of $(\mu_T)_{T\geq T_0}$ can be deduced from the existence of a (proper) Lyapunov function $V : H \to \mathbb{R} \cup \{+\infty\}$, that is, a function with compact level sets $\{V \leq \alpha\}$, $\alpha \in \mathbb{R}$, that satisfies

$$\sup_{T\geq T_0} \int V\, d\mu_T < \infty \tag{18}$$

or equivalently,

$$\sup_{T \geq T_0} \frac{1}{T} \int_0^T E(V(X(t)))\, dt < \infty.$$

To call V a Lyapunov function is motivated by the stability theory for deterministic systems. In fact, for a deterministic evolution system $(x(t))_{t \geq 0}$ a Lyapunov function is a (sufficiently regular) function V for which $V(x(t))$ is decreasing in time, so that

$$\frac{1}{T} \int_0^T V(x(t))\, dt \leq V(x(0))$$

remains bounded. The stochastic analogue therefore is a function V for which $E(V(X(t)))$ is decreasing in time, i.e., a function V for which $V(X(t))$ is decreasing in the statistical average. It follows that

$$\int V\, d\mu_T = \frac{1}{T} \int_0^T E\left(V(X(t))\right)\, dt \leq E\left(V(X(0))\right)$$

remains bounded. For the purposes of Theorem 3.3 it then suffices to require only (18).

3.1.1 Linear Equations

Consider the Ornstein-Uhlenbeck equation

$$dX(t) = AX(t)\, dt + C\, dW(t), \quad X(0) = \xi. \tag{19}$$

Under the assumption that

$$Q_t = \int_0^t e^{sA} Q e^{sA^*}\, ds, \quad Q := CC^*$$

is a trace class operator, there exists a unique mild solution

$$X(t) = e^{tA}\xi + \int_0^t e^{(t-s)A} C\, dW(s), \quad t \geq 0$$

of (19) (not necessarily having a pathwise continuous version) and the corresponding transition semigroup

$$P_t F(x) = E\left(F(X(t)) \mid X(0) = x\right), \quad x \in H$$

is well-defined. Recall that

$$W_{A,C}(t) = \int_0^t e^{(t-s)A} C dW(s) \sim N\left(0, Q_t\right)$$

so that the following integral representation of the transition probabilities

$$
\begin{aligned}
P_t F(x) &= \int_H F(e^{tA}x + w) N(0, Q_t)(dw) \\
&= \int_H F(w) N\left(e^{tA}x, Q_t\right)(dw), \qquad (20)
\end{aligned}
$$

called Mehler formula, holds. The integral representation (20) is extremely useful to deduce various further information on the process. In particular, a complete solution to the problem of existence of invariant measures can be deduced. The result is due to Snyders and Zakai in the finite-dimensional case (see [32]) and to Zabczyk in the general Hilbert space case (see [11]).

Theorem 3.4 *The following conditions are equivalent*:

(i) $\exists$ *invariant measure for* (19),
(ii) $\int_0^\infty \|e^{tA}C\|^2_{L_2(U,H)}\, dt = \sup_{t\ge 0} tr\,(Q_t) < \infty$,
(iii) $\exists\ Q_\infty \in L(H)$, $Q_\infty \ge 0$, *symmetric*, $tr\,(Q_\infty) < \infty$, *satisfying the equation*

$$
2\langle Q_\infty A^* x, x\rangle + \langle Qx, x\rangle = 0,\ \forall x \in D(A^*). \qquad (21)
$$

In this case, any invariant measure μ *for* (19) *admits the representation*

$$
\mu = \nu * N\left(0, \int_0^\infty e^{tA} Q e^{tA^*}\, dt\right),
$$

where ν *is invariant for* $x' = Ax$ *and*

$$
Q_\infty = \int_0^\infty e^{tA} Q e^{tA^*}\, dt
$$

is the minimal nonnegative solution of (21).

3.1.2 Semilinear Equations

The existence part in the previous theorem can be extended to the semilinear case under the following assumptions:

(A.1) A is self-adjoint, of negative type and having a compact resolvent.

In the following let $V_\gamma = D((-A)^\gamma)$, $\gamma \in \mathbb{R}$, denote the real interpolation space equipped with the scalar product

$$
\langle u, v\rangle_\gamma := \langle (-A)^\gamma u, (-A)^\gamma v\rangle_H + \langle u, v\rangle_H, \quad u, v \in V_\gamma .
$$

(A.2) For some $\gamma_1 \ge 0$, B operates as a vector-field on V_{γ_1} and for any initial condition $x \in V_{\gamma_1}$ (8) has a unique mild solution with continuous trajectories in V_{γ_1}.

(A.3) The associated transition semigroup $(P_t)_{t\geq 0}$ is Feller on V_{γ_1}.

Theorem 3.5 *Suppose that for some* $\gamma_0 > \gamma_1$

(A.4) $\exists\ \varepsilon_0 > 0$ *such that*

$$\sup_{t\geq 0} E\left(e^{\varepsilon \|W_{A,C}(t)\|^2_{V_{\gamma_0}}}\right) < \infty,\ \forall \varepsilon < \varepsilon_0;$$

(A.5) – $\exists\ \Psi : V_{\gamma_1} \to \mathbb{R}_+$ *Frechet-differentiable*,
– $\exists\ \Theta : V_{\gamma_0} \to \mathbb{R}_+$ *coercive*,
– $\exists\ \beta, \delta \in \mathbb{R}$, $\varepsilon_1 < \varepsilon_0$ *such that*

$$\langle Ay + B(y+w), \Psi'(y)\rangle_{V_{\gamma_1}} \leq -\Theta(y) + \beta e^{\varepsilon_1 \|w\|^2_{V_{\gamma_0}}} + \delta$$

for all $y \in V_{1+\gamma_1}$, $w \in V_{\gamma_0}$.

Then $(\mu_T)_{T\geq 1}$ *is tight on* V_{γ_1} *for any initial condition* $x \in V_{\gamma_1}$. *Moreover, any limit point* μ *of some weakly convergent subsequence of* $(\mu_T)_{T\geq 1}$ *is an invariant measure of* (8) *and*

$$\int F(x)\mu(dx) < \infty$$

for any continuous $F : V_\gamma \to \mathbb{R}_+$, $\gamma < \gamma_0$, *satisfying the growth condition*

$$F(y+w) \leq c_1\Theta(y) + c_2 e^{\varepsilon_1 \|w\|^2_{V_{\gamma_0}}} + c_3,\ \forall y \in V_{\gamma_1}, w \in V_{\gamma_0}.$$

The proof of the theorem (for the case of additive noise) can be found in [15].

Example 3.6 In the example of the stochastic reaction diffusion equation of Example 1.2 let Δ be the Dirichlet-Laplacian. Then for $\beta > 0$, $\frac{1}{4} < \gamma < \frac{1}{4} + \beta$, $\beta < \frac{\gamma}{2(2n+1)}$, the evolution equation has an invariant measure μ satisfying the moment estimates

- $\int \|x\|^2_{V_\gamma} \mu(dx) < \infty$,
- $\int e^{\varepsilon \|x\|^{\frac{2}{(2n+1)(n+1)}}} \mu(dx) < \infty$,
- $\int \|x^r\|^2 \mu(dx) < \infty, \forall r \geq 1$.

(see [15]).

Remark 3.7 Comments on the assumptions (A.4) and (A.5):

(i) The exponential moment estimate (37) for stochastic integrals implies that the exponential moment estimate required for the stochastic convolution $W_{A,C}(t)$ in (A.4) is satisfied for bounded dispersion coefficients

$$\int_0^\infty \sup_{x\in H} \|e^{tA}C(x)\|^2_{L_2(U,V_{\gamma_0})}\, dt < \infty.$$

(ii) In the case of a classical Lyapunov function of polynomial type

$$\langle Ay + B(y+w), y\rangle_H \le -\alpha\|y\|^2_{V_{\frac{1}{2}}} + \beta\|w\|^{2s}_{V_{\gamma_0}} + \delta$$

for some $s \ge 1$, $\alpha > 0$, $\beta, \delta \in \mathbb{R}$, the theorem implies the following exponential moment estimate

$$K(\varepsilon) = \int e^{\varepsilon\|x\|_H^{\frac{2}{s}}}\mu(dx) < \infty \quad \text{for } \varepsilon \le \varepsilon_1 .$$

In particular, μ has (sub-)Gaussian tails $\mu(\|x\|_H \ge R) \le K(\varepsilon_1)e^{-\varepsilon_1 R^{\frac{2}{s}}}$, $R > 0$.

3.1.3 Further Examples

(a) Symmetrizing measures

It is known that for a smooth potential $\varphi : \mathbb{R}^d \to \mathbb{R}$ satisfying $Z := \int e^{2\varphi}\, dx < \infty$ and $\int |\nabla\varphi| e^{2\varphi}\, dx < \infty$ the measure $\mu := Z^{-1}e^{2\varphi(x)}\, dx$ is the unique invariant (and in fact reversible, hence symmetrizing) measure for the transition semigroup associated with the stochastic (ordinary) differential equation

$$dX(t) = \nabla\varphi(X(t))\, dt + dW(t) \in \mathbb{R}^d \tag{22}$$

(see [4]). The example ultimately goes back to Kolmogorov, who in his classical paper [24] fully characterized reversible measures of diffusions on compact manifolds in terms of the coefficients of the associated generator. To see that μ is symmetrizing, note that it satisfies the following integration by parts formula

$$\int \partial_{x_k} F(x)\mu(dx) = -2\int F(x)\partial_{x_k}\varphi(x)\mu(dx), \ \forall F \in C_b^1(\mathbb{R}^d) \tag{23}$$

so that for the Kolmogorov operator

$$LF(x) = \frac{1}{2}\Delta F(x) + \langle\nabla\varphi(x), \nabla F(x)\rangle$$

we obtain that

$$\int LF\, G\, d\mu = -\int \langle\nabla F, \nabla G\rangle\, d\mu = \int F\, LG\, d\mu .$$

This observation can be extended to the infinite dimensional setting as follows: A sufficient (and in many cases also necessary) condition for the existence of a symmetrizing measure for the stochastic evolution equation (8) is the existence of a measure μ satisfying appropriate integrability conditions and the integration by parts formula

$$\int \langle C(x)C(x)^*F'(x), l\rangle\mu(dx) = -2\int \big(\langle x, A^*l\rangle + \langle B(x), l\rangle\big) F(x)\mu(dx) \tag{24}$$

for any $l \in D(A^*)$.

Illustrations Assume that $C(x)C(x)^* \equiv Q > 0$ is constant and Q^{-1} bounded. Then (24) is equivalent with

$$\int \partial_l F(x)\mu(dx) = -2\int \left(\langle x, A^* Q^{-1} l\rangle + \langle B(x), Q^{-1} l\rangle\right) F(x)\mu(dx) \tag{25}$$

for any l satisfying $Q^{-1}l \in D(A^*)$. Under the additional assumption that

$$AQ = QA^* \tag{26}$$

and $Q^{-1}A$ is invertible with bounded inverse, the linear part $\langle x, A^* Q^{-1} l\rangle$ in the logarithmic derivative can be identified as the logarithmic derivative of the Gaussian measure $N(0, -\frac{1}{2}(Q^{-1}A)^{-1})$ which implies that it is the, in fact unique, symmetrizing measure of the linear stochastic evolution equation

$$dX(t) = AX(t)\,dt + C\,dW(t).$$

Suppose now that $Q = Id_H$, so that (26) implies that $A = A^*$, i.e., A self-adjoint, and $B = \varphi'$ for some potential $\varphi : H \to \mathbb{R}$ satisfying some growth condition (e.g. bounded from above). Then, similar to the finite-dimensional case,

$$2\langle x, Al\rangle + \langle \varphi'(x), l\rangle, \quad l \in D(A)$$

is the logarithmic derivative of the measure

$$\mu(dx) \propto e^{2\varphi(x)} N\left(0, -\frac{1}{2}A^{-1}\right)(dx) \tag{27}$$

(see [35], [29]). The above factorization of the symmetrizing measure is not unique and might be in fact not appropriate in given examples.

(b) Infinitesimally invariant measures

An important class of stochastic evolution equations with invariant measures is provided by equations where the nonlinear part of the drift has an infinitesimally conserved quantity in the sense of the following two examples:

Example 3.8

(i) Stochastic Burgers equation

$$dX(t) = \left[\gamma\Delta X(t) + \partial_\xi (X(t)^2)\right] dt + C\,dW(t)$$

on the space $L^2([0,1])$ with Dirichlet boundary conditions. In this case, the L^2-norm is an infinitesimally conserved quantity for $\partial_\xi(X(t)^2)$, since $\int_0^1 \partial_\xi(u^2)u\,d\xi = 0$ for $u \in H_0^{1,2}([0,1])$.

(ii) Stochastic Navier-Stokes equations

$$dX(t) = \left[\gamma\Delta_S X(t) - \Pi\,(X(t)\cdot\nabla)\,X(t)\right] dt + C\,dW(t), \operatorname{div} X(t) = 0$$

on the space $L^2_0([0,1]^d; R^d)$ of divergence-free, square-integrable vector-fields. In this case, the L^2-norm is an infinitesimally conserved quantity for the convection term, since $\int_{[0,1]^d}\langle (u\cdot\nabla)u, u\rangle\, d\xi = 0$ for smooth, divergence-free vector-fields u with periodic boundary conditions.

In both examples existence of stationary martingale solutions can be obtained in the case where the covariance operator $Q = CC^*$ has finite trace, using the compactness method, first presented in the paper [17] (see also [21] and [34] for the case of stochastic Navier-Stokes-Coriolis equations). The corresponding invariant distribution μ satisfies the exponential moment estimate

$$\int \left(1 + \|x\|^2_{V_{\frac{1}{2}}}\right) e^{\varepsilon\|x\|^2_H}\mu(dx) < \infty \quad \text{for } \varepsilon < \frac{\gamma}{\|Q\|_{L(U,H)}}.$$

For existence and moment estimates in the case of rougher noise terms see the next subsection.

3.2 Improved Moment Estimates

Using a pathwise control on the stochastic convolution, the moment estimates on invariant measures of (8) can be improved in many cases. To this end suppose that $X(t)$, $t \geq 0$, is a mild solution of (8) having a time-invariant distribution $\mu = P \circ X(t)^{-1}$, and that, as a generalization of the Lyapunov condition of polynomial type, the following holds:

There exist $\alpha > 0$, $\beta_1, \beta_2, \beta_3 \in \mathbb{R}$, $s \geq 1$ and $\gamma_2 \geq \gamma_1 \geq 0$ such that

$$\langle Ay + B(y+w), y\rangle \leq -\alpha\|y\|^2_{V_{\gamma_1}} + \beta_1\|w\|^{2s}_{V_{\gamma_2}} + \beta_2\|w\|^{2s}_{V_{\gamma_2}}\|y\|^2_{V_{\gamma_1}} + \beta_3 \qquad (28)$$

for all $y \in D(A)$, $w \in V_{\gamma_2}$.

Theorem 3.9 *Suppose that C is constant, that A and $Q = CC^*$ are simultaneously diagonalizable and that $(-A)^{(\gamma_2+\varepsilon)}C$ is Hilbert-Schmidt for some $\varepsilon > 0$. Then μ satisfies the moment estimate*

$$\int \left(1 + \|x\|^2_{\gamma}\right)\|x\|^{2p}\mu(dx) < \infty \quad \textit{for } p \geq 0,\ \gamma < \gamma_1.$$

The main ingredient to the proof of Theorem 3.9, that may be found in [16], is to consider for $\lambda \geq 0$ the following decomposition

$$X(t) = Y_\lambda(t) + W_{A-\lambda,C}(t), \quad t \geq 0,$$

of the given mild solution. Using the pathwise control (41) on the stochastic convolution we can estimate

$$\sup_{0\leq t\leq T}\|W_{A-\lambda,C}(t)\|^2_{V_{\gamma_0}} \leq \lambda^{-2\varepsilon}\cdot M_{\gamma_0,\varepsilon,T} \qquad (29)$$

for some $\varepsilon > 0$ and some random variable $M_{\gamma_0,\varepsilon,T}$, independent of λ, having finite moments of any order. Equation (29) allows to choose λ (depending on ω) sufficiently large such that

$$\frac{1}{2}\frac{d}{dt}\|Y_\lambda(t)\|^2 \le -\frac{\alpha}{2}\|Y_\lambda(t)\|^2_{V_{\gamma_1}} + R_\lambda(t) \tag{30}$$

using (28), where

$$R_\lambda(t) = \beta_3 + \beta_1\|W_{A-\lambda,C}(t)\|^{2s}_{V_{\gamma_2}} + \frac{\lambda^2}{2\alpha}\|W_{A-\lambda,C}(t)\|^2_{V_{-\gamma_1}}$$

and λ is the random variable

$$\lambda = \left(\frac{4}{\alpha}(\beta_2 M_{\gamma_0,\varepsilon,T} + 1)\right)^{\frac{2s}{\varepsilon}}.$$

Equation (30) now implies similar moment estimates on $X(t) = Y_\lambda(t) + W_{A-\lambda,C}(t)$ for $t \in [0, T]$ as in the case implied by the assumptions made in the previous Theorem 3.5 and we can therefore deduce the moment estimate using a similar strategy.

Example 3.10 (Stochastic equations modelling thin-film growth) Consider as an application the following stochastic partial differential equation

$$dX(t) = (-\partial_\xi^{(4)}X(t) + \nu\partial_\xi^{(2)}X(t) - \partial_\xi^{(2)}(\partial_\xi X(t))^2) + \sqrt{Q}dW(t)$$

introduced in [2] modelling the surface height of some material undergoing thin-film growth. We assume that the equation is formulated on $L_0^2([0,1]) := \{f \in L^2([0,1]) | \int_0^1 f d\xi = 0\}$, where $\nu \ge 0$, Q is a nonnegative symmetric operator on $L^2([0,1])$ satisfying

$$Qe_k = q_k e_k, \quad (q_k)_{k\ge1} \subseteq l^\infty(\mathbb{N})$$

and $(e_k)_{k\ge1}$ denotes the orthonormal basis of $L_0^2([0,1])$ consisting of eigenvectors of the self-adjoint extension of

$$Au := -\partial_\xi^{(4)}u + \nu\partial_\xi^{(2)}u$$

in $L_0^2([0,1])$ with periodic or Neumann boundary conditions. The existence of a stationary solution of (8) with invariant measure μ satisfying.

$$\int \log\left(1 + \|x\|^2\right)\mu(dx) < \infty$$

has been shown in [2]. Since the coefficients in this example satisfy the following stability condition

$$\langle Ay + B(y+w), y\rangle \le -\frac{1}{4}\|y\|^2_{V_{\frac{1}{2}}} + \beta_1\|w\|^4_{V_{\frac{5}{16}}} + \beta_2\|w\|^8_{V_{\frac{5}{16}}}\|y\|^2$$

(see [16]), the moment estimate can be improved according to Theorem 3.9 to the moment estimate

$$\int \left(1 + \|x\|_{V_\gamma}^2\right) \|x\|_H^{2p} \mu(dx) < \infty \quad \text{for all } p \geq 0,\ \gamma \leq \frac{1}{2}.$$

3.3 Uniqueness of Invariant Measures

The Krylov-Bogoliubov method only provides the existence of an invariant measure μ, but not its uniqueness. The uniqueness problem for μ is related to the support properties of the transition probabilities $p_t(x,\cdot)$. More precisely, Doob's theorem (see [11]) states that if $(p_t)_{t\geq 0}$ is stochastically continuous and t_0-regular for some $t_0 > 0$, in the sense that all probabilities $p_{t_0}(x,\cdot)$, $x \in H$, are mutually absolutely continuous, then there exists at most one invariant probability measure for (8). Sufficient conditions on A, B and C to imply the regularity of the transition probabilities can be found in [11].

Less known criteria for the uniqueness of the invariant measure can be established in terms of the associated Kolmogorov operator L. Some of the terminology used in the following will be introduced in the subsequent section. In particular, for any infinitesimally invariant measure μ for which L is $L^1(\mu)$-unique, let $(L_\mu^{(1)}, D(L_\mu^{(1)}))$ denote its unique maximal extension in $L^1(\mu)$ generating a C_0-semigroup. We will say that $L_\mu^{(1)}$ is irreducible if dim (ker $(L_\mu^{(1)})) = 1$, i.e., if the constant functions are the only functions $H \in D(L_\mu^{(1)})$ satisfying $L_\mu^{(1)} H = 0$. A crucial role is then played by the following set

$$K = \{\mu \mid \mu \text{ inf. invariant}, L \text{ unique in } L^1(\mu), L_\mu^{(1)} \text{ irreducible}\}.$$

It can then be shown that $\#K_{\text{conv}} \leq 1$ for any convex subset $K_{\text{conv}} \subset K$. In various particular situations it can be checked that for any infinitesimally invariant measure μ L is unique in $L^1(\mu)$ and $L_\mu^{(1)}$ irreducible. It follows in these cases that K itself is already convex and as a consequence uniqueness of the infinitesimally invariant measure (see [4] for finite-dimensional results).

4 Uniqueness of Kolmogorov Operators

4.1 Implications of the Existence of the Invariant Measure

Let μ be an invariant measure, then the transition semigroup $(P_t)_{t\geq 0}$ operates as a C_0-semigroup of Markovian contractions on $L^p(\mu)$ for every $p \in [1,\infty[$. Indeed, Jensen's inequality first implies the pointwise inequality

$$|P_t F(x)|^p \leq P_t\left(|F|^p\right)(x)$$

and integrating w.r.t. the invariant measure μ implies

$$\|P_t F\|_{L^p(\mu)}^p = \int |P_t F(x)|^p \,\mu(dx) \leq \int P_t\left(|F|^p\right)(x)\mu(dx)$$

$$= \int |F|^p(x)\mu(dx) = \|F\|^p_{L^p(\mu)},$$

hence the contraction property on $L^p(\mu)$ for all p. The strong continuity follows from the fact that for $F \in C_b(H)$ $\lim_{t\to 0} F(X(t,x)) = F(x)$ P-a.s. for all $x \in H$ implies $\lim_{t\to 0} P_t F(x) = F(x)$ using Lebesgue's dominated convergence theorem, and subsequently $\lim_{t\to\infty} P_t F = F$ in $L^p(\mu)$ using Lebesgue's theorem again.

Identifying its infinitesimal generator

$$L^{(p)} F := \lim_{t\to 0} \frac{1}{t}\left(P_t F - F\right), \quad F \in D(L^{(p)}),$$

where

$$D(L^{(p)}) = \left\{ G \in L^p(\mu) \mid \exists \lim_{t\to 0} \frac{1}{t}\left(P_t F - F\right) \text{ in } L^p(\mu) \right\},$$

will be in general impossible. However, it can be shown that in the case where μ satisfies the integrability assumption

$$\langle x, A^* l\rangle, \langle B(x), l\rangle, \langle C(x)C(x)^* l, l\rangle \in L^p(\mu) \tag{31}$$

for all $l \in D(A^*)$, so that $L(\mathcal{F}C_b^2(D(A^*)) \subset L^p(\mu)$, it follows that

$$\lim_{t\to 0} \frac{1}{t}\left(P_t F - F\right) = \lim_{t\to 0} \frac{1}{t} \int_0^t P_s LF\, ds = LF \quad \text{in } L^p(\mu)$$

so that $\mathcal{F}C_b^2(D(A^*)) \subset D(L^{(p)})$ and $L^{(p)} F = LF$. In other words, the infinitesimal generator is a maximal extension of the Kolmogorov operator L associated with (8).

However, in general there might be many maximal extensions of L generating a C_0-semigroup and one cannot guarantee which of these extensions is the generator of the transition semigroup associated with (8). Only in the case, where the maximal extension is unique there is no such problem and, in addition, in this case, the maximal extension is given as the closure of $(L, \mathcal{F}C_b^2(D(A^*)))$ in $L^p(\mu)$. An important question therefore is the uniqueness problem of the Kolmogorov operator L associated with (8).

To formulate the uniqueness problem in its most general version, we may even look at the larger class of infinitesimally invariant measures for L rather than invariant measures, i.e., let us assume that μ is a probability measure on $(H, \mathcal{B}(H))$ satisfying the integrability assumption (31) with $p = 1$, so that $L(\mathcal{F}C_b^2(D(A^*))) \subset L^1(\mu)$ and

$$\int LF\, d\mu = 0\ \forall F \in \mathcal{F}C_b^2(D(A^*)). \tag{32}$$

Then (32) first implies that

$$\int LF\Psi(F) d\mu \leq 0\ \forall F \in \mathcal{F}C_b^2(D(A^*)) \tag{33}$$

for any increasing $\Psi : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$. Equation (33) may be seen as an integrated version of the maximum principle for second order partial differential operators. Particular examples are

(i) $\int LF1_{\{F>0\}}d\mu \le 0$,
(ii) $\int LF1_{\{F>1\}}d\mu \le 0$.

It can be shown that if (i) (resp. (ii)) holds for all F in the full domain of a maximal extension of L then its associated semigroup is positivity preserving (resp. Markovian) (see [33]).

Various kinds of uniqueness results for the Kolmogorov operator have been obtained in the literature (see in particular [1] for the finite-dimensional case, [12] for the infinite-dimensional case and [14] for both, the finite- and the infinite-dimensional case). Below we concentrate on two typical uniqueness results that may be seen as generic results for the additive noise case.

Theorem 4.1 (see [15]) *Assume that $Q := CC^* > 0$ and that*

$$\|x\|, \quad \|\sqrt{Q}^{-1}B(x)\| \in L^2(H,\mu).$$

Then $(L, \mathcal{F}C_b^2(D(A^*)))$ is unique in $L^1(\mu)$.

Example 4.2 Consider again the Example 1.2 of the stochastic reaction diffusion equation on the unit interval together with the assumptions made in 3.6. It follows as an application of Theorem 4.1 that the associated Kolmogorov operator $(L, \mathcal{F}C_b^2(D(\Delta)))$ is $L^1(\mu)$-unique (see [15]).

The previous uniqueness result can be combined with a uniqueness result for drift terms B satisfying the one-sided Lipschitz condition

$$\langle B(u) - B(v), u - v\rangle \le \alpha\|u - v\|^2, \quad u, v \in D(B).$$

To this end suppose that $Q = (-A)^{-2\gamma_0}$ and

(B.1) $\|B\| \in L^1(\mu)$,
(B.2) $\exists\beta \in (\gamma_0, \frac{1}{2})$ and $B_0 : V_\beta \to V_\beta$ with $\|B_0\|_{V_\beta} \in L^2(\mu)$ such that

$$\langle B(u) - B(v), u - v\rangle \le \|u - v\|_{V_{\frac{1}{2}}} + \langle B_0(u) - B_0(v), u - v\rangle$$

for all $u, v \in V_{\frac{1}{2}}$,
(B.3) The finite dimensional Galerkin approximations

$$\pi_n \circ B \circ i_n, \pi_n \circ B_0 \circ i_n : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n,$$

of B and B_0 w.r.t. some CONS $(e_k)_{k\ge 1}$ of H consisting of eigenfunctions of A are smooth and polynomially bounded vector-fields. Here $i_n(x_1, \dots, x_n) = \sum_{k=1}^n x_k e_k$ denotes the natural injection $\mathbb{R}^n \hookrightarrow H$ and $\pi_n(x) = (\langle x, e_1\rangle, \dots, \langle x, e_n\rangle)$ the natural projection $H \to \mathbb{R}^n$.

Theorem 4.3 (see [16]) *Under the assumptions* (B.1)–(B.3) *it follows that the Kolmogorov operator L associated with* (8) *is L^1-unique.*

Remark 4.4 Condition (B.2) says that the nonlinear part of the drift term B can be decomposed into a drift $B - B_0$ that satisfies a one-sided Lipschitz condition and a drift B_0 that is small in the sense of Theorem 4.1. The drift term B_0 can be seen as a dissipative completion of B.

Example 4.5 Consider the stochastic Burgers equation

$$dX(t) = \left[\Delta X(t) + \partial_\xi \left(X(t)^2\right)\right] dt + (-\Delta)^{-\beta}\, dW(t) \tag{34}$$

on the space $L^2([0,1])$ with Dirichlet boundary conditions and with $\beta \in (\frac{1}{4}, \frac{1}{2})$. Standard results allow to construct stationary martingale solutions and as an application of Theorem 3.9 the invariant measure μ satisfies the moment estimates

$$\int \left(1 + \|x\|_{V_\gamma}^2\right) \|x\|^{2p} \mu(dx) < \infty \; \forall p \geq 0,\; \gamma \leq \frac{1}{2}.$$

A dissipative completion for the stochastic Burgers equation is provided by $B_0(u) = u^3$, since

$$\langle B(u) - B(v), u - v\rangle \leq \frac{1}{2}\|u - v\|_{V_{\frac{1}{2}}}^2 + \langle u^3 - v^3, u - v\rangle.$$

As an application of Theorem 4.3 we conclude that $(L, \mathcal{F}C_b^2(\Delta))$ is $L^1(\mu)$-unique (see [16]).

Appendix A: Further Remarks on Mild Solutions

Besides the basic differences between the concepts of strong and mild solutions that already hold in the deterministic case, the following major additional differences appear in the stochastic case:

(1) Whereas the stochastic integral

$$\int_0^t C(X(s))\, dW(s), \quad t \geq 0$$

appearing in the strong solution is an $(\mathcal{F}_t)_{t\geq 0}$-adapted continuous (local) martingale, the stochastic convolution

$$\int_0^t e^{(t-s)A} C(X(s))\, dW(s), \quad t \geq 0$$

is no longer a martingale. In particular, a strong solution of (8) is a continuous semimartingale and Ito's formula can be applied under appropriate assumptions to a strong solution but not to a mild solution of (8).

(2) The definition of the stochastic integral

$$\int_0^t C(X(s))\, dW(s), \quad t \geq 0$$

requires the integrability assumption

$$P\left(\int_0^t \|C(X(s))\|^2_{L_2(U,H)}\, ds < \infty\right) = 1$$

whereas the definition of the stochastic convolution merely requires that

$$P\left(\int_0^t \|e^{(t-s)A} C(X(s))\|^2_{L_2(U,H)}\, ds < \infty\right) = 1.$$

This makes a broad difference in the particular case where the semigroup generated by A is Hilbert-Schmidt: in this case equation (8) may be considered for dispersion coefficients C that are merely bounded and not necessarily Hilbert-Schmidt.

(3) Pathwise Continuity Whereas pathwise continuity of stochastic integrals $\int_0^t \Phi(s)\, dW(s)$ in t follows from the general theory of stochastic integration in Hilbert spaces, the stochastic convolution will not be in general pathwise continuous. Sufficient conditions for its continuity may be derived on the basis of

(3.1) the factorization method (see [10], [11]), e.g.: assume that A generates an analytic semigroup and that for some $\alpha \in]0, \frac{1}{2}[$

$$\int_0^t s^{-2\alpha} \|e^{sA} C\|^2_{L_2(U,H)}\, ds < \infty, \quad \forall t \geq 0$$

then $W_{A,C}$ has a modification that is Hölder-continuous with values in $D((-A)^\gamma)$ for any $\gamma < \alpha$,

(3.2) local uniformly convergence (in time t) in probability of appropriate finite-dimensional approximations (see [15]).

(4) (Exponential) Moments The Burkholder-Davis-Gundy inequality implies the following moment estimate

$$E\left(\left\|\int_0^T \Phi(s)\, dW(s)\right\|_H^{2m}\right) \leq A^{2m} 2^m m^m E\left(\left(\int_0^T \|\Phi(s)\|^2_{L_2(U,H)}\, ds\right)^m\right), \quad m \geq 1 \tag{35}$$

for stochastic integrals. Here, A is a universal constant. If, in particular,

$$\int_0^T \|\Phi(s)\|^2_{L_2(U,H)}\, ds \leq K < \infty \quad P-a.s. \tag{36}$$

the stochastic integral has finite exponential moments

$$E\left(\exp\left(\varepsilon\left\|\int_0^T \Phi(s)\,dW(s)\right\|_H^2\right)\right) \le \frac{1}{1-\varepsilon A^2 2eK} < \infty \tag{37}$$

for $\varepsilon < \frac{1}{A^2 2eK}$ (see [20]).

In the particular case where the integrand $\Phi(s)$ is independent of ω, or in other words, deterministic, the stochastic integral $\int_0^T \Phi(s)\,dW(s)$ has the Gaussian distribution $N(0, \int_0^T \Phi(s)\Phi(s)^*\,ds)$. Hence, all moments are known explicitely. In particular,

$$\begin{aligned} E\left(\left\|\int_0^T \Phi(s)\,dW(s)\right\|_H^2\right) &= \mathrm{tr}\left(\int_0^T \Phi(s)\Phi(s)^*\,ds\right) \\ &= \int_0^T \|\Phi(s)\|_{L_2(U,H)}^2\,ds \end{aligned} \tag{38}$$

and

$$\begin{aligned} &E\left(\exp\left(\varepsilon\left\|\int_0^T \Phi(s)\,dW(s)\right\|_H^2\right)\right) \\ &= \exp\left(-\frac{1}{2}\,\mathrm{tr}\left(\log\left(1-2\varepsilon\int_0^T \Phi(s)\Phi(s)^*\,ds\right)\right)\right) \end{aligned} \tag{39}$$

(see [10], Proposition 2.16).

(5) Pathwise Control on the Stochastic Convolution Let the dispersion coefficient of (8) be constant. A pathwise control of the stochastic convolution $W_{A,C}(t)$ may be obtained on the basis of the modulus of continuity

$$M(\delta, T) := \sup_{0\le s<t\le T} \frac{|B(t)-B(s)|}{|t-s|^\delta}, \quad \delta \in \left(0, \frac{1}{2}\right)$$

for a one-dimensional Brownian motion $(B(t))_{t\ge 0}$ with the moment estimate

$$E(M(\delta, T)^m) \le M T^{m(\frac{1}{2}-\delta)}, \quad m \ge 1, \tag{40}$$

where M is some constant independent of T (see [30]).

Suppose that A and $Q = CC^*$ are simultaneously diagonalizable and that there exists a CONS $(e_k)_{k\ge 1}$ of H consisting of eigenvectors of $-A$ with corresponding eigenvalues $(\lambda_k)_{k\ge 1}$ and simultaneously of Q with corresponding eigenvalues $(q_k)_{k\ge 1}$, then for $\delta \in (0, \frac{1}{2})$, $\gamma \in \mathbb{R}$ and $\lambda \ge 0$

$$\sup_{0\le t\le T} \|W_{A-\lambda,C}(t)\|_{D((-A)^\gamma)}^2 \le C_\delta^2 \sum_{k=1}^\infty q_k \frac{\lambda_k^{2\gamma}}{(\lambda+\lambda_k)^{2\delta}} M_k(\delta, T)^2, \tag{41}$$

where

$$M_k(\delta, T) := \sup_{0 \le s < t \le T} \frac{|B_k(t) - B_k(s)|}{|t-s|^\delta}, \quad k \ge 1,$$

with $B_k(t) = \langle W(t), e_k \rangle_H$, are independent random variables satisfying the moment estimates (40). Note that the pathwise control (41) is only slightly worse than the moment estimate

$$\begin{aligned} E\left(\|W_{A-\lambda,C}(T)\|^2_{D((-A)^\gamma)} \right) &= \int_0^T \|(-A)^\gamma e^{(T-s)(A-\lambda)} C\|^2_{L_2(U,H)} ds \\ &\le \frac{1}{2} \sum_{k=1}^\infty q_k \frac{\lambda_k^{2\gamma}}{\lambda + \lambda_k}. \end{aligned}$$

References

1. Bertoldi, M., Lorenzi, L.: Analytical Methods for Markov Semigroups. Chapman & Hall/CRC, Boca Raton (2007)
2. Blömker, D., Hairer, M.: Stationary solutions for a model of amorphous thin-film growth. Stoch. Anal. Appl. **22**, 903–922 (2004)
3. Blumenthal, R.M., Getoor, R.K.: Markov processes and potential theory. In: Pure and Applied Mathematics, vol. 29. Academic Press, New York (1968)
4. Bogachev, V.I., Röckner, M., Stannat, W.: Uniqueness of invariant measures and maximal dissipativity of diffusion operators on L^1. In: Clement, P. et al. (eds.) Infinite Dimensional Stochastic Analysis, pp. 39–54. Royal Netherlands Academy of Arts and Sciences, Amsterdam (2000)
5. Brzezniak, Z., Gatarek, D.: Martingale solutions and invariant measures for stochastic evolution equations in Banach spaces. Stoch. Process. Appl. **84**, 187–225 (1999)
6. Capinski, M., Peszat, S.: Local existence and uniqueness of strong solutions to 3D-stochastic Navier-Stokes equations. Nonlinear Differ. Equ. Appl. **4**, 185–200 (1997)
7. Carmona, R.A., Rozovskii, B. (eds.): Stochastic Partial Differential Equations: Six Perspectives, Am. Math. Soc., Providence (1999)
8. Cerrai, C.: Stochastic reaction – diffusion systems with multiplicative noise and non-Lipschitz reaction term. Probab. Theory Relat. Fields **125**, 271–304 (2003)
9. Da Prato, G., Röckner, M.: Singular dissipative stochastic equations in Hilbert spaces. Probab. Theory Relat. Fields **124**, 261–303 (2002)
10. Da Prato, G., Zabczyk, J.: Stochastic Equations in Infinite Dimensions. Cambridge University Press, Cambridge (1992)
11. Da Prato, G., Zabczyk, J.: Ergodicity for infinite-dimensional systems. In: London Mathematical Society Lecture Note Series, vol. 229. Cambridge University Press, Cambridge (1996)
12. Da Prato, G., Zabczyk, J.: Second order partial differential equations in Hilbert spaces. In: London Mathematical Society Lecture Note Series, vol. 293. Cambridge University Press, Cambridge (2002)
13. Dawson, D.A.: Stochastic evolution equations and related measure processes. J. Multivar. Anal. **5**, 1–52 (1975)
14. Eberle, A.: Uniqueness and non-uniqueness of singular diffusion operators. In: Springer Lecture Notes in Mathematics, vol. 1718. Springer, Berlin (1999)
15. Es-Sarhir, A., Stannat, W.: Invariant measures for semilinear SPDE's with local Lipschitz drift coefficients and applications. J. Evol. Equ. **8**, 129–154 (2008)
16. Es-Sarhir, A., Stannat, W.: Improved moment estimates for invariant measures of semilinear diffusions in Hilbert spaces and applications. J. Funct. Anal. **259**, 1248–1272 (2010)
17. Flandoli, F., Gatarek, D.: Martingale and stationary solutions for stochastic Navier-Stokes equations. Probab. Theory Relat. Fields **102**, 367–391 (1995)
18. Flandoli, F., Gubinelli, M., Priola, E.: Well-posedness of the transport equation by stochastic perturbation. Invent. Math. **180**, 1–53 (2010)

19. Hasminskii, R.Z.: Ergodic properties of recurrent diffusion processes and stabilization of the solution of the Cauchy problem for parabolic equations. Theory Probab. Appl. **5**, 179–196 (1960)
20. Hausenblas, E., Seidler, J.: Stochastic convolutions driven by martingales: Maximal inequalities and exponential integrability. Stoch. Anal. Appl. **26**, 98–119 (2008)
21. Hieber, M., Stannat, W.: Stochastic stability of the Ekman spiral, manuscript, submitted, 2010
22. Ito, K.: Distribution – valued processes arising from independent Brownian motions. Math. Z. **182**, 17–33 (1983)
23. Kolmogorov, A.N.: Über die analytischen Methoden in der Wahrscheinlichkeitsrechnung. Math. Ann. **104**, 415–458 (1931)
24. Kolmogorov, A.N.: Zur Umkehrbarkeit der statistischen Naturgesetze. Math. Ann. **113**, 766–772 (1937)
25. Manthey, R., Zausinger, T.: Stochastic evolution equations in $L^{2\nu}_{\rho}$. Stoch. Stoch. Rep. **66**, 37–85 (1999)
26. Marinelli, C., Röckner, M.: On uniqueness of mild solutions for dissipative stochastic evolution equations, Preprint CRC 701, Bielefeld, 2010
27. Nualart, D.: The Malliavin Calculus and Related Topics. Springer, Berlin (1995)
28. Prevot, C., Röckner, M.: A concise course on stochastic partial differential equations. In: Springer Lecture Notes in Mathematics, vol. 1905. Springer, Berlin (2007)
29. Röckner, M.: L^p-analysis of finite and infinite dimensional diffusion operators. In: Da Prato, G. (ed.) Stochastic PDE's and Kolmogorov Equations in Infinite Dimensions. Lecture Notes in Math., vol. 1715. Springer, Berlin (1999)
30. Roynette, B.: Movement Brownien et espaces de Besov. Stoch. Stoch. Rep. **43**, 221–260 (1993)
31. Shigekawa, I.: Stochastic Analysis, Translations of Mathematical Monographs, vol. 224. Am. Math. Soc., Providence (2004)
32. Snyders, J., Zakai, M.: Stationary probability measures for linear differential equations driven by white noise. Electron. J. Differ. Equ. **8**, 27–32 (1970)
33. Stannat, W.: (Nonsymmetric) Dirichlet operators on L^1–existence, uniqueness and associated Markov processes. Ann. Sc. Norm. Super. Pisa, Cl. Sci. **28**(4), 99–140 (1999)
34. Stannat, W.: L^p-uniqueness of Kolmogorov operators associated with $2D$-stochastic Navier-Stokes-Coriolis equations, Darmstadt 2010, to appear in Mathematische Nachrichten
35. Zabczyk, J.: Symmetric solutions of semilinear stochastic equations. In: Stochastic Partial Differential Equations and Applications, II (Trento, 1988). Lecture Notes in Math., vol. 1390. Springer, Berlin (1989)

Wilhelm Stannat is full professor for Stochastics at TU Darmstadt since 2006. His research interests include all areas of Stochastic Analysis with an emphasis on stochastic partial differential equations and their applications to signal processing, stochastic optimization algorithms, mathematical fluid dynamics and stochastic models arising in mathematical biology.

Jahresber Dtsch Math-Ver (2011) 113:111–113
DOI 10.1365/s13291-011-0021-z

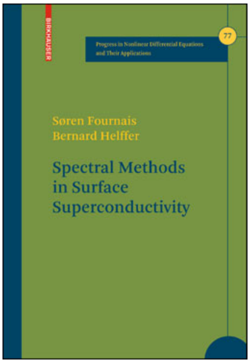
BUCHBESPRECHUNG

Søren Fournais and Bernard Helffer: “Spectral Methods in Surface Superconductivity”

Progress in Nonlinear Differential Equations and Their Applications, vol. 77, Birkhäuser, 2010, 324 pp.

Peter Sternberg

Published online: 28 April 2011



The Ginzburg-Landau model for superconductivity stands as a remarkable theory, capturing and at least partially explaining, as it does, a wide array of observed behaviors of superconductors. This is achieved through minimization of a relatively simple-looking energy involving the interplay between a complex-valued wave function whose square modulus measures the density of the so-called Cooper pairs carrying the super-current and a vector-valued potential whose curl represents the magnetic field induced by the superconductor in response to applied fields. Introduced in 1950 as a phenomenological macroscopic theory, an acknowledgment of its impact within the physics community came with the awarding of the 2003 Nobel Prize to Vitaly Ginzburg. Within the mathematics community, contributions came sporadically during the 1970’s and 80’s but then exploded in the 1990’s and the last decade. In the book under review, the authors collect and present a sizable sector of this mathematical progress.

The basic tension, as it were, that Ginzburg and Landau built into their energy comes from the observation that strong enough applied magnetic fields tend to destroy superconductivity. Within the superconductor, an opposing magnetic field is induced which attempts to cancel the effects of the applied field. If this applied field is small, the cancellation is largely effective and the wave function—let us call it Ψ—has modulus bounded away from zero. However, as the applied field is increased beyond the so-called first critical field H_{c1}, vortices, that is zeros of Ψ carrying nontrivial

P. Sternberg (✉)
Bloomington, IN, USA
e-mail: sternber@indiana.edu

degree, begin to appear within the superconductor, marking the locations where the applied field penetrates the sample. At far larger values of the applied field, the wave function is largely suppressed until the field strength passes the third critical field H_{c3}, beyond which superconductivity is totally destroyed. Above H_{c3}, the modulus of the wave function minimizing the energy is identically zero, with the corresponding magnetic potential given simply by the potential associated with the applied field. This state is called the normal state and it is an analysis of the Ginzburg-Landau model in the range of applied field strength near H_{c3} that is the focus of the book by Helffer and Fournais. It is a welcome addition to the literature, complementing as it does the impressive book "*Vortices in the Magnetic Ginzburg-Landau Model*" by E. Sandier and S. Serfaty (Birkhäuser, 2007) that deals primarily with vortex formation through an analysis near H_{c1}.

The book is divided into two main sections. The first deals with the linear theory associated with the spectral problem of characterizing the first eigenvalue and eigenfunction of the Ginzburg-Landau system of PDE's linearized about the normal state. Equivalently, this spectral problem for the Schrödinger operator in the presence of a magnetic field can be arrived at through minimization of the second variation of the energy, computed about the normal state. With an eye towards application to Ginzburg-Landau theory, the authors focus in this linear presentation mainly on describing the ground state when this eigenvalue problem is supplemented with appropriate Neumann boundary conditions that arise naturally in this context. Most of this linear presentation deals with the case of smooth domains but there is also a serious treatment of domains with corners.

Of primary interest is the attainment of precise asymptotics in the large field regime. This includes a precise multiple term expansion for the leading eigenvalue and precise decay estimates for the modulus of the first eigenfunction, which tends to exponentially localize near (portions of) the boundary of the sample in the large field limit. The authors present results on the problem in two and three dimensions and for both constant and non-constant applied magnetic fields. The expansions they obtain highlight what makes the subject so appealing to researchers, namely the interplay between the geometry of the boundary of the sample domain and the size and direction of the applied magnetic field. While, not surprisingly, the results are most sharp for planar problems and constant fields, the formulas and estimates in three dimensions and for non-constant fields are equally impressive.

The second half of the book is devoted to the analysis of the nonlinear problem for applied fields below but near H_{c3}. Here the authors consider among other topics, the relationship between various characterizations of the third critical field to be found in the literature, some of them based on the linear spectral theory and others based on minimization of the full Ginzburg-Landau energy. They also obtain precise asymptotics for the minimizing energy itself for fields below H_{c3} and for the modulus of the minimizing wave function in the regime of large Ginzburg-Landau parameter and correspondingly large applied field. Here the power of their methods is in some ways most dramatically exposed as they also capture the exponential decay of $|\Psi|$ away from the boundary not just in terms of the distance to the boundary of the sample but also in terms of the difference between the field strength and H_{c3}. The method of Agmon estimates as a means of capturing exponential decay, first introduced in the book during the linear section, returns to use in this nonlinear section to great effect. The book concludes with a section addressing the nonlinear problem in domains with corners and with a section mentioning related models and some open problems.

The overall purpose of the book is to integrate and in some cases improve the authors' own previous research contributions to the subject, along with the work of other experts—many of them collaborators—such as Y. Almog, K. Lu, A. Morame and X.-B. Pan. Through the work of these researchers and others, the mathematical analysis of the Ginzburg-Landau model near the third critical field is almost fully developed and it is a very appropriate and helpful task to organize the progress into one book. Throughout, the authors achieve a high degree of clarity while also striving for precision. Wherever possible, they have presented optimal estimates representing the state of the art in this field. This is a meticulous book written with a lot of care. That said, it must be noted that this is also a highly technical book that requires of its readers a reasonably strong background in elliptic PDE and spectral theory, though the authors have made an effort towards accessibility, providing background chapters and appendices on various aspects of these two topics.

As a field, Ginzburg-Landau theory remains a vital area for those interested in bringing the tools of mathematical analysis to bear on important physical problems. Within the realm of critical fields, probably the next big results will come in the long sought after characterization of the second critical field H_{c2}, sandwiched between H_{c1} and H_{c3}, where one hopes to capture the emergence of the celebrated hexagonal vortex lattice of Abrikosov. Beyond this, the analysis of the behavior of solutions to the time-dependent Ginzburg-Landau model, with its coupling of the wave function and magnetic potential to an electric potential, still lies in its infancy, as does the blending of Ginzburg-Landau models with liquid crystal energies and models for various complex fluids. Unlike many other well-known but much more complicated models in continuum mechanics, it is the simplicity of the modeling by Ginzburg and Landau that gives the theory a rare quality of universality, and that allows for its continuing relevance.

Jahresber Dtsch Math-Ver (2011) 113:115–116
DOI 10.1365/s13291-011-0020-0

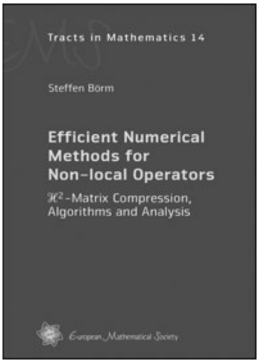
BUCHBESPRECHUNG

Steffen Börm: "Efficient Numerical Methods for Non-local Operators"

EMS Tracts in Mathematics, Bd. 14, 2010

Christian Wieners

Online publiziert: 5. Mai 2011



Ein wichtiges Teilgebiet der numerischen Mathematik ist die Entwicklung von effizienten Lösungsverfahren für nicht-lokale Operatoren. Insbesondere werden dabei Integraloperatoren oder Lösungsoperatoren von elliptischen Randwertaufgaben betrachtet. Diese Operatoren werden zunächst diskretisiert, so dass sie durch Matrizen dargestellt werden können.

Dabei führt die Diskretisierung von elliptischen Randwertaufgaben in vielen Fällen auf dünn besetzte Matrizen $A \in \mathbb{R}^{N \times N}$, und die entsprechenden linearen Gleichungssysteme lassen sich approximativ (bis zu einer Genauigkeit in der Größenordnung des Diskretisierungsfehlers) mit optimaler Komplexität lösen. Dabei heißt ein Lösungsverfahren optimal, wenn die Anzahl der benötigten Rechenoperationen proportional zu der Anzahl der Freiheitsgrade N der Diskretisierung ist. Solche Lösungsverfahren sind iterativ, denn die Inverse der diskretisierten Differentialoperatoren kann nicht in optimaler Komplexität berechnet werden, da sie nicht mehr dünn besetzt ist.

Die Diskretisierung von Integraloperatoren (z.B. die Approximation des Einfachschichtpotentials mit Randelementmethoden) führt bereits zu voll besetzten Matrizen, so dass alleine schon die Berechnung aller Matrixeinträge quadratischen Aufwand $O(N^2)$ benötigt.

Die entscheidende Idee für Approximationen dieser Operatoren mit optimaler Komplexität ist die Beobachtung, dass sich Integralkerne vielfach separabel approxi-

C. Wieners (✉)
Karlsruhe, Deutschland
e-mail: christian.wieners@kit.edu

mieren lassen, d.h., es gilt $K(x, y) \approx \sum k_j(x)k_j(y)$. Schnelle Randelementmethoden wie die Multipolmethode oder das Panelclustering nutzen dieses Prinzip aus.

Algebraisch entspricht eine solche Approximation einer Summe von Rang-1-Matrizen $A \approx \sum a_j b_j^T$. Um tatsächlich Algorithmen mit optimaler Komplexität zu erhalten, muss eine derartige Approximation geschickt gewählt werden. Dazu wurde in den letzten zehn Jahren in der Arbeitsgruppe von Wolfgang Hackbusch (MPI Leipzig) das Kalkül der hierarchischen Matrizen entwickelt.

Aus Sicht der Linearen Algebra sind hierarchische Matrizen eine Teilmenge von Matrizen $A \in \mathbb{R}^{M,N}$, die sich in geeigneter Weise als Summe von Niedrigrang-Matrizen darstellen lassen. Dazu wird aus der Indexmenge $\{1, \dots, M\} \times \{1, \dots, N\}$ ein Clusterbaum aus Indexteilmengen $\sigma \subset \{1, \dots, M\}$ bzw. $\tau \subset \{1, \dots, N\}$ gebildet, der damit den Indizes eine hierarchische Struktur verleiht. Aus dem Clusterbaum wird eine Partition der gesamten Indexmenge in disjunkte Blöcke $b = \sigma \times \tau$ ausgewählt. In einer hierarchischen Matrix werden nun die Teilmatrizen $A_b = (A_{i,j})_{(i,j)\in b}$ möglichst durch Niedrigrangmatrizen approximiert. Zusätzlich wird die Menge der Indizes (in der Regel durch Kopplung an Geometriedaten) mit einer Metrik versehen. Gute Approximationen mit wenig Speicherbedarf sind nun möglich, wenn Blöcke mit weit entfernten Indizes möglichst groß sind und diese Blöcke mit möglichst kleinem Rang approximiert werden. Eine umfassende Darstellung der Theorie der hierarchischen Matrizen ist kürzlich erschienen (Wolfgang Hackbusch: Hierarchische Matrizen. Algorithmen und Anwendungen, Springer-Verlag Berlin-Heidelberg 2009).

Das vorliegende Werk von Steffen Börm ist eine Ausarbeitung und Erweiterung seiner Habilitationsschrift, die eine direkte Erweiterung der hierarchischen Matrizen betrachtet, die sogenannten $\mathcal{H}^2$-Matrizen. Dabei wird eine zusätzliche Struktur eingeführt: den Indexteilmengen σ bzw. τ wird eine (hierarchische) Basis von niedrig-dimensionalen Teilräumen zugeordnet. Damit wird die Komplexität der $\mathcal{H}$-Matrix-Arithmetik substantiell verbessert, und in vielen Fällen lässt sich für den Speicheraufwand und für Operationen wie Matrixmultiplikation und LU-Zerlegung die Komplexität $O(N)$ nachweisen.

Die Monographie beginnt nach einer Einführung und nach der Analyse eines Modellproblems (ein 1-D Integraloperator) mit einer Definition von $\mathcal{H}$- und $\mathcal{H}^2$-Matrizen und untersucht dann die Approximierbarkeit von allgemeinen Integraloperatoren in diesen Matrixformaten. In vier weiteren Kapiteln werden Aspekte der $\mathcal{H}^2$-Arithmetik untersucht. Die letzten beiden Kapitel behandeln schließlich die Anwendung auf Lösungsoperatoren von elliptischen Differentialgleichungen.

In fast allen Kapiteln werden die Komplexitätsabschätzungen und Approximationseigenschaften an numerischen Beispielen erläutert. Sie illustrieren vor allem die beeindruckende Datenkompression bei der Repräsentation von Integraloperatoren. In der Approximation von Lösungsoperatoren (z.B. die Inverse der Laplace-Gleichung) sind $\mathcal{H}^2$-Matrizen (zumindest in der bislang vorliegenden Implementation) nicht konkurrenzfähig mit schnellen iterativen Lösungsverfahren. Aber auch hier zeigt sich, dass diese Technik ein großes Potential besitzt. Für viele numerische Anwendungen von nicht-lokalen Operatoren, die über ein reines Gleichungslösen hinaus gehen, haben hierarchische Matrizen das Potential, sich als Standardtechnik zu etablieren.

Jahresber Dtsch Math-Ver (2011) 113:117–119
DOI 10.1365/s13291-011-0019-6

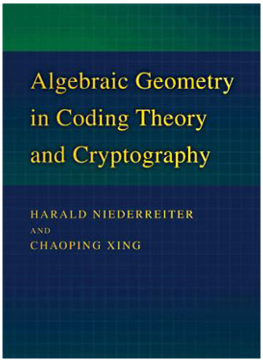
BUCHBESPRECHUNG

Harald Niederreiter and Chaoping Xing: "Algebraic Geometry in Coding Theory and Cryptography"

Princeton University Press, 2009, 248 pp

Florian Heß

Online publiziert: 3. Mai 2011



Die Theorie der algebraischen Kurven ist ein klassisches Teilgebiet der algebraischen Geometrie. Die Entwicklung dieser Theorie für Kurven über dem Grundkörper der komplexen Zahlen fällt in wesentlichen Teilen in das 19. Jahrhundert. Im 20. Jahrhundert wurden dann andere Grundkörper wie Zahlkörper, also endliche Körpererweiterungen des Körpers der rationalen Zahlen, oder die für das vorliegende Buch interessanten endlichen Körper betrachtet, so dass weitere algebraische und insbesondere arithmetische Aspekte sowie Fragestellungen relevant wurden. Die hieraus resultierende Verbindung von algebraischer Geometrie und Zahlentheorie etablierte sich in der Folge als ein eigenständiges Gebiet, welches heute arithmetische Geometrie genannt wird. Ein sehr bekanntes und gewichtiges Ergebnis dieses Gebiets ist der Beweis der Fermatschen Vermutung durch Taylor und Wiles von 1995.

Mit der Erfindung des Computers und der digitalen Nachrichtenübertragung ergab sich unmittelbar die Notwendigkeit, Fehler bei der Übertragung von Daten aufgrund technischer Unzulänglichkeiten zu erkennen und zu korrigieren, was wiederum zur Begründung der Codierungstheorie führte. Aber auch die Anforderungen an die Kryptographie mit ihren wichtigsten Zielsetzungen Vertraulichkeit, Integrität und Authentizität des Inhalts über öffentliche Kanäle zu sendender Nachrichten wuchsen stark. Der eher unerwartete Brückenschlag von der Theorie der algebraischen Kurven über endlichen Körpern zur Codierungtheorie gelang Goppa um 1981, und der

F. Heß (✉)
Oldenburg, Germany
e-mail: florian.hess@uni-oldenburg.de

zur Kryptographie Koblitz und Miller um 1985. Seitdem spielen Kurven eine wichtige Rolle in Codierungtheorie und Kryptographie und sind entsprechend Gegenstand aktiver Forschung in Theorie und Algorithmik.

Das vorliegende Buch beschäftigt sich mit algebraischen Kurven und einigen ihrer Anwendungen in Codierungstheorie und Kryptographie. Es besteht im wesentlichen aus zwei Teilen. Der erste Teil mit 150 Seiten in vier Kapiteln ist eine Einführung in die Theorie der algebraischen Kurven und ihrer Funktionenkörper, wobei auch grundlegende Definitionen zu algebraischen Varietäten und Abbildungen zwischen ihnen gegeben werden. Behandelt werden der Satz von Riemann-Roch über die Existenz von rationalen Funktionen mit vorgegebenem Null- und Polstellenverhalten sowie der Satz von Hasse-Weil über die Anzahl der rationalen Punkte einer Kurve über einem endlichen Körper. Auf Überlagerungen von Kurven beziehungsweise Erweiterungen von Funktionenkörpern sowie weitere Themen wird nur sehr wenig oder gar nicht eingegangen.

Der zweite Teil mit knapp 100 Seiten und zwei Kapiteln beschäftigt sich mit Anwendungen der im ersten Teil behandelten Theorie in Codierungstheorie und Kryptographie. Unter den codierungstheoretischen Anwendungen wird besonderes Gewicht auf asymptotische Konstruktionen gelegt, in denen die Gilbert-Varshamov-Schranke überwunden oder zumindest erreicht wird. Unter den kryptographischen Anwendungen werden Kryptographie mit elliptischen und hyperelliptischen Kurven sowie Kryptographie mittels Codierungstheorie angesprochen.

Während der erste Teil des Buches sich in den klassischen Grundlagen der Theorie aufhält, werden im zweiten Teil auch neuere und neueste Forschungsergebnisse präsentiert. Das Hauptgewicht wird dabei auf die Arbeitsgebiete der Autoren gelegt. Insgesamt besitzt das Buch einführenden Charakter und ist sehr verständlich und sorgfältig geschrieben. An Kenntnissen werden nur Körper- und Galoistheorie vorausgesetzt, wobei in manchen Beweisen dann aber auch auf darüberhinausgehende Ergebnisse verwiesen wird, die nur in anderen Büchern zu finden sind. Ein Beispiel hierfür ist die Desingularisierung von Kurven. Die Ausblicke und Verweise auf weiterführende Themen und Literatur sind ansonsten sehr nützlich. Das Zielpublikum sind Studenten oder berufstätige Mathematiker, die sich mit den drei Hauptthemen des Buches näher vertraut machen wollen.

Im folgenden wird der Inhalt der einzelnen Kapitel noch etwas genauer vorgestellt. Das erste Kapitel „Finite Fields and Function Fields" enthält Grundlagen über endliche Körper und Funktionenkörper mit Bewertungstheorie und Konstantenkörpererweiterungen. Das zweite Kapitel „Algebraic Varieties" führt algebraische Varietäten als Nullstellenmengen in affinen oder projektiven Räumen mit den Standarddefinitionen und -aussagen ein. Das dritte Kapitel „Algebraic Curves" behandelt die kategorielle Äquivalenz von regulären projektiven Kurven und Funktionenkörpern, Divisoren und den Satz von Riemann-Roch mit dem Beweis über Weil-Differentiale. Das vierte Kapitel „Rational Places" ist Zetafunktionen, dem Satz von Hasse-Weil mit seinem Beweis nach Bombieri beziehungsweise Stepanov und Charaktersummen gewidmet. Es werden multiplikative und additive Charaktere auf direkte Weise betrachtet, die Interpretation als Charaktere von Galoiserweiterungen und Verwendung von Artinschen L-Reihen erfolgt nicht.

Das fünfte Kapitel „Applications to Coding Theory" betrachtet Codes zunächst allgemein und dann die Konstruktion von Goppa. Besonderer Wert werden auf asymptotische Konstruktionen von Codes, NXL und XNL Codes sowie Function Field Codes gelegt. Die hinter den asymptotischen Konstruktionen stehenden Familien von Kurven werden allerdings nicht behandelt, sondern nur als Blackbox verwendet. Des weiteren werden Anwendungen von Charaktersummen und digitale Netze besprochen.

Das sechste Kapitel „Applications to Cryptography“ betrachtet Kryptographie und speziell Kryptographie mit elliptischen und hyperelliptischen Kurven einführend und recht allgemein. Danach wendet es sich Anwendungen der Codierungstheorie in der Kryptographie zu und geht auf codebasierte Verschlüsselungsverfahren sowie auf Frameproof Codes ein. Abschließend wird noch die bilineare Komplexität der Multiplikation in endlichen Körpern diskutiert. Algorithmische Aspekte werden im gesamten Buch mit Ausnahme dieses letzten Teils nicht angesprochen.