Jahresber Dtsch Math-Ver (2012) 114:1–2
DOI 10.1365/s13291-012-0037-z

PREFACE

Preface Issue 1-2012

Hans-Christoph Grunau

Published online: 9 February 2012

In Issue 2-2010 Francisco Santos summarised in a joint survey article with Edward Kim the state of the art concerning the works on the Hirsch-conjecture from polytope geometry. During the final composition of this article, Francisco Santos found a counterexample to this conjecture and published it on the `arXiv`, see also Mitteilungen der DMV 18 (2010), no. 4, 214–221. For the latest annual meeting of the DMV he gave a plenary lecture on this topic and explained some of the background. While working on the survey article, as Francisco Santos mentioned, he looked up so many related works and thought so much about results indicating that the conjecture might possibly be false that finally, he got the basic idea and found his counterexample. In the subsequent discussion Günter Ziegler summarised that when one wishes to prove or disprove any important conjecture one should first write (or at least read) a corresponding survey article for Jahresbericht der DMV.

As an editor of Jahresbericht I enjoyed this very much: It becomes once more evident that survey articles also play an important role in active research, a fact which is possibly sometimes underestimated. In this spirit I would like to encourage all readers of the Jahresbericht to mention suitable topics for interesting and comprehensible future survey articles to the editors; for this one may also use the online forum https://dmv.mathematik.de/forum.html.

The first article in the current issue is also in the area of convex and discrete geometry and is devoted to "combinatorial reciprocity theorems". Characteristic polynomials of hyperplane arrangements and Ehrhart-polynomials of polytopes are examples of counting functions encoding basic geometric information. Such counting functions are usually evaluated on the positive integers. Matthias Becks's article describes some

H.-Ch. Grunau (✉)
Institut für Analysis und Numerik, Fakultät für Mathematik, Otto-von-Guericke-Universität,
Postfach 4120, 39016 Magdeburg, Germany
e-mail: hans-christoph.grunau@ovgu.de

interesting connections—i.e. reciprocity theorems—which show up when negative integers are inserted.

Ulrich Felgner's historical article on the principle of mathematical induction describes its emergence in the 16th and 17th century, its antecedents in antiquity, and its formalisation, specification and generalisation in the 19th and 20th century. Ulrich Felgner includes numerous interesting logical and philosophical considerations on this presently so frequently used method of proof.

New books on the theory of three dimensional dynamical systems and from algebraic topology are reviewed.

Since 1899, Teubner—and for the last four years Vieweg+Teubner—has been the publishing house for the "Jahresbericht der DMV". Having looked carefully at the cover of the current issue you will have observed that the logo is now different: Indeed, from now on the "Jahresbericht der DMV" is a member of the big and renowned family of the "Springer" journals. On the one hand one may regret that the brand "Teubner" has now completely disappeared. On the other hand, "Vieweg+Teubner" has been part of the Springer group, and for two years Springer has already been responsible for the technical production of our journal. Being a "Springer" journal opens a number of new opportunities, increasing the attractiveness of Jahresbericht for authors and facilitating its international dissemination. A first step in this direction was already made by making the Jahresbericht available online on Springerlink. Hoping that an increasingly international readership will take notice of the articles of Jahresbericht means that in accordance with the development of the past years, English is the preferential publication language. At the same time, articles written in German will continue to be accepted. One may regret that the "Vorwort" is no longer written in German but I am confident that the new conditions are quite advantageous for the "Jahresbericht der DMV".

Jahresber Dtsch Math-Ver (2012) 114:3–22
DOI 10.1365/s13291-011-0035-6

SURVEY ARTICLE

Combinatorial Reciprocity Theorems

Matthias Beck

Received: 4 October 2011 / Published online: 13 January 2012

Abstract A common theme of enumerative combinatorics is formed by counting functions that are polynomials evaluated at positive integers. In this expository paper, we focus on four families of such counting functions connected to hyperplane arrangements, lattice points in polyhedra, proper colorings of graphs, and P-partitions. We will see that in each instance we get interesting information out of a counting function when we evaluate it at a *negative* integer (and so, a priori the counting function does not make sense at this number). Our goals are to convey some of the charm these "alternative" evaluations of counting functions exhibit, and to weave a unifying thread through various combinatorial reciprocity theorems by looking at them through the lens of geometry, which will include some scenic detours through other combinatorial concepts.

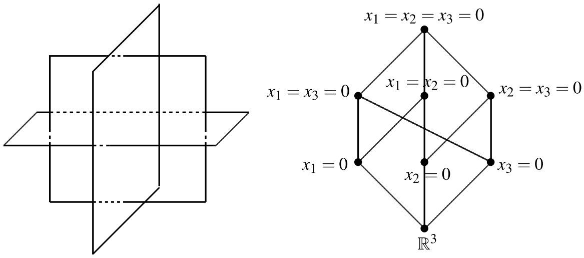
Keywords Combinatorial reciprocity theorem · Rational generating function · Convex polyhedron · Euler–Poincaré relation · Hyperplane arrangement · Lattice point · Lattice polytope · Ehrhart polynomial · Chromatic polynomial · Acyclic orientation of a graph · Inside-out polytope · Poset · P-Partition · Permutation statistics

Mathematics Subject Classification (2000) 05A15 · 05C15 · 05C31 · 11H06 · 52C07 · 52C35

Dedicated to my friend and mentor Tom Zaslavsky.

M. Beck (✉)
Department of Mathematics, San Francisco State University, San Francisco, CA 94132, USA
e-mail: mattbeck@sfsu.edu

Fig. 1 An arrangement of three coordinate hyperplanes and its flats



1 Introduction

A common theme of enumerative combinatorics is formed by counting functions that are polynomials evaluated at positive integers. To be as concrete as possible, we focus on four families of such counting functions. We will see that in each instant we get interesting information out of a counting function when we evaluate it at a *negative* integer (and so, a priori the counting function does not make sense at this number). Our goals are to convey some of the charm these "alternative" evaluations of counting functions exhibit, and to weave a unifying thread through various combinatorial reciprocity theorems by looking at them through the lens of geometry, which will include some scenic detours through other combinatorial concepts.

We have tried to keep this expository paper self contained, requiring only a few basic, well-known facts about polyhedra (such as the Euler–Poincaré relation) and a healthy dose of enthusiasm for exercises, which we have implicitly spread throughout these notes. We start by introducing the main players of this story.

1.1 Hyperplane Arrangements

A *hyperplane arrangement* $\mathcal{H}$ is a finite collection of hyperplanes in $\mathbb{R}^d$. A *flat* of $\mathcal{H}$ is a nonempty intersection of some of the hyperplanes in $\mathcal{H}$; we always include $\mathbb{R}^d$ among the flats.[1] Flats are naturally ordered by (reverse) set inclusion; see Fig. 1 for an example. A *region* of $\mathcal{H}$ is a maximal connected component of $\mathbb{R}^d \setminus \bigcup \mathcal{H}$. Our first goal is to count the regions of a hyperplane arrangement $\mathcal{H}$.

The *Möbius function* of $\mathcal{H}$ is defined on the set of all flats of $\mathcal{H}$ recursively through

$$\mu(F) = \begin{cases} 1 & \text{if } F = \mathbb{R}^d, \\ -\sum_{G \supsetneq F} \mu(G) & \text{otherwise.} \end{cases} \tag{1}$$

(Möbius functions can be defined in much greater generality, as we will see in Sect. 2.) The Möbius function, in turn, allows us to define the *characteristic polynomial* of $\mathcal{H}$ by

$$h_{\mathcal{H}}(t) := \sum_{F \in L(\mathcal{H})} \mu(F)\, t^{\dim F}.$$

[1] $\mathbb{R}^d$ is the flat you obtain when you don't intersect anything.

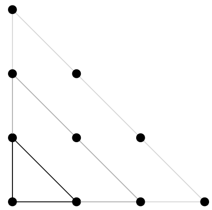


Fig. 2 A sample lattice-point problem

Here are some examples of classic families of hyperplane arrangements and their characteristic polynomials, whose computation makes for a fun exercise.

- For the *Boolean arrangement* $\mathcal{H} = \{x_j = 0 : 1 \le j \le d\}$, $h_{\mathcal{H}}(t) = (t-1)^d$.
- For the *braid arrangement* $\mathcal{H} = \{x_j = x_k : 1 \le j < k \le d\}$, $h_{\mathcal{H}}(t) = t(t-1)(t-2)\cdots(t-d+1)$.
- For an arrangement $\mathcal{H}$ in $\mathbb{R}^d$ consisting of n hyperplanes in general position,

$$h_{\mathcal{H}}(t) = \binom{n}{0} t^d - \binom{n}{1} t^{d-1} + \binom{n}{2} t^{d-2} - \cdots + (-1)^d \binom{n}{d}.$$

The astute reader will notice that each of these characteristic polynomials bear the number of regions of the hyperplane arrangement in question as the special evaluation $|h_{\mathcal{H}}(-1)|$. For example, the braid arrangement dissects $\mathbb{R}^d$ into $d!$ regions. This is not an accident:

Theorem 1 (Zaslavsky [33]) *Suppose $\mathcal{H}$ is a hyperplane arrangement in $\mathbb{R}^d$. Then $(-1)^d\, h_{\mathcal{H}}(-1)$ equals the number of regions of $\mathcal{H}$.*

1.2 Ehrhart Polynomials

A *lattice polytope* is the convex hull (in $\mathbb{R}^d$) of finitely many points in $\mathbb{Z}^d$. For such a polytope $\mathcal{P}$, we define

$$\operatorname{ehr}_{\mathcal{P}}(t) := \#(t\mathcal{P} \cap \mathbb{Z}^d),$$

the number of integer lattice points in the tth dilate of $\mathcal{P}$, where t is a positive integer. As an example, consider the triangle $\Delta \subset \mathbb{R}^2$ with vertices $(0,0)$, $(1,0)$, and $(0,1)$. It comes with the lattice-point enumerator

$$\operatorname{ehr}_{\Delta}(t) = \#\{(m,n) \in \mathbb{Z}^2 : m, n \ge 0,\ m+n \le t\}.$$

A moment's thought (or a look at Fig. 2) reveals that $\operatorname{ehr}_{\Delta}(t)$ is given by *triangular numbers*:

$$\operatorname{ehr}_{\Delta}(t) = \binom{t+2}{2} = \frac{1}{2}(t+1)(t+2).$$

If we evaluate this polynomial at $-t$, we obtain

$$\operatorname{ehr}_{\Delta}(-t) = \frac{1}{2}(t-1)(t-2) = \binom{t-1}{2},$$

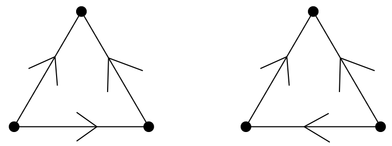


Fig. 3 Two of the acyclic orientations of K_3

which happens to be the function enumerating the *interior* lattice point in $t\Delta$, by another counting argument for triangular numbers (just draw a picture of the interior lattice points in $t\Delta$!). So in our example, we obtain the functional relation

$$\mathrm{ehr}_\Delta(-t) = \mathrm{ehr}_{\Delta^\circ}(t),$$

where Δ° denotes the interior of Δ. For example, the evaluations $\mathrm{ehr}_\Delta(-1) = \mathrm{ehr}_\Delta(-2) = 0$ point to the fact that neither Δ nor 2Δ contain any interior lattice points. Once more this is far from accidental:

Theorem 2 (Ehrhart [14], Macdonald [22]) *If $\mathcal{P}$ is a lattice d-polytope, then for positive integers t, the counting function* $\mathrm{ehr}_\mathcal{P}(t)$ *is a polynomial in t. When this polynomial is evaluated at negative integers, we obtain*

$$\mathrm{ehr}_\mathcal{P}(-t) = (-1)^d \, \mathrm{ehr}_{\mathcal{P}^\circ}(t).$$

1.3 Chromatic Polynomials

Let $G = (V, E)$ be a graph. The *chromatic polynomial* $c_G(t)$ (whose roots can be traced to Birkhoff [10] and Whitney [32]) is the counting function that enumerates all *proper t-colorings*, i.e., labellings $\mathbf{x} \in [t]^V$ such that adjacent nodes get different labels: $ij \in E \implies x_i \neq x_j$. (Here $[t] := \{1, 2, \dots, t\}$.) For example, the graph K_3 with three nodes, any pair of which is adjacent, has chromatic polynomial

$$c_{K_3}(t) = t(t-1)(t-2),$$

as all three nodes get different labels. When we evaluate this chromatic polynomial at -1, we obtain

$$c_{K_3}(-1) = -6,$$

which is, up to a sign, the number of *acyclic orientations* of K_3, namely, those orientations that do not contain any coherently oriented cycle (Fig. 3). The evaluation $c_{K_3}(-1)$ is part of a much more general phenomenon, for which we need one more definition: An orientation of G and a (not necessarily proper) t-coloring $\mathbf{x} \in [t]^V$ are *compatible* if $x_j \geq x_i$ whenever there is an edge oriented from i to j.

Theorem 3 (Stanley [27]) *Let $G = (V, E)$ be a graph with finite node set V. Then $(-1)^{|V|} c_G(-t)$ equals the number of pairs consisting of a t-coloring and a compatible acyclic orientation of G. In particular, $(-1)^{|V|} c_G(-1)$ counts all acyclic orientations of G.*

1.4 P-Partitions

Our final example originates in the world of integer partitions, with a connection to partially-ordered sets (*posets*). Recall that a *partition* of the integer t is a sequence $(x_1, x_2, \ldots, x_d)$ of nonnegative integers such that

$$t = x_1 + x_2 + \cdots + x_d \quad \text{and} \quad x_1 \geq x_2 \geq \cdots \geq x_d. \tag{2}$$

There are instances when we are interested in writing an integer t in the form

$$t = x_1 + x_2 + \cdots + x_d, \tag{3}$$

i.e., *without* the restriction $x_1 \geq x_2 \geq \cdots \geq x_d$; then we call $(x_1, x_2, \ldots, x_d) \in \mathbb{Z}_{\geq 0}^d$ a *composition* of t. The theory of P-partitions[2] allows us to interpolate between (2) and (3); that is, we will study compositions of t that satisfy *some* of the inequalities (implied by) $x_1 \geq x_2 \geq \cdots \geq x_d$. A natural way to introduce such a subset of inequalities is through a poset Π, whose relation we denote by $\preceq$. A Π-*partition* is an order-reversing map $\mathbf{x} : \Pi \to \mathbb{Z}_{\geq 0}$, i.e.,

$$a \preceq b \quad \Longrightarrow \quad x_a \geq x_b.$$

A *strict* Π-*partition* is a map $\mathbf{x} : \Pi \to \mathbb{Z}_{\geq 0}$ such that

$$a \prec b \quad \Longrightarrow \quad x_a > x_b.$$

In either case, if $\sum_{a \in \Pi} x_a = t$ then we call $\mathbf{x}$ a *(strict)* Π-*partition of* t. Let $p_\Pi(t)$ denote the number of Π-partitions of t, with generating function

$$P_\Pi(z) := \sum_{t \geq 0} p_\Pi(t)\, z^t = \sum_{\mathbf{x}} z^{x_1 + x_2 + \cdots + x_d},$$

where the last sum is taken over all Π-partitions. Analogously, we define the number of *strict* Π-partitions of t as $p_\Pi^\circ(t)$, with accompanying generating function $P_\Pi^\circ(z)$.

Here are three basic examples, which we invite the reader to work out, and which illustrate the way P-partitions are situated between partitions and compositions:

(i) If Π is a *chain* with d elements (whose elements are totally ordered), a Π-partition of t is a partition of t in the sense of (2), with generating functions

$$P_\Pi(z) = \frac{1}{(1-z)(1-z^2)\cdots(1-z^d)} \quad \text{and}$$

$$P_\Pi^\circ(z) = \frac{z^{\binom{d}{2}}}{(1-z)(1-z^2)\cdots(1-z^d)}.$$

(ii) If Π is an *antichain* with d elements (whose elements have no relation whatsoever), a Π-partition of t is a composition of t in the sense of (3), with generating functions

$$P_\Pi(z) = \frac{1}{(1-z)^d} = P_\Pi^\circ(z).$$

[2] Here P stands for a specific poset—for which we tend to use Greek letters such as Π to avoid confusions with polytopes.

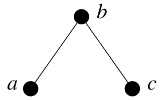


Fig. 4 A sample poset

(iii) If Π be the poset pictured in Fig. 4, then

$$P_\Pi(z) = \frac{1}{(1-z)^2(1-z^3)} \quad \text{and} \quad P_\Pi(z) = \frac{z^2}{(1-z)^2(1-z^3)}.$$

By now it should come as no surprise that there is a combinatorial reciprocity theorem relating these generating functions. Since reciprocity for a (quasi-)polynomial[3] means replacing the variable t by $-t$, when we express reciprocity in terms of generating functions, we should replace the variable z by $\frac{1}{z}$.

Theorem 4 (Stanley [26]) *Given a finite poset* Π, *the rational functions* $P_\Pi(z)$ *and* $P_\Pi^\circ(z)$ *are related by*

$$P_\Pi(\tfrac{1}{z}) = (-z)^{|\Pi|} P_\Pi^\circ(z).$$

Let us reiterate the common thread that can be weaved through Theorems 1–4. Each of them is an instance of a *combinatorial reciprocity theorem*: a combinatorial function, which is a priori defined on the positive integers,

(i) can be algebraically extended beyond the positive integers (e.g., because it is a polynomial), and
(ii) has (possibly quite different) meaning when evaluated at negative integers.

We will illustrate a geometric approach to the above reciprocity theorems, by mixing lattice points, polyhedra, and hyperplane arrangements, in the sense that we interpret the objects we'd like to count as lattice points, subject to some linear constraints (giving rise to a polyhedron), with an interplay given by further linear conditions (giving rise to hyperplanes).

Thus Theorems 1 and 2 can be used as building blocks to prove Theorems 3 and 4 (though this is not historically how the original proofs surfaced). We will give the main ideas for proofs of Theorems 1 and 2 in Sects. 2 and 3, respectively. Both proofs rely on variants of the Euler–Poincaré relation of a polyhedron, which in itself can be thought of as a combinatorial reciprocity theorem. In Sects. 4 and 5, we give a proof of Theorem 3 to illustrate how the introduction of "forbidden" hyperplanes into Ehrhart's theory of lattice-point enumeration in polytopes allows us to prove old and new combinatorial reciprocity theorems geometrically. A second way of arranging hyperplanes with polyhedra, as triangulation hyperplanes, is illustrated in Sect. 6, which contains a proof of Theorem 4 and connections to permutation statistics.

[3] In general, $p_\Pi(t)$ is a *quasipolynomial*, a term we will define in Sect. 3.2.

2 The Euler–Poincaré Relation and Zaslavsky's Theorem

2.1 Polyhedra

A *(convex) polyhedron* $\mathcal{P}$ is the intersection of finitely many (affine) halfspaces in $\mathbb{R}^d$. Bounded polyhedra are *polytopes*; the fact that they can also be described as the convex hull of finitely many points in $\mathbb{R}^d$ is the famous (and nontrivial) *Minkowski–Weyl Theorem* (see., e.g., [35, Lecture 1]). An even more famous theorem concerns the polynomial

$$f_{\mathcal{P}}(t) = \sum_{\mathcal{F}} t^{\dim \mathcal{F}},$$

where we sum over all (nonempty) faces[4] of $\mathcal{P}$:

Theorem 5 (Euler [15, 16], Poincaré [24]) *Suppose $\mathcal{P} = \mathcal{V} + \mathcal{Q}$ is a polyhedron, where $\mathcal{V}$ is a vector space and $\mathcal{Q}$ is a polyhedron that contains no lines.*[5] *Then*

$$f_{\mathcal{P}}(-1) = \begin{cases} (-1)^{\dim \mathcal{V}} & \textit{if } \mathcal{Q} \textit{ is bounded,} \\ 0 & \textit{if } \mathcal{Q} \textit{ is unbounded.} \end{cases}$$

Our formulation of the Euler–Poincaré relation suggests that it can be viewed as a combinatorial reciprocity theorem in its own right (and in a sense all other such reciprocity theorems are based on it). The number $f_{\mathcal{P}}(-1)$ is usually called the *Euler characteristic* of $\mathcal{P}$.

The function $\mu(F)$ we defined in (1) is a special case of the following construct. For a general poset Π equipped with a relation $\preceq$, we define its *Möbius function* recursively through

$$\mu(x, y) = \begin{cases} 0 & \textit{if } x \npreceq y, \\ 1 & \textit{if } x = y, \\ -\sum_{x \preceq z \prec y} \mu(x, z) & \textit{if } x \prec y. \end{cases} \tag{4}$$

The central result for these functions, which is a fun exercise, is *Möbius inversion*: for $f, g \in \mathbb{C}^{\Pi}$,

$$f(x) = \sum_{y \succeq x} g(y) \quad \Longleftrightarrow \quad g(x) = \sum_{y \succeq x} \mu(x, y)\, f(y). \tag{5}$$

The Möbius function of a poset gives rise to a generalization of the *inclusion–exclusion principle* (which follows from Möbius inversion for the poset of intersec-

[4] A *face* of $\mathcal{P}$ is a set of the form $\mathcal{P} \cap H$, where H is a hyperplane that bounds a half space containing $\mathcal{P}$; we always include $\mathcal{P}$ itself (and sometimes $\varnothing$) in the list of faces of $\mathcal{P}$.

[5] Here $+$ refers to Minkowski (point-wise) sum; it is an easy fact that every polyhedron can be written as a sum of a vector space and a polyhedron that contains no lines.

tions of a given family of sets); see, e.g., [28, Chap. 3] for much more about Möbius functions.

One can view the Euler–Poincaré relation (Theorem 5) in the light of the Möbius function of the poset formed by all faces of a polytope $\mathcal{P}$: By the recursive definition (4) of μ, we have for any nonempty face $\mathcal{F}$,

$$\sum_{\varnothing \subseteq \mathcal{G} \subseteq \mathcal{F}} \mu(\varnothing, \mathcal{G}) = 0, \tag{6}$$

where we sum over all faces $\mathcal{G}$ of $\mathcal{F}$, including $\varnothing$ and $\mathcal{F}$ itself. On the other hand, each face $\mathcal{F}$ is again a polytope, and so the Euler–Poincaré relation (Theorem 5) says that

$$\sum_{\varnothing \subsetneq \mathcal{G} \subseteq \mathcal{F}} (-1)^{\dim \mathcal{G}} = 1.$$

But this implies (if we add the empty face to our sum, giving it dimension -1) that

$$\sum_{\varnothing \subseteq \mathcal{G} \subseteq \mathcal{F}} (-1)^{\dim \mathcal{G}} = 0.$$

Since both this equation and (6) hold for *any* face $\mathcal{F}$ and $\mu(\varnothing, \varnothing) = 1 = (-1)^{\dim \varnothing + 1}$, we recursively compute

$$\mu(\varnothing, \mathcal{F}) = (-1)^{\dim \mathcal{F} + 1}$$

for all faces $\mathcal{F} \subseteq \mathcal{P}$; more generally, one can show $\mu(\mathcal{G}, \mathcal{F}) = (-1)^{\dim \mathcal{F} - \dim \mathcal{G}}$.

2.2 Hyperplane Arrangements

Now we connect the above concepts to a hyperplane arrangement $\mathcal{H}$ in $\mathbb{R}^d$. The flats of $\mathcal{H}$ form a poset $L(\mathcal{H})$ which we order by reverse set inclusion:

$$F \preceq G \quad \Longleftrightarrow \quad F \supseteq G.$$

Thus the Möbius function $\mu(F)$ we defined in (1) equals the special evaluation $\mu(\mathbb{R}^d, F)$ of the Möbius function of $L(\mathcal{H})$.

A face of any of the regions of $\mathcal{H}$ is called a *face* of $\mathcal{H}$. Given a flat F of $\mathcal{H}$, we can create the hyperplane arrangement *induced* by $\mathcal{H}$ on F, namely,

$$\mathcal{H}^F := \{H \cap F : H \in \mathcal{H},\ H \cap F \neq \varnothing\}.$$

The proof of Zaslavsky's Theorem 1 is based on the observation that each face f of $\mathcal{H}^F$ is a region of $\mathcal{H}^G$ for some flat $G \subseteq F$ (more precisely, G is the affine span of f), and so

$$\sum_{f \text{ face of } \mathcal{H}^F} (-1)^{\dim f} = \sum_{G \subseteq F} (-1)^{\dim G}\, r(\mathcal{H}^G).$$

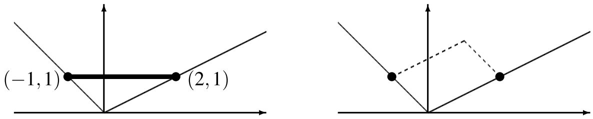


Fig. 5 The cone over the one-dimensional simplex $[-1,2]$ and its fundamental parallelepiped

But the left-hand side is simply the Euler characteristic of F, which is $(-1)^{\dim F}$ (by Theorem 5). Thus

$$(-1)^{\dim F} = \sum_{G \subseteq F} (-1)^{\dim G}\, r(\mathcal{H}^G),$$

and we can use Möbius inversion (5):

$$(-1)^{\dim F} r(\mathcal{H}^F) = \sum_{G \subseteq F} \mu(F,G)\,(-1)^{\dim G}.$$

For $F = \mathbb{R}^d$ this gives Theorem 1:

$$(-1)^d\, r(\mathcal{H}) = \sum_{G \in L(\mathcal{H})} \mu(G)\,(-1)^{\dim G} = h_{\mathcal{H}}(-1).$$

For more on the combinatorics of hyperplane arrangements, we recommend the survey article [29]. For numerous interesting topological considerations that arise from the study of hyperplane arrangements over $\mathbb{C}$, see [23].

3 Ehrhart–Macdonald Reciprocity

3.1 Lattice Simplices

In this section, we will give an idea why Theorem 2 is true. We will first show how to prove it for lattice *simplices*, each of which is the convex hull of $d+1$ affinely independent points in $\mathbb{R}^n$ (and in this section we will assume $n = d$). We form the *cone over* such a simplex Δ

$$\operatorname{cone}(\Delta) := \sum_{\mathbf{v} \text{ vertex of } \Delta} \mathbb{R}_{\geq 0}(\mathbf{v}, 1)$$

by lifting the vertices of Δ into $\mathbb{R}^{d+1}$ onto the hyperplane $x_{d+1} = 1$ and taking the nonnegative span of this "lifted version" of Δ; see Fig. 5 for an illustration. The reason for coning over Δ is that we can see a copy of the dilate $t\Delta$ as the intersection of $\operatorname{cone}(\Delta)$ with the hyperplane $x_{d+1} = t$; we will say that theses points are *at height* t. So the *Ehrhart series*

$$\operatorname{Ehr}_\Delta(z) := 1 + \sum_{t>0} \operatorname{ehr}_\Delta(t)\, z^t \tag{7}$$

can be computed through

$$\operatorname{Ehr}_\Delta(z) = \sum_{t \geq 0} \#(\text{lattice points in } \operatorname{cone}(\Delta) \text{ at height } t) z^t.$$

We use a tiling argument to compute this generating function. Namely, let

$$\mathcal{Q} := \sum_{\mathbf{v} \text{ vertex of } \Delta} [0,1)(\mathbf{v},1),$$

the *fundamental parallelepiped* of $\operatorname{cone}(\Delta)$. Then we can tile $\operatorname{cone}(\Delta)$ by translates of $\mathcal{Q}$:

$$\operatorname{cone}(\Delta) = \bigcup_{\mathbf{m}\in\mathbb{Z}_{\geq 0}^{d+1}} \left(\sum_{\mathbf{v} \text{ vertex of } \Delta} m_{\mathbf{v}}(\mathbf{v},1) + \mathcal{Q} \right),$$

and this union is disjoint (because $\mathcal{Q}$ is half open). Every lattice point in $\operatorname{cone}(\Delta)$ is a translate of such a nonnegative integral combination of the $(\mathbf{v},1)$'s by a lattice point in $\mathcal{Q}$ (and this representation is unique). Translated into generating-function language, this gives

$$\operatorname{Ehr}_\Delta(z) = \left(\frac{1}{1-z}\right)^{d+1} \sum_{t\geq 0} \#(\text{lattice points in } \mathcal{Q} \text{ at height } t) z^t .$$

The sum on the right is a polynomial $h(z)$ of degree at most d, and it is a basic exercise to deduce from the rational-function form of $\operatorname{Ehr}_\Delta(z)$ that $\operatorname{ehr}_\Delta(t)$ is a polynomial. This proves the first part of Theorem 2 in the simplex case. Towards the second part, we compute

$$\operatorname{Ehr}_\Delta\left(\frac{1}{z}\right) = \sum_{t\geq 0} \operatorname{ehr}_\Delta(t)\, z^{-t} = \frac{h(\frac{1}{z})}{(1-\frac{1}{z})^{d+1}} = (-1)^{d+1} \frac{z^{d+1} h(\frac{1}{z})}{(1-z)^{d+1}}$$

and so by an easy exercise about generating functions,

$$\sum_{t<0} \operatorname{ehr}_\Delta(t)\, z^{-t} = \sum_{t>0} \operatorname{ehr}_\Delta(-t)\, z^{t} = (-1)^{d} \frac{z^{d+1} h(\frac{1}{z})}{(1-z)^{d+1}} .$$

Inspired by this, we define

$$\operatorname{Ehr}_{\Delta^\circ}(z) := \sum_{t>0} \operatorname{ehr}_{\Delta^\circ}(t)\, z^t , \tag{8}$$

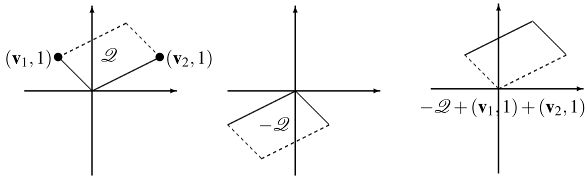
and so proving the reciprocity theorem $\operatorname{ehr}_\Delta(-t) = (-1)^d \operatorname{ehr}_{\Delta^\circ}(t)$ is equivalent to proving

$$\operatorname{Ehr}_{\Delta^\circ}(z) = \frac{z^{d+1} h(\frac{1}{z})}{(1-z)^{d+1}} . \tag{9}$$

We can compute $\operatorname{Ehr}_{\Delta^\circ}(z)$ along the same lines as we computed $\operatorname{Ehr}_\Delta(z)$ in part (a):

$$\operatorname{Ehr}_{\Delta^\circ}(z) = \sum_{t\geq 0} \#(\text{lattice points in } \operatorname{cone}(\Delta^\circ) \text{ at height } t) z^t .$$

Fig. 6 An instance of (10)



The fundamental parallelepiped of $\operatorname{cone}(\Delta^\circ) = \sum_{\mathbf{v} \text{ vertex of } \Delta} \mathbb{R}_{>0}(\mathbf{v}, 1)$ is

$$\widetilde{\mathcal{Q}} := \sum_{\mathbf{v} \text{ vertex of } \Delta} (0, 1](\mathbf{v}, 1),$$

and $\mathrm{Ehr}_{\Delta^\circ}(z) = \frac{\widetilde{h}(z)}{(1-z)^{d+1}}$ where

$$\widetilde{h}(z) := \sum_{t \geq 0} \#(\text{lattice points in } \widetilde{\mathcal{Q}} \text{ at height } t) z^t.$$

Fortunately, the parallelepipeds $\mathcal{Q}$ and $\widetilde{\mathcal{Q}}$ are geometrically closely related:

$$\widetilde{\mathcal{Q}} = -\mathcal{Q} + \sum_{\mathbf{v} \text{ vertex of } \Delta} (\mathbf{v}, 1). \tag{10}$$

(Figure 6 shows one instance of this relation.) This translates into the generating-function relation

$$\widetilde{h}(z) = h(\tfrac{1}{z}) z^{d+1}$$

which proves (9) and thus the second part of Theorem 2 in the simplex case.

3.2 Lattice Polytopes

The general case of Theorem 2 follows from decomposing a general lattice polytope into lattice simplices: a *triangulation* of a convex d-polytope $\mathcal{P}$ is a finite collection T of d-simplices with the properties:

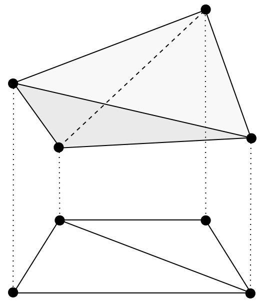
- $\mathcal{P} = \bigcup_{\Delta \in T} \Delta$.
- For any $\Delta_1, \Delta_2 \in T$, $\Delta_1 \cap \Delta_2$ is a face of both Δ_1 and Δ_2.

Here is an algorithm to obtain what's called a *regular triangulation* of $\mathcal{P} = \operatorname{conv}\{\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \ldots, \mathbf{v}_n\} \subset \mathbb{R}^d$:

(i) Embed $\mathcal{P}$ into $\mathbb{R}^{d+1}$ as $\mathcal{P} \times \{0\}$.
(ii) Randomly choose $r_1, r_2, \ldots, r_n \in \mathbb{R}$.
(iii) Project the lower facets of $\mathcal{Q} := \operatorname{conv}\{(\mathbf{v}_1, r_1), (\mathbf{v}_2, r_2), \ldots, (\mathbf{v}_n, r_n)\}$ onto $\mathbb{R}^d \times \{0\}$.

By *lower facets* of $\mathcal{Q}$ we mean those facets that one can see "from below," i.e., those facets of $\mathcal{Q}$ visible from the point $(\mathbf{0}, -r)$, for some sufficiently large r. Figure 7 illustrates the process of obtaining such a triangulation for a quadrilateral. It's a good

Fig. 7 A regular triangulation of a quadrilateral



exercise to prove that the above algorithm indeed yields a triangulation, for any polytope.[6] This implies, in particular, that every polytope admits a triangulation (whose simplices have vertices among the vertices of the polytope).

The first part of Theorem 2 follows now immediately, since for a given lattice polytope $\mathcal{P}$ we can write $\mathrm{ehr}_{\mathcal{P}}(t)$ as a sum/difference of the Ehrhart polynomials of the simplices of a triangulation of $\mathcal{P}$ and their faces, in an inclusion–exclusion way. To prove the second part of Theorem 2, we need to work a little harder. Fix a triangulation of $\mathcal{P}$ and consider the poset Φ of all faces (including $\varnothing$) of the simplices in this triangulation, ordered by set inclusion. It will be useful to make Φ into a lattice, so let's introduce an artificial largest element $\mathbf{1} \in \Phi$ whose dimension we declare to be $d+1$. It's a fun (and not entirely trivial) exercise to show that the Möbius function of Φ is (assuming that $\mathcal{G} \subset \mathcal{F}$)

$$\mu(\mathcal{G},\mathcal{F}) = \begin{cases} 0 & \text{if } (\mathcal{G} \subset \partial\mathcal{P} \text{ or } \mathcal{G} = \varnothing) \text{ and } \mathcal{F} = \mathbf{1}, \\ (-1)^{\dim\mathcal{F} - \dim\mathcal{G}} & \text{otherwise.} \end{cases} \tag{11}$$

(Here $\partial\mathcal{P}$ denotes the boundary of $\mathcal{P}$.) We can now show how the general Ehrhart–Macdonal reciprocity follows from the simplex case. We will use Möbius inversion (5) on Φ for the functions

$$f(\mathcal{F}) = \begin{cases} \mathrm{ehr}_{\mathcal{F}}(t) & \text{if } \mathcal{F} \neq \mathbf{1} \\ \mathrm{ehr}_{\mathcal{P}}(t) & \text{if } \mathcal{F} = \mathbf{1} \end{cases} \quad \text{and} \quad g(\mathcal{F}) = \begin{cases} \mathrm{ehr}_{\mathcal{F}^\circ}(t) & \text{if } \mathcal{F} \neq \mathbf{1}, \\ 0 & \text{if } \mathcal{F} = \mathbf{1}. \end{cases}$$

Because every point in $\mathcal{P}$ is in the interior of a unique face,[7]

$$f(\mathbf{1}) = \mathrm{ehr}_{\mathcal{P}}(t) = \sum_{\mathcal{F} \in \Phi \setminus \{\mathbf{1}\}} \mathrm{ehr}_{\mathcal{F}^\circ}(t) = \sum_{\mathcal{F} \in \Phi} g(\mathcal{F}).$$

By (5) and (11),

$$g(\mathbf{1}) = 0 = \sum_{\mathcal{F} \in \Phi} \mu(\mathcal{F},\mathbf{1})\, f(\mathcal{F}) = \mathrm{ehr}_{\mathcal{P}}(t) + \sum_{\substack{\mathcal{F} \in \Phi \setminus \{\mathbf{1}\} \\ \mathcal{F} \not\subset \partial\mathcal{P}}} (-1)^{d+1-\dim\mathcal{F}}\, \mathrm{ehr}_{\mathcal{F}}(t),$$

[6] Strictly speaking, this algorithm yields a triangulation "only" with probability 1.

[7] Here we mean *relative* interior; in particular, $\mathcal{F}^\circ = \mathcal{F}$ if $\mathcal{F}$ is a vertex.

that is,

$$\mathrm{ehr}_{\mathcal{P}}(t) = (-1)^d \sum_{\substack{\mathcal{F}\in\Phi\setminus\{\mathbf{1}\} \\ \mathcal{F}\not\subseteq\partial\mathcal{P}}} (-1)^{\dim\mathcal{F}}\, \mathrm{ehr}_{\mathcal{F}}(t).$$

Now we evaluate these polynomials at negative integers and use Ehrhart–Macdonald reciprocity for the simplices $\mathcal{F} \in \Phi \setminus \{\mathbf{1}\}$:

$$\begin{aligned}\mathrm{ehr}_{\mathcal{P}}(-t) &= (-1)^d \sum_{\substack{\mathcal{F}\in\Phi\setminus\{\mathbf{1}\} \\ \mathcal{F}\not\subseteq\partial\mathcal{P}}} (-1)^{\dim\mathcal{F}}\, \mathrm{ehr}_{\mathcal{F}}(-t) \\ &= (-1)^d \sum_{\substack{\mathcal{F}\in\Phi\setminus\{\mathbf{1}\} \\ \mathcal{F}\not\subseteq\partial\mathcal{P}}} \mathrm{ehr}_{\mathcal{F}^\circ}(t) = (-1)^d\, \mathrm{ehr}_{\mathcal{P}^\circ}(t),\end{aligned}$$

and this concludes our proof of Theorem 2.

Ehrhart theory is not limited to lattice polytopes; we can relax the integrality condition on the coordinates of the vertices of $\mathcal{P}$ to the rational case. Then $\mathrm{ehr}_{\mathcal{P}}(t)$ becomes a *quasipolynomial*, i.e., a function of the form

$$c_n(t)\, t^n + \cdots + c_1(t)\, t + c_0(t),$$

where $c_0, c_1, \ldots, c_n$ are periodic functions in t. Ehrhart–Macdonald reciprocity carries over verbatim to the rational case. Further yet, very recent results [1, 2, 21] extended Ehrhart (quasi-)polynomials by allowing *rational* or *real* dilation factors when counting lattice points in rational polytopes.

We finish this section by mentioning that there are alternative ways of proving Theorem 2, see, e.g., [6, Chap. 4] and [25]; our proof followed Ehrhart's original lines [14] (Sect. 3.1) and [28, Chap. 4] (Sect. 3.2). For (much) more about triangulations, we recommend [13]; for more about Ehrhart polynomials, see [6, 20], and [28, Chap. 4].

4 A Polyhedral View at Graph Colorings and Acyclic Orientations

Our next step is to interpret graph coloring geometrically, with the goal of deriving Theorem 3. After having meditated about lattice point in polytopes for a while now, it is a short step to view a coloring $\mathbf{x} \in [t]^V$ of a graph $G = (V, E)$ as an integer point in the cube $[1, t]^V$ or, more conveniently, an *interior* lattice point in the $(t+1)$-dilate of the unit cube $[0, 1]^V$. This t-coloring $\mathbf{x}$ is proper if it misses the hyperplane arrangement

$$\mathcal{H}_G := \{x_i = x_j : ij \in E\},$$

the *graphical arrangement* corresponding to G. Thus each proper t-coloring corresponds to a lattice point in

$$\left((t+1)\mathcal{P}^\circ \setminus \bigcup \mathcal{H}_G\right) \cap \mathbb{Z}^V, \tag{12}$$

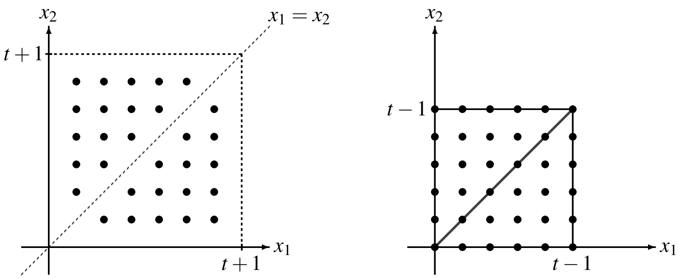


Fig. 8 The integer points t-color the graph K_2 (with $t = 6$) and the reciprocal picture

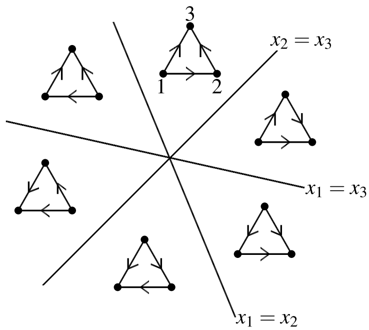


Fig. 9 The regions of $\mathcal{H}_{K_3}$ (projected to the plane $x_1 + x_2 + x_3 = 0$) and their corresponding acyclic orientations

where $\mathcal{P} = [0,1]^V$ is the unit cube in $\mathbb{R}^V$ (see the left-hand side of Fig. 8 for an example where $G = K_2$, the graph with exactly two adjacent nodes).

Viewed like this, counting proper t-colorings is quite reminiscent of Ehrhart theory, safe for the graphic arrangement whose hyperplanes contain the non-proper colorings. At any rate, $\mathcal{P}^\circ \setminus \bigcup \mathcal{H}_G$ is a union of open polytopes, say

$$\mathcal{P}^\circ \setminus \bigcup \mathcal{H}_G = \mathcal{Q}_1^\circ \cup \mathcal{Q}_2^\circ \cup \cdots \cup \mathcal{Q}_n^\circ,$$

and so we can indeed express the chromatic polynomial in Ehrhartian terms:

$$c_G(t) = \sum_{j=1}^{n} \operatorname{ehr}_{\mathcal{Q}_j^\circ}(t+1).$$

The reciprocal counting function is therefore, by Ehrhart–Macdonald reciprocity (Theorem 2),

$$c_G(-t) = (-1)^{|V|} \sum_{j=1}^{n} \operatorname{ehr}_{\mathcal{Q}_j}(t-1)$$

since all $\mathcal{Q}_j$'s have the same dimension $|V|$. (On the right in Fig. 8 is an illustration of this count for $G = K_2$.) The right-hand side counts lattice points in the (closed) cube $(t-1)\mathcal{P}$ with multiplicity: each lattice point $\mathbf{x}$ gets weighted by the number of $\mathcal{Q}_j$'s containing it; geometrically this is the number of closed regions of $\mathcal{H}_G$ containing

x. The last ingredient for our proof of Theorem 3 is the following simple but crucial observation, illustrated in Fig. 9.

Lemma 6 (Greene [17, 18]) *The regions of $\mathcal{H}_G$ are in one-to-one correspondence with the acyclic orientations of G.*

Theorem 3 follows now by (re-)interpreting the lattice points in $(t-1)\mathcal{P}$ as t-colorings and interpreting their multiplicities in terms of compatible acyclic orientations.

5 Inside-out Polytopes

The above proof of Theorem 3 appeared in [8]; we take a short detour to illustrate how other reciprocity theorems follow from this work. The scenery of our proof consisted of a (rational) polytope $\mathcal{P}$, a (rational) hyperplane arrangement $\mathcal{H}$, and the two counting functions[8]

$$I_{\mathcal{P},\mathcal{H}}(t) := \#\left(\left(\mathcal{P}\setminus\bigcup\mathcal{H}\right)\cap\frac{1}{t}\mathbb{Z}^d\right) \quad \text{and} \quad O_{\mathcal{P},\mathcal{H}}(t) := \sum_{\mathbf{x}\in\frac{1}{t}\mathbb{Z}^d} \operatorname{mult}_{\mathcal{P},\mathcal{H}}(\mathbf{x})$$

where

$$\operatorname{mult}_{\mathcal{P},\mathcal{H}}(\mathbf{x}) := \begin{cases} \text{number of closed regions of } (\mathcal{P},\mathcal{H}) \text{ that contain } \mathbf{x} & \text{if } \mathbf{x}\in\mathcal{P}, \\ 0 & \text{if } \mathbf{x}\notin\mathcal{P}. \end{cases}$$

The pair $(\mathcal{P},\mathcal{H})$ goes by the name *inside-out polytope* (we think of the hyperplanes in $\mathcal{H}$ as acting as additional boundary of the polytope $\mathcal{P}$ "turned inside out"), and our above application of Ehrhart–Macdonald reciprocity (Theorem 2) shows that the two inside-out polytope counting functions are reciprocal quasipolynomials [8]:

$$I_{\mathcal{P}^\circ,\mathcal{H}}(-t) = (-1)^{\dim\mathcal{P}}\, O_{\mathcal{P},\mathcal{H}}(t). \tag{13}$$

Looking back once more at our above proof of Theorem 3 illustrates the two central ingredients we need in order to apply (13) to a specific combinatorial situation: first, we need to be able to interpret the underlying objects that we are counting as lattice points in $t\mathcal{P}^\circ\setminus\mathcal{H}$ (or some close variant); once we have this interpretation, we can apply (13), in other words, we are guaranteed a reciprocity theorem in the world of polyhedral geometry. The "big question" is whether we can return into the world of the original combinatorial situation, in other words, if we can interpret the multiplicities appearing in $O_{\mathcal{P},\mathcal{H}}(t)$ in that world. In the graph-coloring case, this last step was made possible by Lemma 6; the "big question" we just mentioned thus reduces essentially to finding an analogous result in the given combinatorial situation.

Fortunately, there is a number of combinatorial constructs in which the inside-out polytope approach resulted in (novel) reciprocity theorems [3, 7–9, 11, 12, 34].

[8]The shift from dilating polytopes to shrinking the lattice is purely cosmetic, as there may be hyperplanes in $\mathcal{H}$ that do not contain the origin.

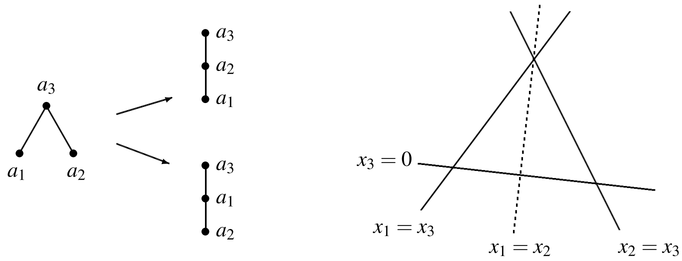


Fig. 10 The two linear extensions of Λ, with accompanying cones

6 A Polyhedral View at P-partitions

In the previous two sections, we arranged Ehrhart (quasi-)polynomials with hyperplanes, in the sense that we enumerated lattice points in polyhedra but excluded lattice points on certain hyperplanes. We will now exhibit a second mix of Ehrhart theory and hyperplane arrangements: we will use hyperplanes to triangulate polyhedra whose lattice points we want to enumerate.

Suppose $\Pi = \{a_1, a_2, \dots, a_d\}$ is a poset. For technical reasons which will become clear soon, we assume that the indices of the a_j's respect the order of Π in the sense that we have $j \le k$ if $a_j \preceq a_k$. For example, we need to relable Fig. 4 in such a way that $b = a_3$ (because b is the maximal element in this poset). With this convention and in sync with Sect. 1.4, we define the set of all Π-partitions as

$$\mathrm{K}(\Pi) := \{\mathbf{x} \in \mathbb{Z}^d_{\ge 0} : x_j \ge x_k \text{ if } a_j \preceq a_k\}.$$

A *linear extension* of Π is a chain Γ on $\{a_1, a_2, \dots, a_d\}$ that preserves any relation of Π. The relations in Γ are uniquely determined by a permutation $\sigma \in S_d$, namely the one that orders the chain:

$$a_{\sigma(1)} \prec a_{\sigma(2)} \prec \cdots \prec a_{\sigma(d)};$$

we will call this chain Γ_σ. Not every permutation $\sigma \in S_d$ will give rise to a linear extension Γ_σ of Π, but only those σ that respect the order of Π, i.e.,

$$a_j \preceq a_k \text{ in } \Pi \quad \Longrightarrow \quad a_j \preceq a_k \text{ in } \Gamma_\sigma. \tag{14}$$

For example, the poset Λ in Fig. 4 has two linear extensions Γ_σ, for $\sigma = [123]$ and $[213]$ (written in one-line notation), which are pictured on the left in Fig. 10. We can see in this example that $\mathrm{K}(\Lambda) = \mathrm{K}(\Gamma_{[123]}) \cup \mathrm{K}(\Gamma_{[213]})$; more generally, for any poset Π, we have

$$\mathrm{K}(\Pi) = \bigcup_\sigma \mathrm{K}(\Gamma_\sigma), \tag{15}$$

where the union is taken over all $\sigma \in S_d$ that satisfy (14). It is natural to think of the elements of $\mathrm{K}(\Pi)$ as lattice points in the cone

$$\{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^d_{\ge 0} : x_j \ge x_k \ \text{ if } \ a_j \preceq a_k\},$$

and (15) gives a triangulation of this cone. On the right in Fig. 10, we can see how this triangulation looks for the cone behind Λ (rather, a two-dimensional slice of this three-dimensional cone). In fact, we can say more: first, this triangulation is *unimodular*, i.e., each cone represented on the right-hand side of (15) has generators that span the integer lattice. Second, we can write (15) as a *disjoint* union by making use of the *descent set* of a permutation $\sigma \in S_d$, defined as

$$\operatorname{Des}\sigma := \{j \in [d-1] : \sigma(j) > \sigma(j+1)\}.$$

In our running example $\Pi = \Lambda$, $\operatorname{Des}[123] = \varnothing$ and $\operatorname{Des}[213] = \{1\}$. So by writing

$$\widetilde{\mathrm{K}}(\Gamma_\sigma) := \left\{ \mathbf{x} \in \mathbb{Z}^d_{\geq 0} : \quad \begin{array}{l} x_{\sigma(1)} \geq x_{\sigma(2)} \geq \cdots \geq x_{\sigma(d)}, \\ x_{\sigma(j)} > x_{\sigma(j+1)} \text{ if } j \in \operatorname{Des}\sigma \end{array} \right\},$$

we obtain

$$\mathrm{K}(\Pi) \;=\; \bigcup_{\sigma} \widetilde{\mathrm{K}}(\Gamma_\sigma), \tag{16}$$

where this now *disjoint* union is taken over all $\sigma \in S_d$ that satisfy (14). The generating functions of $\widetilde{\mathrm{K}}(\Gamma_\sigma)$ can be computed from first principles with the help of the *major index*

$$\operatorname{maj}\sigma := \sum_{j \in \operatorname{Des}\sigma} j;$$

it's a fun exercise to show that

$$\sum_{\mathbf{x} \in \widetilde{\mathrm{K}}(\Gamma_\sigma)} z^{x_1 + x_2 + \cdots + x_d} = \frac{z^{\operatorname{maj}\sigma}}{(1-z)(1-z^2)\cdots(1-z^d)},$$

and together with (16), this implies:

Lemma 7 (Stanley [26]) *Let Π be a poset on d elements. Then*

$$P_\Pi(z) = \frac{\sum_\sigma z^{\operatorname{maj}\sigma}}{(1-z)(1-z^2)\cdots(1-z^d)},$$

where the sum is taken over all $\sigma \in S_d$ that satisfy (14).

For the analogous lemma for *strict* Π-partitions, we consider the *ascent set* of a permutation $\sigma \in S_d$,

$$\operatorname{Asc}\sigma := \{j \in [d-1] : \sigma(j) < \sigma(j+1)\} \quad \text{and} \quad \operatorname{amaj}\sigma := \sum_{j \in \operatorname{Asc}\sigma} j.$$

Then

$$P^\circ_\Pi(z) = \frac{\sum_\sigma z^{\operatorname{amaj}\sigma}}{(1-z)(1-z^2)\cdots(1-z^d)}, \tag{17}$$

where once more the sum is taken over all $\sigma \in S_d$ that satisfy (14). Theorem 4 follows now essentially from the fact that descents and ascents of a permutation are complementary, and so

$$\operatorname{maj}\sigma + \operatorname{amaj}\sigma = \sum_{j=1}^{d-1} j = \binom{d}{2}. \tag{18}$$

By Lemma 7,

$$\begin{aligned} P_\Pi\left(\tfrac{1}{z}\right) &= \frac{\sum_\sigma z^{-\operatorname{maj}\sigma}}{(1-z^{-1})(1-z^{-2})\cdots(1-z^{-d})} = (-1)^d \frac{z^{1+2+\cdots+d}\sum_\sigma z^{-\operatorname{maj}\sigma}}{(1-z)(1-z^2)\cdots(1-z^d)} \\ &= (-1)^d \frac{z^d \sum_\sigma z^{\binom{d}{2}-\operatorname{maj}\sigma}}{(1-z)(1-z^2)\cdots(1-z^d)} \overset{(18)}{=} (-z)^d \frac{\sum_\sigma z^{\operatorname{amaj}\sigma}}{(1-z)(1-z^2)\cdots(1-z^d)} \\ &\overset{(17)}{=} (-z)^{|\Pi|} P_\Pi^\circ(z), \end{aligned}$$

where each sum is taken over all $\sigma \in S_d$ that satisfy (14).

We close this section by remarking that Stanley's original approach to P-partitions [26] is less geometric than our treatment, though one can easily interpret his work along these lines. The recent papers [4, 5] used similar discrete-geometric approaches to (number-theoretic) partition identities, where again descent statistics play a role.

7 Open Problems

We finish our tour by mentioning a general open problem about all polynomials that appeared as counting functions in this paper, namely the question of classification: give conditions on $a_0, a_1, \dots, a_d$ that allow us to detect whether or not a given polynomial $a_d\, t^d + a_{d-1}\, t^{d-1} + \cdots + a_0$ is a face-number, characteristic, Ehrhart, or chromatic polynomial. In general, this is a much-too-big research program; for example, the classification problem for Ehrhart polynomials is open already in dimension three. On the other hand, there has been some exciting recent progress; see, e.g., [19, 30, 31]. For numerous more open problems about the various combinatorial objects we discussed here, we refer to the books [6, 13, 28, 35].

Acknowledgements *Danke* to Jörg Rambau for initiating this survey article and to an anonymous referee for helpful suggestions. The author was partially supported by the NSF (DMS-0810105). This survey paper is a (vastly) compressed version of an upcoming book with the same title; a preprint can be found at math.sfsu.edu/beck/crt.html.

References

1. Baldoni, V., Berline, N., Köppe, M., Vergne, M.: Intermediate sums on polyhedra: Computation and real Ehrhart theory. Preprint: arXiv:1011.6002v1 (2010)
2. Barvinok, A.: Computing the Ehrhart quasi-polynomial of a rational simplex. Math. Comput. **75**(255), 1449–1466 (2006). arXiv:math/0504444

3. Beck, M., Braun, B.: Nowhere-harmonic colorings of graphs, Proc. Am. Math. Soc. (to appear). arXiv:0907.1272 (2011)
4. Beck, M., Braun, B., Le, N.: Mahonian partition identities via polyhedral geometry. Devel. Math. (to appear). arXiv:1103.1070 (2011)
5. Beck, M., Gessel, I.M., Lee, S., Savage, C.D.: Symmetrically constrained compositions. Ramanujan J. **23**(1–3), 355–369 (2010). arXiv:0906.5573
6. Beck, M., Robins, S.: Computing the Continuous Discretely: Integer-Point Enumeration in Polyhedra. Undergraduate Texts in Mathematics. Springer, New York (2007). Electronically available at http://math.sfsu.edu/beck/ccd.html
7. Beck, M., Zaslavsky, T.: An enumerative geometry for magic and magilatin labellings. Ann. Comb. **10**(4), 395–413 (2006). arXiv:math.CO/0506315
8. Beck, M., Zaslavsky, T.: Inside-out polytopes. Adv. Math. **205**(1), 134–162 (2006). arXiv:math.CO/0309330
9. Beck, M., Zaslavsky, T.: The number of nowhere-zero flows on graphs and signed graphs. J. Comb. Theory, Ser. B **96**(6), 901–918 (2006). arXiv:math.CO/0309331
10. Birkhoff, G.D.: A determinant formula for the number of ways of coloring a map. Ann. Math. **14**(1–4), 42–46 (1912/13)
11. Breuer, F., Dall, A.: Bounds on the coefficients of tension and flow polynomials. J. Algebr. Comb. **33**(3), 465–482 (2011). arXiv:1004.3470
12. Breuer, F., Sanyal, R.: Ehrhart theory, modular flow reciprocity, and the Tutte polynomial, Math. Z. (to appear) (2011). arXiv:0907.0845v1
13. De Loera, J.A., Rambau, J., Santos, F.: Triangulations. Algorithms and Computation in Mathematics, vol. 25. Springer, Berlin (2010)
14. Ehrhart, E.: Sur les polyèdres rationnels homothétiques à n dimensions. C. R. Acad. Sci. Paris **254**, 616–618 (1962)
15. Euler, L.: Demonstatio nonnullarum insignium proprietatum, quibus solida hedris planis inclusa sunt praedita. Novi Commun. Acad. Sci. Imp. Petropol. **4**, 140–160 (1752/53)
16. Euler, L.: Elementa doctrinae solidorum. Novi Commun. Acad. Sci. Imp. Petropol. **4**, 109–140 (1752/53)
17. Greene, C.: Acyclic orientations. In: Aigner, M. (ed.) Higher Combinatorics. NATO Adv. Study Inst. Ser., Ser. C: Math. Phys. Sci., vol. 31, pp. 65–68. Reidel, Dordrecht (1977)
18. Greene, C., Zaslavsky, T.: On the interpretation of Whitney numbers through arrangements of hyperplanes, zonotopes, non-Radon partitions, and orientations of graphs. Trans. Am. Math. Soc. **280**(1), 97–126 (1983)
19. Haase, C., Nill, B., Payne, S.: Cayley decompositions of lattice polytopes and upper bounds for h^*-polynomials. J. Reine Angew. Math. **637**, 207–216 (2009). arXiv:0804.3667
20. Hibi, T.: Algebraic Combinatorics on Convex Polytopes. Carslaw (1992)
21. Linke, E.: Rational Ehrhart quasi-polynomials. Preprint: arXiv:1006.5612v2 (2011)
22. Macdonald, I.G.: Polynomials associated with finite cell-complexes. J. Lond. Math. Soc. **4**, 181–192 (1971)
23. Orlik, P., Terao, H.: Arrangements of Hyperplanes. Grundlehren der Mathematischen Wissenschaften [Fundamental Principles of Mathematical Sciences], vol. 300. Springer, Berlin (1992)
24. Poincaré, H.: Sur la généralisation d'un theorem d'Euler relatif aux polyèdres. C. R. Acad. Sci. Paris **117**, 144–145 (1893)
25. Sam, S.V.: A bijective proof for a theorem of Ehrhart. Am. Math. Mon. **116**(8), 688–701 (2009). arXiv:0801.4432v5
26. Stanley, R.P.: Ordered Structures and Partitions. Memoirs of the American Mathematical Society, No. 119. American Mathematical Society, Providence (1972)
27. Stanley, R.P.: Acyclic orientations of graphs. Discrete Math. **5**, 171–178 (1973)
28. Stanley, R.P.: Enumerative Combinatorics, vol. 1. Cambridge Studies in Advanced Mathematics, vol. 49. Cambridge University Press, Cambridge (1997)
29. Stanley, R.P.: An introduction to hyperplane arrangements. Geometric Combinatorics. IAS/Park City Math. Ser., vol. 13. Amer. Math. Soc., Providence (2007), pp. 389–496
30. Stapledon, A.: Inequalities and Ehrhart δ-vectors. Trans. Am. Math. Soc. **361**(10), 5615–5626 (2009). arXiv:0801.0873
31. Stapledon, A.: Additive number theory and inequalities in Ehrhart theory. Preprint: arXiv:0904.3035v2 (2010)
32. Whitney, H.: A logical expansion in mathematics. Bull. Am. Math. Soc. **38**(8), 572–579 (1932)

33. Zaslavsky, T.: Facing up to Arrangements: Face-Count Formulas for Partitions of Space by Hyperplanes. Mem. Amer. Math. Soc., vol. 154 (1975)
34. Stapledon, A.: Biased graphs. VII. Contrabalance and antivoltages. J. Comb. Theory, Ser. B **97**(6), 1019–1040 (2007)
35. Ziegler, G.M.: Lectures on Polytopes. Springer, New York (1995)

Matthias Beck After studies at the University of Würzburg, SUNY Oneonta, and Temple University, and postdoctoral positions at SUNY Binghamton, the Mathematical Sciences Research Institute, and the Max-Planck-Institute in Bonn, Matthias Beck arrived at San Francisco State University, where he is currently an Associate Professor in the Mathematics Department.
His research is situated in the intersection of combinatorics, geometry, and number theory; he is particularly fond of counting integer points in polyhedra and the application of these enumeration functions to various combinatorial and number-theoretic topics and problems. He coauthored two books, Computing the Continuous Discretely (with Sinai Robins, Springer, 2007, translated into German and Japanese) and The Art of Proof (with Ross Geoghegan, Springer, 2010).

Jahresber Dtsch Math-Ver (2012) 114:23–45
DOI 10.1365/s13291-011-0032-9

HISTORICAL ARTICLE

Das Induktions-Prinzip

Ulrich Felgner

Online publiziert: 20. Januar 2012

Zusammenfassung Wir berichten über die Entdeckung des Prinzips der vollständigen Induktion im 16. und 17. Jahrhundert, was dieser Entdeckung vorausging und wie sie sich bis in die Gegenwart hinein ausgewirkt hat. Die Vorgeschichte beginnt in der Antike mit der expliziten Formulierung des Prinzips der (unvollständigen) Induktion durch Aristoteles und der Anwendung der summativen Induktion durch Euklid. Die Entdeckung des Prinzips der vollständigen (verketteten) Induktion gelang Maurolico, Fermat und Pascal im 16. und 17. Jahrhundert. Es spielte zunächst nur die Rolle eines Beweisprinzips und wurde erst im ausgehenden 19. Jahrhundert zur Charakterisierung der Reihe der natürlichen Zahlen herangezogen (Dedekind, Peano). Verallgemeinerungen wurden im Rahmen der Mengenlehre im 20. Jahrhundert diskutiert, die darüber hinaus in der Beweistheorie zur Messung des transfiniten Gehalts einer Theorie herangezogen werden konnten.

Schlüsselwörter Vollständige Induktion · Omega-Regel · Deszendenz-Methode

Mathematics Subject Classification (2000) 01A45 · 01A50 · 01A55 · 01A60 (History, 16th, 17th, 18th, 19th, 20th century) · 03A05: Philosophical and critical

Herrn Günter Pickert zum 95. Geburtstag am 23. 6. 2012 gewidmet

U. Felgner (✉)
Gartenstraße 79, 72074 Tübingen, Deutschland
e-mail: ulrich.felgner@uni-tuebingen.de

Inhaltsverzeichnis

1 Vorwort

Das Prinzip der ***vollständigen Induktion***, über das wir sprechen wollen, ist das folgende Beweisprinzip, wobei Φ irgendeine zahlentheoretische Eigenschaft ist:

$$\frac{\Phi(0), \quad \forall x(\Phi(x) \quad \Rightarrow \quad \Phi(x+1))}{\forall x : \Phi(x)} \tag{VI}$$

> in Worten: *wenn man davon ausgehen darf, daß die Zahl* 0 *die Eigenschaft* Φ *hat und wenn man davon ausgehen darf, daß mit jeder Zahl* x*, die die Eigenschaft* Φ *hat, stets auch ihr Nachfolger* $x+1$ *die Eigenschaft* Φ *hat, dann darf man davon ausgehen, daß ausnahmslos alle natürlichen Zahlen die Eigenschaft* Φ *haben.*

Das Induktions-Prinzip (VI) liegt vielen Beweisen mathematischer Sätze zugrunde, wurde aber erst spät als Beweisprinzip erkannt. Erst von der Mitte des 17. Jahrhunderts an wurden verschiedene Versionen der Induktion ausdrücklich formuliert, woraus sich das heute übliche *Prinzip der vollständigen Induktion* als *Schluß von* n *auf* $n+1$ allmählich herausgebildet hat. Wir wollen die einzelnen Etappen in dieser Entwicklung verfolgen.

Henri Poincaré (1854–1912) hat in seinem Buch *La Science et l'hypothèse* (Paris, 1902) den Schluß durch vollständige Induktion als „*raisonnement mathématique par excellence*" bezeichnet. Auch in seinem Buch *Science et Méthode* (Paris 1908) sprach er mit großer Begeisterung über das Induktions-Prinzip (VI) und meinte, daß in diesem Prinzip etwas sehr Typisches für die mathematische Denkweise zum Ausdruck komme. Er sprach sogar davon, daß sich in diesem Prinzip der *Kern der mathematischen Schlußweise* zeige.

Um deutlich zu machen, was damit gesagt ist, wollen wir dem Prinzip (VI) die folgende ‚einfachere' Version des Induktions-Prinzips gegenüberstellen:[1]

$$\frac{\Phi(0), \Phi(1), \Phi(2), \ldots, \Phi(n), \ldots \quad \text{(für alle Ziffern } n\text{)}}{\forall x{:}\Phi(x)} \tag{SI}$$

Prinzip der „**s**ummativen (oder unendlichen) **I**nduktion" in Worten: *Wenn man davon ausgehen darf, daß für jede Ziffer n die Aussage $\Phi(n)$ gilt, dann darf man davon ausgehen, daß ausnahmslos alle natürlichen Zahlen die Eigenschaft Φ haben.*

Die Unterschiede zwischen den beiden Beweis-Prinzipien (VI) und (SI) sind beträchtlich.

Die Regel (SI) hat unendlich viele Prämissen, und die Begründungen, warum $\Phi(0), \Phi(1), \Phi(2), \ldots$ gültig sind, dürfen für verschiedene natürliche Zahlen völlig verschieden sein. Dies ist in Anwendungen dieser Regel auch oft der Fall. In den Begründungen der einzelnen Aussagen $\Phi(n)$, wo n für eine konkrete Ziffer steht, beruft man sich gerne auf die Anschauung oder die Mengenlehre. (Das sind allerdings Hilfsmittel, die die reine Zahlentheorie übersteigen!)

Dagegen hat die Regel (VI) nur zwei Prämissen, und die *Verkettung* $\forall x(\Phi(x) \Rightarrow \Phi(x+1))$ bewirkt, daß die Beweise für die einzelnen Aussagen $\Phi(n)$ alle *die gleiche Struktur* haben! Die Verkettung ist durch eine mathematische Operation gegeben und insofern ist die Regel (VI) keine Schluß-Regel der reinen Logik, sondern ein mathematisches Beweisprinzip.

Die Regel (VI) ist offenbar eine gelungene Finitarisierung der Regel (SI). Natürlich hätte man die Regel (SI) auch dadurch finitarisieren können, indem man verlangt, daß $\Phi(0), \Phi(1), \Phi(2), \ldots, \Phi(k)$ nur für endlich viele Ziffern $0, 1, 2, \ldots, k$ gilt. Dann wäre der Induktions-Schluß allerdings nur eine *unvollständige Induktion* und kein gültiger logischer Schluß. Der eigentliche „Witz" der vollständigen Induktion (VI) liegt somit in der *Verkettung*, die eine Finitarisierung ermöglicht, ohne daß dabei die Gültigkeit verletzt wird. Diese Verkettung ermöglicht es unserem endlichen Denken, Aussagen über die unendliche Zahlenreihe zu machen.

Ein Blick zurück in die Geschichte kann manches noch sehr viel deutlicher machen.

[1] Die summative Induktion (in der Form der ω-Regel) hatte David Hilbert 1931 (Math. Ann. 104 (1931), pp. 485–494) eingeführt, nachdem er den Gödelschen Beweis für die ω-Unvollständigkeit der axiomatisch aufgebauten Arithmetik kennengelernt hatte (siehe auch Hilberts Werke, Band III, p. 193 und p. 215).

2 Das allgemeine Induktionsprinzip

2.1 Die Methode der Induktion in der Antike

Der Übergang vom Allgemeinen auf das Besondere ist eine logisch allgemein-gültige Schlußregel, die schon Aristoteles (*Analytica priora*, Buch I, 24b 26–30) formuliert hatte. Seit der Scholastik wird sie als *dictum de omni* bezeichnet: *quicquid de omni valet, valet etiam de quibusdam et singulis:* was von jedem gilt, das gilt auch von einigen und von einzelnen. Wenn c der Name für ein einzelnes Objekt ist, dann läßt sich dieses Beweis-Prinzip wie folgt mitteilen:

$$\frac{\forall x : \Phi(x)}{\Phi(c)}.$$

Den umgekehrten Schluß vom Besonderen auf das Allgemeine hat Aristoteles (in seinen Topika, 1. Buch, Kapitel XII, 105a 13–14) als Epagoge (ἐπαγωγή) bezeichnet. (Dieses Wort ist aus der Präposition ἐπί (auf, an) und dem Verb ἄγω (hinführen) zusammengesetzt.) Aristoteles schreibt an der genannten Stelle:

> ἐπαγωγὴ δὲ ἡ ἀπὸ τῶν καθ' ἕκαστον ἐπὶ τὰ καθόλου ἔφοδος.
> [*Die Epagoge ist der Aufstieg vom Einzelnen zum Allgemeinen.*]

Dem syllogistischen Schließen (also dem *Herleiten, Ableiten*) hat Aristoteles die Epagoge (das *Hinleiten, Hinführen*) gegenüber gestellt. Aristoteles hat anerkannt, daß die Epagoge in der juristischen Beweisführung hilfreich sein mag, daß sie aber in einer wissenschaftlichen Beweisführung keinen Platz hat, wenn man nicht die sämtlichen Einzelfälle durchgeht. Die Epagoge gehört daher nicht zur aristotelischen Apodeixis.

Quintilian (ca. 35–95 u.Z.) hat in seinem großen Werk über die Beredsamkeit im 5. Buch (Kapitel 10, §73) berichtet, daß Cicero (106–43 v.u.Z.) das Wort „Epagoge" mit „*Induktion*" übersetzt habe:

> „*Hoc est ex eo genere, quod* ἐπαγωγὴν *Graeci vocant, Cicero inductionem.*"
> [Dies gehört zur Klasse von Beweisen, die die Griechen ἐπαγωγὴ, Cicero Induktion nennen.] (M. Fabius Quintilian: *Institutio Oratoria*, V, 10, 73).

Diese Übersetzung hatte Cicero bereits in seiner Jugendschrift, die „*Von den rhetorischen Erfindungen*" handelt (*Rhetoricorum, seu de Inventione rhetorica*, 1. Buch, Kap. 31, §51), vorgeschlagen. In seiner Altersschrift „*Topik, oder die Lehre von den Beweisen und den gerichtlichen Gründen*" kommt Cicero noch einmal auf die Induktion zurück. Er schreibt dort in Kapitel 10, §42:

> „*Haec ex pluribus perveniens quo vult, appellantur inductio: quae graece* ἐπαγωγὴ *nominatur; qua plurimum est usus in sermonibus Socrates.*"
> [Eine solche Folgerung, die durch Aufzählung mehrerer ähnlicher Sachverhalte zu ihrem Ziel gelangt, heißt Induktion; die Griechen nannten sie ἐπαγωγὴ: ein Verfahren, das Sokrates in seinen Gesprächen häufig angewandt hat.]

Statt des griechischen ἄγειν (lat. *agere* = treiben) verwendet Cicero das Verb „*ducere*" (ziehen, vorangehen, führen, leiten). Dem „Beweisen" als Deduktion (Herleiten, Ableiten) stellt Cicero somit die Induktion gegenüber:

deducere = herleiten, *inducere* = hinleiten.

Die Deduktion war in den Wissenschaften die zulässige Art der Argumentation. Die Induktion dagegen war auch für Cicero nur als Mittel der Beredsamkeit (etwa in der Jurisprudenz) anerkannt.

In der Neuzeit hat jedoch Francis Bacon (Baco de Verulam, 1561–1626) die Methode der *Induktion* auch den empirischen Wissenschaften empfohlen:

> „... *atque quemadmodum vulgaris logica, que regit res per Syllogismum, non tantum ad naturales, sed ad omnes scientias pertinet, ita et nostra, quae procedit per Inductionem, omnia complectitur*.“ (*Novum Organon*, I, §127). [... so wie die gewöhnliche Logik, die vom Syllogismus beherrscht wird, sich nicht nur auf die Naturwissenschaften, sondern auf alle Wissenschaften erstreckt, so werden sie alle auch durch die meinige, die durch Induktion voranschreitet, umfaßt.]

Sein *Novum Organum Scientiarum* (London, 1620) setzte er bewußt dem Aristotelischen *Organum* entgegen. Bacon meinte, daß die deduktive Methode in den Naturwissenschaften untauglich sei, weil man in ihnen die grundlegenden Erkenntnisse immer nur durch Induktion gewinnen könne. Die Induktion war für Bacon eine Methode der ‚*Allgemeinmachung*‘, wie es Immanuel Kant in seiner *Logik* (dort in §84) nannte. Kant bemerkte dazu, daß ein solcher Induktions-Schluß keineswegs logisch allgemeingültig, aber doch gelegentlich sehr praktisch sei.

2.2 Die vollständige und die unvollständige Induktion

Antoine Arnauld (1612–1694) hatte sich in seiner sogenannten *Logique de Port-Royal* (genauer: *La Logique ou l'art de penser*, Paris 1662) im dritten Teil, Kapitel XIX, §9, mit dem Problem der Induktions-Schlüsse auseinander gesetzt und zugegeben, daß wir viele unserer Kenntnisse auf induktivem Wege gewinnen, aber

> „*Mais il est vrai néanmoins que l'induction seule n'est jamais un moyen certain d'acquérir une science parfaite*.“
> [Gleichwohl ist es wahr, daß die Induktion allein niemals ein sicheres Mittel ist, eine vollkommene Erkenntnis zu erlangen.]

Als Fehlerquelle nannte er die unvollständigen Induktionen, „*les inductions défectueuses, c'est-à-dire, qui ne sont pas entières*“ („inductiones vitiosas, idest, mutilas, non integras“).

Etwas systematischer haben sich Christian Wolff (1679–1754) und seine Schüler mit dem Problem der Induktions-Schlüsse auseinander gesetzt. Sie haben die *vollständigen* und die *unvollständigen Induktionen* unterschieden. Wenn ausnahmslos *jedes* Ding a (einer vorgegebenen Gattung A) die Eigenschaft Φ hat, dann ist auch die universelle Aussage $\forall x \in A : \Phi(x)$ wahr. Dieser Schluß ist logisch allgemeingültig und einwandfrei. Wolff bezeichnete ihn als „vollständige Induktion“ (*inductio completa*). Andere Autoren haben ihn später etwas genauer als „*summative Induktion*“ bezeichnet. Christian Wolff schrieb in seiner „Lateinischen Logik“:

> „*Modus argumentandi, quo de superiori universaliter infertur, quod de singulis inferioribus affirmatur vel negatur dicitur Inductio. Quodsi omnia inferiora recensentur, Inductio completa est; si quaedam deficiunt, incompleta*.“ ([24], p. 369, §478).

Die Unterscheidung von *vollständigen* und *unvollständigen Induktionen* findet sich seither in vielen Darstellungen der Logik, etwa bei Johann Peter Reusch (*Systema logicum*, Jena 1734, p. 656, §571), bei Friedrich Christian Baumeister (*Institutiones philosophiae rationalis methodo Wolfii conscriptae*, Wittemberg 1735, p. 220, §304) und auch im *Neuen Organon* (Leipzig 1764, Band I, §287, §595; Band II, §190, etc.) von Johann Heinrich Lambert. Die Unterscheidung war vom 18. Jahrhundert an offenbar weithin bekannt geworden. Es ist beachtlich, daß man im Sinne der Wolffschen Unterscheidung (SI) als Prinzip der „vollständigen Induktion“ bezeichnen müßte.

2.3 Die eigentliche Induktion ist die unvollständige Induktion

Die meisten Induktions-Schlüsse, die man in den empirischen Wissenschaften antrifft, sind unvollständige Induktionen. Diese sind aus der Sicht der Logik inkorrekt: *a particulari non valet consequentia ad generale*. Sie spielen jedoch eine große Rolle, da mit ihnen unser Wissen erweitert werden kann.

Vollständige (oder summative) Induktionen kommen in den empirischen Wissenschaften nur sehr selten vor und spielen daher in ihnen keine Rolle. Es wurde deshalb im 18. und frühen 19. Jahrhundert üblich, unter dem Begriff der *Induktion* nur noch die *unvollständige Induktion* zu verstehen. Dies geschah sogar ganz bewußt, wie aus dem folgenden Zitat hervorgeht:

> „*Induction ... is that operation of the mind by which we infer that what we know to be true in a particular case or cases, will be true in all cases which resemble the former in certain assignable respects. In other words, Induction is the process by which we conclude that what is true of certain individuals of a class is true of the whole class, or that what is true at certain times will be true in similar circumstances at all times*.“ (John Stuart Mill in [17], p. 188)

Es ist klar, daß die Induktion, wenn sie als unvollständige Induktion verstanden wird, in den Beweisen der Mathematik keinen Platz hat; sie taugt hier nur zur Heuristik.[2]

Beispielsweise wird in der *Encyclopédie Méthodique* von D'Alembert et al. (Spezialbände *Mathématiques*, chez Panckoucke à Paris, 1785) zur Erläuterung des Wortes „Induction“ (im 2. Band, p. 207) gesagt, daß man in der Mathematik aus der Verifikation einer zahlentheoretischen Formel für einige Zahlen nicht durch Induktion schließen darf, daß die Formel allgemeingültig sei. „Induktion“ wird hier offenbar als unvollständige Induktion verstanden.

[2] Die Induktion geht aber oft der Aufstellung mathematischer Axiome voran. Die „Wahrheit“ der jeweiligen Axiome wird in einer größeren Zahl von Einzelfällen erfahren und dann als universell gültige Aussage postuliert.

Auch Carl Friedrich Gauss (1777–1855) verwendet das Wort „Induktion“ in seinen berühmten *Disquisitiones Arithmeticae* (Leipzig, 1801) ausschließlich im Sinne einer unvollständigen Induktion.[3]

Bevor er beispielsweise an den Beweis des Quadratischen Reziprozitäts-Gesetzes geht, überprüft er anhand von längeren Tabellen, welche Gesetzmäßigkeiten möglicherweise vorliegen könnten. Er kommentiert dieses Vorgehen mit den Worten: „*Per inductionem deprehenditur*“ (Durch Induktion findet man . . . , §121) oder „*Ex inductione facile deprehenditur*“ (in §123), etc. Durch (unvollständige) Induktion gewinnt er Resultate, die aber nur den Status von Vermutungen haben.

Diese vermuteten Gesetze werden jedoch anschließend „mit aller Strenge“ (*omni rigore*) durch *Schluß von n auf $n+1$* bewiesen. Diesen Schluß von n auf $n+1$ führt er (in §135) in aller Sorgfalt aus, spricht dabei allerdings nicht von vollständiger Induktion.[4] Er sagt (an anderer Stelle), daß es leicht war, den Fundamentalsatz über die quadratischen Reste „*durch Induction*“ zu finden, daß es aber „*bei weitem schwieriger war, . . . ihn zu beweisen*“ (cf. Gauss: „*Neue Beweise des Fundamentalsatzes . . .* ,“ 1818).

3 Die Entdeckung des Prinzips der verketteten (vollständigen) Induktion in der Mathematik

3.1 Die summative Induktion bei Euklid

Ein Beweis, der vom Prinzip der vollständigen Induktion Gebrauch machen sollte, taucht in der Geschichte der Mathematik erstmals in der *Elementen* Euklids auf, und zwar im siebten Buch, das die Anfangsgründe der Zahlentheorie enthält. Euklid will dort in §31 den Satz beweisen, daß jede natürliche Zahl $n \geq 2$ von mindestens einer Primzahl p geteilt wird. Wenn n keine echten Teiler hat, dann ist n eine Primzahl und mit $p = n$ ist alles bewiesen. Andernfalls ist n zusammengesetzt, $n = a \cdot b$, und wieder ist entweder a eine Primzahl oder zusammengesetzt. Euklid iteriert das Argument bis ein Primteiler gefunden ist.

Die angesprochene Iteration läßt sich allerdings nur dann ausführen, wenn die Zahl n ganz konkret (in einem rekursiv aufgebauten Bezeichnungssystem) gegeben ist und dann hängt die Länge des Beweises von der Größe der Zahl n ab. Der von Euklid angedeutete Beweis verwendet demnach (unausgesprochen) die sogenannte „summative (oder unendliche) Induktion“ (SI).

Euklid könnte etwas anders verfahren. Er könnte entweder das *Prinzip der Wertverlaufs-Induktion* verwenden und dazu zur Induktion annehmen, daß a einen

[3] Diesen Sprachgebrauch findet man auch bei Gustav Lejeune-Dirichlet (Band I seiner „Werke“ , pp. 197, 198 und 200), bei Leopold Kronecker (Werke, Band II, p. 7, Band IV, pp. 143, 213), bei Gottlob Frege in seinen *Grundlagen der Arithmetik* (Breslau 1884), pp. 2, 12, und bei vielen anderen Mathematikern dieser Zeit.

[4] Auch bei Lejeune-Dirichlet finden sich derartige Beweise durch Schluß von n auf $n+1$, und auch er hat keinen Namen für diese Beweismethode (vergl. seine *Werke*, Band II, p. 130, p. 137). Das gleiche gilt für Kronecker (vergl. seine *Werke*, Band II, p. 21, p. 35).

Primteiler hat (und könnte daraus sofort schließen, daß ein solcher auch ein Primteiler von n ist), oder er könnte das *Minimal-Prinzip* verwenden und wüßte dann, daß es unter allen Faktoren von n einen kleinsten gibt (und ein solcher wäre ein Primteiler von n).

Das genannte *Prinzip der Wertverlaufs-Induktion* kann wie folgt formalisiert werden, wobei Φ irgendeine zahlentheoretische Eigenschaft ist:

$$\frac{\forall x((\forall y < x : \Phi(y)) \quad \Rightarrow \quad \Phi(x))}{\forall x : \Phi(x)} \tag{WI}$$

d.h.: *wenn man davon ausgehen darf, daß für alle natürlichen Zahlen x gilt, daß aus der Gültigkeit der Eigenschaft Φ für alle Zahlen y unterhalb von x folgt, daß auch x diese Eigenschaft hat, dann kann man davon ausgehen, daß ausnahmslos alle natürlichen Zahlen die Eigenschaft Φ haben.*

Das *Minimal-Prinzip* lautet wie folgt, wobei wieder Φ irgendeine zahlentheoretische Eigenschaft ist:

$$\frac{\exists x : \Phi(x)}{\exists x(\Phi(x) \& \forall y < x : \neg\Phi(y))} \tag{MI}$$

in Worten: *Wenn man davon ausgehen darf, daß es überhaupt Zahlen gibt, die die Eigenschaft Φ haben, dann darf man sogar davon ausgehen, daß es eine kleinste Zahl mit der Eigenschaft Φ gibt.*

Dieses Prinzip ist offenbar nur eine logische Umformung (Kontraposition!) des *Prinzips der Wertverlaufs-Induktion* (WI). Die beiden Prinzipien (WI) und (MI) sind also äquivalent. Es ist leicht zu sehen, daß (WI) aus (VI) folgt,[5] aber wir wollen jetzt schon darauf hinweisen, daß (VI) und (WI) nicht äquivalent sind[6] (cf. Abschnitt 4.3).

Auch im 9. Buch der *Elemente* Euklids findet sich eine Reihe von Sätzen, deren Beweise unter Verwendung von Induktions-Prinzipien geführt werden sollten, beispielsweise Satz 12: „*Wenn eine Primzahl p einen Term a^n einer geometrischen Reihe $a, a^2, a^3, a^4, \ldots$ teilt, dann teilt sie auch a*“, und Satz 14, der die Eindeutigkeit der Primzahlzerlegung beinhaltet. Aber Euklid deutet auch hier nur einen Regreß an und macht keinen Induktions-Beweis.

3.2 Verwendet Francesco Maurolico das Induktions-Prinzip?

In der Literatur findet man oft den Hinweis, daß Francesco Maurolico (Maurolykos, 1494–1575), ein Abbate aus Messina, wohl zuerst Beweise durch vollständige

[5] Um (VI) $\Rightarrow$ (WI) zu beweisen, schreiben wir $\Phi^*(n)$ als Abkürzung für $\forall k \leq n : \Phi(k)$, und nehmen die Gültigkeit von $\forall n(\forall k < n : \Phi(k) \Rightarrow \Phi(n))$ an [das ist die Prämisse von (WI)]. Es gilt dann $\Phi^*(0)$ und $\forall n(\Phi^*(n) \Rightarrow \Phi^*(n+1))$, woraus sich nach (VI): $\forall n : \Phi^*(n)$, ergibt. Daraus folgt dann sofort $\forall n : \Phi(n)$.

[6] Die drei genannten Prinzipien sind auch im Rahmen der intuitionistisch begründeten Mathematik nicht äquivalent. Während (VI) hier als evident angesehen wird, kann beispielsweise (MI) nicht verteidigt werden, denn die Tatsache, daß eine Zahl n existiert, für die beweisbar ist, daß sie die Eigenschaft Φ besitzt, garantiert nicht, daß auch eine Zahl m gefunden werden kann, für die sowohl beweisbar ist, daß sie Φ erfüllt als auch, daß jede kleinere Zahl die Eigenschaft Φ nicht hat. Vergl. dazu Michael Dummett: *Elements of Intuitionism*, Oxford, 1977, p. 34. Es sei an dieser Stelle darauf hingewiesen, daß G. Pickert in [20] die logische Stärke einer auf M. Pasch zurückgehenden finitistischen Version des Induktions-Axioms untersucht hat.

(verkettete) Induktion geführt habe, und daß ihm der Ruhm gebühre, diese Beweis-Methode erfunden zu haben. Diese Behauptung hatte Giovanni Vacca in mehreren Publikation in den Jahren 1909–1911 in die Welt gesetzt (cf. [23]), und viele Historiker sind ihm in dieser Einschätzung gefolgt (beispielsweise W.H. Bussey in [3]). Hans Freudenthal hat 1953 in [8] die Werke von Maurolico sorgfältig analysiert und dabei festgestellt, daß in nahezu allen Beispielen, die von Vacca zitiert werden, *„von vollständiger Induktion keine Spur"* ([8], p. 25) zu finden sei. Freudenthal meint, daß im Werk von Maurolico dennoch an zwei Stellen *„echte vollständige Induktionen"* vorliegen würden. Wir wollen prüfen, ob das der Fall ist.

Maurolico hat in seinen *Arithmeticorum libri duo* aus dem Jahre 1575 die sogenannten *figurierten Zahlen* betrachtet und Beziehungen zwischen ihnen bewiesen. Für die sogenannten *Dreieckszahlen* ist ihm ein einfacher und eleganter Beweis der Formel $\sum_{j=1}^{n-1} j = \frac{n\cdot(n-1)}{2}$ gelungen (cf. [16], p. 5). Er beruft sich wie folgt auf die Anschauung (oder wenn man die Anschauung eliminieren will: auf eine Theorie endlicher Mengen): Schreibe unter die Summe $1+2+3+\cdots+(n-1)$ dieselbe Summe noch ein zweites Mal, aber jetzt in umgekehrter Reihenfolge (*ordine praepostero*). Dabei kommen jeweils zwei Zahlen untereinander zu stehen, deren Summe n ist. Es gibt dabei $n-1$ Kolumnen. Also ist $2\cdot(1+2+3+\cdots+(n-1)) = n\cdot(n-1)$. Maurolico stand die Ausdrucksweise mit Buchstaben noch nicht zur Verfügung (die wurde erst 1591 von François Viète in seinem Werk *In Artem Analyticen Isagoge* eingeführt) und er mußte sich damit begnügen, das Resultat in Worten und in Beispielen mitzuteilen. Die Beweismethode hat aber dennoch seither alle Mathematiker überzeugt und sie findet sich auch heute noch in nahezu allen Schulbüchern. Es ist aber zu betonen, daß hier *kein* Beweis durch vollständige Induktion vorliegt (einen solchen Beweis hat erst Jakob Bernoulli in [1] mehr als hundert Jahre später gegeben). Es wird lediglich (auf direktem Wege) gezeigt, daß für jede einzelne (konkret gegebene) Ziffer n die oben angegebene Gleichung gilt. Dabei sind die Beweise für verschiedene Ziffern streng genommen alle verschieden.

Für die Summe der ersten n ungeraden Zahlen hat Maurolico ebenfalls eine einfache Formel gefunden (cf. [16], p. 7, Proposition 15). In heutiger Notation ist es die Formel: $n^2 = \sum_{j=1}^{n}(2j-1)$.

Den Beweis stützt er auf zwei Propositionen. In der einen (Proposition 6) zeigt er, daß $n+(n-1)$ die n-te ungerade Zahl ist und in der anderen (Proposition 13) zeigt er, daß die $(n+1)$-te Quadratzahl aus der n-ten Quadratzahl durch Addition der $(n+1)$-ten ungeraden Zahl entsteht, d.h.: $(n+1)^2 = n^2 + (2n+1)$. Er beweist die beiden Propositionen, indem er die jeweiligen figurierten Zahlen der Reihe nach erzeugt. In Proposition 6 wird unentwegt die Zahl 2 addiert. Er beginnt also mit der Zahl 1 und geht zu den Zahlen 3, 5 und 7 über und sagt dann „*Eodemque modo in infinitum*". (Das ist alles.) Im Beweis von Proposition 13 werden einige Zahlbeispiele gegeben, die allgemein genug sind, um die universelle Gültigkeit zu belegen. Beweise durch vollständige Induktion liegen hier nicht vor.

Danach geht er an den Beweis der Aussage (Proposition 15), daß *„durch Summierung der aufeinanderfolgenden ungeraden Zahlen von 1 an der Reihe nach alle Quadratzahlen erzeugt werden können"*. Zum Beweis rechnet er den Induktions-Anfang vor:

$$1=1, \qquad 1+3=4, \qquad 1+3+5=9, \qquad 1+3+5+7=16,$$

$$1+3+5+7+9=25,$$

und sagt dann: „*et sic deinceps in infinitum, semper 13ª repetita propositum demonstratur*." Durch unentwegtes Anwenden der Proposition 13 soll man also der Reihe nach die weiteren Gleichungen bestätigen und damit die Behauptung beweisen.

W.H. Bussey schreibt dazu in [3], p. 203: „*This is a clear case of a complete induction proof*".

Das ist wohl etwas übertrieben, denn der Induktions-Schluß ist nur vage angedeutet. Die Berufung auf Proposition 13 macht jedoch klar, daß der Beweis-Gedanke auf einem Induktions-Schluß beruht, auch wenn er nicht ausgeführt ist. Zur Beschreibung des Induktions-Schlusses müßte man Buchstaben (als Variable oder unbestimmte Zahlen) verwenden, aber die standen Maurolico noch nicht zur Verfügung. Es ist daher gerechtfertigt zu sagen, daß es wohl Maurolico war, der als Erster die *Vision* eines Beweises durch vollständige Induktion hatte, auch wenn es ihm noch nicht möglich war, eine derartige Induktion genau zu beschreiben. Es ist aber auch gerechtfertigt zu sagen, daß Maurolico das Prinzip der vollständigen Induktion noch nicht als eigenständiges Beweis-Prinzip erkannt hat.

3.3 Fermats Deszendenz-Methode (*descente infinie*)

Auf Theoreme, die auf induktivem Wege bewiesen werden, stößt man in der Zeit danach erst wieder in der Mitte des 17. Jahrhunderts, und zwar im zahlentheoretischen Werk von Pierre Fermat (1607–1665). Fermat hat ein Beweis-Prinzip explizit formuliert, das mit dem Prinzip der Wertverlaufs-Induktion äquivalent ist. Es handelt sich um das folgende Beweis-Prinzip, das er „*Descente infinie*" nannte:

> *Wenn gezeigt werden kann, daß es zu jedem Gegenbeispiel (einer Behauptung, die bewiesen werden soll) stets ein echt kleineres Gegenbeispiel geben sollte, dann kann es überhaupt kein Gegenbeispiel geben.*

Andernfalls müßte es eine unendlich lange strikt absteigende Kette von Gegenbeispielen geben. Aber im Bereich der natürlichen Zahlen gibt es überhaupt keine unendlich langen absteigenden Ketten. Das Prinzip ist also allgemeingültig und kann wie folgt formalisiert werden, wobei Φ irgendeine zahlentheoretische Eigenschaft sei:

$$\frac{\forall x(\neg\Phi(x) \quad \Rightarrow \quad \exists y < x : \neg\Phi(y))}{\forall x : \Phi(x)} \tag{DI}$$

Aus dieser formalisierten Version kann man sofort ablesen, daß (DI) lediglich eine logische Umformung der Wertverlaufs-Induktion (WI) ist. Also sind die drei Prinzipien (DI), (WI) und (MI) logisch äquivalent. Sie folgen aus dem allgemeineren Induktions-Prinzip (VI), sind aber mit (VI) nicht äquivalent.

Dieses Deszendenz-Prinzip (DI) hat Fermat circa 1640 gefunden, aber erst im August 1659 in einem Brief an seinen langjährigen Freund Pierre de Carcavi explizit beschrieben (cf. [7], S. 431–436). In diesem Brief teilte Fermat seinem Freund viele seiner besten zahlentheoretischen Resultate mit. Er schrieb: „*Voilà sommairement le compte de mes rêveries sur le sujet des nombres*". Fermat nannte beispielsweise den folgenden Satz,

„*qu'il n'y a aucun triangle rectangle en nombres dont l'aire soit un nombre carré*“, d.h. daß der Flächeninhalt eines rechtwinkligen Dreiecks mit ganzzahligen Seiten keine Quadratzahl sein kann.

Zum Beweis schrieb er:

„*La preuve se fait par* ἀπαγωγὴν εἰς ἀδύνατον [d.h. durch reductio ad absurdum]. *S'il y avoit aucun triangle rectangle en nombres entiers qui eût son aire égale à un quarré, il y auroit un autre triangle moindre que celui-là qui auroit la même propriété. S'il y en avoit un second moindre que le premier qui eût la même propriété, il y en auroit par un pareil raisonnement, un troisième, qui auroit la même propriété, et enfin un quatrième, un cinquième, etc., à l'infini en descendant. Or est-il donné qu'étant un nombre, il y en a point infinis en descendant moindres que celui-là (j'entends parler toujours des nombres entiers). D'où on conclut qu'il est donc impossible qu'il y ait aucun triangle rectangle dont l'aire soit quarré.*“

Einen vollständigen Beweis, der sich auf eine Rekonstruktion des Fermatschen Beweises durch Adrien Marie Legendre stützt, hat Paul Bachmann im 2. Band seiner *Niedere(n) Zahlentheorie* (Leipzig 1910), S. 451–452, publiziert. Aus dem genannten Satz ergibt sich unschwer der folgende Satz (siehe P. Bachmann, op. cit., 453):

Satz *Es gibt keine natürlichen Zahlen* a, b, c *mit* $abc \neq 0$ *und* $a^4 + b^4 = c^4$.

Fermat fuhr in seinem Brief an Carcavi wie folgt fort:

„*J'appelai cette manière de démontrer la descente infinie ou indéfinie ... ; je ne m'en servis au commencement que pour démontrer les propositions négatives.*“

Fermat hat demnach die Deszendenz-Methode zunächst nur zum Beweis von Sätzen der Form „Es gibt keine natürliche Zahl mit dieser oder jener Eigenschaft“ (wie in den beiden oben genannten Sätzen) benutzt. Erst später gelang es ihm, mit der Deszendenz-Methode auch positive Aussagen zu beweisen, beispielsweise:

Satz *Jede Primzahl* p *mit* $p \equiv 1 \pmod 4$ *kann als Summe von zwei Quadraten natürlicher Zahlen geschrieben werden.*

Oder mit den Worten Fermats: „*tout nombre premier, qui surpasse de l'unité un multiple de 4, est composé de deux carrés*.“ – Zum Beweis dieses Satzes schrieb Fermat in dem genannten Brief an Carcavi: „*Wenn eine willkürlich gewählte Primzahl der Form* $p = 4k + 1$ *keine Summe von zwei Quadraten ist, dann beweise ich, daß es eine kleinere der gleichen Form gibt und eine dritte noch kleinere etc. Wenn wir auf diese Art zu immer kleineren Zahlen absteigen, gelangen wir zur Zahl 5 als der kleinsten dieser Zahlen. Auch 5 dürfte keine Summe von zwei Quadraten sein, aber sie ist eine solche Summe. Deshalb kommen wir durch eine reductio ad absurdum zum Schluß, daß alle Primzahlen der Form* $4k + 1$ *Summen von zwei Quadraten sind.*“ (Einen Beweis haben W. Scharlau und H. Opolka in ihrem Buch *Von Fermat bis Minkowski* (Springer Verlag, Berlin, 1980, p. 12) rekonstruiert.)

Carcavi hat Abschriften des Briefes einigen befreundeten Mathematikern weitergegeben, so daß die Resultate und Beweismethoden Fermats von 1659 an einem größeren Kreis von Personen bekannt geworden sind.

3.4 Pascals Beweise durch vollständige (verkettete) Induktion

Etwa zur selben Zeit wie Fermat ist auch Blaise Pascal (1623–1662) auf die Methode der vollständigen Induktion gestoßen, als er (vermutlich 1654) seine Abhandlung über das Dreieck der Binomial-Koeffizienten schrieb: *Traité du triangle arithmétique* (publiziert 1665, Nachdruck in [18]). In diesem Traktat kommt die Schlußweise von n auf $n+1$ zur Anwendung und wird überdies ganz bewußt herausgestellt.

Es geht in Pascals Traktat um die Beherrschung der Größe der Koeffizienten $\binom{n}{i}$ der binomischen Formel

$$(a+b)^n = a^n + na^{n-1}b + \cdots = \sum_{i=0}^{n} \binom{n}{i} a^{n-i} b^i .$$

Pascal hat die von Peter Apian (1527) (und danach auch von Michael Stifel (1544), Nicolo Tartaglia (1556), et al. und schon zuvor von einigen chinesischen Mathematikern) angegebene Anordnung der Binomial-Koeffizienten in Form eines Dreiecks übernommen und eine Reihe von Relationen zwischen diesen Koeffizienten entdeckt und bewiesen. Pascal führt die Zahlen $\binom{n}{k}$ jedoch nicht als Binomial-Koeffizienten[7] (d.h. als Koeffizienten des Binoms $(a+b)^n$) sondern auf rekursive Weise wie folgt ein:

Definition Für zwei natürliche Zahlen n und k sei:

(a) im Falle $k=0$ und $k=n$: $\binom{n}{0} = \binom{n}{n} = 1$, und
(b) im Falle $0<k<n$ sei: $\binom{n}{k} = \binom{n-1}{k-1} + \binom{n-1}{k}$.

Pascal beweist den folgenden kleinen Satz („Consequence 12“), daß stets

$$\binom{n}{k} : \binom{n}{k+1} = (k+1) : (n-k)$$

gilt. Bevor er an den Beweis geht, sagt er, daß er wie folgt vorgehen möchte. Dabei benutzt Pascal die folgende Notation $\varphi = \binom{1}{0}$ und $\sigma = \binom{1}{1}$. Dies sind die beiden Binomial-Koeffizienten in der zweiten Zeile, also mit der „Basis“ 2. Er sagt ([18], p. 248):

> „*Quoique cette proposition ait une infinité de cas, j'en donnerai une démonstration bien courte, en supposant deux lemmes.*
> *Le premier, qui est évident de soi-même, que cette proportion se rencontre dans la seconde base; car il est bien visible que φ est à σ comme 1 à 1.*

[7] Die heute übliche Notation $\binom{n}{i}$ geht auf Andreas von Ettinghausen (1827) zurück. Wir wollen sie hier verwenden, denn es wäre ungeschickt, auf die komplizierte Notation Pascals zurückzugreifen.

La deuxième, que si cette proportion se trouve dans une base quelconque, elle se trouvera nécessairement dans la base suivante.
D'où il se voit qu'elle est nécessairement dans toutes les bases: car elle est dans la seconde base par le premier lemme; dont par le second elle est dans la troisième base, donc dans la quatrième, et à l'infini."

Die genannten Lemmata geben also die Induktions-Verankerung und den Induktions-Schritt (Schluß von n auf $n+1$) wieder. Das Prinzip der vollständigen Induktion (als Schluß von n auf $n+1$) wird also hier von Pascal ausdrücklich als Beweis-Prinzip erkannt und herausgestellt. Einen Namen für dieses Beweis-Verfahren hat er allerdings nicht.

Pascal beweist auch andere Sätze durch vollständige Induktion, beispielsweise den folgenden kleinen Satz (Consequence 5): *Für* $0 \leq k \leq n$ *gilt* $\binom{n}{k} = \binom{n}{n-k}$. Andere Sätze, die man ebenfalls durch vollständige Induktion beweisen sollte, beweist er allerdings durch sukzessiven Regreß, beispielsweise Consequence 2. Wir stellen fest, daß Pascal zwar eine sehr klare Formulierung seiner Beweismethode angibt, aber dennoch nicht die Notwendigkeit eingesehen hat, auch die anderen Sätze seiner Abhandlung mit dieser Methode zu beweisen.

3.5 Systematische Anwendungen durch Jacob Bernoulli et al.

Der Traktat von Pascal ist in den folgenden 150 Jahren immer wieder gelesen worden und dabei wurde der Schluß von n auf $n+1$ allmählich immer deutlicher herausgearbeitet. Den ersten wesentlichen Schritt hat Jacob Bernoulli (1654–1705) in einer kleinen Note aus dem Jahre 1686 unternommen (cf. [11]). Er gibt hier eine Anwendung des Prinzips der vollständigen Induktion (VI) mit exemplarischer Klarheit. Er beweist die Formel $\sum_{j=1}^{n} j = \frac{n\cdot(n+1)}{2}$, die bereits Maurolico auf anderem Wege bewiesen hatte (siehe oben). Sie gilt für $n=1$ und eine leichte Rechnung zeigt, daß sie für $n+1$ gilt, falls sie für n gilt; also gilt sie allgemein. Diese kleine Publikation hat sehr zur Popularisierung der Beweismethode beigetragen.

Auch in seinem nachgelassen Werk *Ars conjectandi* (cf. [2]) benutzt Jakob Bernoulli das Prinzip der vollständigen Induktion. Er beweist beispielsweise (im 2. Teil, S. 75) durch Schluß von $n-1$ auf n, daß es $1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot \ldots \cdot (n-1) \cdot n$ (oder wie wir seit Christian Kramp, 1808, schreiben: $n!$) verschiedene Permutationen von n verschiedenen Objekten gibt.

Für die Größe der figurierten Zahlen und der Binomialkoeffizienten gibt Bernoulli die schon seit langem bekannten Formeln und beweist (auf den Seiten 92–93 in den Hilfssätzen 4 und 5) ihre Gültigkeit durch Schluß von n auf $n+1$. In einem Scholium bemerkt Bernoulli (Seite 95 unten), daß sich in früheren Zeiten viele Autoren mit figurierten Zahlen und Binomialkoeffizienten beschäftigt haben, und daß all diese Autoren ihre Resultate nur „*auf induktivem Wege*" gefunden hätten. Bernoulli meint, daß Induktionsbeweise „*zu wenig wissenschaftlich*" seien: „*Praeterquam enim quod modus demonstrandi per inductionem parum scientificus est.*" Bernoulli versteht unter einem Induktionsbeweis nicht einen Beweis durch vollständige Induktion, sondern durch unvollständige Induktion – über diesen Unterschied haben wir oben bereits ausführlich gesprochen. Bernoulli möchte damit sagen, daß seine Beweise hingegen unanfechtbar wären. – Aber da mag es doch etwas verwundern, daß auch Bernoulli (beispielsweise auf Seite 99) gelegentlich Beweise nur durch unvollständige Induktion führt.

Nach dem Vorbild von Pascal und Bernoulli wurden in der Folgezeit Beweise immer häufiger durch Schluß von n auf $n+1$ bewiesen. Man darf sagen, daß dieses Beweisverfahren im Laufe des 18. Jahrhunderts überall bekannt geworden ist. Aber einen Namen hat es erst im ausgehenden 18. Jahrhundert erhalten.

3.6 Das Beweisverfahren bekommt einen Namen

In seinen *Dissertationes math. et phys.* (Altenburg, 1771) und etwas später noch einmal in seinem kleinen Aufsatz *Über die geometrischen Axiome* aus dem Jahre 1790 [14] sprach der Göttinger Mathematiker Abraham Gotthelf Kästner (1719–1800) sehr ausführlich über die Beweise durch Induktion. Er benutzte das Wort „*Induktion*" und schrieb:

> „*Heißt Induktion etwas bey einzelnen Fällen wahrnehmen, und daraus einen allgemeinen Satz machen, so muß man* alle *einzelne Fälle durchzählen können, und zeigen, daß das, was man behauptet, bey jedem statt findet*."

Kästner argumentierte, daß man im Falle von endlichen Mengen von Dingen auf diese Weise durch (summative) Induktion etwas über *alle* Dinge solcher Mengen erschließen kann. Dann heißt es (loc. cit., p. 427):

> „*Eine andere Induktion ist so beschaffen: Unterschiedene Fälle werden einer aus dem andern abgeleitet; Man kann zeigen: Was in irgend einem statt findet, muß auch in dem nächstfolgenden statt finden; Alsdann ist genug, von dem ersten, zweiten, dritten Falle, kurz von einigen der ersten darzuthun, was man von allen, vielleicht ohne Ende fortgehenden behauptet*."

Die Methode der vollständigen Induktion mit Induktions-Schluß und Induktions-Verankerung ist hier ausführlich und klar dargelegt. Nur die heute übliche Benennung als „*vollständige Induktion*" (oder auch „*mathematische Induktion*") findet sich noch nicht. Aber Kästner schlug einige andere Bezeichnungen vor.

> „*Weil man hier vom n-ten Falle auf den* $(n+1)$*-ten fortgeht, nannte ein guter Freund von mir in Leipzig M. Orchliz, das im Scherze: Die $n+1$ Methode. Man kann ihr aber einen edlern Namen geben. Wenn in einem Geschlechtregister, irgend einer der Vorfahren, von Adel ist, so sind es doch alle, rechtmäßig von Ihm abstammende. Also ist es auch die Ahnenmethode und geht selbst die Herren* von *an, die von den Nepern, l'Hospitals, Tschirnhausen viel zu weit unterschieden sind, etwas von n und $n+1$ zu wissen*." (loc. cit., pp. 427–428).

Aufgrund all dieser Bemühungen Kästners um die Methode der vollständigen Induktion wurde sie gelegentlich sogar als „*Kästnersche Beweismethode*" bezeichnet. So schreibt beispielsweise Carl Gustav Jakob Jacobi (1804–1851) in seinem Essay [13]:

> „*Gauss gelangt zu seinen Resultaten auf dem Wege einer schwierigen Induktion, die durch die sogenannte Kästnersche Methode, wenn etwas für die Zahl n gilt, es auch für die Zahl $n+1$ zu erweisen, zur Allgemeinheit erhoben werden kann*."

Auch in der *„Philosophie der Mathematik“* von Const. Franz (Leipzig 1842, S. 107) lesen wir:

> *„Der Arithmetik ... ist die Induktion, die sogenannte kästner'sche Beweismethode wesentlich eigenthümlich. So wird von der binomischen Reihe erwiesen, daß sie richtig ist, für den Exponenten 1 und 2, und daß sie ebenso richtig ist für den Exponenten n, wenn sie für den Exponenten* $n-1$ *richtig ist; damit gilt sie allgemein.“*

Aber die Bezeichnung „vollständige Induktion“ für das Prinzip (VI) wurde erst etwas später üblich. Jakob Friedrich Fries (1773–1843) war vermutlich der Erste, der den „*Bernoullische[n] Beweis für das Gesetz der Koeffizienten des Binomiums*“ eine „*vollständige Induktion*“ nannte (cf. Fries: *System der Logik*, 2. Auflage, Heidelberg 1819, p. 256–257). Auch in seiner *Mathematischen Naturphilosophie* [9] ging Fries auf die Bernoullischen Beweise ein und bezeichnete sie als „vollständige Induktionen“ ([9], p. 46) und schrieb dann noch etwas ausführlicher ([9], p. 47):

> „*Wie z.B. dies letztere bey Bernoullis Induktion der Fall ist, deren man sich in der Analysis mit so großem Vortheil bedient. Ich meine nemlich die Schlußweise, welche bey dem Ueberblick einer Reihe von vielleicht unendlich vielen Fällen, ein Gesetz nur für einen Fall beweist und dann zeigt, wenn es von irgend einem gelte, müsse es auch vom nächst folgenden gelten, wodurch der Beweis sogleich für alle Fälle schließt.*“

3.7 Es wird in der Mathematik üblich, von „*vollständiger Induktion*“ zu sprechen

Christian Wolff war der Erste, der von „vollständiger Induktion“ sprach [24]. Für ihn wäre in der Arithmetik der natürlichen Zahlen das Prinzip der „summativen (oder unendlichen) Induktion“ (SI) das Prinzip der „vollständigen Induktion“. Es hat sich jedoch im Laufe des 19. Jahrhunderts in der Mathematik eingebürgert, das Prinzip (VI) mit diesem Namen zu belegen. Vermutlich war der Mathematiker und Philosoph Jakob Friedrich Fries der Erste, der das Prinzip (VI) so benannte (siehe oben, Abschnitt 3.6). Danach hat auch Adolf Trendelenburg (in seinen *Logischen Untersuchungen*, Band II, Leipzig 1862, p. 283) von

> „*der sogenannten vollständigen Induction des binomischen Lehrsatzes*“

gesprochen. Friedrich Überweg bezeichnete in seinem *System der Logik* (Bonn, 1857/1865, p. 357) den Schluß von n auf $n+1$ ausdrücklich als „*vollständige Induktion*“, meinte allerdings, daß hier keine „*reine Induktion*“ vorläge, da auch von der Verkettung der unendlich vielen Individuen ganz wesentlich Gebrauch gemacht würde. Damit hatte Überweg durchaus Recht. Gelegentlich sprach man deshalb auch von „*Mathematischer Induktion*“. (Zum Beleg sei Augustus de Morgan in seinem Beitrag zum Stichwort „*Induction*“ in der Penny Cyclopedia, London 1838 (cf. [4], und auch die *Logik und Erkenntnißtheorie* von Constantin Gutberlet, Münster 1898, p. 133, genannt.)

Erst als Richard Dedekind in den von ihm herausgegebenen Dirichletschen *Vorlesungen über Zahlentheorie* (1. Auflage 1863, 2. Auflage 1871) vom *Prinzip der vollständigen Induktion* sprach (in der 2. Auflage, beispielsweise §48, p. 110, in der

4. Auflage 1893, p. 113), konnte sich diese Bezeichnung allmählich durchsetzen. Dedekind verwendete sie auch in seinem berühmten Werk *Was sind und was sollen die Zahlen* (1888, und schon früher in seinen Entwürfen zu diesem Werk aus den Jahren 1872–1878: siehe Pierre Dugac in [6], p. 295) und von da an war sie Allgemeingut geworden.

Aber dieser Prozeß lief nur sehr langsam ab. In den gängigen Lehrbüchern der Arithmetik (Hermann Hankel, Otto Hölder, . . .) und in den grundlegenden Abhandlungen (Leopold Kronecker, Hermann Schubert, . . .)[8] etc. wurde über das Prinzip der vollständigen Induktion nicht gesprochen. Der mit Richard Dedekind eng befreudete Mathematiker Heinrich Weber hat in der von ihm (und Josef Wellstein) herausgegebenen dreibändigen *Encyklopädie der Elementar-Mathematik* (Band 1, Leipzig 1903, p. 12) das Schlußverfahren der vollständigen Induktion jedoch ausführlich behandelt und damit zu seiner endgültigen Akzeptanz ganz erheblich beigetragen.

4 Das Induktions-Axiom in der Dedekind-Peano-Arithmetik

4.1 Kann man das Axiom der vollständigen Induktion beweisen?

Eine neue Epoche in der Geschichte des Induktions-Prinzips begann in den achtziger Jahren des 19. Jahrhunderts mit den Publikationen von Gottlob Freges Werk *Die Grundlagen der Arithmetik* (Breslau, 1884) und Richard Dedekinds Essay *Was sind und was sollen die Zahlen*[9] (Braunschweig, 1888). In beiden Werken wurde erstmals der Versuch unternommen, die Gültigkeit des Prinzips der vollständigen Induktion zu beweisen. Im Vorwort von Dedekinds Essay heißt es programmatisch gleich im ersten Satz:[10]

> „*Was beweisbar ist, soll in der Wissenschaft nicht ohne Beweis geglaubt werden*.“

Bei Frege heißt es ganz ähnlich: „. . . *es liegt im Wesen der Mathematik begründet, daß sie überall, wo ein Beweis möglich ist, ihn der Bewährung durch Induction vorzieht*“ (loc. cit., p. 2). Sowohl Frege als auch Dedekind wollen zeigen, daß der „*Schluß von* n *auf* $n+1$ *auf allgemein logischen Gesetzen beruht*“ (Frege, loc. cit., p. XVI).

Wir wollen auf die Grundidee des Beweises von Dedekind etwas genauer eingehen. Sie kommt aus der Algebra. Wenn Φ eine Eigenschaft ist, die der Zahl 0

[8] Zum Beleg nennen wir: Hermann Hankel: *Theorie der complexen Zahlsysteme*, Leipzig 1867; Otto Hölder: *Die Arithmetik in strenger Begründung*, Berlin, 1929; etc., und die beiden grundlegenden Abhandlungen von Leopold Kronecker: *Über den Zahlbegriff*, 1887 (Nachdruck in Kroneckers Werken, Band III, 1, pp. 251–274) und Hermann Schubert: *Grundlagen der Arithmetik*, Encyklopädie der Mathematischen Wissenschaften, Heft 1, Teubner-Verlag, Leipzig 1898, pp. 1–27.

[9] Auf der Titelseite findet sich der schöne Spruch ἀεὶ ὁ ἄνθρωπος ἀριθμητίζει (Immer ist der Mensch Arithmetiker), den Dedekind selbst in Anlehnung an den berühmten Spruch ἀεὶ γεωμετρεῖν τὸν θεόν (Immer ist Gott Geometer), den Plutarch im 8. Buch seinen Tischreden (Συμποσιακων) Platon in den Mund gelegt hat, gebildet hat.

[10] Im ersten Entwurf aus den Jahren 1872–1878 sollte dieser Satz sogar als Motto dem ganzen Essay vorangestellt werden.

zukommt und mit einer Zahl n auch ihrem Nachfolger $n+1$, dann ist die Menge $E = \{n; n \in \mathbb{N} \& \Phi(n)\}$ unter der Nachfolger-Operation abgeschlossen und ist also (algebraisch gesehen) eine Substruktur der Halbgruppe $\langle \mathbb{N}, \nu \rangle$, wenn ν die 1-stellige Nachfolger-Funktion ist: $\nu(x) = x+1$. Um $E = \mathbb{N}$ zu beweisen, muß man also ‚nur' zeigen, daß $\langle \mathbb{N}, \nu \rangle$ überhaupt keine echten Substrukturen, die die 0 enthalten, besitzt.[11] (Aus algebraischer Sicht ist dies genau die Aussage des Prinzips der vollständigen Induktion.) Dedekind erreicht dies, in dem er die Kette der natürlichen Zahlen wie folgt konstruiert.

Er geht von der Existenz irgendeiner unendlichen Menge M aus. Aus der Unendlichkeit ergibt sich, daß es eine ein-eindeutige Abbildung φ von M auf eine echte Teilmenge A gibt, $\varphi : M \to A \subset M$. Sei $a \in M - A$ beliebig. Dann ist

$$D = \bigcap \{K; a \in K \& \{\varphi(x); x \in K\} \subseteq K \subseteq M\}$$

die kleinste φ-abgeschlossene Teilmenge, die a enthält. In ihr spielt a die Rolle der 0 und $\varphi(x)$ spielt die Rolle des unmittelbaren Nachfolgers von x. Die Halbgruppe $\langle D, \varphi \rangle$ besitzt also keine echten Substrukturen, die das Element a enthalten, und erfüllt daher das Prinzip der vollständigen Induktion (Satz 80 bei Dedekind). Alle derartigen Halbgruppen sind untereinander isomorph (Satz 132) und man kann aus ihnen allen *durch Abstraktion* den Isomorphietyp der Reihe der natürlichen Zahlen gewinnen, $\mathbb{N}$ (Erklärung 73). Da in all diesen Halbgruppen das Prinzip der vollständigen Induktion gilt, gilt es auch in dem aus ihnen durch Abstraktion gewonnenen Bereich $\mathbb{N}$. Unter Verwendung der Nachfolgerfunktion kann man, wie (vermutlich) zuerst Hermann Grassmann 1860 gezeigt hat, durch Rekursion eine Addition und eine Multiplikation mit den üblichen Eigenschaften einführen.

Um sicherzustellen, daß es überhaupt unendliche Mengen gibt, nennt Dedekind als Beispiel die Welt seiner Gedanken (Satz 66). Dedekind war überzeugt, in seinem Beweis der Rechenregeln und des Prinzips der vollständigen Induktion nur die „*reinen Denkgesetze*" (cf. Vorwort zur 1. Auflage) verwendet zu haben. Die Arithmetik hielt er deshalb für einen „*Teil der Logik*". Es war allerdings zu der damaligen Zeit noch gar nicht klar, was zur Logik gehört und was sie übersteigt.

Die kleine Schrift von Dedekind hat Begeisterung und Empörung ausgelöst. David Hilbert und Ernst Schröder[12] sprachen tief beeindruckt von einer „*epochemachenden Abhandlung*". Daß sie aber auch Empörung auslösen konnte, mag überraschend sein und muß erläutert werden. Es waren im Wesentlichen drei Aspekte, die zu heftigen Widersprüchen führten:

(1) Die Behauptung, daß die Arithmetik ein Teil der Logik sei,
(2) die Verwendung von Dedekinds „Gedankenwelt" in der Grundlegung der Arithmetik, und
(3) die Verwendung des Prozesses der Abstraktion.

[11] Um diesen Gedanken durchführen zu können, hat Dedekind sich nur auf die Nachfolger-Operation bezogen und die Addition und Multiplikation aus dem Spiel gelassen.

[12] Siehe E. Schröder: *Vorlesungen über die Algebra der Logik*, Band 3, Teil 1 (Leipzig 1895), p. 346, und D. Hilbert: *Über das Unendliche*, Math. Annalen 95 (1926), pp. 161–190, dort p. 169.

(1) Zu denen, die empört waren, zählte Henri Poincaré. Er war zutiefst davon überzeugt, daß sich die Mathematik (und insbesondere die Arithmetik) nicht auf die reine Logik reduzieren läßt. Er meinte, daß dem Prinzip der vollständigen Induktion (VI) etwas genuin Mathematisches zugrunde liegt, das die Erfahrung und auch die Logik übersteigt – Wir sprachen darüber bereits im Vorwort. Poincaré meinte, daß das Prinzip der vollständigen Induktion (VI) aus diesem Grunde kein analytisches sondern ein synthetisches Urteil a priori wäre: „*un véritable jugement sythétique à priori*" (Poincaré: *La Valeur de la Science*, Paris 1905, p. 21) – für eine ausführliche Diskussion dieser Argumente verweisen wir auf Gerhard Heinzmann: [11] und [12]. Der Amsterdamer Mathematiker Luitzen E. Jan Brouwer (1881–1966) war ähnlicher Meinung und hielt das Prinzip der vollständigen Induktion (VI) für eine *Ur-Intuition*, die nicht aus einfacheren Einsichten ableitbar sei.

(2) Dedekind stütze seine Überlegungen auf das Beispiel einer unendlichen Menge, das der Sphäre des reinen Denkens entnommen zu sein scheint. Er betrachtete seine *Gedankenwelt*, d.h.

> „*die Gesamtheit M aller Dinge, welche Gegenstand (seines) Denkens sein können*" (cf. [5], p. 14, Artikel 66).

Hier ist die Funktion, die jedem Ding s aus M den Gedanken s', nämlich „*daß s Gegenstand seines Denkens sein kann*" zuordnet, eine Injektion von M in M. Die Gesamtheit ist also unendlich und es existiert eine injektive Abbildung von M auf eine echte Teilgesamtheit.

Cantor hat Dedekind brieflich am 3.8.1899 darauf hingewiesen, daß die „Dedekindsche Gedankenwelt" als Gesamtheit nicht wohlbestimmt sei und zu den üblichen Antinomien Anlaß gäbe. Sie ist in der Mathematik kein zulässiges Objekt. Man muß sie fallen lassen und statt dessen einige einfache mengentheoretische Prinzipien voraussetzen, und dabei auch das Auswahlaxiom (damit die Existenz der injektiven Abbildung φ gesichert ist) und die Existenz unendlicher Mengen. Dies sind allerdings Prinzipien (oder Postulate), die nicht aus der reinen Logik abgeleitet werden können.

(3) Auch der Prozeß der Abstraktion muß fallen gelassen werden. Es ist ein Prozeß, der sich in unserem Bewußtsein abspielt und dessen Grundlagen sowohl logischer als auch psychologischer Natur sind. Solche Prozesse sind mit den Mitteln der Mathematik nicht kontrollierbar und sind deshalb, wie Frege bemerkte, „*in der Mathematik zu vermeiden*".

Auf mengentheoretischer Grundlage ist der Dedekindsche Aufbau jedoch vollständig durchführbar, sofern man den Prozess der Abstraktion in geschickter Weise umgeht. (Daß in einem solchen Aufbau auf die Annahme der Existenz unendlicher Mengen verzichtet werden kann, hat Ernst Zermelo in [25] gezeigt.)

Daß das Prinzip der vollständigen (verketteten) Induktion nicht aus den Gesetzen der reinen Logik herleitbar ist, zeigen die Resultate von Kurt Gödel, auf die wir in Abschnitt 4.4 eingehen werden. Damit wurde deutlich, daß das Prinzip der vollständigen Induktion ein *Postulat* ist, dessen Gültigkeit nicht beweisbar ist, sondern gefordert werden muß, wenn man in der Arithmetik Beweise führen will. Wenn man nur rechnen will, ist das Prinzip natürlich unnötig.

4.2 Die vollständige Induktion wird zur Charakterisierung der Reihe der natürlichen Zahlen herangezogen

Der Turiner Mathematiker Giuseppe Peano (1858–1932) hat sich aus dem Streit, ob das Prinzip der vollständigen Induktion beweisbar ist oder nicht, ganz herausgehalten. Er war nur daran interessiert, die Voraussetzungen, auf denen der gesamte Bau der Arithmetik ruht, so genau wie möglich und so vollständig wie möglich, aufzuschreiben. Das Studium des Dedekindschen Essays führte ihn auf eine Liste von ein paar Axiomen, die sich (offenbar in Anlehnung an Dedekind) nur auf den Umgang mit der Nachfolger-Funktion beziehen. Es handelt sich um die folgenden Axiome, die in leicht vereinfachter Form wie folgt lauten (cf. [19]):

$$\forall x : x + 1 \neq 0, \tag{PA1}$$

$$\forall x \forall y : (x + 1 = y + 1 \quad \Leftrightarrow \quad x = y), \tag{PA2}$$

Das Prinzip der vollständigen (d.h. der verketteten) Induktion hat Peano in der Form eines Axioms in der Logik der zweiten Stufe formuliert (hier sind $x, y, z, \ldots$ Variable für Zahlen und $X, Y, Z, \ldots$ Variable für Mengen von Zahlen):

$$\forall X[(0 \in X \& \forall a(a \in X \Rightarrow a + 1 \in X)) \Rightarrow \forall x : x \in X]. \tag{VI**}$$

Es gilt unter Verwendung der Dedekindschen Resultate der folgende Satz:

Satz (R. Dedekind, 1888) *Je zwei Strukturen, in denen die Rechenregeln* (PA1), (PA2) *und auch das Induktions-Axiom* (VI**) *gelten, sind isomorph. Dieses Axiomensystem ist also kategorisch und daher auch vollständig.*

Jedes einzelne Modell der genannten Rechenregeln und Axiome kann also als Repräsentant der Zahlenreihe dienen.

Aus den Resultaten von Dedekind und Peano ergibt sich, daß das Prinzip der vollständigen (verketteten) Induktion zusammen mit zwei einfachen Rechenregeln für die Nachfolger-Funktion zur Charakterisierung der Reihe der natürlichen Zahlen herangezogen werden kann. Das war eine wesentlich neue Einsicht, die das Erscheinungsbild der Mathematik im 20. Jahrhundert nachhaltig geprägt hat.

4.3 Induktion und Wohlordnung

Hätte Peano anstelle des Prinzips der vollständigen (verketteten) Induktion (VI**) genau so gut eines der anderen Prinzipien (DI**), (MI**) oder (WI**) in sein Axiomensystem aufnehmen können? Dabei sollen die beiden Sternchen andeuten, daß die jeweiligen Ableitungs-Regeln (VI), (DI), (MI) und (WI) in der Form von Axiomen aufgeschrieben wurden mit Variablen $X, Y, Z, \ldots$ für Mengen von Zahlen anstelle von Eigenschaften von Zahlen.

Das ist nicht der Fall! Es hätten sich wesentlich schwächere Systeme ergeben. Das Prinzip der Wertverlaufs-Induktion nimmt hier die Gestalt der *transfiniten Induktion* an:

$$\forall X[\forall a(\{x; x < a\} \subseteq X \Rightarrow a \in X)) \Rightarrow \forall x : x \in X], \tag{WI**}$$

und es gilt der folgende Satz:

Satz *Jede wohlgeordnete Menge $\langle M, \leq \rangle$ ist Modell des Axiomen-Systems* (PA1), (PA2) *und* (WI**).

Zum Beweis ist nur zu bemerken, daß bereits Cantor 1895 gezeigt hat, daß die Ordinalzahlen (d.h. die Typen wohlgeordneter Mengen) die zwei Peanoschen Rechenregeln (PA1), (PA2) erfüllen,[13] und daß Arthur Schoenflies 1900 gezeigt hat, daß das Prinzip der Wertverlaufs-Induktion (WI**) in allen wohlgeordneten Mengen gilt.[14] Den Namen „transfinite Induktion" für das Prinzip (WI**) hatte Felix Hausdorff 1906 vorgeschlagen.[15]

Satz *Im Peanoschen System* $\{(PA1), (PA2), (VI^{**})\}$ *ist beweisbar, daß jedes von* 0 *verschiedene Element einen unmittelbaren Vorgänger hat. Im System* $\{(PA1), (PA2), (WI^{**})\}$ *ist dies hingegen nicht beweisbar. Folglich ist* (WI^{**}) *wesentlich schwächer als* (VI^{**}).

Das Prinzip (MI**) hatte Cantor als definierende Eigenschaft wohlgeordneter Mengen verwendet: „*Jede nichtleere Teilmenge X hat ein kleinstes Element*":

$$\forall X[\exists a : a \in X \Rightarrow \exists a(a \in X \& \forall x < a : x \notin X]. \qquad (\mathrm{MI}^{**})$$

Die drei Axiome (WI**), (MI**) und (DI**) gehen offenbar durch einfache, rein logische Umformungen auseinander hervor und sind daher untereinander äquivalent: (MI**) $\Leftrightarrow$ (DI**) $\Leftrightarrow$ (WI**). Sie alle besagen nichts anderes als die Wohlgeordnetheit der zugrunde liegenden Menge. Das Prinzip der Nachfolger-Induktion (VI**) schließt jedoch die Existenz von Limeszahlen aus und gilt daher nur in der ersten transfiniten Ordinalzahl ω, wobei $\omega = \mathbb{N}$. Dies ist der wesentliche Unterschied zwischen (VI**) und den übrigen Prinzipien (WI**), (MI**), (DI**).

4.4 Das Axiom der vollständigen Induktion in der 1. Stufe

Das Peanosche Axiomensystem ist kategorisch. Es ist in der Logik der 2. Stufe formuliert. Ein großer Nachteil dieser Logik ist, daß sie keinen vollständigen Herleitungs-Kalkül besitzt. Aus diesem Grunde kann es für die Arithmetik in der Logik der 2. Stufe kein vollständiges Kodifikat (d.h. eine Liste, in der nicht nur die Peanoschen Axiome, sondern auch alle logischen Gesetze und Herleitungs-Regeln aufgeführt sind) geben. Die Logik der 1. Stufe besitzt, wie Kurt Gödel 1929/1930 gezeigt hat, jedoch einen vollständigen Logik-Kalkül, und es stellt sich die Frage, welche Eigenschaften das Peanosche Axiomensystem hat, wenn man es in der Logik

[13] Siehe Georg Cantor: *Gesammelte Abhandlungen*, Berlin 1932, p. 322.

[14] Arthur Schoenflies: *Die Entwicklung der Lehre von den Punktmannigfaltigkeiten*, Jahresberichte der DMV, Band 8 (1900), pp. 1–251, dort p. 45.

[15] Felix Hausdorff: *Untersuchungen über Ordnungstypen*, Berichte über die Verhandlungen der königl.-sächsischen Ges. d. Wiss. zu Leipzig, Band 58 (1906), pp. 106-169, dort in Teil II, p. 127. Nachdruck in Band 1 der *Gesammelten Werke* Hausdorffs, Berlin-Heidelberg, 2012.

der 1. Stufe darstellt. Das Induktions-Prinzip (VI) nimmt hier die folgende Gestalt an:

$$(\Phi(0)\&\forall y : (\Phi(y) \Rightarrow \Phi(y+1))) \quad \Rightarrow \quad \forall x : \Phi(x), \tag{VI*}$$

wobei Φ irgendeine zahlentheoretische Eigenschaft ist, in der außer einigen Namen für natürliche Zahlen $0, 1, 2, 3, \ldots$, dem Zeichen ν für die Nachfolger-Funktion $\nu(x) = x + 1$, den logischen Zeichen, Klammern und Variablen für Zahlen keine anderen Zeichen vorkommen, insbesondere auch keine Variablen für Mengen von Zahlen.

(VI*) ist eine Schema und kein einzelnes Axiom. (VI*) steht für die unendliche Liste von Axiomen, die für jede Eigenschaft Φ das entsprechende Axiom enthält. Die Theorie PA, die sich auf die unendlich vielen Axiome (PA1), (PA2), (VI*) stützt, wird *Peano-Arithmetik der 1. Stufe* genannt. Sie ist nach einem Satz von C. Ryll-Nardzewski [21] nicht endlich axiomatisierbar. Nach Sätzen von Leopold Löwenheim (1914) und Thoralf Skolem (1920) ist sie auch *nicht kategorisch*. Aber sie ist $\aleph_1$-kategorisch, d.h. daß je zwei gleichmächtige überabzählbare Modelle isomorph sind. Daraus folgt, daß die Theorie PA = {(PA1), (PA2), (VI*)} *vollständig* ist.

Wenn wir die Sprache dieser Theorie um Zeichen für die Addition und die Multiplikation erweitern, und dementsprechend die Grassmannschen Axiome für die Addition und die Multiplikation zu den übrigen Peanoschen Axiomen hinzunehmen, dann ändert sich die Situation dramatisch. Nach einem tiefliegenden Satz von Kurt Gödel ist diese erweiterte Theorie A in der erweiterten Sprache *nicht vollständig*. Gödel bewies, daß es wahre arithmetische Aussagen gibt, die in ihr unbeweisbar sind:

Satz (Gödel, 1930) *Es gibt Eigenschaften* $\Phi(x)$, *die in der Sprache der Arithmetik der* 1. *Stufe mit* $+$ *und* $\cdot$ *formalisierbar sind, derart, daß*

(1) *für jede Ziffer n gilt*: $\Phi(n)$ *ist in A beweisbar, aber*
(2) $\forall x : \Phi(x)$ *ist in A unbeweisbar.*

Weil für jede Ziffer n, $\Phi(n)$ beweisbar ist, ist die universelle Aussage $\forall x : \Phi(x)$ ihrem Inhalt nach wahr. *Es gibt also wahre zahlentheoretische Aussagen, die in der Sprache der Arithmetik der* 1. *Stufe mit* $+$ *und* $\cdot$ *formuliert werden können, die aber in der axiomatisch aufgebauten Arithmetik A weder beweisbar noch widerlegbar sind.* Daraus ergibt sich auch, daß das Prinzip der summativen Induktion (SI) in dieser Arithmetik nicht zur Verfügung steht.

4.5 Die summative Induktion

Wenn man das Prinzip (SI) der summativen Induktion, auch ω-Regel genannt, zur oben besprochenen klassischen Arithmetik A hinzunimmt, dann erhält man eine *vollständige* Theorie. Es läßt sich nämlich (durch vollständige Induktion in der Meta-Theorie) zeigen, daß eine beliebige Aussage Ψ aus der Sprache der Arithmetik der 1. Stufe mit $+$ und $\cdot$ genau dann im Standard-Modell $\mathbb{N}$ gilt, wenn sie unter Verwendung der ω-Regel (SI) in A beweisbar ist. Das Prinzip (SI) ist also wesentlich stärker als das Prinzip (VI) der vollständigen Induktion.

Die summative Induktion kann aber dennoch keinen Platz in der Arithmetik beanspruchen, denn sie ist eine Beweisregel mit unendlich vielen Prämissen und kann daher nicht so ohne weiteres in Beweisen verwendet werden. Auf Grund der Endlichkeit unseres Denkens kann ein mathematischer Beweis immer nur eine endliche Anzahl von Argumenten und Schlüssen enthalten. Kurt Schütte hat in [22] darauf hingewiesen, daß manche Anwendungen der summativen Induktion (SI) dennoch „*mit der Endlichkeit unseres Denkens in Einklang gebracht werden können*“, wenn nämlich die unendlichen Herleitungen alle in bestimmter Weise gesetzmäßig aufgebaut sind, „*so daß sie sich auf Grund dieser Gesetzmäßigkeit eindeutig beschreiben lassen*“ (cf. Schütte, loc. cit., p. 369). Derartige Gesetzmäßigkeiten liegen übrigens bei den oben (in Abschnitt. 3.1) beschriebenen Beweisen von Euklid vor, da der jeweils angedeutete Regreß auf rekursive Weise beschrieben wurde. Aber eine derart eingeschränkte summative Induktion ist ohne Verwendung von Begriffen aus der Rekursions-Theorie nicht formulierbar und ist daher in einer grundlegenden Theorie, wie der elementaren Arithmetik, nicht angebracht. Sie wird daher fallen gelassen.

5 Nachwort

Eine weitere Epoche in der Geschichte des Induktions-Prinzips setzte in der zweiten Hälfte des 20. Jahrhunderts ein als man damit begann, den *transfiniten Gehalt* von mathematischen Theorien T (insbesondere von Erweiterungen der Peano-Arithmetik) mit dem Supremum über alle Ordnungstypen von primitiv-rekursiven Wohlordnungen, für die in T beweisbar ist, daß auf ihnen das Prinzip der Wertverlaufs-Induktion gilt, zu messen. Für die klassische Peano-Arithmetik der ersten Stufe hatte bereits Gerhard Gentzen in [10] diese Ordinalzahl berechnet und gezeigt, daß ihr Wert ε_0 ist. (Mit ε_0 wird der Limes der Potenzen $\omega, \omega^\omega, \omega^{\omega^\omega}, \omega^{\omega^{\cdot^{\cdot^{\cdot^{\omega}}}}}$, – endliche Ketten von Ordinalzahl-Exponentiationen – bezeichnet.) Eine Darstellung der Resultate, die bisher in diesem Feld gewonnen wurden, würde den Rahmen dieses Berichts sprengen. Wir müssen uns mit einem Verweis auf die einschlägige Literatur begnügen (etwa Kaye [15], Schütte [22] oder Wolfram Pohlers, *Proof Theory*, Berlin 2009).

Wir wollen abschließend jedoch noch einmal über den üblicherweise verwendeten Namen für das Induktions-Prinzip nachdenken.

In Anbetracht der auf Christian Wolff zurückgehenden Unterscheidung zwischen vollständiger und unvollständiger Induktion wäre es angemessen, das Prinzip (SI) als das eigentliche Prinzip der vollständigen Induktion zu bezeichnen. Das Prinzip (VI) ist lediglich ein Spezialfall dieser vollständigen Induktion. Diesen Spezialfall haben manche Mathematiker *Prinzip der „mathematischen Induktion“* genannt, was aber nicht sehr treffend ist. Es wäre vielleicht angemessener von einer „*verketteten Induktion*“ zu sprechen, weil doch gerade die Verkettung im Schluß von n auf $n+1$ die nötige Finitarisierung erlaubt.

Literatur

1. Bernoulli, J.: *Demonstratio Rationum, quas habent series numerorum naturali progressione sese insequentium, vel quadratorum, cubicorum, &c. item trigonalium, pyramidalium &c. ad series numerorum totidem maximo aequalium*. Acta Eruditorum, Juli (1686), S. 360–361; Nachdruck in Band 4 der „Werke von Jakob Bernoulli“, bearbeitet und kommentiert von André Weil, Basel (1993), S. 149–150

2. Bernoulli, J.: *Ars Conjectandi*, Basel (1713). Nachdruck in Band 3 der Ausgabe der „Werke von Jakob Bernoulli“, Basel (1975). Eine deutsche Übersetzung von R. Haussner erschien als Band 107 in der Reihe: Ostwalds Klassiker der exakten Wissenschaften, Leipzig, 1899
3. Bussey, W.H.: The origin of mathematical induction. Am. Math. Mon. **24**, 199–207 (1917)
4. Cajori, F.: Origin of the name „mathematical induction“. Am. Math. Mon. **25**, 197–201 (1918)
5. Dedekind, R.: Was sind und was sollen die Zahlen. Vieweg Verlag, Braunschweig (1888)
6. Dugac, P.: Richard Dedekind et les fondements des Mathématiques. Paris (1976)
7. De Fermat, P.: Œuvres, Tome II, publiées par Paul Tannery et Ch. Henry. Gauthiers-Vilars, Paris (1894)
8. Freudenthal, H.: Zur Geschichte der vollständigen Induktion. Arch. Int. d'Hist. Sci. **22**, 17–37 (1953)
9. Fries, J.F.: Die mathematische Naturphilosophie nach philosophischer Methode bearbeitet. Heidelberg (1822)
10. Gentzen, G.: Beweisbarkeit und Unbeweisbarkeit von Anfangsfällen der transfiniten Induktion in der reinen Zahlentheorie. Math. Ann. **112**, 140–161 (1943)
11. Heinzmann, G.: Poincaré's philosophical pragmatism and the problem of complete induction. Fundam. Sci. **9**, 1–19 (1988)
12. Heinzmann, G.: On the controversy between Poincaré and Russell about the status of complete induction. Epistemologia **17**, 35–52 (1994)
13. Jacobi, C.G.J.: Über Gauss' neue Methode, die Werte der Integrale näherungsweise zu finden. Crelles Journal für die reine und angew. Math. **1**, 301–308 (1826). Nachdruck in Jacobis „Werken“, Band IV (1891), pp. 3–11
14. Kästner, A.G.: Über die geometrischen Axiome. Philos. Mag. **2**, 420–430 (1790) (J.A. Eberhard, Herausgeber)
15. Kaye, R.: Models of Peano Arithmetic. Clarendon, Oxford (1991)
16. Maurolyci, F.: Arithmeticorum Libri Duo. Venedig (1575)
17. Mill, J.S.: A System of Logic, Ratiocinative and Inductive. London (1843)
18. Pascal, B.: Oeuvres Complètes. Physique et Mathématiques, Bd. 3. Librairie Hachette et Cie, Paris (1889)
19. Peano, G.: Arithmetices Principia, Novo Methodo Exposita. Bocca, Turin (1889)
20. Pickert, G.: Die logischen Beziehungen zwischen drei Formen der vollständigen Induktion. Math. Semesterber. **34**, 269–276 (1987)
21. Ryll-Nardzewski, C.: The role of the axiom of induction in elementary arithmetic. Fundam. Math. **39**, 239–263 (1952)
22. Schütte, K.: Beweistheoretische Erfassung der unendlichen Induktion in der Zahlentheorie. Math. Ann. **122**, 369–389 (1951)
23. Vacca, G.: Sur le principe d'induction matématique. In: Revue de Métaphysique et de Morale, Dixneuvième année, S. 30–33. Librairie Colin, Paris (1911). Discussions (A. Padoa, E. Wickersheimer) et Réponses, S. 246–257, 393–395
24. Wolff, C.: Philosophia Rationalis Sive Logica. Frankfurt-Leipzig (1728). Nachdruck: Christian Wolff Gesammelte Werke, Materialien und Dukumente. G. Olms Verlag, Hildesheim (1983)
25. Zermelo, E.: Sur les ensembles finis et le principe de l'induction complète. Acta Math. **32**, 185–193 (1909). Kommentierter Nachdruck in Zermelos *Gesammelten Werken*, Bd. 1 (Berlin, 2010), S. 230–253

Ulrich Felgner geb. 1941, ist Professor (i.R.) für Mathematik an der Universität Tübingen. Er studierte an den Universitäten Gießen, Besançon und Frankfurt/M., promovierte 1968 in Tübingen und habilitierte sich 1973 in Heidelberg. Er wirkte als Professor an den Universitäten Heidelberg, Freiburg und Tübingen. Seine Hauptarbeitsgebiete sind Algebra, Mathematische Logik, Grundlagen und Geschichte der Mathematik.

Jahresber Dtsch Math-Ver (2012) 114:47–51
DOI 10.1365/s13291-011-0034-7

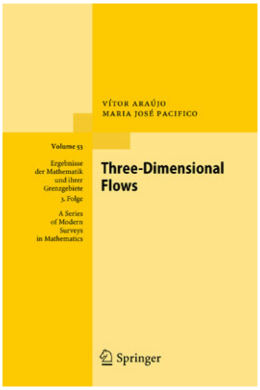
BOOK REVIEW

Vitor Araújo and Maria José Pacifico: “Three Dimensional Flows”

Springer, 2010

Christian Bonatti

Published online: 9 February 2012



The study of the dynamics of flows (or ordinary differential equations) on n-dimensional manifolds follows closely the one of the diffeomorphisms on $(n-1)$-dimensional manifolds: this idea was introduced by Poincaré at the end of the 19th century when he considered the first return map of a vector field on a transverse cross section for studying the dynamical properties of the flow. For instance:

- The study of *two-dimensional* (i.e. surface) *flows* uses in a fundamental way the order on the 1-dimensional transverse direction which is the main tool for the Poincaré theory of circle diffeomorphisms.
- In the same way three-dimensional flows share many properties with surface diffeomorphisms. In particular, every closed 3-manifold admits flows which present a hyperbolic chaotic attractor.

The classification of surface flows had been done successfully by Peixoto [15, 16] in the sixties: in any C^r-topology, $r \geq 1$, an open and dense subset of these surface vector fields consists of *Morse-Smale* flows, whose topological dynamics is similar to the one of the gradient flow of a Morse function. Their topological classification consists therefore mostly in classifying the positions in the surface of the basins of the attracting (singular or regular) orbits, bounded by the stable manifolds of the saddle singular points.

C. Bonatti (✉)
Dijon, France
e-mail: bonatti@u-bourgogne.fr

The surface diffeomorphisms have been intensively studied from many different points of view by many authors, but are still far from being completely understood. The hyperbolic surface diffeomorphisms have been classified in the nineties [1, 3]. However, this classification does not cover a dense subset of surface diffeomorphisms: in 1968 Newhouse [14] exhibited an open set of non-hyperbolic surface diffeomorphisms, for any C^r-topology with $r > 1$. It remains an open question (Smale conjecture) if there are C^1-open sets of non-hyperbolic surface diffeomorphisms.

The Newhouse phenomenon has its counterpart for flows on 3-manifolds: any tangential intersection between the stable and unstable manifolds of a periodic saddle provides, by perturbing generically the tangency, a C^2-open set of non-hyperbolic flows which will provide all the featured behaviors of the Newhouse domains for surface diffeomorphisms (Henon like attractors, infinitely many sources or sinks, etc.). Thus one cannot expect a complete classification of three dimensional flows in near future.

On the other hand, the study of flows introduces difficulties which have no counterpart for diffeomorphisms:

- The periods of periodic orbits are real numbers and not integers. Thus some flows present continua of periodic orbits whose periods tend to infinity. In the same way, a periodic orbit of a flow may disappear, under a deformation of the flow, remaining all the time uniformly hyperbolic: the trick is that its periods may tend to infinity; for instance, Mañé and Hayashi proved in [6, 9] (1992) that the diffeomorphisms whose periodic orbits are robustly hyperbolic satisfy the Axiom A; the same result for flows without singular points was proved only in 2006 by [4], due to this new extra difficulty.
- A flow may have singularities (zeros of the vector field). Thus, the classification of generic surface flows by Peixoto is much more difficult than the classification of circle diffeomorphisms by Poincaré, and had been obtained more than 60 years later.

The co-existence of regular and singular orbits is especially important when the singularities are accumulated by regular recurrent orbits, or even by sequences of periodic orbits. In that case, the periodic orbits may "die" on the singularity, when one perturbs the flow. The first example showing the importance of this phenomenon has been the *Lorenz attractor*, see [5, 8, 18], which refers to an open set of flows in $\mathbb{R}^3$ where the orbits are attracted by a transitive attractor containing a singular point and infinitely many periodic orbits accumulating on the singularity. For this reason it is especially important

- to understand the phenomena and bifurcations associated to singular cycles (i.e. when the stable and the unstable manifolds of a singular point intersect the unstable and stable manifolds of a regular periodic orbit, and
- to characterize the systems for which the regular recurrent orbits and singular points are robustly related.

These two questions have been intensively studied on 3-manifolds. This starts with the *geometric model for the Lorenz attractor* by Guckenheimer, Williams, and Afraimovich, Bikov, Shil'nikov. More recently it proceeds with the notion of *singular hyperbolicity* introduced by the second author (Pacifico) and her collaborators

Morales and Pujals [10–13]. Their works lead to the remarkable results that, *in dimension 3, the existence of Lorenz like attractors is the unique extra phenomenon for flows, from the point of view of the C^1-topology, compared with the surface diffeomorphisms:* for a C^1-open and dense subset in the set of flows far from homoclinic tangencies, the limit sets of the flows split in finitely many pieces which are either hyperbolic basic sets or Lorenz-like attractors or repellers (see Theorem 9.2 in the book and its proof).

The impressive sequence of their results led to the impression that this field was mostly understood and that a book giving a global view was needed. So, here is the book we have been waiting for, by two important contributors of the field, the name of the second author being strongly related to the field.

Chapter 2 presents briefly the classical tools which are fundamental for the study:

- the different notions of recurrences and attracting or repelling sets form the basic language of dynamical systems;
- the hyperbolicity represents the part of the dynamics one really understands, from where one tries to go further;
- the perturbation lemmas (closing [7, 9, 17] and connecting lemma) are the fundamental tools for understanding stabilities and instabilities;
- the linear Poincaré flow represents the $(d-1)$-tranverse structure of a d-dimensional flow.

The study itself starts in *Chapter 3* with the presentation of three classical examples of singular cycles for flows on 3-manifolds. The two first kinds of examples come from bifurcation theory:

- What happens when the invariant manifolds of a singular saddle point crosses the invariant manifolds of a hyperbolic set (of regular orbits)? Assuming the eigenvalues of the saddle are real, this leads to the notion of *singular horseshoe*.
- What happens when the invariant manifolds of a singular saddle point have a homoclinic intersection? Different cases are quickly discussed here according to the type of eigenvalues (real or complex) of the saddle, referring the reader to classical references for more details.

Then the chapter proceeds with a somewhat classical but detailed presentation of the topological dynamics of the geometric model of the Lorenz attractor.

Chapter 4 considers C^1-robustly transitive vector fields: every vector field in a C^1-neighborhood admits a dense orbit. Following Doering and Vivier, the chapter shows that, in dimension 3, robustly transitive vector fields are Anosov. In higher dimension, the result remains true if the periodic orbits are assumed robustly hyperbolic (here this notion is called “*homogeneous flow*”; a more classical terminology would be *star flow*). It is somewhat surprising that no mention is done to the work by Gan and Wen (Inventiones 2006) proving that non-singular star flows are Axiom A without cycles.

Chapters 5 and 6 introduce the fundamental notion of *singular hyperbolicity*. Chapter 5 shows that every C^1-robustly transitive set containing a singularity is a topological attractor or repeller satisfying the singular hyperbolicity conditions. Then Chapter 6 analyses the consequences of singular hyperbolicity, using in particular the return maps on *adapted cross sections*. It addresses the following kind of questions:

Under which conditions is a singular hyperbolic set a homoclinic class? When is it robust, or transitive, when are periodic orbits dense?

Chapter 7 goes further in the study of the dynamical properties of singular hyperbolic attractors, recovering in this more general setting two important properties of the hyperbolic theory. From the topological point of view, it proves the expansiveness (no pair of different orbits remain close), so the sensitive dependence on the initial conditions which has been pointed out as a criterion for chaoticity. Assuming a C^2 hypothesis, this chapter proves then the existence and uniqueness of a SRB measure, absolutely continuous along the center unstable leaves, for the singular hyperbolic attractors of 3-manifolds.

A classical result on C^2-hyperbolic dynamics asserts that a hyperbolic basic set with positive Lebesgue measure is the whole manifold, meaning that the system is Anosov. *Chapter 8* gives two generalizations of this result for singular hyperbolic systems on compact 3-manifolds. It first considers conservative (volume preserving) C^2-flows. For a dense open subset of such systems, it proves that invariant sets with positive Lebesgue measures may admit a dominated splitting (for the linear Poincaré flow) only if the system is Anosov. The difficulty here is that the set is not assumed to be compact, allowing its closure to contain, a priori, singular points (otherwise, the domination and the volume conservation would imply hyperbolicity). Then (leaving the conservative setting) it considers proper singular hyperbolic attractors of C^1+ Hölder vector fields, and proves that they all have zero volume.

Chapter 9 adopts the C^1-generic point of view, restricting the study to a C^1-residual subset of the set of vector fields. From the topological study, it shows that the singular hyperbolicity is necessary for avoiding the Newhouse phenomenon: C^1-generically, a vector field is either Singular Axiom A or has infinitely many sinks or sources. In the conservative setting, the generic dichotomy is even stronger: C^1-generic volume preserving vector fields on a compact 3-manifold are either Anosov flows or the Lyapunov exponents of Lebesgue almost every point are zero. This chapter contains a lot of other interesting results but with more specific hypotheses, which are not easy to present shortly here.

Chapter 10 presents very briefly results in the field which are not directly related to their theory and the recent, deeper development of ergodic theory (as the decay of correlation) for the singular attractors.

The appendices are devoted to three technical proofs:

- The Lyapunov stability of the generic positive orbits in the unstable manifolds of the singularity, for generic vector fields.
- The Franks perturbation lemma of the differential on periodic orbits, for vector fields (this has been for a long time a folklore result, finally appearing in the reference [2] in 2006. The authors prefer to publish here an earlier unpublished proof of the second author with Pujals, with more restrictive hypotheses).
- The robustness of the dominated splitting for the linear Poincaré flow over a regular compact set.

The book also contains a very useful index. Chapter 2 recalling the classical notions and tools could be, for my taste, less technical and cleaner: it contains some disturbing small mistakes.[1]

As a conclusion, this book presents in a coherent way the results of a long sequence of papers leading to a deep understanding of the behavior of flows on compact 3-manifolds, in particular for the non-conservative setting. It is clearly presented, with a subjective but pertinent and coherent point of view. A small disappointment: no perspective is given, no open questions, no conjectures, when the results presented in the C^1-generic setting are still far from ending the subject of generic vector fields on compact 3-manifolds.

Despite these small perfectible points, it will be the natural reference for those studying the qualitative behavior of vector fields on compact manifolds.

References

1. Béguin, F.: Smale diffeomorphisms of surfaces: a classification algorithm. Discrete Contin. Dyn. Syst. **11**(2–3), 261–310 (2004)
2. Bonatti, C., Gourmelon, N., Vivier, T.: Perturbations of the derivative along periodic orbits. Ergod. Theory Dyn. Syst. **26**(5), 1307–1337 (2006)
3. Bonatti, C., Langevin, R.: Difféomorphismes de Smale des surfaces. Astérisque **250** (1998), viii+235 pp.
4. Gan, S., Wen, L.: Nonsingular star flows satisfy Axiom A and the no-cycle condition. Invent. Math. **164**(2), 279–315 (2006)
5. Guckenheimer, J., Williams, R.F.: Structural stability of Lorenz attractors. Publ. Math. IHÉS **50**, 59–72 (1979)
6. Hayashi, S.: Connecting invariant manifolds and the solution of the C^1-stability and Ω-stability conjectures for flows. Ann. Math. 2 **145**(1), 81–137 (1997)
7. Hayashi, S.: Diffeomorphisms in $F_1(M)$ satisfy Axiom A. Ergod. Theory Dyn. Syst. **12**(2), 233–253 (1992)
8. Lorenz, E.N.: Deterministic nonperiodic flow. J. Atmos. Sci. **20**, 130–141 (1963)
9. Mañé, R.: An ergodic closing lemma. Ann. of Math. (2) **116**(3), 503–540 (1982)
10. Morales, C.A., Pacifico, M.J., Pujals, E.R.: Robust transitive singular sets for 3-flows are partially hyperbolic attractors or repellers. Ann. Math. (2) **160**(2), 375–432 (2004)
11. Morales, C.A., Pacifico, M.J., Pujals, E.R.: Singular hyperbolic systems. Proc. Am. Math. Soc. **127**(11), 3393–3401 (1999)
12. Morales, C.A., Pacifico, M.J.: Lyapunov stability of ω-limit sets. Discrete Contin. Dyn. Syst. **8**(3), 671–674 (2002)
13. Morales, C.A., Pacífico, M.J.: A spectral decomposition for singular-hyperbolic sets. Pac. J. Math. **229**(1), 223–232 (2007)
14. Newhouse, S.: Nondensity of axiom $A(a)$ on S^2. In: Global Analysis—Proc. Sympos. Pure Math. Berkeley, CA, 1968, vol. XIV, pp. 191–202. Amer. Math. Soc. Providence (1970)
15. Peixoto, M.: Structural stability on two dimensional manifolds. Topology **1**, 101–120 (1962)
16. Peixoto, M.: On the classification of flows on 2-manifolds. In: Salvador Symp. in Dynamical Systems. Academic Press, San Diego (1973)
17. Pugh, C.: The closing lemma. Am. J. Math. **89**, 956–1009 (1967)
18. Williams, R.F.: The structure of Lorenz attractors. Publ. Math. IHÉS **50**, 73–99 (1979)

[1] For instance, Sect. 2.3.2.3 presents the suspended flow of an Anosov automorphism of T^2 as a flow on the torus T^3 (written explicitly two times on the section). However, the same section ends by pointing out that the manifold is not T^3. In the next section presenting the solenoid, the condition $\alpha + \beta < 1$ is clearly not enough for ensuring the injectivity of the map, etc. Another example, maybe more disturbing: two incompatible definitions of chaotic dynamics are given but both of these notions imply that any single hyperbolic saddle is a chaotic set.

Jahresber Dtsch Math-Ver (2012) 114:53–55
DOI 10.1365/s13291-011-0033-8

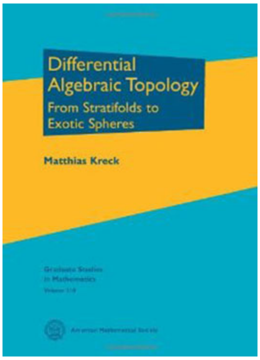
BOOK REVIEW

Matthias Kreck: “Differential Algebraic Topology: From Stratifolds to Exotic Spheres”

AMS, 2010, 218 pp.

Gerd Laures

Online publiziert: 3. Januar 2012



Die Homologie eines topologischen Raumes X ist ein Maß für seine Komplexität. Man erhält solche Maße durch die Analyse von “Löchern” in X. Was aber ist überhaupt ein Loch in X? Stellen wir uns einen weiteren topologischen Raum Y vor und einen Teilraum L mit der Eigenschaft $X = Y - L$. In diesem Fall würden wir sagen X hat das Loch L. Wir können sogar von Löchern in X sprechen, ohne den umgebenden Raum Y zu kennen. Die Idee hierzu ist einfach: Wir werfen ein Netz N in X aus, mit dem wir die Löcher einfangen. Dies entspricht mathematisch einer stetigen Abbildung von N nach X. Dann versuchen wir, das Netz zu einem Punkt zusammenzuziehen. Wenn dies nicht möglich ist, haben wir ein Loch in X gefangen.

In dieser anschaulichen Weise beschreibt Matthias Kreck die grundlegenden Konzepte der Topologie. Seine Netze N haben dabei eine besondere Gestalt. Er nennt sie *Stratifaltigkeiten*. Der Name ist ein Amalgam aus den Wörtern “stratifizierte” und “Mannigfaltigkeit”. Stratifaltigkeiten N kommen zu uns mit einer Zahl n, ihrer Dimension, und mit einer Filtrierung, also mit verschachtelten Unterräumen

$$N_0 \subset N_1 \cdots \subset N_n = N,$$

den so genannten Straten. Hierbei ergibt sich jedes Stratum N_i durch Anheften einer Mannigfaltigkeit entlang ihres Randes an N_{i-1}.

G. Laures (✉)
Bochum, Deutschland
e-mail: gerd@laures.de

Das Fischen mit Netzen der Gestalt Stratifaltigkeit N ist zwar lohnenswert, aber die Zusammenziehbarkeit zu einem Punkt ist schwer zu entscheiden. Statt das Netz N in X schrumpfen zu lassen, kann man auch versuchen, es mit einer kompakten Stratifaltigkeit W zu füllen, deren Rand N ist. Mathematisch wird also untersucht, ob sich die gegebene stetige Abbildung von N nach X zu einer Abbildung von W nach X erweitern lässt. Wenn diese abgeschwächte Form der Zusammenziehbarkeit nicht möglich ist, liegt ein Loch vor.

Mit solchen geometrischen Konstruktionen geht der Autor zurück zu den Wurzeln der Algebraischen Topologie. Ende des 19. Jahrhunderts legte Henri Poincaré den Grundstein der Homologie in seiner Arbeit *Analysis Situs*. Ähnlich wie wir es beschrieben haben, stützte er seine Konstruktion von Homologieklassen in X auf geometrische Objekte wie Untermannigfaltigkeiten und deren Ränder. Die Arbeit war allerdings in vielen Einzelheiten angreifbar. Nach Kritik von Heegaard rückte er dann Zellenzerlegungen in den Vordergrund. Zellenkomplexe sind ähnlich wie Stratifaltigkeiten filtrierte Räume. Jedoch werden nur Bälle (Zellen) als anheftende Mannigfaltigkeiten zugelassen. Die Homologieklassen konstruierte er dann ganz algebraisch aus Zellenketten, also formalen Linearkombinationen von Zellen. Ihre endgültige Form bekam die singuläre Homologietheorie durch Eilenberg in den 40er Jahren. Poincarés ursprüngliche und geometrische Idee wurde in den 50er Jahren von René Thom wieder aufgegriffen. Seine Netze waren glatte Mannigfaltigkeiten und führten zu verallgemeinerten Homologietheorien, den so genannte Bordismentheorien. In den 60er und 70er Jahren gab es Konstruktionen von Nils Baas und Dennis Sullivan mit Netzen aus singulären Mannigfaltigkeiten, die mit etwas Aufwand auch eine Beschreibung der singulären Homologietheorie liefern würden.

Der Neugewinn des Buches liegt in dem Begriff der Stratifaltigkeit. Anders als wir es oben getan haben, werden in dem Buch Stratifaltigkeiten als geringte Räume definiert, also als Räume X zusammen mit einer Garbe von Funktionen auf X. Die Filtrierung ergibt sich dann durch die Dimensionen der Tangentialräume. Diese natürliche Definition lehnt sich an die Algebraische Geometrie an und führt zu interessanten Beispielen wie algebraischen Varietäten, also Nullstellengebilden von Polynomen. Die singuläre Homologie erhält man, wenn man sich auf n-dimensionale Stratifaltigkeiten beschränkt, die $N_n = N_{n-1}$ erfüllen. Solche Stratifaltigkeiten haben eine offensichtliche Fundamentalklasse, welche durch die identische Abbildung gegeben ist.

Das Buch verzichtet fast vollständig auf homologische Algebra. Standardresultate wie der Satz von Künneth zur Homologie von Produkten werden aber nicht in der größtmöglichen Allgemeinheit bewiesen. Kohomologieklassen werden wie bei Quillen über eigentliche glatte Abbildungen eingeführt, so dass die Poincaré-Dualität zur Tautologie wird. Auch Kohomologieprodukte und charakteristische Klassen lassen sich damit schnell hinschreiben.

Neben den Standardresultaten wie der Invarianz der Dimension, dem Fixpunktsatz von Brouwer und dem Satz vom Igel präsentiert der Autor schließlich als highlight die exotischen Sphären von Milnor. Es wird gezeigt, dass es auf einer 7-dimensionalen Sphäre unterschiedliche differenzierbare Strukturen gibt. Hierbei wird ein Resultat von Thom ohne Beweis benutzt. Zu diesem Zeitpunkt spielen die Stratifaltigkeiten keine Rolle mehr, weil nur die Axiome der Homologietheorie und der charakteristischen Klassen benötigt werden.

Das Buch richtet sich an alle, die bereits mit den grundlegenden Konzepten der Differentialtopologie wie Transversalität vertraut sind und mit einem Minimum an Algebra in die interessante Welt der Löcher und der exotischen Sphären einsteigen wollen. Es richtet sich vielleicht auch an Mathematiker, die nach neuen Konzepten suchen, die Differentialtopologie, Algebraische Topologie, Differentialgeometrie und Algebraische Geometrie miteinander verbinden.