82. Band Heft 3
ausgegeben am 3. 9. 1980

DMV

Jahresbericht
der Deutschen Mathematiker-Vereinigung

Herausgegeben von K. Jacobs
unter Mitwirkung von
P. L. Butzer, W.-D. Geyer

B. G. Teubner Stuttgart 1980

Jahresbericht

der Deutschen Mathematiker-Vereinigung

Der „Jahresbericht" ist das offizielle Veröffentlichungsorgan der Deutschen Mathematiker-Vereinigung, für dessen inhaltliche Gestaltung im Auftrag des Präsidiums der jeweilige Herausgeber zuständig ist. Im „Jahresbericht" sollen vornehmlich Überblicksartikel über Teilgebiete der reinen und angewandten Mathematik, Nachrufe sowie historische Artikel und Buchbesprechungen veröffentlicht werden.

Manuskripte

Alle für die Schriftleitung des Jahresberichts bestimmten Sendungen (Briefe, Manuskripte, Ankündigung von neuerscheinenden Büchern) sind an Prof. Dr. K. Jacobs zu richten. Bücher, von denen eine Besprechung erfolgen soll, werden bei den Verlagen angefordert. Die Autoren werden gebeten, bei der Vorbereitung ihrer Manuskripte die „Hinweise für Autoren" am Ende von Heft 82/1 zu beachten.

Grundsätzlich sollen nur solche Manuskripte eingereicht werden, die nicht gleichzeitig an anderer Stelle zur Veröffentlichung eingereicht oder bereits veröffentlicht worden sind. Mit der

Jahresbericht

In den nächsten Heften erscheinende Arbeiten:

H. Amann: Funktionalanalysis und nichtlineare Differentialgleichungen

I. Elstrodt: Die Selbergsche Spurformel für kompakte Riemannsche Flächen

J. E. Fenstad: Nonstandard Methods in Stochastic Analysis and Mathematical Physics

M. Frewer: Felix Bernstein

L. Gårding: Microlocal Analysis of Distributions

E. Härtter: Alfred Stöhr 1916–1973

M. Kracht: Maximilian Pinl in memoriam

H. Rohrbach: Richard Brauer zum Gedächtnis

St. Schottlaender: Zum Gedenken an Wilhelm Quade

H. Tietz: Fundstellen für biographische und bibliographische Angaben über deutsche Mathematiker, die nach 1933 verstorben sind (Stand 1977)

R. Walter: Konvexität in Riemannschen Mannigfaltigkeiten

Anschriften der Herausgeber

Prof. Dr. K. Jacobs, Bismarckstr. 1½, 8520 Erlangen

Prof. Dr. P. L. Butzer, Templergraben 55, 5100 Aachen
Prof. Dr. W.-D. Geyer, Bismarckstr. 1½, 8520 Erlangen

Bezugshinweis

Früher erschienene Bände (ab Band 68) des „Jahresberichts der Deutschen Mathematiker – Vereinigung" können durch den Buchhandel oder den Verlag bezogen werden.

Nachdruck der Bände 1 bis 40 liefert: Johnson Reprint. Corp., 111 Fifth Avenue, New York, N. Y. 10003

Nachdruck der Bände 41 bis 67 liefert: Swets & Zeitlinger, Heereweg 347 b, POB 810, NL-2160 SZ Lisse/Holland

Jber. d. Dt. Math.-Verein.
82 (1980) 109–127
AMS subject classification: 15A63, 12D15, 14G30

Signaturen, reelle Stellen und reduzierte quadratische Formen*)

M. Knebusch, Regensburg

§1 Problemstellung

Wir denken uns einen kommutativen Ring A mit Einselement vorgegeben. Wir betrachten über A Paare (E, B) bestehend aus einem projektiven A-Modul E und einer symmetrischen bzgl. A bilinearen Form $B: E \times E \to A$, die nicht ausgeartet ist, d. h., einen Isomorphismus $x \mapsto B(x, -)$ von E auf den dualen Modul $E^* := \mathrm{Hom}_A(E, A)$ liefert. Ein solches Paar (E, B) nennen wir einen b i l i n e a r e n R a u m über A. Ein I s o m o r p h i s m u s $\alpha: (E, B) \to (E', B')$ zwischen bilinearen Räumen (E, B) und (E', B') ist definiert als ein A-Modul-Isomorphismus α: $E \xrightarrow{\sim} E'$ mit $B'(\alpha x, \alpha y) = B(x, y)$ für x und y beliebig in E. Wenn es einen solchen Isomorphismus gibt, nennen wir (E, B) und (E', B') i s o m o r p h und schreiben $(E, B) \cong (E', B')$.

Beispiele (i) Sei (a_{ij}) eine symmetrische $n \times n$-Matrix mit Koeffizienten $a_{ij} \in A$, deren Determinante in der Einheitengruppe A^* von A liegt. Sei weiter E freier A-Modul mit Basis $e_1, \ldots, e_n$. Dann gibt es genau eine symmetrische Bilinearform B auf E mit $B(e_i, e_j) = a_{ij}$. Diese ist nicht ausgeartet. Wir bezeichnen den so gebildeten „freien“ Bilinearraum (E, B) oft kurz durch die Matrix (a_{ij}). Ist (a_{ij}) eine Diagonalmatrix, also $a_{ij} = a_i \delta_{ij}$ mit Einheiten $a_i \in A^*$, so schreiben wir für den „Diagonalraum“ (a_{ij}) auch $\langle a_1, a_2, \ldots, a_n \rangle$.

(ii) Sei (U, β) ein Paar bestehend aus einem projektiven endlich erzeugten A-Modul U und einer eventuell ausgearteten symmetrischen Bilinearform β auf U. Wir definieren auf der direkten Summe $U \oplus U^*$ von U und seinem Dualmodul U^* eine symmetrische Bilinearform B wie folgt:

$$\begin{aligned} &B(u, v) = \beta(u, v) \quad \text{für } u, v \in U;\\ &B(u, u^*) = B(u^*, u) = u^*(u) \quad \text{für } u \in U, u^* \in U^*;\\ &B(u^*, v^*) = 0 \quad \text{für } u^*, v^* \in U^*. \end{aligned}$$

Die Form B erweist sich als nicht ausgeartet. Wir nennen das Paar (E, B) den m e t a b o l i s c h e n R a u m $M(U, \beta)$ zu dem Paar (U, β). Ist β die Nullform auf U, so nennen wir $M(U, \beta)$ den h y p e r b o l i s c h e n R a u m zu U und bezeichnen ihn mit H(U). Es läßt sich übrigens leicht zeigen, daß, wenn 2 Einheit in A ist, jeder Raum $M(U, \beta)$ zu H(U) isomorph ist.

*) Erweiterte Fassung eines auf der DMV-Tagung in Hamburg 1979 gehaltenen Üb

(iii) Zu bilinearen Räumen (E_1, B_1) und (E_2, B_2) können wir in naheliegender Weise die orthogonale Summe und das Tensorprodukt bil-

$$(E_1, B_1) \perp (E_2, B_2) := (E_1 \oplus E_2, B_1 \perp B_2),$$

$$(E_1, B_1) \otimes (E_2, B_2) := (E_1 \otimes_A E_2, B_1 \otimes B_2),$$

vgl. Bourbaki: Algèbre, Chap. IX. Zum Beispiel erhält man für Diagonalräume:

$$\langle a_1, \ldots, a_n\rangle \perp \langle b_1, \ldots, b_m\rangle = \langle a_1, \ldots, a_n, b_1, \ldots, b_m\rangle,$$

$$\langle a_1, \ldots, a_n\rangle \otimes \langle b_1, \ldots, b_m\rangle = \langle a_1 b_1, \ldots, a_1 b_m, a_2 b_1, \ldots, a_2 b_m, \ldots, a_n b_m\rangle.$$

Außer für sehr spezielle Ringe A dürfte es ein aussichtsloses Vorhaben sein, die bilinearen Räume über A bis auf Isomorphie klassifizieren zu wollen. Wir wenden uns einer Äquivalenzrelation für bilineare Räume zu, die im allgemeinen wesentlich gröber als die Isomorphie ist. Wir nennen zwei bilineare Räume φ und ψ über A *Witt-äquivalent*, geschrieben $\varphi \sim \psi$, wenn es metabolische Räume η und ζ über A gibt mit $\varphi \perp \eta \cong \psi \perp \zeta$. Die Äquivalenzklasse eines Raumes φ bezeichnen wir mit $[\varphi]$ und nennen sie die *Wittklasse* von φ. Wittklassen lassen sich wie folgt in wohldefinierter Weise addieren und multiplizieren:

$$[\varphi] + [\psi] := [\varphi \perp \psi], \qquad [\varphi] \cdot [\psi] := [\varphi \otimes \psi].$$

Damit wird die Menge W(A) aller Wittklassen über A ein assoziativer und kommutativer Halbring, in dem die Klasse der metabolischen Räume das Nullelement ist. W(A) ist nun sogar ein Ring, denn für jeden bilinearen Raum (E, B) ist

$$(E, B) \perp (E, -B) \cong M(E, B),$$

also $[E, B] + [E, -B] = 0$. Dieser Ring W(A) heißt der *Wittring* von A.

Diesen beiden Motiven gemäß werde ich zwei Probleme formulieren. Die Probleme beziehen sich jedoch nicht auf W(A) selbst, sondern eine starke Vergröberung von W(A), den reduzierten Wittring $\overline{W}(A)$. Dieser entsteht, indem man aus W(A) das Nilradikal Nil W(A), bestehend aus allen nilpotenten Elementen, herausdividiert. Dazu wollen wir uns zunächst mit den Primidealen des Ringes W(A) beschäftigen.

Wir nehmen jetzt ohne wesentliche Einschränkung der Allgemeinheit an, daß A zusammenhängend ist, d. h., keine Idempotenten außer 0 und 1 besitzt. Dann hat jeder endlich erzeugte projektive Modul E einen wohlbestimmten Rang, der eine natürliche Zahl ist, wie man es bei freien Modulen gewohnt ist. Für einen bilinearen Raum $\varphi = (E, B)$ bezeichnen wir als Dimension $\dim \varphi$ den Rang von E.

Definition *Das* Fundamentalideal I(A) *von* W(A) *ist die Menge aller Klassen* $[\varphi]$ *mit* $\dim \varphi$ *gerade.*

Ersichtlich ist I(A) ein maximales Ideal von W(A) mit Restklassenkörper $W(A)/I(A) \cong \mathbf{Z}/2\mathbf{Z}$. Wir interessieren uns jetzt für die Primideale P von W(A) mit $W(A)/P \cong \mathbf{Z}$.

Definition *Eine* Signatur σ *von* A *(oder „auf“* A*) ist ein Ringhomomorphismus* $\sigma: W(A) \to \mathbf{Z}$, *natürlich mit* $\sigma(1) = 1$.

Der Kern P_σ einer Signatur σ ist ein Primideal von W(A) mit Restklassenring **Z**. Weil der Ring **Z** außer der Identität keine Automorphismen besitzt, haben wir sogar eine eindeutige Entsprechung $\sigma \mapsto P_\sigma$ zwischen den Signaturen σ von A und den Primidealen P von A mit $W(A)/P \cong \mathbf{Z}$. Wir bezeichnen die Menge aller Signaturen von A mit Sign(A).

Theorem 1 (Dress [D]) (i) *Ist* Sign (A) *leer, so ist* I(A) *das einzige Primideal von* W(A).

(ii) *Ist* Sign (A) $\neq \emptyset$, *so sind die Kerne* P_σ *der Signaturen von* A *genau alle Primideale von* W(A).

Folgerungen Weil das Nilradikal von W(A) der Durchschnitt aller Primideale von W(A) ist, ist im Falle Sign (A) = $\emptyset$ jedes Element aus I(A) nilpotent. Insbesondere ist das Element $2 \cdot 1_{W(A)}$ nilpotent, also $2^n W(A) = 0$ für genügend großes n. Im Falle Sign (A) $\neq \emptyset$ ist das Element φ von W(A) genau dann nilpotent, wenn $\sigma(\varphi) = 0$ für jede Signatur σ von A ist.

Ist A ein lokaler Ring, so läßt sich Theorem 1 dadurch beweisen, daß man W(A) als homomorphes Bild des Gruppenringes $\mathbf{Z}[A^*/A^{*2}]$ der Quadratklassengruppe A^*/A^{*2} (Einheiten modulo Quadrate von Einheiten) auffaßt, was möglich ist, weil jetzt W(A) durch die Wittklassen der eindimensionalen Räume $\langle a \rangle$ erzeugt wird. Man kennt die Primideale des Gruppenringes und hat auch ausreichende Kenntnis über den Kern der Abbildung $\mathbf{Z}[A^*/A^{*2}] \twoheadrightarrow W(A)$, um obige Aussagen über die Primideale von W(A) einsehen zu können ([KRW], vgl. auch [KK]). Dress beweist nun in [D] folgenden Satz von unabhängigem Interesse, aus dem dann Theorem 1 allgemein folgt:

Theorem 2 A *sei beliebiger kommutativer Ring. Zu jedem Primideal* P *von* W(A) *gibt es ein Primideal* $\mathfrak{p}$ *von* A *und ein Primideal* Q *des Wittringes* $W(A_\mathfrak{p})$ *der Lokalisierung* $A_\mathfrak{p}$, *so daß* P *das Urbild von* Q *bzgl. der Abbildung* $W(A) \to W(A_\mathfrak{p})$ *ist, die aus der natürlichen Abbildung* $A \to A_\mathfrak{p}$ funktoriell entsteht.

Ist Sign (A) nicht leer, so nennen wir den Ring A f o r m a l r e e l l. Diese Definition harmoniert mit der in der Körpertheorie üblichen Terminologie, denn es gilt:

Satz 3 ([K], Chap. III §2) A *ist genau dann formal reell, wenn* -1 *in* A *nicht Summe von Quadraten ist.*

Wir wollen Theorem 2 für minimale Primideale in der Sprache der Signaturen ausdrücken.

Definition *Es sei ein Ringhomomorphismus* $f: A \to B$ *vorgegeben (stets* $1 \mapsto 1$). *Ist* σ *eine Signatur von* A, *so heißt jede Signatur* τ *von* B, *für die das Diagramm*

$$\begin{tikzcd} W(A) \arrow[rr, "f_*"] \arrow[dr, "\sigma"'] & & W(B) \arrow[dl, "\tau"] \\ & \mathbb{Z} & \end{tikzcd}$$

kommutativ ist, eine F o r t s e t z u n g *von* σ *auf* B (*bzgl.* f). *Umgekehrt heißt dann* σ *die* E i n s c h r ä n k u n g *von* τ *auf* A, *und wir schreiben gerne* $\sigma = \tau | A$.

Unter Benutzung dieser Terminologie gewinnt man aus Theorem 2 leicht folgende Aussage:

Theorem 2a *Zu jeder Signatur* σ *von* A *gibt es mindestens ein Primideal* $\mathfrak{p}$ *von* A, *so daß sich* σ *auf die Lokalisierung* $A_\mathfrak{p}$ *fortsetzen läßt* (*bzgl. der natürlichen Abbildung* $A \to A_\mathfrak{p}$).

Im allgemeinen wird eine solche Fortsetzung auf viele Weisen möglich sein pologie). Indem wir von $\mathbf{Q} \otimes \overline{W}(A)$ zu $W(A)$ zurückgehen, gewinnen wir folgende Beschreibung der Topologie von X und von $\overline{W}(A)$.

Theorem 5 *Wir versehen die Menge* $X = \mathrm{Sign}(A)$ *mit der gröbsten Topologie, so daß die Funktionen* $\hat{\varphi}: \sigma \mapsto \sigma(\varphi)$ *auf* X *mit Werten in* $\mathbf{Z}$ *zu den* $\varphi \in W(A)$ *alle stetig sind. Dann ist* X *ein proendlicher Raum. Die Abbildung* $\varphi \mapsto \hat{\varphi}$ *von* $W(A)$ *nach* $C(X, \mathbf{Z})$ *ist ein Ringhomomorphismus, dessen Kern das Nilradikal von* $W(A)$ *ist und dessen Bild sich somit mit* $\overline{W}(A)$ *identifizieren läßt. Der Quotient* $C(X, \mathbf{Z})/\overline{W}(A)$ *ist eine Torsionsgruppe.*

Jetzt ist es möglich, die beiden Probleme anzugeben, über die ich im folgenden berichten will, wobei die Formulierung des zweiten Problems naturgemäß etwas vage ausfällt.

1. Problem *Welche Funktionen* $f: X \to \mathbf{Z}$ *lassen sich durch einen bilinearen Raum repräsentieren, d. h., haben die Gestalt* $f = \hat{\varphi}$ *für ein* $\varphi \in W(A)$?

2. Problem *Welche Zusammenhänge bestehen – eventuell in speziellen Situationen – zwischen dem Raum* X *und anderen „mehr geometrischen" Objekten, die zu* A *gehören?*

Zu dem 2. Problem sei angemerkt, daß X als total unzusammenhängender Raum vom geometrischen Standpunkt aus ein „schlechter" Raum ist, es sei denn X ist endlich. Man kann aber etwa fragen, ob gewisse stetige Bilder von X gute und zugleich interessante Räume sind.

Eine Verallgemeinerung Allgemeiner kann man bilineare Räume (E, B) über einem Schema V bilden, indem man für E einen lokal freien $\mathcal{O}_V$-Modul von endlichem Typ nimmt und für B eine symmetrische nichtausgeartete Bilinearform auf E mit Werten in der Strukturgarbe $\mathcal{O}_V$ ([K], Chap. I, [K_1]). Es läßt sich dann ähnlich wie oben ein Wittring $W(V)$ definieren, der im Falle, daß $V = \mathrm{Spec}(A)$ affin ist, mit $W(A)$ übereinstimmt. Die Zuordnung $V \mapsto W(V)$ ist jetzt ein kontravarianter Funktor von der Kategorie der Schemata in die Kategorie der kommutativen Ringe mit Eins. Ist V etwa quasiprojektiv, d. h. offener Teil eines projektiven Raumes $\mathbf{P}^m(\Lambda)$ über einen kommutativen Ring Λ, so bleiben obige Sätze mit Ausnahme von Satz 3 sinngemäß richtig ([K], Satz 3 muß durch eine kompliziertere Aussage ersetzt werden). Somit können wir die obigen beiden Probleme allgemeiner über einem quasiprojektiven Schema V stellen.

§2 Reelle Punkte auf algebraischen Varietäten

Sei jetzt A eine endlich erzeugte kommutative Algebra über einem Körper k. Dann läßt sich Theorem 2a wie folgt verschärfen [K_2]:

Theorem 6 *Jede Signatur* σ *von* A *läßt sich auf den Restklassenkörper* $A/\mathfrak{m}$ *eines geeigneten maximalen Ideales* $\mathfrak{m}$ *von* A *fortsetzen.*

Wir wollen uns überlegen, was dieser Satz in dem Fall bedeutet, daß k ein reell abgeschlossener Körper R ist (Beispiel: R = **R**) und A keine nilpotenten Elemente hat. A läßt sich als Quotient eines Polynomringes $R[T_1, \ldots, T_n]$ nach einem Ideal darstellen. Nach Hilbert wird dieses Ideal durch endlich viele Polynome

$$A = R[T]/(f_1(T), \ldots, f_r(T)).$$

Somit ist A der Ring der über R definierten algebraischen Funktionen auf der affinen Varietät

$$M := \{x \in C^n \mid f_1(x) = \ldots = f_r(x) = 0\},$$

wobei C den algebraischen Abschluß $R(\sqrt{-1})$ von R bezeichnet. Als Restklassenkörper $A/\mathfrak{m}$ eines maximalen Ideals $\mathfrak{m}$ kommen nur die Körper R und C in Frage. Der Körper C ist aber nicht formal reell. Daher sind für uns nur die Ideale $\mathfrak{m}$ mit $A/\mathfrak{m} = R$ interessant. Jedes solche Ideal $\mathfrak{m}$ hat die Gestalt

$$\mathfrak{m}_x = \{f \in A \mid f(x) = 0\}$$

zu einem durch $\mathfrak{m}$ eindeutig bestimmten Punkt $x = (x_1, \ldots, x_n)$ auf M, dessen Koordinaten x_i alle in R liegen. Wir nennen diese Punkte die *reellen Punkte* von M und bezeichnen die Menge aller reellen Punkte mit M(R).

Weil der Wittring von R bekanntlich zu **Z** isomorph ist, liefert uns jeder reelle Punkt $P \in M(R)$ eine Signatur

$$\tau_P : W(A) \to W(A/\mathfrak{m}_P) \xrightarrow{\sim} \mathbf{Z}.$$

Hier ist der erste Pfeil die funktorielle Abbildung zu $A \to A/\mathfrak{m}_P$. Die Signatur τ_P ordnet einer Wittklasse [E, B] die klassische Sylvester-Signatur des Raumes $(E/\mathfrak{m}_P E, B \otimes A/\mathfrak{m}_P)$ über R zu. Theorem 6 besagt, daß die τ_P zu den $P \in M(R)$ schon alle Signaturen von A sind.

Wir nennen nun zwei Punkte P und Q aus M(R) *Witt-äquivalent*, wenn $\tau_P = \tau_Q$ ist. Die Äquivalenzklassen zu dieser Äquivalenzrelation auf M(R) nennen wir die *Witt-Komponenten* von M(R).

Theorem 6 bleibt sinngemäß richtig, wenn man den Ring A durch ein algebraisches quasiprojektives Schema V über k ersetzt, wie am Ende von § 1 angedeuist M(R) total unzusammenhängend. Doch macht dieser Sachverhalt das Studium der Wittkomponenten nur interessanter. Man hofft, in den Wittkomponenten auch dann noch sinnvolle „Komponenten" vor sich zu haben, wenn die Topologie versagt.

In der Arbeit [K_3] habe ich in dem Falle, daß M eine glatte Kurve über R ist, die Wittkomponenten von M(R) ausführlich untersucht. Für R = **R** stimmen die Wittkomponenten in der Tat mit den Zusammenhangskomponenten von M(R) überein, sind also für projektives M topologische „Kreise", anderenfalls „Kreise" oder „offene Intervalle". Über beliebigem reell abgeschlossenen Körper R läßt sich bei projektivem M immer noch eine „Orientierung" der Menge M(R) sinnvoll definieren und dann auf jeder Wittkomponente Γ von M(R) eine zirkulare Anordnung der Punkte erklären, somit für je zwei Punkte $P \neq Q$ auf Γ das abgeschlossene Intervall [P, Q] und das offene Intervall]P, Q[definieren. Diese Intervalle haben die von dem Falle R = **R** her gewohnten elementargeometrischen Eigenschaften[1]). Ist M nicht projektiv, so entsteht M bekanntlich aus einer geeigneten glatten projektiven Kurve $\overline{M}$ durch Herausnahme endlich vieler Punkte. Eine Wittkomponente Γ von M(R) ist dann in einer Wittkomponente $\overline{\Gamma}$ von $\overline{M}(R)$ enthalten, und entweder ist $\overline{\Gamma} \setminus \Gamma$ höchstens einpunktig, oder Γ ist ein offenes Intervall]P, Q[von $\overline{\Gamma}$ mit P und Q in $\overline{\Gamma}$, aber nicht in M(R), wie es sein muß.

Wir kehren zu einer beliebigen quasiprojektiven Varietät M über R zurück und wollen zunächst „Komponenten" von M(R) einführen, die leichter zugänglich sind als die Wittkomponenten. Dazu definieren wir in der Menge M(R) „algebraische Wege".

Definition *Ein* E l e m e n t a r w e g γ *in* M(R) *ist eine totalgeordnete Teilmenge* γ *von* M(R) *mit folgenden Eigenschaften:*

a) *Der Zariskiabschluß von* γ *in* M *ist eine irreduzible Kurve* $D \subset M$.

b) *Sei* $\pi : \widetilde{D} \twoheadrightarrow D$ *die Normalisierung von* D. *Nach geeigneter Wahl einer Orientierung von* $\widetilde{D}(R)$ *gibt es ein abgeschlossenes Intervall* $[\widetilde{P}, \widetilde{Q}]$ *in* $\widetilde{D}(R)$, *das unter* π *bijektiv und ordnungstreu auf* γ *abgebildet wird.*

Zu dieser Definition sei vermerkt, daß D und $\widetilde{D}$ über R definiert sind, weiter, daß durch γ das Intervall $[\widetilde{P}, \widetilde{Q}]$ eindeutig festgelegt ist. Den ersten Punkt $P = \pi(\widetilde{P})$ von γ nennen wir den A n f a n g s p u n k t , den letzten Punkt $Q = \pi(\widetilde{Q})$ den E n d p u n k t des Elementarweges γ. Das Intervall $[\widetilde{P}, \widetilde{Q}]$ bezeichnen wir mit $\widetilde{\gamma}$.

Definition *Seien* P *und* Q *Punkte in* M(R). *Ein* W e g v o n P n a c h Q *in* M(R) *ist eine endliche Folge* $(\gamma_1, \ldots, \gamma_t)$ *von Elementarwegen* γ_i *in* M(R), *so daß* γ_1 *den Anfangspunkt* P *hat,* γ_t *den Endpunkt* Q, *und der Endpunkt von* γ_i *mit dem Anfangspunkt von* γ_{i+1} *übereinstimmt* $(1 \leqslant i \leqslant t-1)$. *Wir nennen* P *und* Q v e r b i n d b a r *in* M(R), *wenn es in* M(R) *mindestens einen Weg von* P *nach* Q *gibt. Die Äquivalenzklassen der Äquivalenzrelation „verbindbar" nennen wir die* W e g e k o m p o n e n t e n *von* M(R).

---

[1]) In [K_3] ist erst gegen Ende von Wittringen die Rede. Der Grund ist, daß der Wittring der Kurve durch eindimensionale Formen erzeugt wird und daher eine einfachere Sprache als hier gewählt werden konnte.

Es läßt sich nun auf geometrischem Wege zeigen [K_2]:

Theorem 7 M(R) *hat nur endlich viele Wegekomponenten. Jede Wegekomponente ist offen und abgeschlossen in der starken Topologie.*

Im Falle $R = \mathbf{R}$ sind die Wegekomponenten ersichtlich topologisch zusam- [illegible]

Ist allgemein P ein Punkt eines Elementarweges γ in $M(\mathbf{R})$ und $\widetilde{P}$ der über P liegende Punkt in $\widetilde{\gamma}$, wie oben beschrieben, so faktorisiert die Signatur τ_P von M über die Signatur $\tau_{\widetilde{P}}$ von $\widetilde{D}$,

$$\tau_P : W(M) \longrightarrow W(\widetilde{D}) \xrightarrow[\tau_{\widetilde{P}}]{} \mathbf{Z},$$

wobei $W(M) \to W(\widetilde{D})$ die funktorielle Abbildung zu $\widetilde{D} \xrightarrow{\pi} D \longrightarrow M$ ist. Ist Q ein weiterer Punkt auf γ, so ist aufgrund der Definition der Elementarwege $\tau_{\widetilde{P}} = \tau_{\widetilde{Q}}$, also auch $\tau_P = \tau_Q$. Zwei verbindbare Punkte sind somit Witt-äquivalent, und wir erhalten aus Theorem 7 die

Folgerung M(R) *hat nur endlich viele Wittkomponenten. Also ist der Raum* X *der Signaturen von* M *endlich. Jede Wittkomponente ist Vereinigung endlich vieler Wegekomponenten.*

Es erhebt sich die Frage, ob auf einer vorgegebenen Varietät M jede Wegekomponente selbst schon eine Wittkomponente ist. Diese Frage ordnet sich – wie die gesamte bisherige Betrachtung – dem am Ende von §1 formulierten 2. Problem unter. Ich möchte auch eine Frage stellen, die zu dem 1. Problem gehört. M habe die Dimension d. Weil der Raum X der Signaturen von M endlich ist, gibt es eine kleinste natürliche Zahl $k \geqslant 1$, so daß der reduzierte Wittring $\overline{W}(M)$ die Menge gen (nur ein maximales Ideal), zu denen auch die Körper gehören. Jedoch ist es aus technischen Gründen oft wichtig, auch semilokale Ringe zu benutzen, und diese Ringe machen keine wesentlich größeren Schwierigkeiten als die lokalen Ringe. Wir wollen der Einfachheit halber voraussetzen, daß *die Zahl 2 in A Einheit ist*. Es sei aber angemerkt, daß die ganze im folgenden dargestellte Theorie mit einigen Modifikationen richtig bleibt, wenn 2 nicht Einheit ist. Man beachte, daß jetzt alle projektiven endlich erzeugten Moduln über A frei sind.

Ehe wir auf die in § 1 gestellten Probleme eingehen, wollen wir den reduzierten Wittring $\overline{W}(A)$ in einer Weise beschreiben, die Witts ursprünglicher Definition von $W(A)$ (für einen Körper A, [W]) verwandt ist. Zunächst geben wir die entsprechende Beschreibung von $W(A)$.

Wir nennen einen bilinearen Raum $\varphi = (E, B)$ *isotrop*, wenn es einen Vektor x in E mit $B(x, x) = 0$ gibt, der sich zu einer Basis des freien Moduls E ergänzen läßt. Anderenfalls heiße φ *anisotrop*. Jeder bilineare Raum φ hat eine Zerlegung („Wittzerlegung")

$$\varphi \cong r \times \langle 1, -1 \rangle \perp \varphi_0$$

mit einer eindeutig bestimmten Zahl $r \geqslant 0$ und einem durch φ bis auf Isomorphie eindeutig bestimmten anisotropen Raum φ_0 (s. z. B. [K], Chap. II § 1). Dabei bezeichne allgemein $r \times \psi$ für einen bilinearen Raum ψ die orthogonale Summe von r Kopien von ψ. Wir nennen φ_0 den *Kernraum* von φ. Aus der Wittzerlegung folgt insbesondere, daß die Räume $r \times \langle 1, -1 \rangle$ bis auf Isomorphie genau alle hyperbolischen Räume über A sind.

Wir sehen nun, daß zwei bilineare Räume φ und ψ genau dann Witt-äquivalent sind, wenn sie isomorphe Kernräume haben. Weiter ist klar, daß zwei Witt-äquivalente Räume gleicher Dimension schon isomorph sind. In der lokalen Theorie besteht also – sehr im Gegensatz zur globalen Theorie – ein enger Zusammenhang zwischen den Isomorphieklassen und den Wittklassen von bilinearen Räumen.

Es sollen nun in ähnlicher Weise die Elemente des reduzierten Wittringes $\overline{W}(A)$ beschrieben werden.

Definition *Zwei bilineare Räume φ und ψ über* A *heißen* kongruent, *geschrieben $\varphi \equiv \psi$, wenn* $\dim \varphi = \dim \psi$ *und* $\sigma(\varphi) = \sigma(\psi)$ *für jede Signatur σ von* A *ist.*

Letztere Bedingung besagt gerade, daß φ und ψ in $\overline{W}(A)$ dasselbe Bild haben. Nun ist das Nilradikal von $W(A)$ für einen formal reellen semilokalen Ring A identisch mit der Menge der Torsionselemente von $W(A)$, d. h. aller Wittklassen $[\varphi]$ mit

Wir nennen zwei reduzierte Formen $\overline{\varphi}$ und $\overline{\psi}$ über A W i t t - ä q u i v a l e n t, wenn sie in $\overline{W}(A)$ dasselbe Bild haben, also wenn $\sigma(\overline{\varphi}) = \sigma(\overline{\psi})$ für jede Signatur σ ist. Weiter nennen wir eine reduzierte Form $\overline{\varphi}$ isotrop, wenn eine Summe $m \times \varphi$ von Kopien von φ isotrop ist. Wir sagen dann auch, daß der bilineare Raum φ s c h w a c h i s o t r o p ist. Es läßt sich nun ohne große Mühe zeigen ([K_5], § 2, vgl. [BeK] im Körperfall):

Satz 11 *Jede reduzierte Form* $\overline{\varphi}$ *hat eine Zerlegung*

$$\overline{\varphi} = r \times \langle 1, -1 \rangle \perp \overline{\varphi}_0$$

mit einer eindeutig bestimmten natürlichen Zahl $r \geqslant 0$ *und einer eindeutig bestimmten anisotropen reduzierten Form* $\overline{\varphi}_0$.

Wir nennen wieder $\overline{\varphi}_0$ die K e r n f o r m von $\overline{\varphi}$ und haben als

Folgerung Zwei reduzierte Formen sind genau dann äquivalent, wenn ihre Kernformen übereinstimmen.

Mit reduzierten Formen läßt sich ganz ähnlich rechnen wie mit gewöhnlichen quadratischen Formen, indem man anstelle von Quadraten Summen von Quadraten benutzt. Wir verweisen den Leser dazu auf [BeK] und [K_5], § 2.

Wir wollen nun auch den Signaturen eine neue, nur im Semilokalen mögliche Deutung geben. Jeder bilineare Raum über A hat jetzt eine Orthogonalbasis, ist also ein Diagonalraum $\langle a_1, \ldots, a_n \rangle$ ([Ba], Chap. I § 3). Erst recht wird der Ring W(A) durch die Wittklassen $[\langle a \rangle]$ der eindimensionalen Räume $\langle a \rangle$ additiv erzeugt ($a \in A^*$), wie schon in § 1 erwähnt wurde. Somit ist eine Signatur $\sigma : W(A) \to \mathbf{Z}$ durch die Werte $\sigma(a) := \sigma([\langle a \rangle])$ auf den eindimensionalen Räumen festgelegt. Die so entstehende Funktion $a \mapsto \sigma(a)$ auf A^* ist ein Charakter der Einheitengruppe A^* mit Werten ± 1. Wir identifizieren die Signatur σ mit diesem Charakter. Es gilt [KRW_1], § 2:

Satz 12 *Eine Signatur* $\sigma : A^* \to \{\pm 1\}$ *erfüllt für jedes* $r \geqslant 2$ *die folgende Bedingung:*

S_r: *Sind* $a_1, \ldots, a_r$ *Einheiten von* A *mit* $\sigma(a_1) = \ldots = \sigma(a_r) = +1$ *und* $\lambda_1, \ldots, \lambda_r$ *Elemente von* A, *so daß* $b := \lambda_1^2 a_1 + \ldots + \lambda_r^2 a_r$ *wieder Einheit ist, so ist* $\sigma(b) = +1$. *Weiter ist* $\sigma(-1) = -1$. *Umgekehrt ist jeder Charakter* $\sigma : A^* \to \{\pm 1\}$, *für den*

Sei σ eine Signatur von A und sei Q die Menge aller Elemente

$$x = \lambda_1^2 a_1 + \ldots + \lambda_r^2 a_r$$

zu Einheiten a_i von A mit $\sigma(a_i) = +1$ und Elementen λ_i von A mit $\lambda_1 A + \ldots + \lambda_r A = A$. Der folgende Satz wurde für lokale Ringe von Kanzaki und Kitamura [KaKi] und dann allgemein in [K_4], § 3 und Appendix B bewiesen.

Theorem 13 A *ist disjunkte Vereinigung der Mengen* Q, (-1) Q *und eines Primideals* $\mathfrak{p}$. *Die Signatur* σ *hat genau eine Fortsetzung* $\bar{\sigma}$ *auf den Restklassenkörper* $A(\mathfrak{p})$ *zu* $\mathfrak{p}$, *d. h. den Quotientenkörper des Restklassenringes* $A/\mathfrak{p}$.

In diesem Sinne kommen also auch alle Signaturen eines semilokalen Ringes von Anordnungen von Körpern her, sogar in kanonischer Weise. Wir nennen $\mathfrak{p}$ das zu σ assoziierte Primideal $\mathfrak{p}(\sigma)$ und $\bar{\sigma}$ die von σ auf dem Restklassenkörper induzierte Signatur. Aufgrund der Definition von Q ist klar, daß $\mathfrak{p}(\sigma)$ das eindeutig bestimmte größte Primideal $\mathfrak{q}$ von A ist, so daß sich σ auf $A(\mathfrak{q})$ fortsetzen läßt.

Wir wollen uns noch überlgegen, welche Einheiten $a \in A^*$ unter allen Signaturen den Wert +1 haben. Ist $a = \lambda_1^2 + \ldots + \lambda_r^2$ eine Summe von Quadraten, so ist aufgrund der Eigenschaft S_r sicherlich $\sigma(a) = +1$ für alle Signaturen. Ist umgekehrt dies vorausgesetzt, so ist $\langle a \rangle \equiv \langle 1 \rangle$, also nach Satz 10 $m \times \langle a \rangle \cong m \times \langle 1 \rangle$ für ein $m \geqslant 1$ und somit a Summe von m Quadraten. Also

Satz 14 *Die Untergruppe der* $a \in A^*$ *mit* $\sigma(a) = +1$ *für alle Signaturen* σ *von* A *besteht genau aus den Quadratsummen in* A, *die Einheiten sind.*

Wir bezeichnen diese Untergruppe mit A_∞ und fassen die Menge X der Signaturen von A als Menge von Charakteren der Gruppe $G := A^*/A_\infty$ auf. G ist eine diskrete Gruppe vom Exponenten 2. Somit ist ihre Charaktergruppe $\hat{G}$ in der Topologie der punktweisen Konvergenz eine proendliche topologische Gruppe. Man sieht leicht, daß X abgeschlossen in $\hat{G}$ ist und die Teilraumtopologie von X in $\hat{G}$ mit der in § 1 auf X eingeführten Topologie übereinstimmt.

Nach dieser Diskussion der Signaturen im semilokalen Fall wenden wir uns dem 1. Problem aus § 1 zu.

Definition *Eine nichtleere Teilmenge* Y *von* X *heißt* Fächer *von* A, *wenn* Y *abgeschlossen in* X *ist und für je drei Elemente* $\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3$ *aus* Y *das in* $\hat{G}$ *gebildete Produkt* $\sigma_1 \sigma_2 \sigma_3$ *wieder in* Y *liegt.*

Ist Y ein Fächer von A und σ_0 ein beliebig gewähltes Element von Y, so ist ersichtlich $Y \cup \sigma_0 Y$ die von Y erzeugte Untergruppe von G. Weiter ist Y zu $\sigma_0 Y$ disjunkt, weil die Charaktere aus Y auf dem Elemnet $(-1)A_\infty$ von G den Wert -1 annehmen, die Charaktere aus $\sigma_0 Y$ jedoch den Wert +1. Insbesondere muß für einen endlichen Fächer Y die Anzahl $|Y|$ der Elemente von Y eine 2-Potenz sein.

Die Fächer stehen im Zentrum der lokalen Theorie der reduzierten Formen aufgrund des folgenden Satzes.

Theorem 15 *Eine stetige Funktion* $f: X \to \mathbf{Z}$ *läßt sich genau dann durch eine reduzierte Form (also ein Element von* $\overline{W}(A)$*) repräsentieren, wenn für jeden end-*

lichen Fächer Y *von* A *gilt:*

$$\sum_{\sigma \in Y} f(\sigma) \equiv 0 \bmod |Y|$$

Dieser Satz wurde im Körperfall von Becker und Bröcker bewiesen ([BeB], s. auch [BrM]). Marshall hat darauf eine „abstrakte" Version des Satzes gegeben [M], die Theorem 15 umfaßt, s. [KlR], Prop. 6.4 und [K_5], § 2. Theorem 15 löst das 1. Problem aus § 1, sobald wir eine einigermaßen konkrete Beschreibung der Fächer haben.

Natürlich ist jede ein- oder zweipunktige Teilmenge Y von X ein Fächer. Das sind die „trivalen" Fächer. Die Kongruenzrelationen für f in Theorem 15 bedeuten für die Gesamtheit der zweipunktigen Fächer, daß f entweder nur gerade oder nur ungerade Werte annimmt. Es ist klar, daß man diese Bedingung an f stellen muß, wenn f durch eine reduzierte Form repräsentierbar sein soll.

Jeder nichttriviale Fächer von A kommt nun in kanonischer Weise her von einem Restklassenkörper A($\mathfrak{p}$).

Theorem 16 ([K_5], § 7) *Sei* Y *ein Fächer von* A *mit mindestens* 4 *Elementen. Dann ist zu allen Signaturen aus* Y *dasselbe Primideal* $\mathfrak{p}$ *von* A *assoziiert. Die Menge* $\overline{Y}$ *der von den* $\sigma \in Y$ *auf* A($\mathfrak{p}$) *induzierten Signaturen* $\overline{\sigma}$ *ist ein Fächer von* A($\mathfrak{p}$).

Der Fächer Y entsteht also aus $\overline{Y}$ einfach durch Einschränkung von A($\mathfrak{p}$) auf A. L. Bröcker ist es gelungen, die Fächer von Körpern bewertungstheoretisch zu beschreiben [B]. Damit ist eine gewisse Lösung des 1. Problems erreicht. Wir werden auf Bröckers Resultat erst im nächsten Paragraphen eingehen.

Wir ziehen jetzt eine Folgerung aus den soeben angegebenen Theorem 15 und 16. Es läßt sich ohne Mühe zeigen, daß die Torsionsgruppe $C(X, \mathbf{Z})/\overline{W}(A)$ (s. Theorem 5) jetzt 2-primär ist ([KRW], [KK]). Wir definieren den Stabilitätsindex st(A) von A als die kleinste natürliche Zahl n, so daß $2^n C(X, \mathbf{Z})$ in $\overline{W}(A)$ enthalten ist, mit anderen Worten, als das minimale n, so daß jede stetige Funktion $f: X \to \mathbf{Z}$ mit durch 2^n teilbaren Werten durch eine reduzierte Form repräsentierbar ist. Gibt es keine solche Zahl n, so setzen wir st(A) = ∞. Jedoch werden wir später sehen (Satz 18, Satz 25), daß st(A) in sehr vielen Fällen endlich ist, so daß ein Interesse an dieser Zahl berechtigt ist. st(A) drückt tatsächlich ein „Stabilitätsverhalten" des reduzierten Wittringes $\overline{W}(A)$ aus. Man kann nämlich beweisen, vgl. [B_1], § 3, daß st(A) auch die kleinste natürliche Zahl n ist mit $\overline{I}^{m+1}(A) = 2\,\overline{I}^m(A)$ für $m \geqslant n$. Dabei bezeichne $\overline{I}^m(A)$ die m-te Potenz des Fundamentalideals $\overline{I}(A)$ von $\overline{W}(A)$ (= Bild von I(A) in $\overline{W}(A)$).

Aus Theorem 15 folgt sofort

Satz 17 $2^{st(A)}$ *ist das Supremum der Mächtigkeiten* |Y| *aller endlichen Fächer* Y *von* A.

Mit Theorem 16 erhält man dann

Satz 18 *Der Stabilitätsindex von* A *ist nicht größer als das Supremum der Stabilitätsindizes aller formal reellen Restklassenkörper* A($\mathfrak{p}$) *von* A.

Bei einem semilokalen Ring A verdient das Zusammenspiel der verschiedenen Restklassenkörper A($\mathfrak{p}$) besonderes Interesse. Dabei sind für uns jetzt nur die formal reellen Restklassenkörper wichtig. Im Hinblick auf das 2. Problem aus § 1 definieren wir zu jedem Primideal $\mathfrak{p}$ von A mit formal reellem Restklassenkörper $A(\mathfrak{p})$ folgende Mengen.

$Z(\mathfrak{p})$:= Raum der Signaturen (= Anordnungen) von $A(\mathfrak{p})$.
$X(\mathfrak{p})$:= Bild von $Z(\mathfrak{p})$ unter der Restriktionsabbildung von $Z(\mathfrak{p})$ nach X.
$X^{\mathfrak{p}}$:= Bild des Raumes $\mathrm{Sign}(A/\mathfrak{p})$ in X.
$X(\mathfrak{p})^\circ$:= Menge aller $\sigma \in X$ mit $\mathfrak{p}(\sigma) = \mathfrak{p}$.
$Z(\mathfrak{p})^\circ$:= Urbild von $X(\mathfrak{p})^\circ$ in $Z(\mathfrak{p})$.

$X(\mathfrak{p})$ und $X^{\mathfrak{p}}$ sind abgeschlossene Teilmengen von X. Aufgrund von Theorem 13 und der anschließenden Diskussion ist folgendes evident:

(1) X ist disjunkte Vereinigung aller $X(\mathfrak{p})^\circ$.
(2) $X^{\mathfrak{p}} = \bigcup\limits_{\mathfrak{q} \supset \mathfrak{p}} X(\mathfrak{q}) = \bigcup\limits_{\mathfrak{q} \supset \mathfrak{p}} X(\mathfrak{q})^\circ$.
(3) Die natürlichen Abbildungen von $Z(\mathfrak{p})$ auf $X(\mathfrak{p})$ liefert einen Homöomorphismus von $Z(\mathfrak{p})^\circ$ auf $X(\mathfrak{p})^\circ$.

Für einen „geometrischen" semilokalen Ring, d. h. eine Semilokalisierung einer endlich erzeugten kommutativen Algebra über einem Körper k, gilt:

Satz 19 ([K_5], § 6) $Z(\mathfrak{p})^\circ$ *liegt dicht in* $Z(\mathfrak{p})$. *Somit ist* $X(\mathfrak{p})$ *der topologische Abschluß von* $X(\mathfrak{p})^\circ$ *in* X.

Ist also $\mathfrak{p}$ ein Primideal mit $A/\mathfrak{p}$ formal reell und regulär, somit $X(\mathfrak{p}) = X^{\mathfrak{p}}$ nach Theorem 4, so besteht der Abschluß von $X(\mathfrak{p})^\circ$ gerade aus allen $X(\mathfrak{q})^\circ$ mit $\mathfrak{q} \supset \mathfrak{p}$. Das legt nahe, sich die Partition von X in die Mengen $X(\mathfrak{p})^\circ$ als eine „Stratifikation" des proendlichen Raumes X vorzustellen, zumindest für geometrische lokale Ringe.

Von einer befriedigenden Lösung des 2. Problems für geometrische semilokale Ringe sind wir weit entfernt. Will man das Zusammenspiel der verschiedenen Restklassenkörper berücksichtigen, so wird man sich zunächst mit dem Körperfall befassen, um die Räume $Z(\mathfrak{p})$ zu verstehen. Davon soll im nächsten Paragraphen die Rede sein. Dann müßte man die Teilmengen $Z(\mathfrak{p})^\circ$ der Räume $Z(\mathfrak{p})$ im Sinne des 2. Problems untersuchen. Schließlich müßte man die „Stratifikation" studieren. Zu dem zweiten Programmpunkt sei angemerkt:

Satz 20 ([K_5], § 5) $Z(\mathfrak{p})^\circ$ *ist die Menge aller Anordnungen* σ *von* $A(\mathfrak{p})$, *so daß die konvexe Hülle des Teilringes* $A/\mathfrak{p}$ *bzgl.* σ *der ganze Körper* $A(\mathfrak{p})$ *ist.*

§ 4 Reelle Bewertungsringe

Wir kommen jetzt auf einen Zusammenhang zwischen den Anordnungen eines formal reellen Körpers F und gewissen Bewertungsringen $\mathfrak{o}$ von F zu sprechen (Krullsche Bewertungsringe mit Quotientenkörper F), der schon von Baer und Krull entdeckt wurde, s. [Kr]. Wir identifizieren jede Anordnung mit der zugehörigen Signatur $\sigma: F^* \longrightarrow \{\pm 1\}$ gemäß der Folgerung aus Satz 12. Es sei eine Anordnung σ von F vorgegeben.

Theorem 21 ([Kr], [P], [KW]) *Sei* $\mathfrak{o}$ *ein Bewertungsring von* F *und* $\mathfrak{m}$ *das maximale Ideal von* $\mathfrak{o}$. *Folgende Aussagen sind gleichwertig:*

(i) $\mathfrak{o}$ *ist bzgl. der Anordnung* σ *eine konvexe Menge.*

(ii) $\sigma(1 + \mathfrak{m}) = \{+1\}$.

(iii) $\mathfrak{m}$ *ist das assoziierte Primideal von* $\mathfrak{o}$ *zu der Signatur* $\sigma|\mathfrak{o}$, *die aus* σ *durch Einschränkung auf* $\mathfrak{o}$ *entsteht.*

Weiter ist jeder bzgl. σ *konvexe Unterring von* F *ein Bewertungsring von* F.

Sind für einen Bewertungsring $\mathfrak{o}$ von F die gleichwertigen Bedingungen (i)–(iii) aus diesem Satz erfüllt, so sagen wir, $\mathfrak{o}$ ist mit σ verträglich. Weiter

Mit diesem Satz und dem Theorem 15 aus §3 ist unser 1. Problem (s. §1) für Körper zurückgeführt auf eine Analyse der reellen Bewertungsringe von F. Damit wird es zum Beispiel möglich, für viele Körper den Stabilitätsindex (s. §3) zu bestimmen oder zumindest nach oben und unten abzuschätzen, ausgehend von Satz 17 in §3. Allerdings wurden solche Untersuchungen von Bröcker schon vor Kenntnis von Theorem 24 auf anderem Wege durchgeführt [B_1]. Wir zitieren zwei Resultate von Bröcker aus der Arbeit [B_1].

Satz 25 *Ist* L *eine formal reelle Körpererweiterung von* F *vom Transzendenzgrad* d, *so ist*

$$\mathrm{st}(L) \leqslant \mathrm{st}(F) + d + 1.$$

Satz 26 *Jede formal reelle endlich erzeugte Körpererweiterung eines reell abgeschlossenen Körpers* R *vom Transzendenzgrad* d *hat den Stabilitätsgrad* d.

Wir wollen uns noch etwas mit den reellen Bewertungsringen von F befassen und dabei das 2. Problem aus §1 im Blick behalten. Oft ist es günstiger, statt von reellen Bewertungsringen von reellen Stellen von F zu sprechen, die damit in engstem Zusammenhang stehen. Unter einer reellen Stelle von F verstehen wir eine Stelle $\lambda: F \to R \cup \infty$ mit Werten in einem reell abgeschlossenen Körper R. Wir nennen eine reelle Stelle λ mit einer Anordnung σ von F verträglich, wenn für jedes bzgl. σ positive Element a von F entweder $\lambda(a) = \infty$ oder $\lambda(a) \geqslant 0$ ist.

Eine reelle Stelle λ ist festgelegt durch ihren Bewertungsring $\mathfrak{o}_\lambda$ mit maximalem Ideal $\mathfrak{m}_\lambda$ und die durch λ gegebene Einbettung $\bar{\lambda}: \mathfrak{o}_\lambda/\mathfrak{m}_\lambda \to R$. Daß λ mit σ verträglich ist, bedeutet ersichtlich, daß $\mathfrak{o}_\lambda$ mit σ verträglich ist und überdies $\bar{\lambda}$ ordnungstreu bzgl. $\bar{\sigma}$ und der Anordnung von R ist. Indem wir uns erinnern, daß zu jeder Anordnung eines Körpers k bis auf Isomorphie genau eine ordnungstreue Einbettung von k in einen über k algebraischen reell abgeschlossenen Körper R existiert [AS], erhalten wir folgenden Zusammenhang zwischen den mit einer Anordnung σ verträglichen Bewertungsringen und reellen Stellen:

Satz 27 *Ist* $\mathfrak{o}$ *ein mit* σ *verträglicher Bewertungsring,* k *ein maximaler Teilkörper von* $\mathfrak{o}$ *und* R *ein reeller Abschluß von* k *zu* $\sigma|k$, *so gibt es genau eine mit* σ *verträgliche Stelle* $\lambda: F \to R \cup \infty$, *die auf* k *die Identität ist. Man erhält jede mit* σ *verträgliche Reelle Stelle* $\lambda': F \to R' \cup \infty$ *aus einer solchen Stelle* λ *durch Hinterschalten einer Injektion* $R \to R'$.

Wir betrachten jetzt spezieller die Menge Ω der Stellen von F mit Werten im Körper $\mathbf{R}$ der reellen Zahlen. Jede Anordnung σ von F liefert eine Stelle $\lambda \in \Omega$ in folgender Weise. Sei $\mathfrak{o} := \mathfrak{o}(\sigma, \dot{F}/\mathbf{Q})$ und sei $\bar{\sigma}$ die auf dem Restklassenkörper $\mathfrak{o}/\mathfrak{m}$ induzierte Anordnung. Nach Definition von $\mathfrak{o}$ ist die Anordnung $\bar{\sigma}$ archimedisch, wird also durch eine eindeutig bestimmte Einbettung $\bar{\lambda}: \mathfrak{o}/\mathfrak{m} \to \mathbf{R}$ festgelegt. λ sei die durch $\mathfrak{o}$ und $\bar{\lambda}$ bestimmte $\mathbf{R}$-wertige Stelle von F. Man sieht leicht, daß dieses λ die einzige mit σ verträgliche $\mathbf{R}$-wertige Stelle ist.

Sei $\pi: X \to \Omega$ die so entstehende Abbildung $\sigma \mapsto \lambda$ von dem Raum X der Anordnungen nach Ω. Diese Abbildung ist surjektiv, weil es zu jeder reellen Stelle λ mit λ verträgliche Anordnungen gibt, vgl. Satz 22. Wir versehen Ω mit der Quotiententopologie von X bzgl. π. Es gilt [BrM], §2:

Satz 28 *Diese Topologie ist die gröbste Topologie, so daß für jedes* $f \in F^*$ *die Abbildung*

$$\hat{f}: \Omega \to P^1(\mathbf{R}) = \mathbf{R} \cup \infty, \quad \lambda \mapsto \lambda(f)$$

stetig ist, wobei die reelle projektive Gerade $P^1(\mathbf{R})$ *mit der starken Topologie versehen ist.*

Satz 28 zeigt, daß der Quotient Ω von X ein recht vernünftiger Raum sein kann. Ist zum Beispiel F ein eindimensionaler Funktionskörper über $\mathbf{R}$ und M die zugehörige glatte projektive über $\mathbf{R}$ definierte Kurve, so läßt sich Ω bekanntlich als die Menge $M(\mathbf{R})$ der reellen Punkte von M deuten. Satz 28 besagt, daß obige Topologie von Ω gerade die starke Topologie auf $M(\mathbf{R})$ ist. Somit ist Ω jezt disjunkte Vereinigung von endlich vielen topologischen Kreisen. Ist F eindimensionaler Funktionenkörper über einem nichtarchimedischen reell abgeschlossenen Körper R, so wird es weniger sinnvoll sein, Ω zu betrachten. In der Tat hat Brown gezeigt, daß dann Ω für den rationalen Funktionenkörper $F = R(x)$ kein Kreiskontinuum ist [Br], § 7. Dabei heißt ein topologischer Raum S Kreiskontinuum, wenn S kompakt, Hausdorff und zusammenhängend ist, nach Entfernung eines beliegigen Punktes zusammenhängend bleibt, nach Entfernung von zwei beliebigen Punkten aber unzusammenhängend wird. L. Bröcker hat jedoch einen anderen Quotienten von X gefunden, der berücksichtigt, daß jetzt der Konstantenkörper R die Rolle von $\mathbf{R}$ übernehmen muß. Er hat auf X folgende Äquivalenzrelation eingeführt: Für jedes $\sigma \in X$ ist $\mathfrak{o}(\sigma, F/R)$ entweder ein diskreter Bewertungsring oder ganz F. Im ersten Fall bestehe die Äquivalenzklasse von σ aus allen τ mit $\mathfrak{o}(\tau, F/R) = \mathfrak{o}(\sigma, F/R)$, also nach Satz 22 aus genau zwei Punkten σ, σ'. Im zweiten Falle enthalte die Äquivalenzklasse von σ nur den Punkt σ. Sei $\Omega(F/R)$ der Quotient von X nach dieser Äquivalenzrelation. Wir nennen die Punkte von $\Omega(F/R)$ gemäß der soeben getroffenen Fallunterscheidung Punkte erster Art (= zweipunktige Äquivalenzklassen) und Punkte zweiter Art (= einpunktige Äquivalenzklassen). Die Punkte erster Art entsprechen genau den diskreten Bewertungsringen $\mathfrak{o} \supset R$ von F mit Restklassenkörper R, also den reellen Punkten der zu F/R gehörigen glatten projektiven Kurve M. Somit läßt sich $M(R)$ als die Teilmenge der Punkte erster Art von $\Omega(F/R)$ auffassen. $M(R)$ liegt dicht in $\Omega(F/R)$ [P], § 9. In dem Spezialfall $R = \mathbf{R}$ gibt es keine Punkte 2. Art und $\Omega(F/R)$ stimmt mit dem oben betrachteten Raum Ω der $\mathbf{R}$-wertigen Stellen auf F überein.

L. Bröcker und sein Diplomand M. Schröder haben nun gezeigt (mündliche Mitteilung), Teilresultate in [S], § 6:

Theorem 29 $\Omega(F/R)$ *besteht aus endlich vielen Zusammenhangskomponenten* $\Delta_1, \ldots, \Delta_r$. *Jede Komponente* Δ_i *ist ein Kreiskontinuum und überdies homöomorph zu dem Raum* $\Omega(R(x)/R)$ *des rationalen* 1*-dimensionalen Funktionenkörpers* $R(x)$ *über* R. *Die von* $\Omega(F|R)$ *auf* $M(R)$ *gelieferte Teilraumtopologie ist die starke Topologie von* $M(R)$. *Die Durchschnitte* $\Gamma_i := \Delta_i \cap M(R)$, $i = 1, \ldots, r$, *sind genau die Wittkomponenten von* $M(R)$, *wie in* § 2 *definiert.*

Der Beweis aller Aussagen dieses Satzes bis auf die letzte verläuft unabhängig von der Arbeit [K_3]. Somit haben wir einen neuen und in mancher Hinsicht gegen-über [K_3] einfacheren Zugang zu der Tatsache, daß für eine projektive glatte Kurve M über R jede Wittkomponente von M(R) in natürlicher Weise zirkular geordnet werden kann, wie in § 2 beschrieben.

Kehren wir zu einem beliebigen formal reellen Körper F und dem Raum Ω der **R**-wertigen Stellen auf F zurück! Als *reellen Holomorphiering* $\mathfrak{O}$ *von* F bezeichnen wir den Durchschnitt aller reellen Bewertungsringe von F. Weil jeder reelle Bewertungsring von F den Bewertungsring $\mathfrak{o}_\lambda$ einer Stelle $\lambda \in \Omega$ enthält, ist $\mathfrak{O}$ schon der Durchschnitt aller $\mathfrak{o}_\lambda$ mit $\lambda \in \Omega$. H. W. Schülting hat auf Anregung von Herrn Becker den reellen Holomorphiering $\mathfrak{O}$ untersucht und folgendes bewiesen [S]:

Theorem 30 *$\mathfrak{O}$ hat den Quotientenkörper* F. *Jedes maximale Ideal von $\mathfrak{O}$ ist der Kern $\mathfrak{p}_\lambda$ des Ringhomomorphismus von $\mathfrak{O}$ nach* **R**, *der durch Einschränkung einer geeigneten Stelle $\lambda: F \to \mathbf{R} \cup \infty$ auf $\mathfrak{O}$ entsteht. Für jedes $\lambda \in \Omega$ ist die Lokalisierung von $\mathfrak{O}$ nach dem Primideal $\mathfrak{p}_\lambda$ der Bewertungsring $\mathfrak{o}_\lambda$ von λ. Also ist jede Stelle $\lambda \in \Omega$ durch ihre Einschränkung auf $\mathfrak{O}$ bestimmt.*

Nach diesem Satz ist $\mathfrak{O}$ ein Prüferring, d. h., alle Lokalisierungen von $\mathfrak{O}$ sind Bewertungsringe. Weiter läßt sich Ω mit der Menge $\mathrm{Hom}(\mathfrak{O}, \mathbf{R})$ der Ringhomomorphismen von $\mathfrak{O}$ nach **R** identifizieren. Man sieht auch leicht, daß unsere Topologie von Ω gerade die gröbste ist, so daß für jedes $a \in \mathfrak{O}$ die **R**-wertige Funktion $\lambda \mapsto \lambda(a)$ auf Ω stetig ist.

Schon seit längerem ist folgende Beschreibung der Elemente von $\mathfrak{O}$ bekannt ([Bch], § 3.3, [Pe]):

Satz 31 *$\mathfrak{O}$ ist der von den Elementen $(1 + q)^{-1}$ mit q Quadratsumme in* F *erzeugte Unterring von* F. *Ein Element $a \in F$ liegt genau dann in $\mathfrak{O}$, wenn es eine natürliche Zahl* n *gibt, so daß für jede Anordnung von* F *die Ungleichung $-n < a < n$ erfüllt ist.*

Jeder Punkt $\lambda \in \Omega$ liefert eine Signatur von $\mathfrak{O}$, nämlich die funktorielle Abbildung $\lambda_*: W(\mathfrak{O}) \to W(\mathbf{R}) = \mathbf{Z}$ zu dem Ringhomomorphismus $\lambda: \mathfrak{O} \to \mathbf{R}$. Nach Schülting [S] gilt:

Satz 32 *Jede Signatur von $\mathfrak{O}$ hat die Gestalt λ_* zu einem $\lambda \in \Omega$. Zwei Punkte* wenn man ein Modell von F auswählt. Das wird bei unseren „reellen“ Problemen nicht anders sein. Damit kommen wir von der lokalen Theorie zu globalen Problemen zurück.

Für einen formal reellen Funktionenkörper F über **R** bietet sich folgende Fragestellung an: Sei M eine projektive über **R** definierte Varietät, eventuell auch mit Singularitäten, die F als Funktionenkörper hat. Wir haben eine stetige Abbildung von Ω auf $M(\mathbf{R})$, die jedem $\lambda \in \Omega$ das Zentrum des Bewertungsringes $\mathfrak{o}_\lambda$ auf

[KlR] K l e i n s t e i n , J. L.; R o s e n b e r g , A.: Succinct and respresentational Witt rings. Erscheint demnächst

[K] K n e b u s c h , M.: Symmetric bilinear forms over algebraic varieties. Lecture Notes, Conf. Quadratic Forms 1976, Queen's Papers pure appl. math. No. 46, Queen's University, Kingston 1977, 103–283

[K_1] K n e b u s c h , M.: Grothendieck- und Wittringe von nichtausgearteten symmetrischen Bilinearformen, Sitzungsber. Heidelb. Akad. Wiss. Math.-naturw. Kl. 1969/70, 3. Abh.

[K_2] K n e b u s c h , M.: Paths in the set of rational points of an algebraic variety over a real closed field. In Vorbereitung

[K_3] K n e b u s c h , M.: On algebraic curves over real closed fields I. Math. Z. **150** (1976) 49–70; II: Math. Z. **151** (1976) 189–205

[K_4] K n e b u s c h , M.: Real closures of commutative rings I. J. reine angew. Math. **274/275** (1975) 61–89

[K_5] K n e b u s c h , M.: On the local theory of signatures and reduced quadratic forms. Abh. Math. Sem. Univ. Hamburg, erscheint demnächst

[KK] K n e b u s c h , M; K o l s t e r , M.: Wittringe. Regensburger Trichter Band 14, Fachbereich Math. Univ. Regensburg 1978

[KRW] K n e b u s c h , M.; R o s e n b e r g , A.; W a r e , R.: Structure of Witt rings and quotients of abelian group rings. Amer. J. Math. **94** (1972) 119–155

[KRW_1] K n e b u s c h , M.; R o s e n b e r g , A.; W a r e , R.: Signatures on semilocal rings. J. Algebra **26** (1973) 208–250

[KW] K n e b u s c h , M.; W r i g h t , M. J.: Bewertungen mit reeller Henselisierung. J. reine angew. Math. **286/287** (1976) 314–321

[Kr] K r u l l , W.: Allgemeine Bewertungstheorie. J. reine angew. Math. **167** (1931) 160–196

[illegible]

(1970) 82–88

[M] M a r s h a l l , M.: The Witt ring of a space of orderings, Trans. Amer. Math. Soc. Erscheint demnächst

[MH] M i l n o r , J.; H u s e m o l l e r , D.: Symmetric bilinear forms. Berlin – Heidelberg – New York: Springer 1973. = Ergebnisse Math. 73

[Pe] P e j a s , W.: Die Modelle des Hilbertschen Axiomensystems der absoluten Geometrie. Math. Ann. **143** (1961) 212–235

[P] P r e s t e l , A.: Lectures on formally real fields. Monografias Mat. 22, Inst. Mat. Pura Apl., Rio de Janeiro 1975

[S] S c h ü l t i n g , H. W.: Über reelle Stellen eines Körpers und ihren Holomorphiering, Diss. Dortmund 1979

Jber. d. Dt. Math.-Verein.
82 (1980) 128–151
AMS subject classification: 01 A 70, 01 A 60, 46–03, 52–03

Eduard Helly (1884–1943)

Eine nachträgliche Würdigung

P. L. Butzer, S. Gieseler, F. Kaufmann, R. J. Nessel und E. L. Stark, Aachen

keit zur Mitarbeit getragenen Briefwechsel mit einer Reihe weiterer Weggefährten Hellys entnahmen wir zahlreiche Fakten, Erinnerungen und Anregungen (s. Anhang [A]). Allen genannten und ungenannten Helfern möchten wir unseren Dank aussprechen.

Eduard Helly wird am 1. Juni 1884 in Wien als Sohn von Sigmund und Sara Helly, geb. Necker, geboren. Seine Mutter stammt aus Lemberg, der Vater aus der Bukowina; er ist Beamter, und so wächst Eduard wohlbehütet in gut bürgerlichen Verhältnissen auf. Vier Jahre nach ihm, am 6. November 1888, wird seine Schwester Anna geboren.

Nach dem Besuch der Volksschule geht er 1894 auf das k.k. Maximilians-Gymnasium zu Wien und besteht am 10. Juli 1902 mit 18 Jahren die Maturitätsprüfung. Da sich schon auf dem Gymnasium seine besondere Begabung und sein Interesse an der Mathematik zeigen, nimmt er im Wintersemester des gleichen Jahres das Studium der Mathematik, Physik und Philosophie an der Universität Wien auf. Gleichzeitig hört er noch zusätzlich an der Wiener Technik (Technische Hochschule Wien) Mathematik, Mechanik und Darstellende Geometrie bis zum Jahre 1905 und belegt ab dann an der Universität Kurse in allgemeiner und spezieller Pädagogik[1]). Seine Vorlesungen in Mathematik hört er[2]) vor allem bei Gustav von E s c h e r i c h (1849–1935), Franz M e r t e n s (1840–1927), Wilhelm W i r t i n g e r (1865–1945) und Franz E x n e r (1849–1926) sowie bei Ludwig B o l t z m a n n (1844–1906). Nach fünf Jahren, am 5. Februar 1907, reicht er der Fakultät seine Dissertation über das Thema „Beiträge zur Theorie der Fredholm'schen Integralgleichung" [W 1] ein. Darin zeigt Helly (vgl. Handschriftprobe),

> „wie sich in einfacher Weise notwendige und hinreichende Bedingungen für das Nichtvorhandensein von Eigenwerten aufstellen lassen. Im Weiteren wird dann der Versuch gemacht, die Begriffe der Elementarteilertheorie zu übertragen.
> Schließlich wird gezeigt werden wie, ganz ähnlich wie es beim symmetrischen Kerne der Fall ist, auch beim nichtsymmetrischen Kerne sich der einem bestimmten Eigenwerte entsprechende Bestandteil ablösen läßt. Damit ist dann auch der Ansatz zur Ausdehnung der Sätze über Reihenentwicklungen auch für den unsymmetrischen Kern gegeben."
> ([W1], p. 1).

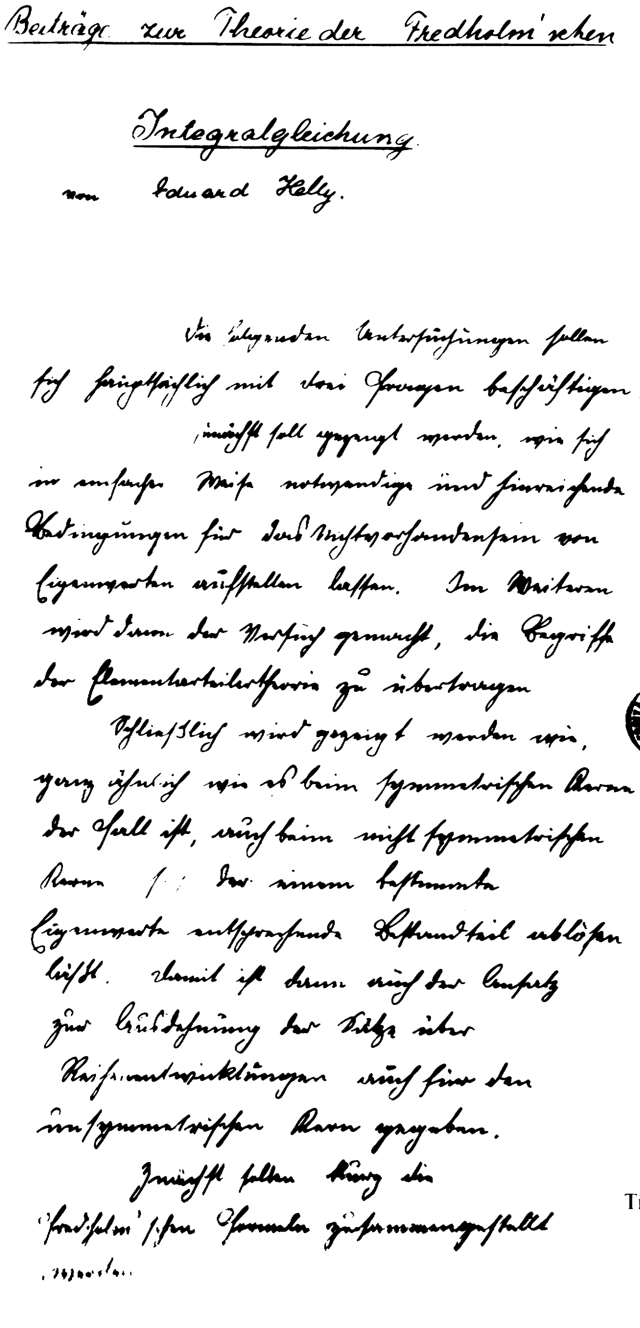
Die Referenten dieser als „vorzüglich" beurteilten[3]) Dissertation sind Wirtinger und Mertens. Am 15. März 1907 wird Helly mit Auszeichnung zum Dr. phil. promoviert.

Wirtinger ist es auch, der Helly ein Stipendium[4]) vermittelt, das diesem ermöglicht, für ein Jahr (WS 1907/08 und SS 1908) an der Universität Göttingen seine Ausbildung zu vervollständigen. Hierzu bemerkt Olga Taussky-Todd:

> „Wirtinger had very high standards, particularly concerning analysts, and since he supported Helly he must have thought very highly of him."

Göttingen, zu jener Zeit das Mekka der Mathematik, beherbergt am Mathematischen Institut u. a. so bedeutende Mathematiker wie Constantin C a r a - t h é o d o r y (1873–1950), Gustav H e r g l o t z (1881–1953), David H i l - b e r t (1862–1943), Felix K l e i n (1849–1925), Paul K o e b e (1882–1945), Hermann M i n k o w s k i (1864–1909), Carl R u n g e (1865–1927) und

Ernst Zermelo (1871–1953). Helly studiert vor allem[5]) bei Klein, Hilbert, Minkowski und Runge. Mit welch jugendlichem Eifer er bei der Sache war, veranschaulicht der folgende, noch völlig unter dem Eindruck der Ereignisse geschriebene Bericht[6]) von Richard Courant (1888–1972) über ein Seminar bei Hilbert, an dem außer Helly und Courant u. a. noch Alfred Haar (1885–1933), Ernst Hellinger (1883–1950) und Otto Toeplitz (1881–1940) teilnehmen.



Beiträge zur Theorie der Fredholm'schen

Integralgleichung

von Eduard Helly.

Die folgenden Untersuchungen sollen sich hauptsächlich mit drei Fragen beschäftigen. Zunächst soll gezeigt werden, wie sich in einfacher Weise notwendige und hinreichende Bedingungen für das Nichtvorhandensein von Eigenwerten aufstellen lassen. Im Weiteren wird dann der Versuch gemacht, die Begriffe der Elementarteilertheorie zu übertragen.

Schließlich wird gezeigt werden wie, ganz ähnlich wie es beim symmetrischen Kern der Fall ist, auch beim nicht symmetrischen Kern f; der einem bestimmten Eigenwerte entsprechende Bestandteil ablösen läßt. Damit ist dann auch der Ansatz zur Ausdehnung der Sätze über Reihenentwicklungen auch für den unsymmetrischen Kern gegeben.

Zunächst sollen kurz die Fredholm'schen Formeln zusammengestellt werden.

Titelseite von [W1]

„Hilbert will, wie er sagt, durch das Seminar die modernen Fragen selbst erst kennenlernen. Die einzelnen Vortragenden haben sich ihr Thema anhand der Literatur so durchzuarbeiten, daß alles sich in ein von Hilbert und Minkowski aufgestelltes Axiomensystem einordnet. [. . .] Mein Vorredner, überhaupt der einzige, der vor mir dran war, ein Dr. Helly aus Wien – sehr viele Seminarmitglieder sind Doktoren, ich bin wohl [illegible] Hilbert über Elektrostatik geredet. Ich hatte

„Für die so definierten linearen Funktionaloperationen bewies Hadamard*) den Satz, daß jede derartige Operation U[f] in der Form

$$U[f] = \lim_{n=\infty} \int_a^b f(x) a_n(x) dx$$

dargestellt werden kann, wobei die $a_n(x)$ stetige Funktionen sind. Darüber hinausgehend bewies F. Riesz**), daß sich jede lineare Funktionaloperation durch ein Stieltjes'sches Integral

$$U[f] = \int_a^b f(x) d\alpha(x)$$

darstellen läßt, wobei $\alpha(x)$ eine Funktion von beschränkter Schwankung ist, und gab gleichzeitig die notwendigen und hinreichenden Bedingungen dafür an, daß eine lineare Operation U[f] existiere, für welche

$$U[f_i] = c_i \qquad (i = 1, 2, 3, \ldots)$$

ist, wenn die Funktionen $f_i(x)$ und die Konstanten c_i gegeben sind.

Im folgenden soll zunächst für diesen zweiten Riesz'schen Satz ein Beweis gegeben werden, der die von Riesz selbst benützten, etwas umständlichen und nicht ganz in der Sache liegenden Abschätzungsmethoden vermeidet und nur Hilfsmittel benützt, die durch die Theorie der linearen Funktionaloperationen selbst dargeboten werden. Ferner wird sich daraus ein Beweis des Hadamard'schen und ersten Riesz'schen Satzes ergeben.

*) Vergl. etwa Hadamard, Lecons sur le calcul des variations, p. 293, ff.
**) F. Riesz. Sur certains systemes singuliers d'equations integrales. Ann. de l'ecole normale, 1911."
([W5], pp. 265–66]).

Die hierbei entwickelten, zum Teil nur hilfsweise benutzten Sätze und Methoden sind es, die die Bedeutung dieser Arbeit für die Herausbildung der Funktionalanalysis begründen. So findet man darunter den Auswahlsatz von Helly für Funktionen von gleichmäßig beschränkter Variation sowie den Satz von Helly-Bray[9]), also ein Kriterium für die schwach*-Konvergenz auf C[a, b]. Diese beiden Sätze finden im übrigen auch weitreichende Anwendungen in der Wahrscheinlichkeitstheorie und sind in viele diesbezügliche Bücher aufgenommen (vgl. [Q 7]). Weiter enthält seine Arbeit den Satz von Banach-Steinhaus im Spezialfall der Funktionale auf C[a, b] sowie die erste, wirklich funktionalanalytisch ausgeprägte Version des uniform boundedness principle, ebenfalls für Funktionale auf C[a, b]. Schließlich wird noch folgender Hilfssatz aufgestellt ($\overline{|f(x)|}$ ist die Hellysche Schreibweise für $\max_{x \in [a,b]} |f(x)|$):

„Wenn für alle Werte der Größen μ_i die Ungleichung

$$\left| \sum_{i=1}^{n} \mu_i \gamma_i \right| \leq M \overline{\left| \sum_{i=1}^{n} \mu_i g_i(x) \right|}$$

erfüllt ist, so läßt sich zu einer weiteren Funktion $g_{n+1}(x)$ eine Konstante γ_{n+1} finden, so daß die Ungleichung

$$\left| \sum_{i=1}^{n+1} \mu_i \gamma_i \right| \leq M \overline{\left| \sum_{i=1}^{n+1} \mu_i g_i(x) \right|}$$

für alle Werte der Zahlen μ_i besteht." ([W5], p. 272).

John H o r v á t h (College Park, Maryland) hat 1977 darauf aufmerksam gemacht ([Q 8][10]), siehe auch [Q 9]), daß man diesen Satz als den Kern eines Beweises des Satzes von Hahn-Banach über die Fortsetzung stetiger Funktionale auffassen kann; denn es wird hier die Fortsetzbarkeit um eine weitere Dimension bewiesen. Auch der heutige analytische Beweis beruht auf der gleichen Methode, wie sie Helly für diesen Hilfssatz einführt. Das folgende, implizit (vgl. [W 5], p. 273) benutzte Lemma ist für den Beweis wesentlich:

> Eine Menge abgeschlossener, beschränkter Intervalle auf der reellen Achse hat einen gemeinsamen Punkt, falls je zwei einen gemeinsamen Punkt haben.

Diesen Gedanken kann Helly ein Jahr später entscheidend ausbauen.

Noch im gleichen Jahr 1912 legt er am 11. Juli der Akademie eine weitere Arbeit über „Reihenentwicklungen nach Funktionen eines Orthogonalsystems" [W 6] vor. Darin modifiziert er Konvergenzuntersuchungen über die Fourierschen Entwicklungen nach Funktionen eines Orthogonalsystems, indem er die Partialsumme $\int_a^b f(t) \sum_{i=1}^{n} \varphi_i(s)\, \varphi_i(t)\, dt$ in ein Stieltjes-Integral umformt (vgl. [R 6]). Die so gewonnenen

> „Sätze gestatten nicht nur, den größten Teil der bekannten Entwicklungstheoreme in höchst einfacher Weise zu beweisen, sondern dürften auch geeignet sein, in sehr viel weiter reichenden Fällen dieselben Entwicklungsmöglichkeiten zu gewähren, wie wir sie für die gewöhnlichen trigonometrischen, beziehungsweise Sturm-Liouville'schen Reihen besitzen." ([W 6], p. 1539).

Nach Anwendung von zwei zuvor bewiesenen Grenzwertsätzen für Stieltjes-Integrale kann Helly schließlich zusammenfassen (es ist $f(x, t) = 1$ für $x < t$, $= 0$ für $x > t$ mit $f(t, t)$ beliebig, aber endlich):

> „Durch die vorhergehenden Untersuchungen ist die Untersuchung der Entwickelbarkeit irgendeiner Funktion von beschränkter Schwankung zurückgeführt auf die einer speziellen Funktion, nämlich der Funktion $f(x, t)$. Diese Untersuchung gelingt aber in den meisten Fällen durch spezielle Methoden. So handelt es sich in der Theorie der gewöhnlichen trigonometrischen Reihen um die Reihe
>
> $$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin nx \cos nx}{n},$$
>
> die direkt untersucht werden kann und damit gibt uns die hier auseinandergesetzte Methode auch ein Mittel an die Hand, die Entwickelbarkeit jeder Funktion beschränkter Schwankung in eine trigonometrische Reihe ohne Benützung des Dirichlet'schen Integrals zu beweisen." ([W 6], p. 1549).

Im Jahre 1913 kann Helly einen – später nach ihm benannten – geometrischen Satz beweisen:

> „Es sei in einem Raume von n Dimensionen eine beliebige Menge abgeschlossener konvexer Bereiche gegeben, von denen je n + 1 mindestens einen Punkt gemein haben. Dann existiert mindestens ein Punkt, der allen Bereichen gemein ist." ([W 9], p. 175; vgl. [N3]).

> „Für die Dimensionszahl 1 ist der Beweis leicht zu führen (vgl. meine Arbeit über *Lineare Funktionaloperationen.* Sitzungsberichte der Wiener Akademie, 1912), da es sich dann um Strecken einer Geraden handelt, die zu je zweien mindestens einen Punkt gemein haben." ([W9], p. 175).

Bis heute hält eine lebhafte Diskussion ausgehend von diesem Satz an (vgl. [Q 2], [Q 10], p. 237 ff., insbesondere die Literaturverzeichnisse).

Nur bis hierher betrachtet, möchte man dem nunmehr knapp 30jährigen Eduard Helly eine großartige Karriere voraussagen. Er hatte sich bereits einen Namen erworben; vor allem in der Arbeit „Über lineare Funktionaloperationen" sind derartig viele Gedanken im Keime angelegt, daß er noch über Jahre hinaus hätte ernten können.

Doch es kam anders.

Noch 1912 kündigte Helly an:

> „Über die Anwendung des Satzes auf nicht reguläre Sturmsche Reihen sowie auf Funk

Heimgekehrt nimmt Helly seine Studien mit dem Ziel der Habilitation, die er bereits vor dem Krieg ins Auge gefaßt hatte, sofort wieder auf[13]). Am 20. Mai 1921 tritt eine Kommission, bestehend aus u. a. Wirtinger, Furtwängler, Hahn und Kohn, zusammen: „Die Kommission beschloß einstimmig, *den Antrag auf Zulassung zu den weiteren Stadien der Habilitation zu stellen* und bestellt zum Berichterstatter Prof. Hahn."[14]) Die Habilitationsschrift selbst „Über Systeme linearer Gleichungen mit unendlich vielen Unbekannten" [W 8] liegt nur im Manuskript vor, sie war aber schon von den „Monatsheften", als deren Herausgeber zu dieser Zeit Hahn und Wirtinger fungieren, für den Jahrgang 1921 angenommen worden.

Am 4. Juli 1921, kurz vor der Habilitation, heiratet er Dr. Elise B l o c h (geb. 13. 10. 1892; jetzt Mrs. Elizabeth Weiss-Helly). Er hatte die gebürtige Wienerin bereits kennengelernt, als sie 1909 das Studium in den gleichen Fächern wie er aufnahm. Inzwischen hatte sie das Staatsexamen abgelegt und 1915 unter von Escherich und Furtwängler promoviert [Q 14]. Danach wurde sie Lehrerin, erst an einem koedukativen Gymnasium, dann an einer Handelsschule für Mädchen. Später muß sie diese Tätigkeit aber aus gesundheitlichen Gründen aufgeben. Sie gibt nur noch Nachhilfestunden sowie Abendkurse an der Volkshochschule und übersetzt schließlich wissenschaftliche Werke aus dem Englischen ins Deutsche, [Q 15] bis [Q 17].

Kurze Zeit nach der Heirat wird Helly am 3. August 1921 als Privatdozent an der Universität Wien bestätigt[15]). Zusammen mit der Arbeit [W 5] aus dem Jahre 1912 ist es die Schrift [W 8], in der wichtigste Ergebnisse der Funktionalanalysis antizipiert werden. Folgende Motivation liegt [W 8] zugrunde:

> „Die Bedingungen der Lösbarkeit eines Systems von unendlich vielen linearen Gleichungen mit unendlich vielen Unbekannten wurden, besonders durch die Arbeiten von E. Schmidt*) und F. Riesz**), für den Fall aufgestellt, daß die Koeffizienten und Lösungen gewissen Ungleichungen zu genügen haben. In der vorliegenden Arbeit soll gezeigt werden, daß der wesentliche Inhalt der betreffenden Bedingungen darin liegt, daß im Raum von abzählbar unendlich viel Dimensionen, in welchem die geometrische Interpretation des Gleichungssystems vor sich geht, eine Abstandsbestimmung vorliegt, für welche das „Dreiecksaxiom" gilt, oder, um den Zusammenhang mit den Minkowskischen Begriffsbildungen hervorzuheben, der „Aichkörper" ein konvexer Körper ist.
>
> *) Schmidt, Über die Auflösung linearer Gleichungen mit abzählbar unendlich vielen Unbekannten (Rendiconti del Circolo Mat. di Palermo, XXV).
> **)Riesz, Les systemes d'equations lineaires a une infinite d'inconnues. Paris 1913."
> ([W 8], p. 60).

Bei diesen Betrachtungen definiert Helly zunächst völlig unabhängig von Banach und Wiener eine abstrakte Norm (bei Helly: Abstandsfunktion) im Raum der Zahlenfolgen auf axiomatischem Weg. Des weiteren werden Funktionale und polare (Abstands-)Funktionen betrachtet, so daß insbesondere die Höldersche Ungleichung in einer stark verallgemeinerten Version hergeleitet werden kann (x, u, $a^{(\nu)}$, etc. bedeuten Folgen von reellen (oder komplexen) Zahlen (etwa $x = \{x_k\}_{k=1}^{\infty}$)

„Es sei nun eine Abstandsfunktion $D(x)$ gegeben, die jedem Punkte x eines gewissen Bereiches eine reelle positive Zahl zuordnet und die folgenden Bedingungen genügt:

I. Wenn x dem Definitionsbereich von $D(x)$ angehört, so soll auch λx ihm angehören, und es soll

$$D(\lambda x) = |\lambda| D(x)$$

sein.

II. Wenn x und y dem Definitionsbereich von $D(x)$ angehören, so soll auch $x + y$ ihm angehören, und es soll

$$D(x + y) \leqslant D(x) + D(y)$$

sein.

III. Aus $D(x) = 0$ folgt $x = 0$.

Mit Hilfe der Funktion $D(x)$ kann jetzt der Begriff der Grenze definiert werden: Es sei $x = \lim\limits_{\nu \to \infty} x^{(\nu)}$, wenn $D(x - x^{(\nu)})$ durch genügend große Wahl von ν beliebig klein gemacht werden kann. Die Begriffe Umgebung, Häufungsstelle, Ableitung einer Punktmenge ergeben sich in bekannter Weise.

Wie bei endlicher Dimensionszahl, so läßt sich auch hier der Begriff der polaren Funktion definieren. Es sei $u = (u_1, u_2, u_3 \ldots)$ so beschaffen, daß (u, x) für alle x mit endlichem $D(x)$ konvergiert, und daß die obere Grenze der Werte von (u, x), wenn x auf das Gebiet $D(x) = 1$ beschränkt wird, die so bezeichnet werden soll

$$\overline{|(u, x)|}_{D(x)=1},$$

endlich ist. Dann setzen wir

$$\Delta(u) = \overline{|(u, x)|}_{D(x)=1}.$$

Und es ergibt sich, wie in § 1, für beliebige x die fundamentale Ungleichung

$$|(u, x)| \leqslant \Delta(u) D(x).\text{“ ([W 8], p. 67).}$$

1927 kann Hahn unter Nutzung dieses Begriffsapparates den dualen Raum diskutieren (in diesem Zusammenhang wird in [Q 18], p. 271 vom „procédé de Minkowski-Helly“ gesprochen). Besonders bemerkenswert erscheint, wie schon in [W 5], die vom heutigen Standpunkt aus funktionalanalytische Betrachtungsweise, mit der Helly das eigentliche Problem der Arbeit angeht:

„Es liege nun ein System unendlich vieler linearer Gleichungen mit unendlich vielen Unbekannten vor:

$$(a^{(\nu)}, x) = c_\nu \qquad (\nu = 1, 2, 3 \ldots). \tag{1}$$

Ferner sei eine konvexe Abstandsfunktion $D(x)$ gegeben, und es seien sämtliche $\Delta(a^{(\nu)})$ endlich, wenn $\Delta(u)$ die zu $D(x)$ polare Funktion bedeutet.“ ([W 8], p. 69).

Es wird nun ein System untersucht,

„für welches die Ungleichungen

$$\left|\sum_{\nu=1}^{n} \lambda_\nu c_\nu\right| \leqslant M \, \Delta\left(\sum_{\nu=1}^{n} \lambda_\nu a^{(\nu)}\right)$$

für beliebiges n und beliebige Wahl der λ_ν erfüllt sind, und es werde nach hinreichenden Bedingungen für die Existenz einer Lösung x gesucht, für welches $D(x) \leqslant M_1$ ist, wobei $M_1 > M$.

Wenn beachtet wird, daß

$$L(u) = (u, x)$$

eine an u ausgeübte lineare Operation darstellt, welche den Bedingungen

$$L(a^{(\nu)}) = c_\nu \qquad (\nu = 1, 2, 3 \ldots)$$

$$|L(u)| \leqslant M_1 \, \Delta(u)$$

genügt, so zeigt sich, daß das Auflösungsproblem des Systems (1) ein Spezialfall folgendes Problems ist:

Es soll im Bereich der unendlich vielen Variablen $u_1, u_2, u_3 \ldots$ eine Operation L(u) gesucht werden, die folgenden Forderungen genügt:

I. Die Forderungen der Linearität:

$$L(\lambda u) = \lambda L(u)$$

$$L(u' + u'') = L(u') + L(u'').$$

II. $|L(u)| \leqslant M_1 \, \Delta(u)$

wobei M_1 eine beliebige Zahl $> M$ ist.

III. $L(a^{(\nu)}) = c_\nu \qquad (\nu = 1, 2, 3 \ldots).$

Kann eine Operation, die den gestellten Bedingungen genügt, gefunden werden, und kann dann ferner gezeigt werden, daß sich diese Operation in der Form

$$L(u) = (p, u), \qquad D(p) \leqslant M_1$$

darstellen läßt, so ist $x = p$ die gesuchte Lösung von (1).“ ([W 8], pp. 74–75).

Im Zusammenhang mit der Existenz einer Operation L(u) beschäftigt sich Helly wieder mit einem Satz vom Hahn-Banach-Typ, wohingegen er zur Bewältigung des Darstellungsproblems einige grundlegende Begriffe und Eigenschaften zur Theorie [illegible]

„Auf diese Arbeit von Helly ist auch deshalb hier so genau eingegangen worden, weil man von ihren Begriffen aus über die so disparaten Einzelheiten dieser Nummer einen einheitlichen Überblick erhält. Die sämtlichen bisher erwähnten Konvergenzbedingungen können nämlich derjenigen von Helly untergeordnet werden." ([Q 23], pp. 1442, 1447).

Als Helly im Wintersemester 1921/22 seine Vorlesungen als Privatdozent aufnimmt, ist folgender Kreis von Lehrenden am Mathematischen Institut tätig: die ordentlichen öffentlichen Professoren Wirtinger, Philipp Furtwängler (1869–1940), Hahn (Prom. 1902 U Wien)[16], Gustav Kohn (1859–1921), Alfred Tauber (1866–1942) und die Privatdozenten Ernst Blaschke (1856–1926), Lucius Hanni (1875–1931), Paul Roth (1882–1925; Prom. 1905 U Wien), Josef Lense (München; geb. 1890; Hab. 1921 U Wien) und Anton Rella (1888–1945; Prom. 1913 U Wien); im Sommersemester 1923 kamen noch der außerordentliche Professor Kurt Reidemeister (1893–1971) und der Privatdozent Vietoris (geb. 1891; Prom. 1919 U Wien) hinzu. Hellys erstes Thema ist die Algebra der linearen Transformationen [V 1]; seine späteren Vorlesungen beschäftigen sich fast durchweg mit geometrischen Problemen. Darüber hinaus liest er aber auch über lineare Integralgleichungen [V 8], lineare Operationen [V 11], trigonometrische Reihen [V 12]; siehe Anhang [V]. Er verwendet sehr viel Zeit auf die Vorbereitung dieser Vorlesungen und versteht es, seine eigene Begeisterung für die Mathematik auf seine Zuhörer zu übertragen: gerade der Werdegang der jüngeren Studenten liegt Helly sehr am Herzen. 1966 schreibt Edmund Hlawka (Wien; geb. 1916; Prom. 1938 U Wien) in der Österreichischen Hochschulzeitung:

„[. . .] da war zum Beispiel Helly, mit dessen Namen eine Reihe von grundlegenden Sätzen der Mathematik verknüpft ist und der wunderbare Vorlesungen hielt; [. . .]" ([Q 25]).

Hellys erste Schülerin (siehe [D 1]), Elise Stein[17] (Brunel Univ., Middlesex; geb. 1903), bezeichnet[18] dies sogar als „understatement":

„Seine Vorlesungen waren ein Kunstwerk, in dem sich sorgfältige Vorbereitung mit impulsiven Abschweifungen mischte, gewürzt durch seinen nie versiegenden Enthusiasmus."

Auch Karl Strubecker (Karlsruhe; geb. 1904; Prom. 1928 U Wien) stimmt[19] dem zu:

„Hellys Vorlesungen waren immer bestens vorbereitet, frei und sehr flüssig, ja sehr flott vorgetragen, didaktisch sehr gut und überaus verständlich."

Nun ist aber mit der Habilitation lediglich die Pflicht verbunden, Vorlesungen abzuhalten – für eine Privatdozentur gibt es keinerlei finanzielle Vergütung. So ist Helly gezwungen, für seinen Lebensunterhalt außerhalb der Universität zu sorgen, was bei der hohen Arbeitslosigkeit in den schweren Nachkriegsjahren mit großen Schwierigkeiten verbunden ist. Man muß es schon als Glück bezeichnen, daß Helly bereits 1921 in der „Bodenkreditanstalt" in Wien angestellt wird. Dies ermöglicht es ihm, in bescheidenen Verhältnissen zu leben: es ist sicherlich kein „Traumjob", jedoch muß er froh sein, überhaupt ein Auskommen zu haben. Für eigene mathematische Forschungen bleibt nur sehr wenig Zeit. Seine Vorlesungstermine hat er mit der täglichen Arbeit in der Devisenabteilung der Bank in Einklang zu bringen; siehe [Q 26]. Hinzu kommen noch Seminare, die abends in seiner Wohnung stattfinden.

1923 wird dann im „Jahresbericht“ [20]) die bereits erwähnte Schrift „Über Mengen konvexer Körper mit gemeinschaftlichen Punkten“ [W 9] veröffentlicht. Inzwischen hatten aber schon Johann R a d o n (1887–1956; Prom. 1909 U Wien) und Dénes K ö n i g (1884–1944) über diesen Hellyschen Satz publiziert. Helly schreibt selbst:

> [redacted]
> ich ohne Beweis vor dem Krieg in einem in der Wiener Math. Gesellschaft gehaltenen Vortrage verwendet hatte. Da ich glaube, daß mein ursprünglicher Beweis auch nach dem Radonschen Interesse bietet, will ich ihn im folgenden kurz skizzieren.“ ([W9], p. 175).

Diese Aussage wird durch Radon bestätigt:

> „Vor einigen Jahren wurde mir von dem Wiener Mathematiker E. Helly der folgende Satz mitgeteilt: Notwendig und hinreichend dafür, daß konvexe Körper des n-dimensionalen Raumes in beliebiger Menge einen gemeinsamen Punkt besitzen, ist, daß je n + 1 Körper der Menge einen Punkt gemeinsam haben [. . .], so erlaube ich mir den schönen Hellyschen Satz unter Darlegung meines Beweises mitzuteilen.“
>
> [redacted]
> nach Wien zurückgekehrt; ein daraufhin erfolgter Briefwechsel mit dem Verfasser hat ergeben, daß der seinerzeit von Herrn Helly gefundene Beweis von dem des Verfassers wesentlich verschieden ist.“ ([Q 29], p. 113).

Im Anschluß an Radon veröffentlicht 1922 auch König [Q 30] einen Beweis dieses Satzes von Helly. 1936 übersetzt Dimitrij A. R a i k o w (Moskau) Hellys Arbeit für die „Uspehi Mat. Nauk“ ins Russische [W 9]. Diese Zeitschrift, von Lazar' A.

get that high. Whenever a non-routine question came up, the difference between Helly and the other two became apparent: Helly gave the problem a mathematical formulation and obtained a solution which could be used over and over again in similar cases; the other two worked the problem numerically in each case, by trial and error, grinding it out on their hand-operated Odhner desk calculators. Incidentally, even the manner in which he handled his desk calculator was ingenious, devising shortcuts and stepsaving routines."

Am 22. August 1930 wird das einzige Kind der Hellys, Walter Sigmund, geboren. Dieser wird 1959 den Ph. D. in Physik am Massachusetts Insitute of Technology erwerben und 1966 Professor für Operations Research am Polytechnical Institute in Brooklyn werden [Q 37].

Im gleichen Jahr erscheint die Schrift „Über Systeme von abgeschlossenen Mengen mit gemeinschaftlichen Punkten" [W 10]. In dieser Arbeit, die an den 1923 veröffentlichten geometrischen Satz anknüpft, kann er zeigen,

„daß dieser Satz ein Spezialfall eines allgemeinen rein topologischen Satzes" ([W 10], p. 281)

ist. Dieser lautet (unter einer Zelle versteht Helly eine beliebige, abgeschlossene und ganz im Endlichen liegende Punktmenge, deren sämtliche Brouwersche Zahlen den Wert Null haben):

„Es sei irgendeine (im Endlichen liegende) Menge von Zellen des R^n gegeben. Der Durchschnitt von je k dieser Zellen sei für $k = 1, 2, \ldots n$ wieder eine Zelle, der Durchschnitt von je $n + 1$ Zellen sei nicht leer. Dann ist der Durchschnitt aller Zellen der Menge nicht leer und wieder eine Zelle." ([W 10], p. 302).

Eine ausführliche Würdigung dieser Arbeit sowie der von 1923 findet sich in [Q 2], [Q 10].

Sie ist gleichzeitig Hellys letzte rein mathematische Veröffentlichung. Ihm verbleibt neben seiner Sorge um den Unterhalt der Familie und den Lehrverpflichtungen an der Universität keine Zeit mehr, um noch etwas Veröffentlichungsreifes zu erarbeiten. Dieser Zeitmangel, seine vielfältigen Ideen auszuarbeiten, belastet ihn sehr, wenn er auch nie bitter ist; kann er doch darauf verweisen, daß jede einzelne seiner Arbeiten, so gering an Anzahl sie insgesamt auch sind, auf großes Interesse stößt und von der Fachwelt geschätzt und genutzt wird.

Zeitmangel ist es auch, der ihn an einer vertieften Ausübung seiner Hobbys hindert. Zu nennen sind Schach – er ist mit dem Schachmeister R. Réti befreundet –, klassische Musik und Literatur – es wird von musikalischen Abenden mit bekannten Künstlern in der Hellyschen Wohnung berichtet –, Photographieren – zwei seiner Aufnahmen von Motiven in der Nähe des Defregger-Hauses in den Osttiroler Alpen werden sogar vom „Österreichischen Fremden-Verkehrs-Bureau" für Werbezwecke verwendet.

Auch in dem Freundeskreis, der sich montags abends im Café Zentral trifft, wird Helly gern gesehen. Zu diesem gehören u. a. Adalbert Duschek (1895–1957; Prom. 1921 U Wien), Hilda Geiringer (1895–1973; Prom. 1917 U Wien), Kurt Gödel (1906–1978; Prom. 1929 U Wien), Eugen Lukacs, Walter Mayer (1887–1948; Prom. 1912 U Wien), Maximilian Pinl (1897–1978; Prom. 1926 U Wien), Elise Stein, Otto Szàsz (1884–1952) und

Olga Taussky (geb. 1906; Prom. 1930 U Wien). Helly versteht es nicht nur, Fachsimpeleien in fast jedem mathematischen Zweig originelle Bemerkungen beizusteuern, sondern er beteiligt sich auch lebhaft an allen darüber hinausgehenden Diskussionen über Tagesthemen etc. Er ist ebenfalls mit Philipp Frank (1884–1966) und Richard von Mises (1883–1953) befreundet, die ihn häufig in den Weihnachts- und Osterferien besuchen. Helly führt überhaupt ein für seine Freunde immer offenes Haus und ist als guter Gesellschafter beliebt, da er selbst in schwierigsten Lagen optimistisch und humorvoll bleibt. Aber nicht nur für seine Freunde steht sein Haus offen, er ist auch einer der wenigen Mathematiker in Wien, der junge und noch nicht arrivierte Mathematiker zu sich einlädt; etwa[18]) Elise Stein:

> „Ich erinnere mich an meinen ersten Besuch bei Helly. Wir hatten fertig diskutiert, ich lernte Frau Helly kennen, und nach gemessener Zeit wollte ich mich verabschieden. Helly fragte mich, ob ich etwas vorhabe, was ich verneinte. Darauf sagte er: „Sie wollen sicher nur gehen, weil es Zeit für nachtmahlen ist. Warum bleiben Sie nicht und essen Sie mit uns? Es wäre doch schade, aus solchen Gründen ein schönes Zusammensein abzubrechen." Ich blieb, nahm an einem einfachen, guten Abendessen teil, und wir hatten einen wunderschönen Abend. Das „offene Haus" wurde ebenso geführt. Viel Herzlichkeit, kein Firlefanz, und jeder hat sich zu Hause und wohl gefühlt."

So erklären wohl diese vielfältigen Bindungen an Wien, daß er die Stadt, in der er letztlich als Wissenschaftler beruflich blockiert ist, dennoch nicht verläßt. Das mathematische Institut an der Universität Wien ist zwischen 1921 und 1934 voll besetzt. Die Schaffung eines weiteren Extraordinariates für Helly ist unmöglich. Was eine Berufung nach Deutschland angeht, schreibt[18]) Elise Stein:

> „Wenn Helly eine Berufung an eine andere Universität bekommen hätte, hätte er sie wohl angenommen. Es war aber nicht in seiner Natur, nach etwas zu jagen, das bei dem damaligen politischen Klima in Deutschland kaum erreichbar war. Jedenfalls machte er immer den Eindruck einer abgeschlossenen Persönlichkeit."

Schließlich verschlechtert sich 1933 mit der Machtergreifung Hitlers in Deutschland das politische Klima für die Juden auch in Österreich zusehends. Jede Chance, doch noch eine Professur in Wien zu erhalten, ist jetzt endgültig zunichte. Noch kann Helly allerdings bei der „Phönix" weiterarbeiten. Diese geht zwar am 8. April 1936 in Liquidation, wird aber von der „Österreichischen Versicherungs-AG" übernommen, so daß er seine Stellung vorerst behalten kann.

Im Jahre 1937 kommt es noch zu einer versicherungsmathematischen Veröffentlichung. Im Assekuranz-Jahrbuch referiert Helly über „Die neue englische Sterblichkeitsmessung an Versicherten" [W 11]. Auch auf diesem Zweig der Mathematik hat er einige weitreichende Ideen, die jedoch ebenfalls nicht zur Ausführung kommen. Dazu betreut er gerade jetzt, 1937/38, zwei Dissertationen, die von Martha Schramek (geb. 1910) und Erich Ludwig Huppert (geb. 1910); siehe[23]) [D 2], [D 3].

Im März 1938 kommt es dann zum Anschluß Österreichs. Die im Vorlesungsverzeichnis für das Sommersemester 1938 von Helly angekündigte Vorlesung über Differenzenrechnung und Interpolation [V 10] darf er nicht mehr halten. Aus der Stellung bei der Versicherung wird er ebenfalls entlassen. Ihm ist buchstäblich der Boden unter den Füßen weggezogen. Erst jetzt plant er, sein geliebtes Wien zu verlassen.

Als einer von zwanzig Angehörigen der Institute der Mathematik und Theoretischen Physik an der Universität und an der Technischen Hochschule in Wien wird er zur Emigration gezwungen (vgl. [Q1], pp. 183–208). Ein Onkel von Frau Helly, der als Ingenieur in den USA arbeitet, beschafft ihnen ein amerikanisches Visum. Noch ist die Ausreise auf legale Weise möglich; es muß sogar eine „Reichsfluchtsteuer" bezahlt werden.

Im September schiffen sich die Hellys mit ihrem nunmehr acht Jahre alten Sohn nach New York ein.

In dieser äußerst bedrängten Zeit entsteht noch einmal ein Manuskript, betitelt „The calculus of variations in linear spaces", das aber unveröffentlicht bleibt, da es die gewohnte Hellysche Qualität der unglücklichen Umstände halber nicht erreicht haben soll[20]).

In der ersten Zeit leben die Hellys in New York und müssen Nachhilfestunden geben, um sich mehr schlecht als recht durchzuschlagen. Dabei ist zu berücksichtigen, daß die Auswirkungen der Weltwirtschaftskrise in Nordamerika bis in die vierziger Jahre hineinreichen. Anfang 1939 hält Helly einen Vortrag am Institute for Advanced Study in Princeton, New Jersey. Herbert B u s e m a n n (Santa Ynez, Calif.; geb. 1903) war[24]) unter den Zuhörern:

> „Es war dort üblich, die bekannteren neuen Ankömmlinge zu einem Vortrag einzuladen, damit einflußreiche Amerikaner sich ein Urteil bilden konnten. Die Vortragenden packten gewöhnlich das an, was sie kannten, ohne sich um den Prozentsatz der Hörer zu kümmern, die etwas verstehen konnten. Offenbar von niemand beraten, hielt Helly einen leichten, allgemeinverständlichen Vortrag, so daß die meisten mit dem Eindruck davonkamen, daß Helly nichts zu bieten habe. Mein Einfluß war damals viel zu gering, dem Eindruck entgegenzuwirken."

Manche Kontakte bahnen sich auch im Hause von Harold H o t e l l i n g (1895–1973) – einem der Begründer der modernen mathematischen Statistik in den USA – an: zu dem allmonatlichen „open house" in Mountain Lakes, New Jersey, finden sich die Hellys als gern gesehene Gäste ein. Um alte Bekanntschaften aufzufrischen und um neue Kontakte zu knüpfen, nimmt Helly in den folgenden Jahren regelmäßig an den in der Umgebung New Yorks (bzw. später in Chicago) stattfindenden Tagungen[25]) der American Mathematical Society (AMS) teil.

Nachdem Walter Mayer ihn bei Albert E i n s t e i n (1879–1955) eingeführt hat, bekommt Helly im Februar 1940 auf dessen Empfehlung hin eine Anstellung am College of Paterson, Paterson, New Jersey, für ein Semestergehalt[26]) (Februar–Juni) von 450 $. Auch Hellys Frau erlangt an demselben College eine gering dotierte Anstellung[27]). Da dies allerdings nicht genug zum Leben ist, müssen die Hellys weiter zusätzlich privat Unterricht geben. „There he hardly gets enough to keep body and soul together for himself and his wife"[28]). Außerdem schreibt er auf Aufforderung Referate für die gerade gegründeten „Mathematical Reviews", und zwar vorwiegend im Bereich Geometrie[29]).

Im Februar 1942 wechseln er wie auch seine Frau[27]) zum Monmouth Junior College, Long Branch, New Jersey, wo er 1500 $ im Jahr verdient[26]). Aber auch diese wie die vorhergehende Tätigkeit ist für einen Mann wie ihn, insbesondere in wissenschaftlicher Hinsicht, völlig unbefriedigend.

So ist Helly voller Freude, als er im Februar 1943 als „Instructor“ beim Signal Corps Training Program[30]) an der „Engineering School“ des Illinois Institute [illegible]

I. Albert Barnett (1894–1974) angestellt[31]) wird; vgl. [Q 39], p. 400.

[illegible]

in Wien hat er unter Herzbeschwerden zu leiden gehabt. Es sind offensichtlich Nachwirkungen der Kriegsverletzung aus dem Jahre 1915.

Im September des Jahres 1943 scheint sich endlich alles zum Guten zu wenden. Helly wird am Mathematics Department des IIT selber als „Visiting Lecturer (ASTP)“[32]) für Mathematik im Rahmen des „Army Specialized Training Program“ übernommen, wo zu diesem Zeitpunkt auch Busemann und Max Dehn (1878–1952) sowie ebenfalls Haim Reingold (Gary, Indiana; geb. 1910) tätig sind; vgl. [Q 39], p. 521, 579f.

Da zu jener Zeit eine große Anzahl bedeutender Mathematiker aus Europa in die Vereinigten Staaten kam, war es für kaum einen einfach, eine seinen Fähig-

Nachwirkungen des I. Weltkrieges. Für Helly, der mitten im Krieg stirbt, kommt es durch die MAA lediglich zu folgender[36]) Meldung:

> „Professor Edward Helly of Illinois Institute of Technology died on November 28, 1943." ([Q 39], p. 644).

Auch die Mathematische Gesellschaft in Wien gedenkt seiner nur mit wenigen Worten:

> „Dr. phil. E. Helly, Priv. Doz. a. d. U. Wien, starb im Jahre 1942 [1943!] in Chicago im 59. Lebensjahr als Professor des Illinois Institute of Technology." ([Q 41]).

Im Jahre 1951 erscheint nach der kriegsbedingten Unterbrechung das erste Heft [Q 44] des „Jahresbericht"; die vorangestellte „Gedenktafel" ist der Erinnerung an 79 seit 1933 verstorbenen Mitgliedern gewidmet: der Name Helly fehlt.

Birnbaum, Hellys Kollege aus der Wiener Zeit bei der „Phönix", gibt[22]) seinen Gefühlen in den Worten Ausdruck:

> „It is, indeed, quite sad that so little attention is being paid to the human being, while theorems bearing his name have been considered classics for half a century. [. . .] One cannot help thinking that there was a good man who had no luck in life." –

Erst 1977 wird im Großen Hörsaal des Mathematischen Instituts der Universität Wien [Q 42] eine Ehrentafel enthüllt, die auch Eduard Helly würdigt.

Nachtrag bei der Korrektur (15. 4. 1980):

Durch zusätzliche Nachforschungen von Frau Hofrat Dr. Auguste Dick sowie durch Mitteilungen von Edmund Hlawka und Leopold Schmetterer (Wien) wurden uns weitere wertvolle Informationen zugänglich gemacht.

Im Maturitätszeugnis des k.k. Maximilians-Gymnasiums (jetzt Wasa-Gymnasium) unter Datum des 10/VII 1902 wird Helly der „Erfolg der Prüfung: reif mit Auszeichnung" bescheinigt, wobei bzgl. des Faches Mathematik die Note „mit Erlass d. mündl. Prüf. vorzüglich" vergeben wurde. Der Stand des Vaters wird hier mit „Privatbeamter" angegeben.

Aus [Q 45] geht hervor, daß Helly unter „Gewählter Beruf: Technik" angibt, was die Vielfalt der Fächer zu Beginn seines Studiums an beiden Wiener Hochschulen erklärt. Aus dieser Liste geht auch hervor, daß Helly und Philipp Frank Schulkameraden desselben Jahrgangs waren.

Aus Unterlagen des Österreichischen Staatsarchiv-Kriegsarchiv, Wien (Brief vom 17. 10. 79 an Frau Dr. A. Dick, Zb. 38.904/1979) entnimmt man u. a., daß Helly „von Beruf Privat-Mittelschullehrer in Wien IX am 5.12.1914 als Kriegsfreiwilliger assentiert wurde [. . .]; er war berechtigt zum Tragen des Einjährig-Freiwilligen-Abzeichens. Am 2. 1. 1915 wurde H. präsentiert zur aktiven Dienstleistung . . ." Aus den weiteren Laufbahndaten ist ersichtlich, daß Helly am 1. 9. 1915 zum Kadetten in der Reserve und am 3. 12. 1920 nachträglich zum Oberleutnant in der Reserve ernannt wird.

In einer Schilderung der Mathematik an der Wiener Universität um 1922 (aus studentischen Sicht) wird in der Biographie [Q 46] pp. 39ff, 100, auch mehrmals der Name Helly er-

Anhang

A Anmerkungen

[1]) Aus Hellys „Curriculum vitae" vom 27. 1. 1921 (Kopien dieser wie auch anderer Akten aus dem Archiv der Universität Wien verdanken wir dessen Direktor, Prof. Dr. Franz Gall) sowie dem von Helly ausgefüllten „Faculty Record" des Illinois Institute of Technology (IIT) vom 8. 9. 1943 (Kopien aus den Archiven des IIT stellte uns Haim Reingold zur Verfügung).

[2]) Aus Hellys „Kurriculum vitae" vom 5. 2. 1907 (Archiv Univ. Wien).

[3]) Aus dem „Gutachten über die Dissertation des Herrn Eduard Helly [. . .]" vom 20. 2. 1907 (Archiv Univ. Wien).

[4]) Aus dem Fonds zur Heranbildung von Hochschuldozenten durch Ministerialerlaß vom 31. 7. 1907 (Z. 28725) verliehen (Archiv Univ. Wien).

[5]) Aus Hellys „Curriculm vitae" vom 27. 1. 1921.

[6]) Aus einem Brief von Richard Courant an seine Braut Nelly Neumann vom 1. 12. 1907, der von Constance Reid (San Francisco, Calif.) in einer Abschrift zur Verfügung gestellt wurde (Brief vom 21. 2. 1979); siehe auch die ausführlichere Darstellung in [Q 4], pp. 21–22, 254.

[7]) Richard Suppantschitsch (= Zupančič) (1878–1949; Prom. 1913 U Wien), dessen „Mathematisches Unterrichtswerk", 8 Bände zu je etwa 250 S., 1908–1913, große Verbreitung fand; vgl. etwa die sehr positiven Rezensionen in den „Monatsh. Math. Phys." der entsprechenden Jahrgänge; siehe z. B. [N 2], Bd. **6** (1923–31) sowie auch [Q 33], [Q 43].

[8]) Laut Hellys „Faculty Record".

[9]) Hubert E. Bray (1889–1978); siehe [Q 5], bzgl. der Namensgebung auch [Q 6], p. 14.

[10]) Eine Kopie der Seminarausarbeitung wurde uns von Frau Dr. Susanne Dierolf, Univ. München, zur Verfügung gestellt.

[11]) Aus einem Brief von Leopold Vietoris vom 26. 10. 1978.

[12]) Helly lernt außerdem Heinrich Elbogen kennen und schätzen, der in den Jahren 1916 bis 1918 eine Arbeit über die axiomatische Methode in der Mathematik [Q 11] verfaßt, die 1928 nach dem Tode des Verfassers unter Mitwirkung von Helly und Prof. Samuel Oppenheim herausgebracht wird:

> „Die vorliegende Schrift entstand in russischer Kriegsgefangenschaft in den Jahren 1916 bis 1918 zu einer Zeit, da der Autor unter den schwersten äußeren Bedingungen hart damit zu ringen hatte, unter dem furchtbaren physischen und psychischen Druck nicht zusammenzubrechen. [. . .]. Mir selbst ist das Werk eine wehmütige Erinnerung an den Dahingegangenen und an die Zeit der Kriegsgefangenschaft, in der es einer der wenigen Lichtpunkte war, Heinrich Elbogen kennengelernt zu haben." (aus dem Geleitwort Helly zu [Q 11]); vgl. auch [Q 1], p. 193.

[13]) Das zeigen die Vorträge, die er vor der Wiener Mathematischen Gesellschaft am 16. 1. 1914 und am 22. 5. 1914 „Über unendliche Gleichungssysteme und lineare Funktionaloperationen" sowie „Einiges Geometrische über den Raum von unendlich vielen Dimensionen" hält; siehe [Q 13], vgl. auch[4]).

[14]) „Kommissionsbericht über das Habilitationsgesuch des Dr. Eduard Helly (für Mathematik)" (Archiv Univ. Wien). In dem aus Hahns Feder stammenden Kommissionsbericht ist u. a. nachzulesen:

> „Die eingereichte Habilitationsschrift [. . .] stellt nun eine bedeutende Leistung dar, sowohl was die Tragweite der Resultate, als auch die zu ihrer Begründung herangezogenen Methoden anlangt. Die durch die Untersuchungen Hilbert's in den Vordergrund des Interesses gerückte Theorie der linearen Gleichungssysteme mit unendlich vielen Unbe-

tiefer in die Theorie der Gleichungssysteme mit unendlich vielen Unbekannten einzudringen, als es seinen Vorgängern gelungen war. Von besonderer Wichtigkeit ist der Herrn Helly gelungene Nachweis, daß es zu jedem solchen Gleichungssystem eine „natürliche" Maßbestimmung gibt, bei der sämtliche Lösungen der Behandlung zugänglich werden."

[15]) Brief des Bundesministeriums für Inneres und Unterricht vom 3. August 1921 an das Dekanat der philosophischen Fakultät der Universität in Wien, Zl: 16759/I/21 Abt. 2 (Archiv Univ. Wien).

[16]) Promotionsdaten an der Univ. Wien wurden [Q 24] entnommen.

[17]) Elise Stein emigrierte 1939 nach England; nach anfänglicher Lehrtätigkeit an Privatschulen war sie ab 1948 bis zu ihrer Emeritierung 1970 als „Senior Lecturer" am Chelsea College of Science and Technology of the University of London tätig. Sie ist wesentlich am Projekt der „Open University" beteiligt.

[18]) Aus einem Brief von Elise Stein vom 4. 12. 1978.

[19]) Aus einem Brief von Karl Strubecker vom 26. 10. 1978.

[20]) Der Deutschen Mathematiker-Vereinigung war Helly 1922 beigetreten [Q 27]. Auf Tagungen dieser Gesellschaft hält Helly nach eigenen Angaben 4 Vorträge (nach „Faculty Record"). Davon konnte ein Vortragsprotokoll ausfindig gemacht werden: Helly war mit seiner Frau auf der Jahresversammlung zu Marburg a. d. Lahn vom 20. bis 25. September 1923. Er hält dort am 25. September einen Vortrag über „Allgemeine Variationsrechnung"; siehe [Q 28].

[21]) Chefmathematiker und zugleich Direktor dieser Abteilung ist Alfred Berger (1882–1942); er hatte ebenfalls unter Wirtinger ein Jahr vor Helly promoviert und war seit 1910 bei dieser Gesellschaft tätig. Nach seiner Habilitation (1928 U Wien) wird er 1933 dort nicht-beamteter außerordentlicher Professor für Mathematik der Privatversicherung und für Mathematische Statistik; schließlich gibt er 1938 seine Tätigkeit in der Versicherungsbranche endgültig auf und wird außerordentlicher Professor an der Universität Wien; s. [Q 31], [Q 32], [N 2], Bd. **6**, p. 182, **7a**, p. 146. – Als Vorstand der Rückversicherungsabteilung und Direktor-Stellvertreter fungiert Ernst Fanta (1878–1939; Prom. 1900 U Wien, Hab. 1910 TH Wien); daneben ist er ebenfalls Hochschullehrer für Versicherungsmathematik und speziell für Betriebstechnik der Lebensversicherung; siehe [Q 1], p. 191, [Q 33], [Q 35]. – In leitender Position in der Auslandsabteilung arbeitet Stefan Vajda (Brighton; geb. 1901; Prom. 1925 U Wien) (aus einem Brief von Stefan Vajda vom 24. 4. 1979); vgl. [Q 1], p. 205. – Auch Lukacs hält in den Jahren 1927–1938 als Dozent an der Wiener Volkshochschule „Volksheim" verschiedene mathematische und physikalische Kurse ab ([Q 1], p. 195f).

Überhaupt bestanden zwischen der „Phönix" und den Wiener Hochschulen über Jahrzehnte hinweg starke Wechselwirkungen. Alfred Tauber (1866–1942(?)) war in erster Linie Versicherungsmathematiker: „Von 1892 bis 1908 versah er die Stelle eines Chefs des mathematischen Büros der K. K. priv. Lebensversicherungsanstalt österr. Phönix, dann war er bis 1912 als Konsulent bei dieser Gesellschaft tätig" ([Q 34], p. 345); vgl. [Q 1], p. 202, [Q 33]. Auch Wirtinger wird in [Q 35] für das Jahr 1936 als Verwaltungsratsmitglied der „Phönix" aufgeführt; vgl. auch [Q 36], p. 6.

[22]) Aus einem Brief von Z. William Birnbaum vom 14. 2. 1979.

[23]) Martha Beer hatte 1933 die Staatsprüfung in Versicherungsmathematik abgelegt; danach war sie mit kurzen Unterbrechungen bis 1970 bei einer Versicherungsgesellschaft tätig. – Erich Huppert emigrierte noch im Jahr seiner Promotion (1938) nach England, wo er ab 1945 bei einer Versicherung arbeitete. – Als Korreferent bei beiden Promotionen wurde Karl Mayrhofer (1899–1969); Prom. 1922 U Innsbruck, 1930 Priv.-Doz. U Wien) (vgl. [N 2]) zugeteilt, der seit der Emeritierung Furtwänglers (nach SS 1938) einziger ordentlicher Professor (seit WS 1936/37) am Mathematischen Institut der Universität Wien war (aus einem Brief von Martha Beer vom 25. 4. 1979).

[24]) Aus einem Brief von Herbert Busemann vom 2. 11. 1978.

[25]) Die Teilnahme an 13 Tagungen ist durch [Q 38], **46**, p. 368, 574; **47**, p. 3, 333, 523; **48**, p. 3, 183, 335, 491, 800; **49**, p. 24, 516; **50**, p. 23 belegt.

[26]) Aus Personalakten (unter Datum vom 15. 2. 1940 bzw. 3. 2. 42) im Archiv des Institute for Advanced Study, Princeton; vgl. [33]).

[27]) Aus dem „Faculty Record" des IIT vom 10. 9. 1943 von Elizabeth B. Helly.

[28]) Aus dem Brief von Oswald Veblen unter [33]) vom 21. 10. 1941.

[29]) Im Januar 1940 ist er auf Empfehlung von R. G. D. Richardson und G. C. Evans Mitglied der AMS geworden (gemäß Aufnahmeantrag von Helly im Archiv der AMS; Brief und Kopien vom 31. 10. 1978 von Ellen Hopkins-Heiser); vgl. [Q 38], **46**, p. 576. – Es entstanden („Faculty Record") in den Jahren 1940–1943 ungefähr 80 Referate für die „Math. Reviews"; vorausgegangen waren ungefähr 30 Referate für die „Monatshefte" in den Jahren 1923–1937. – 1942 wird Helly auch Mitglied des Institute of Mathematical Statistics. – Im Archiv der „Math. Reviews" in Ann Arbor, Michigan, sind noch die „reply cards" Hellys aus den Jahren 1939 bzw. 1943 vorhanden, die seine Interessengebiete sowie Sprachkenntnisse im Hinblick auf seine Tätigkeit als Referent registrieren (Brief und Kopien vom 18. 12. 1978 von Jane Z. Ophoff).

[30]) In dieser Zeit ist Haim Reingold „Supervisor of Mathematics Instruction" beim „Signal Corps Training Program" am IIT (vgl. [Q 39], p. 73, 580); er schreibt: „This program offered technical training to men inducted into the U.S. Army and waiting to go into active service in the Signal Corps. Dr. and Mrs. Helly taught elementary mathematics (through calculus) needed in the training for Signal Corp communication. [. . .] The Signal Corps Training Program ended in Summer of 1943 and Edward Helly was appointed Visiting Lecturer in the Mathematics Department of IIT at a salary of $ 2,400 for two semesters. He started teaching in September, 1943, [. . .]" [aus einem Brief von Haim Reingold vom 8. 2. 1979].

[31]) Der Auftrieb, den Helly hierdurch erhält, wird aus dem Vorwort zu dem Lehrbuch [Q 40] deutlich: „The authors also acknowledge their debt to the late Dr. Edward Helly. In addition to contributing some of the material for a number of the chapters, he improved the book in many places by his suggestions and criticisms. By his untimely death the authors lost a fine friend and an inspiring collaborator."

[32]) Laut „Faculty Record"; vgl. auch [Q 39], p. 592, [Q 38], **49**, p. 846. Bzgl. ASTP siehe [Q 39], pp. 466–470.

[33]) In den Akten des Institute for Advanced Study befinden sich Empfehlungsschreiben für Helly von Hermann Weyl an C. Newton Stokes (Temple Univ.) vom 2. 4. 1941, von Oswald Veblen an Dean R. G. D. Richardson (Brown Univ.) vom 21. 10. 1941, von Oswald Veblen an C. Newton Stokes vom 12. 1. 1942 und von Oswald Veblen an T. F. Cope (Queens College) vom 15. 4. 1942 (Brief und Kopien vom 4. 12. 1978 von Caroline D. Underwood).

[34]) Aus dem Brief von Hermann Weyl unter [33]) vom 2. 4. 1941.

[35]) Aus einem Brief von Karl Menger an L. R. Ford (IIT) vom 29. 4. 1943 (Archiv des IIT); wertvolle Informationen und Anregungen haben wir auch seinen Briefen vom 31. 10. 1978 und 21. 2. 1979 entnommen.

[36]) Siehe auch die fast gleichlautende Anzeige der AMS in [Q 38], **50**, p. 177.

W Werke Hellys

[W 1] Beiträge zur Theorie der Fredholm'schen Integralgleichung. Dissertation, Univ. Wien; eingereicht: 5. Februar 1907; 40 pp. (Handschrift, 4°)

[W 2] Lösungen der Aufgaben in Suppantschitsch Lehrbuch der Geometrie für die IV. und V. Klasse der Realschulen. F. Tempsky, Wien 1911; 85 pp., 8°

[W 3] Lösungen der Aufgaben in Suppantschitsch Lehrbuch der Geometrie für die IV. und V. Klasse der Gymnasien und Realgymnasien. F. Tempsky, Wien 1911; 92 pp., 8°

[W 4] Lösungen der Aufgaben in Suppantschitsch Lehrbuch der Arithmetik für die IV. und V. Klasse der Gymnasien und Realgymnasien und der IV. Klasse der Realschulen und die Wiederholung in der V. Klasse dieser Anstalten. F. Tempsky, Wien 1912; 56 pp., 8°

[W 5] Über lineare Funktionaloperationen. Österreich. Akad. Wiss. Math.-Natur. Kl. S.–B. IIa. **121** (1912) 265–297. Sonderdruck: A. Hölder, Wien 1912; 33 pp., 8°

[W 6] Über Reihenentwicklungen nach Funktionen eines Orthogonalsystems. Österreich. Akad. Wiss. Math.-Natur. Kl. S.-B. IIa. **121** (1912) 1539–1549. Sonderdruck: A. Hölder, Wien 1912; 11 pp., 8°

[W 7] Lösungen der Aufgaben in Suppantschitsch Lehrbuch der Arithmetik für die VI. bis VIII. Klasse der Gymnasien und Realgymnasien sowie für die V. bis VII. Klasse der Realschulen. F. Tempsky, Wien 1913; 100 pp., 8°

[W 8] Über Systeme linearer Gleichungen mit unendlich vielen Unbekannten. Monatsh. Math. Phys. **31** (1921) 60–91

[W 9] Über Mengen konvexer Körper mit gemeinschaftlichen Punkten. Jber. d. Dt. Math.-Verein. **32** (1923) 175–176. Übersetzung ins Russische durch D. A. Raikow in: Uspehi Mat. Nauk **2** (1936) 80–81

[W 10] Über Systeme von abgeschlossenen Mengen mit gemeinschaftlichen Punkten. Monatsh. Math. Phys. **37** (1930) 281–302

[W 11] Die neue englische Sterblichkeitsmessung an Versicherten. Assekuranz Jahrbuch **53** (1934) 115–122

R Rezensionen der Publikationen Hellys

Die Rezensionen sind dem „Jahrbuch über die Fortschritte der Mathematik" (= FdM) entnommen; wird kein Referent genannt, so erfolgt nur der Abdruck der bibliographischen Daten. Die Nummern beziehen sich auf die zugehörigen Werke [W].

[R 2] FdM **42/1911** (1914), 539

[R 3] FdM **42/1911** (1914), 539

[R 4] FdM **43/1912** (1915), 230; Z. f. d. österreich. Gymnasien, Wien **66** (1915) 475–476 (J. Mattauch, Wien)

[R 5] FdM **43/1912** (1915) 418–419 (Prof. E. Hellinger, Frankfurt a. M.)

[R 6] FdM **43/1912** (1915) 419 (Prof. E. Hellinger, Frankfurt a. M.)

[R 7] FdM **44/1913** (1918) 198; Z. f. d. österreich. Gymnasien, Wien **67** (1916) 755 (Dr. A. Lechthaler, Wien); Monatsh. Math. Phys. **27** (1916) Lit. 29

[R 8] FdM **48/1921–22** (1926) 1250–1251 (Prof. O. Toeplitz, Kiel)

[R 9] FdM **49/1923** (1928) 534 (Prof. W. Blaschke, Hamburg)

[R 10] FdM **56/1930** (1933) 499 (Dora Koch, Berlin)

V Vorlesungen Hellys in Wien

Zusammengestellt nach [Q 26]; ohne Fortsetzungen und Wiederholungen.

[V 1] Algebra der linearen Transformationen, WS 21/22

[V 2] Ausgewählte Kapitel aus der neuen Geometrie, WS 22/23

[V 3] Projektive Geometrie in synthetischer Darstellung, WS 23/24

[V 4] Konforme Abbildung, WS 24/25

[V 5] Funktionen von unendlich vielen Veränderlichen, WS 25/26

[V 6] Einführung in die Theorie der algebraischen Kurven, WS 26/27

[V 7] Nichteuklidische Geometrie, WS 27/28

[V 8] Einführung in die Theorie der linearen Integralgleichungen, WS 28/29

[V 9] Analytische Geometrie, WS 30/31

[V 10] Differenzenrechnung und Interpolation, WS 33/34

[V 11] Einführung in die Theorie der linearen Operationen, WS 34/35

[V 12] Einführung in die Theorie der trigonometrischen Reihen, SS 35

D Dissertationen unter Helly

[D 1] Grünfeld, Elise, verh. Stein: Zur Untersuchung von Ebenenkomplexen in mehrdimensionalen Räumen. Diss. Univ. Wien; eingereicht: 12. Juli 1927; 44 pp. (Maschinenschrift, 4°). (Korreferent: Hans Hahn)

[D 2] Schramek, Martha, verh. Beer: Übertragung einiger Begriffe der Differential- und Integralrechnung auf Funktionaloperationen. Diss. Univ. Wien; eingereicht: 12. Mai 1937; 26 pp. (Maschinenschrift, 4°). (Korreferent: Karl Mayrhofer)

[D 3] Huppert, Erich Ludwig: Die Anwendung der Laplace-Transformation auf die Differenzenrechnung. Diss. Univ. Wien; eingereicht: 2. März 1938; 67 pp. (Maschinenschrift, 4°); (Korreferent: Karl Mayrhofer)

N Nachschlagewerke

Da es bezeichnend ist, wie schnell ein zeitgenössischer Mathematiker, dessen Name jedem Mathematikstudenten vertraut ist, in Vergessenheit geraten kann, sind hier einige Nachschlagewerke repräsentativ aufgelistet, die nach ihrer Konzeption Eduard Helly aufgenommen haben müßten. Während in [N 1], [N 2] sein Name noch zu finden ist und [N 3], [N 4] wenigstens Sätze von Helly verzeichnen (wie auch in [Q 20]), fehlt in [N 5] bis [N 8] jeglicher Vermerk.

[N 1] Kürschners Deutscher Gelehrten-Kalender. 2.–5. Auflage. Berlin – Leipzig 1926–1935

[N 2] J. C. Poggendorffs biographisch literarisches Handwörterbuch für Mathematik, Astronomie, Physik mit Geophysik, Chemie, Kristallographie und verwandte Wissensgebiete. Band 5, 6, 7a, (1904–1953), Berlin 1926–1957

[N 3] Helly's theorem [on convex sets]: In: The New Encyclopaedia Britannica in 30 Volumes; Makropaedia Vol. 4. Chicago etc. 1974, 1132 pp.; p. 952/Mikropaedia Vol. 4. Chicago etc. 1974, 1050 pp.; p. 1006/Encyclopaedia Britannica, Vol. I–XXIV. Chicago etc. 1968: *ohne* Stichwort

[N 4] Hellyscher Satz: In: Naas, J.; Schmid, H. L.: Mathematisches Wörterbuch, Bd. 1. Berlin – Stuttgart 1967, xiii + 1043 pp.; p. 716 (Auswahlsatz von Helly), p. 820 (Satz von Helly-Bray)

[N 5] May, K. O.: Bibliography and Research Manual of the History of Mathematics. Toronto – Buffalo 1973, ix + 818 pp.

[N 6] Meschkowski, H.: Mathematiker-Lexikon. Bibliographisches Institut, Mannheim – Zürich 1964, 309 pp.

[N 7] Österreichisches Biographisches Lexikon 1815–1950. Biographien Glae-Hüb (Hrsg. Österreich. Akad. Wiss.) Graz – Köln 1959, xxx + 448 pp.

[N 8] Encyclopaedia Judaica. Bd. 1–16. Jerusalem 1971/72

Q Quellen

[Q 1] Pinl, M.: Kollegen in einer dunklen Zeit; Schluß. Jber. d. Dt. Math.-Verein. **75** (1974) 166–208

[Q 2] Danzer, L.; Grünbaum, B.; Klee, V.: Helly's theorem and its relatives. In: Convexity (Proc. Sympos. Pure Math. Vol. VII; Conf. 13.–15.6.1961, Univ. of Washington, Seattle, Wash.; Ed. V. Klee). Providence, R. I. 1963, xv+516 pp.; pp. 101–180

[Q 3] Lense, J.: Helly, Eduard. In: Neue Deutsche Biographie, Bd. 8. Berlin 1969, xvi + 784 pp.; p. 490

[Q 4] Reid, C.: Richard Courant 1888–1972. Der Mathematiker als Zeitgenosse. Springer, Berlin – Heidelberg – New York 1979, 373 pp. – Courant in Göttingen and New York. The Story of an Improbable Mathematician. Springer, New York – Heidelberg – Berlin 1976, 314 pp.

[Q 5] Bray, H. E.: Elementary properties of the Stieltjes integral. Ann. of Math. (2) **20** (1918/19) 177–186

[Q 6] Evans, G. C.: The Logarithmic Potential, Discontinuous Dirichlet and Neumann Problems. Amer. Math. Soc., New York 1927, viii + 150 pp.

[Q 7] Lukacs, E.: Characteristic Functions. Griffin, London 1970, x + 350 pp.

[Q 8] Horváth, J.: Seminar über neuere Resultate aus der Theorie der lokalkonvexen Räume. (SS 1977); Seminarausarbeitung, Univ. Innsbruck, 89 pp.

[Q 9] Fuchssteiner, B.; Horváth, J.: Die Bedeutung der Schnitteigenschaften beim Hahn-Banachschen Satz. Jb. Überblicke Math. **1979**, 107–121

[Q 10] Boltjanski, W. G.; Jaglom, I. M.: Konvexe Figuren und Körper, pp. 173–257. In: Enzyklopädie der Elementarmathematik, V: Geometrie. VEB Deutsch. Verl. d. Wiss., Berlin 1971, xiii + 562 pp.

[Q 11] Elbogen, H.: Die axiomatische Methode in der Mathematik (Nach dem Tode des Verfassers herausgegeben von seiner Mutter Alie Elbogen unter Mitwirkung von Prof. Oppenheim und Dozent Dr. Helly). Im Selbstverlag, Wien 1928, 40 pp. (Österreich. Nationalbibl. Wien, Signatur 567444-B)

[Q 12] Helly, Anna: Les Orientales. Ein Beitrag zur Kenntnis von Victor Hugos Persönlichkeiten. Diss. Univ. Wien, 1917; 40 pp. (Handschrift)

[Q 13] Jber. d. Dt. Math.-Verein. **23** (1914) *29, 73*

[Q 14] Bloch, Elisa: Über den Begriff der Schwankung eines Systems von n Funktionen im n-dimensionalen Raum. Diss. Univ. Wien; eingereicht: 24. Juni 1915; 33 pp. (Handschrift, 4°) (In überarbeiteter Fassung: Bloch, Elise: Über Gesamtschwankungen von Funktionen mehrerer Veränderlicher. Mh. Math. Phys. **30** (1920) 105–122)
[Q 15] Lamb, H.: Lehrbuch der Hydrodynamik. (Nach der 5. englischen Ausgabe) Besorgt von Dr. Elise Helly, Wien. Mit Geleitwort und Zusätzen von R. von Mises. Teubner, Leipzig – Berlin 1931, xvi + 872 pp.
[Q 16] Timoshenko, S.: Schwingungsprobleme der Technik. Ins Deutsche übertragen von Dr. I. Malkin, New York, und Dr. Elise Helly, Wien. Springer, Berlin 1932, viii + 367 pp.
[Q 17] Hovgaard, W.: Die Spannungsverteilung in Schweißungen (Dt. von E. Helly, Wien) Z. f. angew. Math. Mech. **11** (1931) 341–348
[Q 18] Bourbaki, N.: Eléments d'histoire des mathématiques. Hermann, Paris 1969, 323 pp.
[Q 19] Kline, M.: Mathematical Thoughts from Ancient to Modern Times. Oxford Univ. Press, New York 1972, xvii + 1238 pp.
[Q 20] Monna, A. F.: Functional Analysis in Historical Perspective. Oosthoek Publ., Utrecht 1973, viii + 167 pp.
[Q 21] Bernkopf, M.: The development of function spaces with particular reference to their origins in integral equation theory. Arch. History Exact Sci. **3** (1966/67) 1–96
[Q 22] Köthe, G.: Topological Vektor Spaces, I. Springer, Berlin – Heidelberg – New York 1969, xv + 456 pp.
[Q 23] Hellinger, E; Toeplitz, O.: Integralgleichungen und Gleichungen mit unendlich vielen Unbekannten, pp. 1335–1597. In: Encyklopädie der mathematischen Wissenschaften, Bd. II. 3.2: Analysis. Teubner, Leipzig 1923–1927, xiv + pp. 675–1648
[Q 24] Verzeichnis der seit dem Jahre 1872 an der philosophischen Fakultät der Universität in Wien eingereichten und approbierten Dissertationen. Band III. Herausgegeben vom Dekanate der philosophischen Fakultät in der Universität Wien. Wien 1936, 434 pp. – Verzeichnis der 1934 bis 1937 an der philosophischen Fakultät der Universität in Wien und der 1872 bis 1937 an der philosophischen Fakultät der Universität in Innsbruck eingereichten und approbierten Dissertationen. Band IV, Nachtrag. Herausgegeben von den Dekanaten der philosophischen Fakultäten der Universitäten in Wien und Innsbruck. Wien 1937, 292 pp. – Verzeichnis der an der Universität Wien approbierten Dissertationen, 1937–1944. Zusammengestellt von L. Alker. Wien 1954, xi + 206 pp.
[Q 25] Hlawka, E.: Aus der Werkstatt des Forschers. Österreich. Hochschul.-Z. **12** (15. 6. 1966) 3
[Q 26] Öffentliche Vorlesungen an der Universität zu Wien, WS 1921/22–SS 1938; Vorlesungsverzeichnisse
[Q 27] Verzeichnis der Mitglieder der Deutschen Mathematiker-Vereinigung. Jber. d. Dt. Math.-Verein. **34** (1926) *63*
[Q 28] Jber. d. Dt. Math.-Verein. **32** (1923) *78–79*
[Q 29] Radon, J.: Mengen konvexer Körper, die einen gemeinsamen Punkt enthalten. Math. Ann. **83** (1921) 113–115. FdM **48/1921–22** (1925/28), 834 (Prof. W. Blaschke, Hamburg)
[Q 30] König, D.: Über konvexe Körper. Math. Z. **14** (1922) 208–210. FdM **48/1921–22** (1925/28), 835 (Prof. H. Rademacher, Breslau)
[Q 31] Zwinggi, E.: Alfred Berger†. Mitteilungen der Vereinigung Schweizerischer Versicherungsmathematiker **43** (1943) 53–54
[Q 32] Schönwiese, R.: „Alfred Berger† am 10. März 1942 in Wien gestorben." Blätter für Versicherungs-Mathematik **5** (1942) 335–339
[Q 33] Lechner, A.: Geschichte der Technischen Hochschule in Wien, 1815–1940. Wien 1942, viii + 252 pp.
[Q 34] Bukovics, E.: Alfred Tauber./ Rybarz, J.: Das Institut für Versicherungsmathematik. In: 150 Jahre Technische Hochschule in Wien; 1815–1965; Bauten und Institute; Lehrer und Studenten. Wien 1965, 604 pp.; pp. 344–346/pp. 130–132
[Q 35] Assecuranz-Compass. Internationales Jahrbuch für Versicherungswesen **44** (1936) 966
[Q 36] Hornich, H.: Wilhelm Wirtinger†. Monatsh. Math. Phys. **52** (1948) 1–12
[Q 37] Who's Who in America, Vol. 1 (37. Ed.). Chicago 1972–73, xvii + 1796 pp.; p. 1397
[Q 38] Bull. Amer. Math. Soc. **46** (1940) bis **50** (1944)

[Q 39] Amer. Math. Monthly **50** (1943)

[Q 40] Andres, P. G.; Miser, H. J.; Reingold, H.: Basic Mathematics for Engineers. J. Wiley, New York – London 1944, x + 776 pp.

[Q 41] Nachrichten der Mathematischen Gesellschaft in Wien **1**, no. 2 (1947) 5

[Q 42] Reiter, H.: Ansprache anläßlich der Enthüllung der Ehrentafel im Großen Hörsaal des Mathematischen Institutes der Universität Wien. 1977. Manuskript 5 pp. (noch unveröffentlicht).

[Q 43] Radon, J.: Nachruf für R. Suppantschitsch. Nachr. Österr. Math. Ges. *4*, no *10* (1950) 7–8

[Q 44] Jber. d. Dt. Math.-Verein. *54* (1951) 2–3

[Q 45] Jahresbericht für das Schuljahr 1902/03 des k.k. Maximilians-Gymnasium in Wien (IX. Bez.). Liste der im Schuljahre 1901/2 für reif erklärten Abiturienten; p. 48

[Q 46] Popper, K.: Unended Quest, An Intellectual Autobiography. Fontana, London 1976, 255 pp.

Prof. Dr. P. L. Butzer
S. Gieseler
F. Kaufmann
Prof. Dr. R. J. Nessel
Priv.-Doz. Dr. E. Stark
Lehrstuhl A für Mathematik
der Technischen Hochschule
Templergraben 55
5100 Aachen

(*Eingegangen: 15. 8. 1979*)

Buchbesprechungen

Hsiang, W. Y.: Cohomology Theory of Topological Transformation Groups (Ergebnisse der Math. und ihrer Grenzgebiete Band 85), Berlin – Heidelberg – New York: Springer Verlag 1975, X + 164 S., cloth, DM 58,–

In Verallgemeinerung der grundlegenden Resultate von P. A. Smith z. B. über periodische Abbildungen von Homologie-Sphären werden in diesem Buch kohomologische Aspekte von topologischen Gruppenoperationen untersucht, etwa die Beziehung zwischen der Čech-Kohomologie (mit Koeffizienten $\mathbf{Z}_p = \mathbf{Z}/p\mathbf{Z}$, p prim) eines Raumes, auf dem eine Gruppe $\mathbf{Z}_p \times \ldots \times \mathbf{Z}_p$ operiert, und der Kohomologie der Fixpunktmenge dieser Operation. Die generelle These des Autors „that the cohomology theory of topological transformation groups can be developed roughly along the same lines as the classical linear representation theory of compact connected Lie groups" wird u. a. untermauert durch eine ganze Reihe von Ergebnissen, die zeigen, daß sich topologische Gruppenoperationen von bestimmten Gruppen (z. B. $\mathbf{Z}_p \times \ldots \times \mathbf{Z}_p$, Tori) auf geeigneten Räumen (azyklische Kohomologie-Mannigfaltigkeiten, Kohomologie-Sphären, projektiven Räumen) „in der Kohomologie mit zur Gruppe passenden Koeffizienten" häufig wie lineare Gruppenoperationen verhalten. Die Beweismethoden gehen von dem Ansatz von A. Borel aus, zur Untersuchung eines topologischen Raumes X mit gegebener Operation einer Gruppe G die äquivariante Čech-Kohomologie von X, d. h. die Čech-Kohomologie des Totalraumes des zum universellen G-Prinzipalbündels assoziierten Faserbündels mit Faser X zu verwenden.

Die Kapitel I und II geben eine Zusammenstellung der im weiteren benötigten Resultate – zum Teil mit skizzierten Beweisen – über G-Räume und Faserbündel sowie über kompakte Liesche Gruppen und deren Darstellungen.

Die Kapitel III und IV enthalten u. a. einen Lokalisierungssatz für die betrachtete äquivariante Kohomologietheorie und das daraus gefolgerte, zentrale „Fundamental Fixed Point Theorem", sowie eine Reihe von Anwendungen dieses Theorems.

In den folgenden Kapiteln werden Gruppenoperationen auf azyklischen Kohomologie-Mannigfaltigkeiten und Kohomologie-Sphären (Kap. V) und Kohomologie-Projektiven Räumen (Kap. VI) auf der Basis des „Fundamental Fixed Point Theorem" ausführlich untersucht.

Im letzten Kapitel VII beginnt der Autor das systematische Studium von Gruppenoperationen auf kompakten homogenen Räumen. Dabei werden eine ganze Reihe von noch ungeklärten Fragen vom Autor aufgeworfen, kommentiert und zur Diskussion gestellt.

Das Buch enthält faszinierende Ergebnisse und Ideen, mehr als sich wohl leicht verdaulich auf den 163 Seiten darstellen lassen. Offensichtlich erwartet der Autor vom Leser recht aktive Mitarbeit und gute Vorkenntnisse in der Theorie der Lieschen Gruppen und der Faserbündel – die Zusammenstellung in den Kapiteln I und II ist sehr hilfreich, aber für einen Neuling auf dem Gebiet als Einstieg kaum geeignet und wohl auch nicht so gedacht – und in (gewöhnlicher) Čech-Kohomologie, einschließlich Spektralsequenzen. Dies mag durchaus dem Anspruch der Reihe entsprechen, in der dieses Buch erschienen ist. Leider wird jedoch die Lektüre durch einige Unklarheiten und Ungenauigkeiten besonders für denjenigen Leser erschwert, der sich in das behandelte Gebiet einarbeiten will. Einem solchen Leser könnte man zur Erleichterung der nicht gerade einfachen Aufgabe G. Bredons „Introduction to compact transformation groups" New York –London, Acad. Press (1972) empfehlen. (Der Hinweis auf dieses Buch sei hier gestattet, da es bemerkenswerterweise in dem sonst recht umfangreichen Literaturverzeichnis fehlt, wie überhaupt die Literaturhinweise des Autors mitunter etwas eigenwillig ausfallen.) Auch sind die in das Buch eingearbeiteten Originalarbeiten des Autors nicht immer nahtlos in das Gesamtkonzept eingepaßt. Für jemanden, der seine Kenntnisse auf dem behandelten Gebiet vertiefen und erweitern will, wird dieses Buch wegen der Fülle von interessanter Mathematik, die es enthält, trotzdem sehr willkommen sein.

Konstanz

V. Puppe

Besse, A. L., Manifolds all of whose Geodesics are Closed (Ergebnisse der Mathematik und ihrer Grenzgebiete 93), Berlin – Heidelberg – New York: Springer-Verlag 1978, 71 Figures, IX + 262 pp., cloth, DM 78,–

Dieses Buch ist das Ergebnis der Zusammenarbeit einer Gruppe französischer Mathematiker – zum größten Teil Schüler und jüngere Kollegen von Marcel Berger. Es stellt sich die Aufgabe, alles zusammenzustellen und herzuleiten, was heute bekannt ist über die Frage: *Welches sind die Riemannschen Räume, bei denen sämtliche Geodätischen geschlossen sind?*

Neben den jedermann bekannten Beispielen der Sphäre gehören hierzu auch die übrigen kompakten symmetrischen Räume vom Rang 1. Schon Darboux fragte nach den Drehflächen, bei denen dies gilt. Die ersten expliziten Beispiele geschlossener Drehflächen wurden dann von Zoll 1903 in einer Dissertation unter Hilbert angegeben.

Auf diesen sog. Zollflächen treffen sich aber, anders als bei der Sphäre, die von einem Punkt p ausgehenden Geodätischen im allgemeinen nicht alle wieder in einem „Antipodenpunkt" $\bar{p}$, sondern erst (und das muß ja so sein) bei der Rückkehr zum Ausgangspunkt p. Wenn es einen solchen Antipodenpunkt oder – wie man seit Blaschke sagt – einen solchen Wiedersehenspunkt $\bar{p}$ gibt für die von p ausgehenden Punkte, dann vermutete man schon seit langem (Blaschke 1921), daß dies nur die Sphären sein können.

Es spricht für die Schwierigkeit der hier behandelten Fragen, daß diese Vermutung für Flächen erst 1963 von L. Green und für beliebige Dimension während der Drucklegung des vorliegenden Buches von Berger und Weinstein unter Verwendung einer Ungleichung von J. Kazdan bewiesen werden konnte.

Wenn man auf die zusätzliche Hypothese von der Existenz eines Wiedersehenspunktes verzichtet, dann lautet das beste allgemeine Resultat: Eine solche Mannigfaltigkeit hat denselben ganzzahligen Kohomologierung wie einer der genannten Räume (Bott 1954). Unter zusätzlichen Annahmen ganz verschiedener Art (z. B.: Kählerstruktur oder Homogenität) gibt es eine Fülle weiterer Resultate, auf die im einzelnen hier einzugehen zu weit führen würde. Es sei nur noch erwähnt, daß die hier betrachteten Mannigfaltigkeiten interessant sind in Zusammenhang mit Untersuchungen des Spektrums des Laplace-Operators (Duistermaat-Guillemin-Weinstein).

Einen Eindruck von dem Umfang und dem weitreichenden Interesse erhält man auch aus der Tatsache, daß die Bibliographie etwa 160 Tital umfaßt.

Das Buch ist mit großem didaktischen Geschick geschrieben, die benötigten Hilfsmittel aus der Riemannschen Geometrie sind sorgfältig und auf oft neuartige Weise hergeleitet. Die Anhänge enthalten interessante Ergänzungen aus so verschiedenartigen Gebieten wie: 1-dimensionale Blätterungen (D. A. B. Epstein), Periodische Lösungen der Sturm-Liouville Gleichungen (J. P. Bourguignon), Neue Beispiele von Mannigfaltigkeiten, für die für einen Punkt p ein Wiedersehenspunkt $\bar{p}$ existiert (L. Berard-Bergery), der Beweis von Blaschkes Vermutung (M. Berger) und: Eine Ungleichung, die in der Geometrie auftaucht (J. L. Kazdan).

Dieses Buch ist nicht nur für den Spezialisten unentbehrlich, vielmehr verdient es das Interesse eines jeden Mathematikers, der sich über die Entwicklung der Differentialgeometrie im Großen an einem besonders attraktiven Fragenkreis informieren möchte.

Gołab, S., Tensor Calculus, translated by E. Lepa, Amsterdam and New York: Elsevier Scientific Publ. Comp. 1974, XX + 371 pp., cloth, $ 39.95

Das 1953 zuerst in polnischer Sprache erschienene Werk behandelt Tensor Algebra, Tensor Analysis und ihre Anwendung auf die Geometrie im Geiste von J. A. Schouten. Die Beschränkung auf lokale Untersuchungen rechtfertigt die alleinige Verwendung der koordinatenmäßigen Darstellung bei Verzicht auch auf basisfreie Definitionen und erleichtert die Lektüre für Physiker und Techniker. Eine zentrale Rolle spielt der Begriff des geometrischen Objekts, welches durch spezielles Transformationsverhalten bei Parameterwechsel gekennzeichnet ist.

Nach einer breiten Darstellung der Tensor Algebra wird die Tensor Analysis aus dem Begriff der Parallelverschiebung aufgebaut, der Krümmungstensor und der Torsionstensor behandelt und durch Aufprägen einer Riemannschen Metrik der Übergang zur Riemannschen Geometrie vollzogen. Spezielle Riemannsche Räume und Abbildungen zwischen ihnen werden studiert. Ein kurzer Abschnitt über Differentialoperatoren und Integralsätze bietet Ausblicke auf globale Aussagen. Die Anwendungen auf die Geometrie sind im wesentlichen auf die Theorie der Hyperflächen eines Riemannschen Raumes beschränkt.

Ohne Zweifel ist dieses Buch in der Konzeption nicht sehr modern; so sind etwa den differenzierbaren Mannigfaltigkeiten nur zwei Seiten des umfangreichen Werkes gewidmet. Der flüssig lesbare, methodisch geschickt formulierte Text, der auch Nichtfachmathematikern sehr entgegenkommt, läßt den großen Erfolg dieses Buches verstehen, das bereits in 3. Auflage vorliegt.

Wien H. Brauner

Chandler, R. E., Hausdorff Compactifications (Lecture Notes in Pure and Applied Mathematics, Bd. 23), New York: Marcel Dekker 1976, VII + 146 S., SFr 55,–

Dieses Buch behandelt eine Reihe von Themen aus der Theorie der Kompaktifizierungen in der Kategorie der Hausdorff-Räume. Ausgehend von den Grundbegriffen führt es auf knappem Raum (97 S. Text) zielstrebig an neueste Forschungsergebnisse zu einigen gut ausgewählten Fragestellungen heran; die Darstellung ist dabei auf die Bedürfnisse des Lernenden abgestimmt und in sich geschlossen. Der so vermittelte Einblick in die Theorie wird wirkungsvoll verbreitert durch gelegentliche Rundblicke und historische Bemerkungen, gestützt auf ein sehr reichhaltiges Literaturverzeichnis (über 600 Titel auf weiteren 42 Seiten). Symbolverzeichnis, Autoren- und Sachregister fehlen nicht.

Eine der Leitideen, die das Buch Originalität gewinnen lassen, besteht darin, zur Konstruktion von Kompaktifizierungen und im technischen Umgang mit ihnen so weit angängig eine Darstellung zu bevorzugen, die man die Tychonoff-Methode nennen könnte. Nach ihr gewinnt man jede Kompaktifizierung eines vollständig regulären Raums X mittels einer geeigneten Familie $\mathscr{F}$ beschränkter reellwertiger Funktionen, die abgeschlossene Mengen von Punkten trennt, indem man X anhand der Auswertungsabbildung in den Würfel $[0,1]^{\mathscr{F}}$ einbettet und dort abschließt. Für $\mathscr{F} = \mathscr{C}^*(X)$ (die Menge aller beschränkten Funktionen) ist dies die Tychonoffsche Konstruktion der Stone-Čech-Kompaktifizierung βX. Es ist nun verbreitet, die übrigen Kompaktifizierungen von X als Quotienten von βX zu konstruieren. Dabei entsteht systematisch die Schwierigkeit zu entscheiden, welche Quotienten von βX Hausdorffräume sind. In solchen Fällen erlaubt die Verwendung der Tychonoff-Methode häufig die weitaus elegantere Argumentation, wie das Buch an verschiedenen Stellen im Vergleich zur Einzelliteratur demonstriert.

Nun zum Inhalt im Einzelnen. Nach einer in ihrer Kürze gelungenen Einführung in die benötigten Grundtatsachen aus der allgemeinen Topologie (§ 1) werden in § 2 die Kompaktifizierungen eines vollständig regulären Raums X nach der Tychonoff-Methode dargestellt. Es wird gezeigt, daß die Menge K(X) der Kompaktifizierungen von X einen vollständigen oberen Halb-

jedoch hier zum erstenmal in Buchform und jedenfalls in neuer, interessanter Aufbereitung, so daß das Buch eine gute Ergänzung zu dem vollständig auf die Stone-Čech-Kompaktifizierung ausgerichteten Ergebnisbericht von Walker darstellt, mit dem nur wenige Überschneidungen bestehen (auch die Literaturverzeichnisse der beiden Bücher haben eine große symmetrische Diffe- [illegible]

In Äußerlichkeiten bleibt der eine oder andere Wunsch offen. So ist etwa die gute Glie- [illegible]

derung nicht immer wirkungsvoll zum Ausdruck gebracht. Der Text ist typographisch nicht überall sorgfältig gestaltet (hinsichtlich der Verdeutlichung von Sinneinheiten, beim Absetzen und Ausrücken von Formeln usw.). Bei den Zitaten werden verschiedene Arbeiten eines Autors aus demselben Jahr nicht unterschieden. Leser, die nur nachschlagen wollen, seien vor bezeichnungstechnischen Feinheiten gewarnt: etwa dem geringen Bezeichnungsunterschied zwischen einer Kompaktifizierung αX von X und dem Bild $\alpha(X)$ der Einbettung von X in diese. Für das gewählte Druckverfahren (reprografische Wiedergabe des Typoskripts) erscheint das Buch gemessen am Umfang sehr teuer.

Alles in allem handelt es sich um ein Buch, das durch gute Organisation eines reichen Materials auf kleinem Raum besticht. Es ist einerseits durchaus für Leser geeignet, die in der Topologie ihre ersten Schritte tun, und verdient andererseits wegen seiner Aktualität, der Themenauswahl und der interessanten Bearbeitung des Stoffs die Beachtung eines jeden, der sich für dieses Gebiet interessiert.

Tübingen H. Hähl

Engelking, R., General Topology (Monografie Matematyki, tome 60), Warschau: PWN-Polish Scientific Publishers 1977, 626 p., Cloth S 30,–

Hängt man einer puristischen Definition der Allgemeinen Topologie an, so ist das Buch von Engelking eine vorzügliche Monographie dieses Gebietes: sowohl als Nachschlagwerk für den örterten Sätze wurden in das Buch wohl deshalb nicht aufgenommen, damit sich der Umfang des Werkes in Grenzen halte. Bei der Durchsicht des Buches haben mich insbesondere folgende Abschnitte, die vielleicht nicht alltäglich sind, erfreut: Die Diskussion inverser Limites in 2.5, der Funktionenräume in 2.6 und der kompakt-offenen Topologie in 3.4; das Studium der Familie möglicher Kompaktifizierung und die Beziehungen verschiedener Kompaktifizierung zueinander sowie die Wallman-Erweiterung als Ersatz für die Stone-Čech-Kompaktifizierung in 3.6; das Kapitel 7 über die Dimensionstheorie, in welchem die große und die kleine induktive Dimension sowie die Überdeckungsdimension vorgestellt, ihre Eigenschaften studiert und ihre Beziehungen zueinander dargetan werden. Im Kapitel 7 wird der Brouwersche Fixpunktsatz gebraucht, um zu sehen, daß jede topologische Dimension des n-dimensionalen euklidischen Raumes ebenfalls n ist. Der Verfasser beweist bei dieser Gelegenheit den Brouwerschen Fixpunktsatz ohne die gebräuchliche Zuhilfenahme der Homologietheorie; er benutzt die kombinatorischen Eigenschaften der Simplizes und das Spernersche Lemma. Es ist klar, daß man zum genauen Studium dieses 600 Seiten umfassenden Kompendiums Kraft und Ausdauer braucht. Persönlich möchte ich jedoch bekennen, daß ich vom enzyklopädischen Atem des Engelkingschen Buches angetan bin.

Erlangen K. Strambach

Karoubi, M., K-Theory – An Introduction (Grundlehren der mathematischen Wissenschaften 226), Berlin – Heidelberg – New York: Springer-Verlag 1978, 26 Abb., XVIII + 308 pp., geb. DM 78,–

K-Theorie zwischen Kanonisierung und Anwendungsbezug

I.

In der Entwicklung und Durchsetzung wissenschaftlicher Theorien kann man häufig drei Stadien deutlich unterscheiden: (1) Entdeckung und Durchbruch, (2) Ausarbeitung und allmähliche Etablierung und schließlich (3) Kanonisierung und Übergang zum „Alltag".

Für die K-Theorie begann Stadium (1) vor zwanzig Jahren mit der von J. P. Serre begründeten Untersuchung von Einheiten und Projektionen in der N x N-Matrizenalgebra über dem Koordinatenring A(V) einer affinen Varietät $V \subset \mathbf{C}^n$. Die Isomorphieklassen der durch die Projektionen gegebenen „endlich-erzeugten projektiven A(V)-Moduln" bilden eine abelsche Halbgruppe bezüglich $\oplus$, und die daraus gebildete Gruppe $K^\circ(V)$ ist die universelle Gruppe für die Untersuchung abelscher Invarianten von projektiven Moduln. Auf diese Weise war von A. Grothendieck 1958 bei seinen Arbeiten zum Satz von Riemann-Roch-Hirzebruch die K-Theorie als „lineare Algebra großer Matrizen" (Atiyah) in die algebraische Geometrie eingeführt worden[2]).

Für Mathematiker, die der algebraischen Geometrie ferner stehen, kann man Grothendiecks konstruktive Idee grob so beschreiben:

(i) Durch „Stabilisierung" ($N \gg n$) gelingt es, die Matrizenmultiplikation abelsch zu machen, denn auch für $A \circ B \neq B \circ A$ gilt nach „Auffüllen" mit weiteren Einsen in der Hauptdiagonale

Dadurch wird die K-Gruppe zu einem wichtigen Hilfsmittel z. B. beim Studium ganzzahliger Invarianten, die in ihrem ursprünglich geometrisch-analytischen Kontext noch als regellos und „vereinzelt“ dastehen, bis sie – auf die K-Gruppe angehoben – ihren Charakter als Gruppenhomomorphismen offenbaren. Umgekehrt folgt aus der mit einfachen gruppentheoretischen Mitteln nachprüfbaren Nichtexistenz von Gruppenhomomorphismen mit vorgegebenen Eigenschaften, daß gewisse Invarianten im geometrisch-analytischen Zusammenhang nicht existieren können oder z. B. verschwinden müssen.

Drei Jahre später gelang es M. F. Atiyah und F. Hirzebruch[3]), die grundlegende Konstruktion aus dem Kontext der algebraischen Geometrie herauszulösen und mit der Angabe des „Grothendieckringes“ K(X) von Isomorphieklassen komplexer Vektorraumbündel über dem kompakten topologischen Raum X in Konkurrenz zur „orthodoxen algebraischen Topologie ... eine allgemeine Maschinerie zu entwickeln, die sehr einfach ist, ... im wesentlichen ein Vergleich – im Homotopiesinn – von X mit den linearen Gruppen ... Wie der Biochemiker müssen wir nach großen Standardmolekülen Ausschau halten, aus denen diese Räume aufgebaut sind. Es scheint so, daß die linearen Gruppen solche Standardmoleküle liefern.“ (Atiyah 1962 auf dem Internationalen Mathematikerkongreß in Stockholm[4]).)

Das sich anschließende zweite Stadium (ca. 1962–1975) war reich an überraschenden Wendungen sowohl bei der Ausarbeitung der K-Theorie, wie bei ihrer erfolgreichen Etablierung in vielfältigen mathematischen Disziplinen: Bei fortschreitender Verfeinerung des

III.

Nach zwei sehr gründlichen einführenden Kapiteln über „Vektorraumbündel" und „Erste Begriffe der K-Theorie" folgen die eigentlichen Hauptkapitel über „Bott-Periodizität" (S. 113–179) und „Berechnung einiger K-Gruppen" (S. 180–269). Ihr großer Umfang steht in einem gewissen Gegensatz zu den Erwartungen vom Ende der 60er Jahre, wonach sich der Beweis des Bottschen Periodizitätssatzes nach einem geflügelten Wort unter Topologen auf einer Postkarte unterbringen lassen müsse. Das gilt tatsächlich für die einfachste Form des Periodizitätssatzes $K(\mathbf{R}^2 \times X) \cong K(X)$, die eine ganz natürliche Verallgemeinerung, nämlich Parametrisierung über X, des Kreinschen Indexsatzes für Wiener-Hopf-Operatoren darstellt[13]). Die genaue Durchführung aller anwendungsbezogenen Verallgemeinerungen und Analogien ist freilich nicht in wenigen Zeilen zu liefern. Das gilt insbesondere für den reellen Fall, der trotz seiner großen Bedeutung für die Homotopietheorie sonst etwas stiefmütterlich in der Literatur behandelt wird. Wenn Formulierungen und Beweise einzelner Sätze bei Karoubi gelegentlich etwas schwerfällig erscheinen, liegt das vor allem an seinem Bemühen, den reellen Fall miteinzubeziehen oder auch dort, wo zunächst nur mit den K-Gruppen komplexer Vektorraumbündel gerechnet wird, verallgemeinerungsfähige und insbesondere auf den reellen Fall übertragbare Begriffe und Argumente zu benutzen.

Das Hauptgewicht hat Karoubi auf die Vorführung der praktischen, nachvollziehbaren Berechnungen gelegt, die im vierten Kapitel ihren Höhepunkt erreichen. Dieser ausgeprägt algorithmische Gesichtspunkt wird auch im fünften Kapitel über „Einige Anwendungen der K-Theorie" beibehalten, das aber in knapp 30 Seiten und mit der Beschränkung auf topologische Anwendungen (Hopfsche Invariante, Vektorfeldproblem auf der Sphäre, Ganzzahligkeitssätze und stabile Homotopie) keinen repräsentativen Überblick über die Bedeutung der K-Theorie im Gesamtsystem der zeitgenössischen Mathematik vermitteln kann. Auch sind „Erklärungen" und „historische Anmerkungen" im gesamten Buch nur sparsam, dann aber sehr treffend eingestreut.

Diese unzureichende „Verdrahtung" von Karoubis „K-Theory – An Introduction" in den vielseitigen, nichttrivialen Anwendungsbeziehungen und Entwicklungsperspektiven der K-Theorie kann man schwerlich kritisieren, da eine „Einführung" in die **Anwendungen** der K-Theorie in ihrer Gesamtheit bei der Breite und Tiefe der bereits erschlossenen Anwendungen den Rahmen wohl jeden Lehrbuches sprengen würde. Vor nicht so langer Zeit schrieb dazu Atiyah: „Wenn wir die K-Theorie von einem Gebiet der Mathematik in ein anderes übertragen, bleiben gewisse formale Ähnlichkeiten bestehen. Jedes Gebiet hat allerdings andere Probleme und Techniken, und der Erfolg der K-Theorie hängt an der Tatsache, daß es sich in vielen Gebieten als möglich erwiesen hat, sie mit natürlichen klassischen Problemen zu verbinden"[14]). Das ist auch die Erfahrung des Rezensenten mit der Abfassung seiner in mehrfacher Weise zu Karoubis Buch komplementären Einführung in die Atiyah-Singer-Indexformel[15]): Die Faszination der K-Theorie liegt weniger in ihrem Formalismus als in ihren vielfältigen Anwendungsbeziehungen, die ihrerseits aber die gründliche Durcharbeitung und Aufbereitung des Formalismus erfordern, Kanonisierung und Trennung vom Anwendungsbezug als Bedingung für praktische Handhabung und Anwendung.

Karoubis Buch erfüllt diese wichtige Funktion in hervorragender Weise – auch wenn die vielen Druckfehler sehr störend und z. T. sinnentstellend sind. Aber nicht nur aus diesem Grund ist dem Buch der baldige Verkauf der 1. Auflage zu wünschen.

Roskilde B. Booss

---

[1]) Der Rezensent dankt A. Dress, Bielefeld und H. Tornehave, Kopenhagen, für die anregenden Gespräche über Karoubis Buch.

[2]) Siehe z. B. Borel, A.; Serre, J. P.: Le théorème de Riemann-Roch (d'après Grothendieck). Bull. Soc. Math. France **86** (1958) 97–136.

[3]) Atiyah, M. F.; Hirzebruch, F.: Vector bundles and homogeneous spaces. Amer. Math. Soc. Symp. Pure Math. 3 (1961) 7–38.

[4]) Atiyah, M. F.: The Grothendieck ring in geometry and topology. Proc. Int. Congr. Math. 1962, Uppsala 1963, 442–446.

[5]) Brown, L. G.; Douglas, R. G.; Fillmore, P. A.: Unitary equivalence modulo the compact operators and extensions of C*-algebras. In: Fillmore, P. A. (ed.): Proceedings of a Conference on Operator Theory (Lecture Notes in Mathematics 345). Berlin – Heidelberg – New York: Springer 1973.

[6]) Atiyah, M. F.: K-theory. New York: Benjamin 1964.

[7]) Bott, R.: Lectures on K(X). Cambridge, Mass.: Harvard University 1963.

[8]) Dupont, J.: K-theory. Aarhus: Publ. of the Matematisk Institut 1968.

[9]) Friedrich, Th.: Vorlesungen über K-Theorie. Leipzig: BSB B. G. Teubner 1978.

[10]) Husemoller, D.: Fibre bundles. New York: McGraw-Hill 1966. 2. Aufl. (Graduate Texts in Mathematics). Berlin – Heidelberg – New York: Springer 1975.

[11]) Hilton, P. J.: General cohomology theory and K-theory. New York: Cambridge Univ. Press 1971.

[12]) Switzer, R. M.: Algebraic topology – homotopy and homology (Die Grundlehren der Mathematischen Wissenschaften, Band 212), Berlin – Heidelberg – New York: Springer 1975.

[13]) Atiyah, M. F.: Algebraic topology and operators in Hilbert space. In: Taam, C. T. (ed.): Lectures in modern analysis and applications I. (Lecture Notes in Mathematics 103), [illegible]

zitiert.

[14]) Atiyah, M. F.: A survey of K-theory. In: Morrel, B. B.; Singer, I. M. (ed.): K-theory and operator algebras. Conference Proceedings, Georgia 1975 (Lecture Notes in Mathematics 575), Berlin – Heidelberg – New York: Springer 1977, 1–9.

[15]) Booss, B.: Topologie und Analysis – Eine Einführung in die Atiyah-Singer-Indexformel (Hochschultext), Berlin – Heidelberg – New York: Springer 1977.

Fritz, F. J., Huppert, B., Willems, W., Stochastische Matrizen (Hochschultext), Berlin – Heidelberg – New York: Springer Verlag 1978, DM 32,–

Dies Lehrbuch, von einem prominenten Gruppentheoretiker und zwei Mitarbeitern verfaßt, behandelt mit ungewöhnlicher Vollständigkeit und Durchschlagskraft eines der reizvollsten Kapitel der elementaren Stochastik, ohne den Leser mit der Terminologie dieses Gebiets allzusehr zu belasten. Solide Vorkenntnisse über Normalformen und Eigenwerte von Matrizen werden be-asymptotische Periodizität, die hier eigenwerttheoretisch abgeleitet werden, ließen sich auch auf eigenwertfreie Weise ableiten; insbesondere wird der sog. Ergodensatz für stochastische Matrizen in der Darstellung des vorliegenden Buches ein bißchen schwieriger als nötig. Dies tut seinen besonderen Qualitäten aber keinen Abbruch; man kann es jedem Mathematiker, insbesondere Lehramts-Studenten und -Inhabern, uneingeschränkt empfehlen.

Erlangen K. Jacobs

Matheron, G., Random Sets and Integral Geometry (Wiley Series in Probability and Mathematical Statistics), New York – London – Sydney – Toronto: J. Wiley & Sons 1975, XXIII + 261 pp., cloth, $ 22.40

Dies ist in mehrfacher Hinsicht ein ungewöhnliches Buch.

Ungewöhnlich ist schon der Ausgangspunkt: Der Verfasser – er ist Professor an der École Nationale Supérieure des Mines de Paris – stellt die Frage nach mathematischen Methoden, welche eine Beschreibung der Gestaltsmerkmale der Körner sowie des Hohlraum-Netzwerks eines porösen Mediums(etwa im Zusammenhang mit der Durchlässigkeit einer Flüssigkeit) ermöglichen. Bereits in früheren Arbeiten erkannte der Verfasser, daß der Begriff einer zufälligen Menge grundlegend für die mathematische Beschreibung poröser Medien ist. Man will nämlich etwa – nach Wahl eines Testkörpers oder einer Familie von Testkörpern B – Aussagen über die Wahrscheinlichkeit machen, mit welcher B im Hohlraum-Netzwerk enthalten ist, oder mit welcher B die Körner des porösen Mediums trifft. Aus solchen und ähnlichen Vorstellungen entwickelt sich der Begriff einer zufälligen abgeschlossenen (bzw. offenen bzw. kompakten) Menge, indem man das System der abgeschlossenen (bzw. offenen bzw. kompakten) Mengen eines Hausdorff-Raumes geeignet topologisiert und Wahrscheinlichkeitsmaße auf der σ-Algebra der Borelschen Mengen des neugewonnenen topologischen Raumes betrachtet. Eine zufällige abgeschlossene Menge ist dann nichts anderes als ein Wahrscheinlichkeitsraum mit dem Raum der abgeschlossenen Mengen als Trägermenge und der zugehörigen Borelschen σ-Algebra als σ-Algebra der Ereignisse. Diese RACS (= random closed set(s)) stehen im Mittelpunkt der Betrachtung. Sie treten bereits in der Theorie der Kapazitäten von Choquet auf. Die Eingangs gewählte Motivation macht außerdem verständlich, daß sich das Buffonsche Nadelexperiment in das Schema der RACS einordnen läßt. Als poröses Medium hat man dabei die Schar der parallelen Geraden mit konstantem Abstand in einer Ebene zu interpretieren. Da die Buffonsche Lösung des Nadelproblems allgemein als die Geburtsstunde der Integralgeometrie angesehen wird, so ist es nicht verwunderlich, daß integralgeometrische Betrachtungen einen breiten Raum in diesem Buch einnehmen.

Ungewöhnlich ist die Vielfalt der behandelten Themen: Unendlich teilbare RACS werden mit der Vereinigung der zu einem Poissonschen Punktprozeß gehörigen abgeschlossenen Mengen identifiziert. Über viele Teile des Buches steht die Konvexität im Mittelpunkt, ausgelöst durch die Betrachtung fast sicher konvexer RACS. Hierdurch ergibt sich der nahtlose Übergang zur wahrscheinlichkeitstheoretischen Interpretation von Sätzen und Begriffen der Integralgeometrie. Mit Hilfe einer verallgemeinerten Steinerschen Formel werden den klassichen Minkowski-Funktionalen die Minkowski-Maße zugeordnet. Im Fall gewisser mit Konvexitätseigenschaften ausgestatteter RACS ergeben sich so Zufallsmaße, welche es erlauben, vom Oberflächenmaß eines solchen RACS zu sprechen. Schließlich wird die Ausgangsfrage der porösen Medien erneut aufgegriffen, der Begriff der Granulometrie zur Messung von Korngrößen eingeführt und Resultate zur Schätzung linearer Granulometrien mittels experimentell zugängiger Daten hergeleitet.

Ungewöhnlich ist die Darstellungsform: Der Leser fühlt sich häufig im Gestrüpp neuer Begriffsbildungen und beim abrupten Richtungswechsel der Diskussion allein gelassen. Hinzu kommen Ungereimtheiten, falsche Behauptungen, richtige Behauptungen mit falschen Beweisen und das Fehlen von Hinweisen auf Bekanntes (z. B. findet sich die Kennzeichnung Steinerscher Körper, durch die Eigenschaft ihrer Stützfunktionen vom negativen Typ zu sein, bereits in Choquet's Lectures on Analysis, Vol. III). Den berühmten roten Faden in diesem Buch zu verfolgen, ist fast immer schwer, manchmal unmöglich.

Ungewöhnlich war schließlich auch die Reaktion eines meiner Mitarbeiter nach Abschluß der Lektüre des Buches in einer Arbeitsgemeinschaft. Der Betreffende meinte, man brauche den Spürsinn eines Kriminalisten von Scotland Yard, um das Buch zu verstehen und voll würdigen zu können. Wer bereit ist, diesen Spürsinn zu entwickeln und wer etwa L. A. Santaló, Integral Geometry and Geometric Probability (Addison-Wesley 1976) sowie E. F. Harding and D. G. Kendall, Stochastic Geometry (J. Wiley & Sons 1974) zu Hilfe nimmt, wird das Buch mit Gewinn, streckenweise sogar mit Begeisterung lesen.

Erlangen H. Bauer

Gänssler, P., Stute, W., Wahrscheinlichkeitstheorie (Hochschultext), Berlin – Heidelberg – New York: Springer Verlag 1977, XII + 418 pp., geheftet, DM 36,–

Das vorliegende Buch ist ein systematisches Archiv eines Großteils der rein mathematischen Wahrscheinlichkeitstheorie. Es ist von einer bisher kaum je erreichten Vollständigkeit. Allerdings fehlen die unbegrenzt teilbaren Verteilungen; Literaturhinweise dazu sind vorhanden. Für Dozenten, die sich zu Vorlesungszwecken umfassend orientieren wollen, ist es eine hervorragende Stoffsammlung. Wer sich Wahrscheinlichkeitstheorie nach diesem Buch aneignen will, muß 1) bereit sein, sehr hart zu arbeiten, insbesondere 2) nur angedeutete Beweisschritte selb- [illegible]

Der vorliegende fünfte Band der ehrgeizigen „roten Enzyklopädie“ (herausgegeben von G.-C. Rota) stellt besondere Anforderungen an den Leser. Erstens wird erwartet, daß er verschiedene Zweige der neueren Analysis bereits beherrscht; in einigen Anhangskapiteln wird ohne Beweise dargelegt, was man zu können hat. Zweitens wird erwartet, daß der Leser sich fast alle Motivationen für das Dargelegte anderweitig besorgt. Die Heidelberger Vorlesungsausarbeitung von H. O. Georgii über „Stochastische Felder“ kann hierbei gute Dienste tun. – Akzeptiert man diese Randbedingungen, so kann man das Buch als einen ausgezeichneten Abriß eines zentralen Spezialkapitels der Theorie der Gittergase ansehen: Spin-Systeme. Nach einer mit einem Überblick schließenden Einleitung (ch. 0) werden Gibbs-Zustände (ch. 1 und 2), Translations-Invarianz (ch. 3 und 4) bei Gitter-Systemen, insbesondere für eindimensionale Gitter (ch. 5) abgehandelt. Es folgt eine Ausdehnung der Theorie auf Z^ν-Aktionen auf kompakten metrischen Räumen (ch. 6) und, spezieller, auf sog. Smale-Räumen (ch. 7). Eine Zeta-Funktionen-Meromorphie – ein Satz des Verfassers – erscheint als Satz 5.29 bzw. Satz 7.24. Auf S. 68 wird ein unentscheidbares Problem diskutiert. Details über Phasenübergänge fehlen; auch hier kann die obenerwähnte Ausarbeitung von Georgii einspringen. Das Buch dürfte, ähnlich wie des Verfassers „Statistical Mechanics. Rigorous Results“, New York, 1969, eine Art Klassiker werden.

Erlangen K. Jacobs

Anderson-Popp-Schaffranek-Steinmetz-Stenger, Schätzen und Testen (Heidelberger Taschenbücher Band 177), Berlin – Heidelberg – New York: Springer-Verlag 1976, 68 Abb., 56 Tab. XI, 385 S., geheftet, DM 19,80

Dieses Buch hat das Ziel, Studenten, insbesondere der Wirtschaftswissenschaften, früher Semester, die keine mathematischen Vorkenntnisse haben, unmittelbar an die Anwendungen der Statistik heranzuführen. Mehr als ein Drittel des Buchs muß naturgemäß zunächst darauf verwandt werden, den Leser mit der nötigen Wahrscheinlichkeitstheorie vertraut zu machen. Dies geschieht ohne Maßtheorie, eher intuitiv durch die Häufigkeitsinterpretation von Wahrscheinlichkeiten, durch viele Beispiele und -erzwungenermaßen – unter teilweisem Verzicht auf Beweise. Einige diskrete Verteilungen, die Normalverteilung und von dieser abgeleitete Verteilungen werden eingeführt. Der praktische Wert des Buchs gewinnt dadurch, daß über die Zulässigkeit der Approximation mit Hilfe des Zentralen Grenzwertsatzes an Beispielen Rechenschaft abgelegt wird.

Der erste Hauptteil des Buchs – S c h ä t z e n – enthält neben der grundlegenden Einführung des Begriffs auch die Konstruktion von Konfidenzintervallen und Überlegungen zum notwendigen Stichprobenumfang bei vorgegebener Fehlergrenze. Es schließt sich ein Kapitel über die praktische Durchführung von Schätzungen an; z. B. werden geschichtete Stichprobenverfahren und die Berücksichtigung von Vorkenntnissen behandelt. Der zweite Hauptteil – T e s t e n – enthält auch χ^2-Anpassungstests und χ^2-Unabhängigkeitstests. Für den wirtschaftswissenschaftlichen Alltag wichtig ist schließlich das letzte Kapitel über lineare Regressionsanalyse mit einer unabhängigen Variablen.

Das Ziel des an relevanten Beispielen reichen Buchs ist gewiß erreicht. Der um das exakte Verständnis bemühte Student wird an Stellen, an denen Maßtheorie schlichtweg notwendig ist, genauer nachfragen. Die Autoren entsprechen dem durch Zitate des

Todd, J., Basic Numerical Mathematics, vol. 2, Numerical Algebra (International Series of Numerical Mathematics, vol. 22), Basel – Stuttgart: Birkhäuser Verlag 1977, 216 pp., geb., DM 48,–

Der vorliegende 2. Teil des im Titel genannten Werkes ist ein didaktisch sehr geschickt geschriebenes Lehr- und Übungsbuch der numerischen linearen Algebra, welches von der großen pädagogischen Erfahrung des Autors von 30 Jahren Lehrtätigkeit zeugt, und den Lernenden gründlich mit den Problemen der numerischen Behandlung der auftretenden Probleme auf einem Computer vertraut macht. Dazu werden ausführlich zwei Prinzipien verwendet, die „controlled computational experiments“ und die „bad examples“, welche auf mögliche Schwierigkeiten und auftretende Tücken bei der numerischen Durchführung hinweisen. Am Schluß jeden Kapitels wird eine Anzahl „Problems“ genannt, deren Lösungen ausführlich auf 93 Seiten gebracht wird.

Grundbegriffe der linearen Algebra wie Vektorräume, Determinanten u. a. werden vorausgesetzt; das Buch behandelt Normen und induzierte Normen, Eigenwerte und Eigenvektoren bei Matrizen, Iterationsverfahren, lineare Gleichungssysteme, Pseudoinverse und verschiedene Anwendungen, z. B. auf Randwertaufgaben. Das Buch ist für den Gebrauch neben den Vorlesungen vorzüglich geeignet und bietet eine Fülle von numerischem Material.

Hamburg L. Collatz

Grigorieff, R. D., Numerik gewöhnlicher Differentialgleichungen, Band 1 Einschrittverfahren und Band 2 Mehrschrittverfahren (Teubner Studienbücher Mathematik), Stuttgart: B. G. Teubner Verlag 1972 und 1977, Band 1: 202 S., paper, DM 14,80, Band 2: 411 S., paper, DM 29,80

Der Autor verfolgt das Ziel, die heute zur Verfügung stehenden Diskretisierungsverfahren bei Anfangswertproblemen gewöhnlicher Differentialgleichungen darzustellen und mathematisch zu untersuchen. Dabei achtet er besonders auf Relevanz für die Praxis und spricht neben Mathematikern auch Physiker, Chemiker und Ingenieure an, ohne jedoch Abstriche an der Strenge der mathematischen Darstellung vorzunehmen.

Im Band 1 werden Einschrittverfahren behandelt. Die Grundlage der ersten beiden Abschnitte ist Standardstoff, nämlich Herleitung von Einschrittverfahren unter besonderer Hervorhebung der Runge-Kutta-Verfahren und Konvergenztheorie. Der Autor berücksichtigt dabei verstärkt neuere Originalarbeiten und gibt mehrere vorteilhafte Verfahren an, die bisher noch nicht Eingang in Lehrbücher gefunden haben. Besonders wertvoll ist der Abschnitt 3, in dem präzisere Stabilitätsbegriffe bei der Behandlung der für die Praxis wichtigen „steifen Systeme“ diskutiert werden. Eine systematische Untersuchung dieses Gebiets war bisher in den deutschsprachigen ordnen lassen oder zumindest unkonventionell sind. Der letzte Abschnitt behandelt schließlich Systeme höherer Ordnung, wobei ein zu Abschnitt 1 und 2 analoges Vorgehen angestrebt wird.

Mit einem Gesamtumfang von 613 Seiten, 422 Literaturzitaten und zahlreichen instruktiven numerischen Beispielen ist eine Monographie entstanden, die auch neueste Forschungsergebnisse vorstellt und über längere Zeit hinweg einen Spitzenplatz unter den Lehrbüchern über die Numerik von gewöhnlichen Differentialgleichungen einnehmen dürfte. Aus dieser Sicht ist es etwas bedauerlich, daß der Verlag keine attraktivere Ausstattung vorgenommen hat. Das vorliegende Werk ist sicherlich weit davon entfernt, nur ein Vorlesungsmanuskript zu sein, das billig und rasch vervielfältigt werden muß, um Leser zu finden und nicht an Aktualität zu verlieren.

Für die verschiedenen von diesem Werk angesprochenen Lesergruppen sind jeweils nur Teile des gesamten Inhalts von besonderem Interesse. Auch ein Hauptfachstudent der Mathematik, der diese Bände für eine Prüfung benutzt oder ein Dozent, der sich für eine Vorlesung daran orientiert, muß eine Auswahl treffen. Um den für ihn interessanten Anteil zu finden, wird für den einzelnen Leser in der Regel ein Blick in das Inhaltsverzeichnis noch nicht genügen; er muß doch etwas herumblättern und probeweise an verschiedenen Stellen einsteigen. Glücklicherweise bleibt die Anzahl der neu eingeführten Begriffe und Symbole in Grenzen, so daß der Leser bei etwas Geduld tatsächlich an fast beliebigen Stellen der beiden Bände beginnen kann.

Das besondere Verdienst des Autors besteht meines Erachtens darin, eine umfangreiche Originalliteratur didaktisch aufbereitet und einem großen Kreis von Lesern zugänglich gemacht zu haben. Schließlich sei noch hervorgehoben, daß zu mehreren Sätzen neue und einfachere Beweise angegeben wurden.

Erlangen

G. Schmeißer

Baker, C. T. H., The Numerical Treatment of Integral Equations (Monographs on Numerical Analysis), Oxford: Clarendon Press 1977, XIV + 1034 pp., cloth, $ 22.50

Während es H. Bückner noch vor 25 Jahren gelingen konnte, auf wenig mehr als hundert Seiten die wesentlichsten Überlegungen und Methoden zur praktischen Behandlung von Integralgleichungen (Igln.) darzustellen, umfaßt die vorliegende Monographie von C. T. H. Baker über tausend Seiten. Das mag als Hinweis am Anfang einer Würdigung des Bakerschen Buchs stehen, das in der Tat seit Bückner das erste ist, in welchem in ganzer Breite der praktische Aspekt der Igln. dargestellt ist. Auch dem Fachmann wird es bei dieser Gelegenheit wieder so recht bewußt, welchen Umfang die einschlägige Literatur erreicht hat.

Um die Fülle des Stoffs zu umreißen, zunächst einige Angaben zum Inhalt. 1. Kap. Integral Equations: Grundtatsachen der Theorie der linearen Igln. (Fredholmsche und Volterrasche 1. und 2. Art) und elementare funktionalanalytische Begriffe; dazu kommen einige kurze Bemerkungen über nichtlineare Igln. 2. Kap. Numerical Analysis: Allgemeine Tatsachen der numerischen Analysis, summarisch werden Fragen der Approximation und der Fehlerabschätzung behandelt, stärkeres Gewicht liegt auf Verfahren zur numerischen Quadratur. 3. Kap. Eigenvalue Problems: Hier setzt die numerische Behandlung ein, zunächst von Eigenwertproblemen Fredholmscher Igln. 2. Art; angefangen, um nur das Wichtigste zu nennen, von der Quadraturmethode über Ersatzkernverfahren, Kollokation und Rayleigh-Ritz-Verfahren zur Galerkin-Methode mit einer Reihe von Fehlerbetrachtungen. 4. Kap. Linear Equations of the Second Kind: Numerische Behandlung der inhomogenen Fredholmschen Igl. 2. Art durch Quadratur, ausgeartete Näherungskerne, Ritz-Galerkin-Methoden und asymptotische Entwicklungen sowie zahlreiche spezielle Untersuchungen. 5. Kap. Further Discussion of the Treatment of Fredholm Equations: Hier werden singuläre Kerne in allen Typen Fredholmscher Igln. im Hinblick auf ihre numerische Behandlung dargestellt; den Abschluß bildet eine kurze Abhandlung über Methoden für nichtlineare Igln. 6. Kap. Volterra Integral Equations: Relativ breit werden Volterrasche Igln. 2. und 1. Art behandelt; man findet u. a. auch Stabilitätsbetrachtungen, Konvergenzuntersuchungen spezieller Methoden und Verfahren für nichtlineare Volterrasche Igln. Eine Reihe einfacher und durchschaubarer Testbeispiele illustriert die Ausführungen in den einzelnen Kapiteln. Mit etwa 500 Literaturangaben und einem vierseitigen Stichwortverzeichnis schließt das Werk.

Naturgemäß ist eine Monographie über ein Gebiet, auf dem intensiv gearbeitet worden ist und zu dem sehr viele Beiträge in der Literatur existieren, hauptsächlich von ordnendem und referierendem Charakter. Trotzdem werden die Persönlichkeit des Verfassers, der selbst während der letzten 10 Jahre eine große Zahl wesentlicher Beiträge zur Numerik der Igln. geliefert hat, und seine eigene Zielsetzung in diesem Werk immer wieder sichtbar. Das sind einerseits persönliche Noten wie die, daß im 3. und 4. Kap. ausgeartete Kerne als Basis für Näherungsmethoden in den Vordergrund gerückt werden; daneben aber das spürbare Bemühen, sowohl dem numerischen Mathematiker als auch dem Anwender numerischer Verfahren ein Kompendium in die Hand zu geben, das möglichst vollständig ist, mathematischen Ansprüchen genügt und dennoch den Praktiker nicht abschreckt.

Das erstgenannte Ziel ist weitgehend erreicht, bezüglich der beiden anderen scheint es dem Referenten, daß eine besonders glückliche Darstellung gelungen ist. Ein Standardwerk ist entstanden, das in allen mathematischen Fachbibliotheken und in denen der Anwender seinen Platz finden wird.

München G. Hämmerlin

Prenter, P. M., Splines and Variational Methods, New York – London – Sydney – Toronto: John Wiley & Sons 1975, XI + 323 S., gebd., £ 10.75

Das vorliegende Buch stellt eine Einführung in die numerische Behandlung von Randwertproblemen mit Hilfe von Variationsmethoden dar. Besonderes Augenmerk wird dabei auf die Methode der finiten Elemente und auf Kollokationsmethoden gerichtet. Der Inhalt gliedert sich in acht Kapitel:

Das einführende Kapitel bringt grundlegende Definitionen und Aussagen über Vektor-eines Kapitels werden Übungsaufgaben gestellt und am Ende jedes Kapitels ist eine Auswahl der zugehörigen Literatur angegeben. Insgesamt ist festzustellen, daß numerischen Fragen (Fehlerabschätzungen usw.) großes Gewicht eingeräumt wird.

Duisburg W. Haußmann

Henrici, P., Analytische Rechenverfahren für den Taschenrechner HP-25 (Übers. aus dem Englischen), München – Wien: Oldenbourg Verlag 1978, 214 S., brosch., DM 29,80

Das Studium der praktischen Mathematik gleicht oft einem Skikurs ohne Schnee. In der Vorlesung werden vorwiegend theoretische Grundlagen vermittelt, die Übungen ergänzen diesen Vorlesungsstoff und in den Prüfungen steht auch wieder die Theorie im Vordergrund. Der Gang zum Rechenzentrum, um praktische Erfahrungen mit den erlernten Algorithmen zu sammeln, wird oft durch verschiedene äußere Umstände erschwert. Durch das Zwischenschalten eines Operateurs geht das direkte Erleben des Rechenablaufes verloren. Da andererseits viele Studenten der Mathematik und Naturwissenschaften einen wissenschaftlichen Taschenrechner besitzen, kam dem Autor die Idee, diesen Studenten zu zeigen, wie man mit einem solchen Rechengerät für viele der erlernten Algorithmen bereits im stillen Kämmerlein die typischen Phänomene kennenlernen kann.

Das Buch behandelt sechs Problemkreise, und zwar enthält es neben den Standardthemen Iteration, Polynome und Integration auch je einen Abschnitt über Zahlentheorie, Potenzreihen und spezielle Konstanten und Funktionen. In dem zuletzt genannten Abschnitt werden unter anderem die Gammafunktion, Bessel-Funktionen, vollständige elliptische Integrale und die Riemannsche Zetafunktion behandelt. Aus dem Abschnitt über Zahlentheorie seien die Primfaktorzerlegung, der euklidische Algorithmus und die Kettenbruchdarstellung der reellen Zahlen als Kostprobe genannt. Anfangswertaufgaben gewöhnlicher Differentialgleichung werden in dem Abschnitt über Integration etwas berücksichtigt. Aus verständlichen Gründen fehlen die numerische lineare Algebra und Randwertaufgaben, denn die üblichen Methoden dieser Gebiete sind für den Taschenrechner zu speicherintensiv.

Insgesamt enthält das Buch 35 Algorithmen, deren Behandlung systematisch in sechs Teile zerlegt wird:

1. Zweckbeschreibung, 2. Methode, 3. Flußdiagramm, 4. Speicherplan und Programm, 5. Gebrauchsanweisung, 6. Rechenbeispiele und Zeitbedarf. Zur Begründung der Methode in Teil 2 verweist der Autor auf seine bei Wiley & Sons erschienenen Bücher „Elements of numerical analysis" und „Applied and computational complex analysis I and II", zu denen letztlich auch das Stichwortverzeichnis häufig führt. Er erwähnt nicht, daß von dem ersten Buch schon seit 1972 eine deutsche Ausgabe beim Bibliographischen Institut Mannheim vorliegt und daneben

auch zahlreiche andere Lehrbücher der praktischen Mathematik herangezogen werden können. Besonders lehrreich ist die oft sehr unkonventionelle Programmiertechnik. Sie berücksichtigt bereits die Verwendung eines Taschenrechners, der sich bekanntlich durch kostenlose Rechenzeit aber geringe Speicherkapazität vom Großrechner wesentlich unterscheidet. Nur die Teile 4 und 5 sind ganz speziell auf den im Titel genannten Taschenrechner HP-25 zugeschnitten. Jedoch ist der Besitz dieses Taschenrechners keine Voraussetzung für das Arbeiten mit dem vorliegenden Buch. Es gibt viele Taschenrechner, die vergleichbar oder sogar besser ausgestattet sind und für die eine Übertragung der Teile 4 und 5 keine Mühe bereitet. Die Beispiele im Teil 6 [illegible]

Venz, G., Lösung von Differentialgleichungen mit programmierbaren Taschenrechnern, München – Wien: Oldenbourg Verlag 1978, 147 S., 61 Abb., brosch., DM 26,–

Das Buch ist von seiner didaktischen Aufbereitung her dem vorstehend rezensierten Buch von Henrici etwas ähnlich und von seinem Thema her eine Ergänzung zu diesem.

Die numerische Behandlung von Differentialgleichungen gehört bereits zu den höheren Aufgaben der praktischen Mathematik, die sich selbst wieder auf mehrere Grundaufgaben zurückführen lassen, z. B. auf die numerische Differentiation und die Auflösung von Gleichungssystemen. Soll für derart umfangreiche Probleme die Benutzung eines Taschenrechners aufgezeigt werden, so bedarf es seitens des Autors einer besonders sorgfältig ausgesuchten Methode und seitens des Lesers etwas Nachsicht für die dennoch verbleibenden Einschränkungen. Hier steht auch nicht das Verfahren im Vordergrund, sondern stets der spezielle Typ der Differentialgleichung, zu dem ohne Alternative ein auf dem Taschenrechner realisierbares Verfahren angegeben wird.

Im ersten Teil über gewöhnliche Differentialgleichungen werden Anfangswertaufgaben, Randwertaufgaben und Eigenwertaufgaben behandelt. Lösungsmethode ist hier immer das klassiche Runge-Kutta-Verfahren, bei den letzten beiden Problemen als Teil eines Schießverfahrens. Die Verwendung der in der älteren Literatur wenig beachteten Schießverfahren erweist sich als besonders geschickt, wird doch damit der vielleicht einzige Weg gefunden, um für Rand- und Eigenwertaufgaben eine Präzisionsrechnung auf dem Taschenrechner durchzuführen.

Der zweite Teil bringt wichtige Typen linearer partieller Differentialgleichungen, wobei die Einteilung physikalisch motiviert ist. So werden unter anderem behandelt: Wärmeleitung, Wellengleichung, Stromverdrängung (Skineffekt), Membranschwingung, Poissonsche- und Potentialgleichung. Lösungsweg ist hier immer die Gitterpunktmethode.

Die Behandlung eines Problems geschieht in der Regel in folgenden Schritten: Beschreibung der Differentialgleichung und ihres physikalischen Hintergrundes, Beschreibung des Verfahrens, Flußdiagramm und Erläuterung des Programmablaufes, vollständig behandeltes physikalisches Beispiel. Der Autor vermeidet dabei soweit wie möglich, sich auf einen bestimmten Rechner festzulegen. Erst für das Beispiel wird jeweils der Taschenrechner HP 67 verwendet. Andere programmierbare Taschenrechner sind jedoch ebenso geeignet, wenn sie als untere Grenze ca. 250 Programmschritte zulassen, 25 Datenspeicher besitzen und indirektes Adressieren, Programmverzweigungen nach Vergleichsoperationen und Unterprogramme erlauben. Im Falle der Gitterpunktmethode muß man jedoch hinsichtlich der Genauigkeit recht bescheiden werden. Bei einer Anfangsrandwertaufgabe wie der Wärmeleitungsgleichung mit einer Orts- und einer Zeitvariablen lassen sich pro Zeitschicht ca. 10 Gitterpunkte berücksichtigen, bei der zweidimensionalen Poisson-Gleichung darf das gesamte Gitter nur ca. 18 innere Punkte besitzen. Man fragt sich daher, ob die noch in den fünfziger Jahren bei den damaligen Großrechnern wegen ihres Speicherbedarfs gefürchtete Gitterpunktmethode der richtige Weg für den Taschenrechner ist. Vielleicht könnte man mit Integraldarstellungen und Lösungsansätzen wie der Kollokation und der Methode der finiten Elemente zu höherer Genauigkeit gelangen, müßte dann allerdings auf einen vollautomatischen Programmablauf verzichten.

Die Beispiele selbst sind durch ihre physikalische Herkunft sehr faszinierend. Als Kostprobe seien genannt: Einschalten eines Gleichstrom-Motors mit Ankerrückwirkung, Seil mit Schneelast, Erwärmung der Bremstrommel eines PKW beim Anhalten, Temperaturverteilung in einem Wohnraum im Winter.

Der für das Buch in Frage kommende Leserkreis läßt sich somit folgendermaßen abgrenzen:

Der Student der Mathematik, der die verschiedenen Lösungsmethoden für Differentialgleichungen praktisch erproben möchte, wird mit den derzeit auf dem Markt befindlichen Taschenrechnern nicht zurecht kommen. Dabei kann ihm auch dieses Buch nicht weiterhelfen. Der Student der Natur- oder Ingenieurswissenschaften dagegen, der die in seinem Studium auftretenden

Differentialgleichungen in ihrer einfachsten Form lösen möchte, weil ihn das Verhalten der Lösung interessiert, während das Verfahren nur Mittel zum Zweck ist, kann von diesem Buch zahlreiche wertvolle Anregungen und Ermutigungen erhalten. Denkbar wäre auch, daß ein im Berufsleben stehender Wissenschaftler bei der Mathematisierung eines Problems, dieses erst einmal idealisiert und sich mit dem Taschenrechner einen groben Überblick über das Verhalten der Lösung verschaffen möchte, bevor er eine Präzisionsrechnung am Großcomputer durchführt. Auch ihm kann das Buch von großem Nutzen sein.

Erlangen G. Schmeißer

Kuhnert, F., Pseudoinverse Matrizen und die Methode der Regularisierung (Teubner Texte zur Mathematik), Leipzig: BSB B. G. Teubner Verlagsgesellschaft 1976, 88 S., kart., DM 9,80

„Das Buch ist den Fragen der praktischen Lösung über- und unterbestimmter Gleichungssysteme, aber auch singulärer und schlechtkonditionierter Gleichungssysteme gewidmet. Die endliche Zahlendarstellung in Rechnern und das Auftreten von Rundungsfehlern machen die Entwicklung stabiler numerischer Algorithmen erforderlich. Im Buch wird zunächst die pseudoinverse Matrix als einheitliches Mittel der Darstellung von Normal- und Pseudonormallösungen über- und unterbestimmter und singulärer Gleichungssysteme beschrieben. Für die Berechnung der pseudoinversen Matrix werden sowohl exakte als auch iterative Verfahren angegeben. Schließlich wird die Tichonowsche Regularisierung zur Gewinnung stabiler numerischer Verfahren beschrieben und entsprechende Fehlerabschätzungen angegeben."

Dieser der Einleitung des Buches entnommenen Inhaltsbeschreibung sollen noch einige Bemerkungen hinzugefügt werden.

Das Buch ist knapp und kurz gehalten. Im Gegensatz zu den Monographien über diese Themen (Rao-Mitra, Bouillion-Odell, Ben-Israel-Greville) wird hier nur die Pseudo-Inverse behandelt, die übrigen Typen von verallgemeinerten Inversen werden nur am Rand erwähnt. Dagegen wurde hier mehr Gewicht auf die Darstellung numerischer Verfahren für die Berechnung der Pseudo-Inversen gelegt. Zur Frage der Anwendungen wird der Leser auf die angegebenen Lehrbücher verwiesen.

Die Darstellung ist elementar und setzt nur Kenntnisse der linearen Algebra im Umfang der üblichen Anfängervorlesungen voraus. Trotz nicht immer ganz klarer Gliederung (so ist nicht einsichtig, warum nur drei Aussagen, die nicht einmal zentral sind, als Sätze formuliert werden) ist das Buch sehr gut lesbar.

Mir ist kein deutschsprachiges Lehrbuch bekannt, in dem diese Themen behandelt werden. Daher füllt das vorliegende Buch sicher eine bestehende Lücke aus. Es kann jedem, der an der praktischen Lösung linearer Gleichungssysteme interessiert ist, empfohlen werden. Insbesondere scheint es mir geeignet, den behandelten Stoff in die Grundvorlesungen der Numerik einzubringen.

Bielefeld L. Elsner

Brass, H., Quadraturverfahren (Studia Mathematica, Skript 3), Göttingen – Zürich: Vandenhoeck & Ruprecht 1977, 311 S., kart., DM 35,–

Im Vorwort dieser Monographie steckt der Verfasser die Grenzen ab, die er mit seinem Buch erreichen und einhalten möchte: Vollständigkeit im Kernbereich der Quadraturtheorie unter Verzicht auf Verallgemeinerungen wie z. B. die Integration mit Gewichten u. ä. Mir scheint, daß es im wesentlichen gelungen ist, dieses Ziel zu erreichen. In Kap. I (Grundlagen) gibt der

Verfasser zunächst einen einführenden Überblick. Sehr viel Wert wird auf die Herausarbeitung der leitenden Gedanken gelegt, die der Entwicklung und den Möglichkeiten der Quadraturtheorie zugrundeliegen. Der theoretische Standpunkt ist an der Auswahl erkennbar; deshalb findet man hier wie auch in den folgenden Kapiteln weder numerische Beispiele noch Aufgaben und keine Programme. Im Zentrum von Kap. II (Restabschätzungen) steht der Peano-Kern. Hier werden allgemeine Restgliduntersuchungen durchgeführt; dazu gehören auch Restentwicklungen und funktionalanalytische Methoden. In ähnlicher Weise beschäftigt sich Kap. III (Interpolationsquadraturen) mit allgemeinen Eigenschaften dieser Klasse von Quadraturverfahren bis hin zu den Konvergenzuntersuchungen. In Kap. IV (Spezielle Interpolationsquadraturen) werden nun explizit Verfahren behandelt: Newton-Cotes-Verfahren mit Fehler- und Konvergenzeigenschaften sowie andere Interpolationsquadraturen einschließlich der Gauß-Quadratur. Kap. V (Zusammengesetzte Quadraturverfahren) enthält neben den herkömmlichen zusammengesetzten Interpolationsquadraturen auch die Extrapolationsmethode, verschiedene Randkorrekturen und die praktikablen Formen der ableitungsfreien Fehlerschranken. In dem kurzen Kap. VI (Integration periodischer Funktionen über ein Periodenintervall) stehen naturgemäß die hervorragenden Eigenschaften der Sehnentrapezregel im Vordergrund, gefolgt von den funktionalanalytischen Abschätzungen nach Davis. Das letzte Kap. VII (Optimale Quadraturverfahren) schließlich enthält die theoretisch besonders interessanten Überlegungen, beste Quadraturformeln zu entwickeln, deren Anfänge auf Sard zurückgehen und die auch heute noch nicht abgeschlossen sind. Die in diesem Kapitel angeschnittenen reizvollen Probleme lassen erkennen, daß auch das Thema „Quadratur" weiter in Entwicklung ist. In einem kleinen Anhang schließlich werden noch die Laplaceschen Koeffizienten behandelt, die beispielsweise bei der Berechnung der Gewichte von Newton-Cotes-Formeln nützlich sind.

Das Buch stellt eine echte Bereicherung der Literatur auf dem Gebiet der numerischen Mathematik dar und wird vor allem denjenigen ansprechen, für den die mathematischen Aspekte der Numerik im Vordergrund stehen. Die Fülle von Überlegungen und Resultaten, die hier selbst bei der Beschränkung auf die eindimensionale Integration angeboten werden, macht das Interesse an diesem lebendigen Gegenstand deutlich. Weit über 200 Literaturhinweise tragen zum Informationsgehalt des Buchs bei. Die gut gelungene Darstellung kann ich dem wissenschaftlich arbeitenden Mathematiker wie auch dem am Gegenstand interessierten Studenten wärmstens empfehlen.

München G. Hämmerlin

Fleming, W. H., Rishel, R. W., Deterministic and Stochastic Optimal Control (Applications of Math., Bd. 1), Berlin – Heidelberg – New York: Springer Verlag 1975, XI + 222 S., cloth, DM 60,60

Die deterministische und stochastische Kontrolltheorie hat in den letzten 25 Jahren eine recht stürmische Entwicklung erfahren, ausgelöst von praktischen Problemstellungen in den Ingenieurwissenschaften und dementsprechend weitgehend von Ingenieuren getragen. Der Anwendungsbereich hat sich inzwischen auf Wirtschaftstheorie und Biologie ausgeweitet. Dem Mathematiker wird der Zugang zu diesem Gebiet nicht eben leicht gemacht: die Kompliziertheit der Materie bewirkt, daß in weiten Teilen der Literatur entweder heuristische Überlegungen dominieren oder aber strenge Beweise mit vielen technischen Details beladen sind. Das vorliegende Werk stellt nach Meinung des Rezensenten einen erfolgreichen Versuch dar, diesen Schwierigkeiten zu begegnen.

Kap. I bringt als Vorbereitung eine moderne Darstellung des einfachsten Problems der Variationsrechnung (Eulersche Gleichung, Jakobis notwendige Bedingung). Danach wird in Kap. II das det. Kontrollproblem anhand von Beispielen motiviert und der Zusammenhang mit den Variationsproblemen von Bolza, Lagrange und Mayer diskutiert. Sodann wird die zentrale notwendige Optimalitätsbedingung („Pontrjagins Prinzip") sorgfältig formuliert, auf verschiedene Beispiele (z. B. Mondlandeprobleme) angewandt, für zwei besonders durchsichtige Spezialfälle und danach allgemein (mit Hilfe eines abstrakten nichtlinearen Optimierungsproblems) bewiesen.

Kap. III behandelt die Frage der Existenz und der Stetigkeit optimaler Steuerungen. Hier spielen Konvexitätsbedingungen eine wesentliche Rolle und es müssen für eine abgerundete Theorie anstelle der in den Kap. I und II benützten stückweise stetigen Steuerungen nun Lebesgue-integrierbare zugelassen werden. Kap. IV bringt die wichtige Methode der dynamischen Optimierung (für stetigen Zeitparameter) und den Begriff der feedback-Kontrollen. Es wird die partielle Differentialgleichung erster Ordnung für die sog. Wertfunktionen hergeleitet, aus welcher sich hinreichende Optimalitätsbedingungen ergeben. Das Analogon zur Charakteristikenmethode führt zu den gewöhnlichen Differentialgleichungen des Pontrjaginschen Prinzips, womit dessen Zusammenhang mit der Methode der dynamischen Optimierung geklärt ist. Kap. V (Stochastische Differentialgleichungen und Markoffsche Diffusionsprozesse) dient der Vorbereitung der stochastischen Kontrolltheorie, kann aber auch als lesenswerte Einführung in das Thema (unabhängig von allen anderen Kapiteln) empfohlen werden. Die Darstellung schließt sich an das bekannte Buch von Gikhman/Skorokhod, Stochastic Differential Equations, Springer Verlag 1972, an; auf Beweise wird oft zugunsten von motivierenden Beispielen und Diskussionen verzichtet. Natürlich spielt der Begriff des stochastischen Integrals von K. Ito eine wesentliche Rolle. Das abschließende Kapitel VI behandelt dann die optimale Steuerung Markoffscher Diffusionsprozesse (vorwiegend für den Fall vollständiger Information) mit der Methode der dynamischen Optimierung, wobei der Zusammenhang zwischen stochastischen Differentialgleichungen und der parabolischen partiellen Differentialgleichung zweiter Ordnung für die Wertfunktion von entscheidender Bedeutung ist. Von den anderen behandelten Themen ist besonders das sog. Separationsprinzip zu nennen. Der Anhang enthält spezielle Resultate aus Analysis und Wahrscheinlichkeitstheorie, am Ende jedes Kapitels findet man Aufgaben. Die Einleitungen der Kapitel geben einen informativen Überblick über Stoffauswahl und Vorgehen.

Auf verhältnismäßig kleinem Raum wird der Leser in exakter und didaktisch sehr ansprechender Form in ein mathematisch hochinteressantes Gebiet eingeführt und ihm Ausblicke auf weitergehende Studien eröffnet. Man darf dieses Werk sowohl theoretisch als auch angewandt arbeitenden Mathematikern uneingeschränkt empfehlen.

Karlsruhe K. Hinderer

Neuerscheinungen

Analysis in mehreren Variablen

einschließlich gewöhnlicher Differentialgleichungen und des Satzes von Stokes

Von Prof. Dr. rer. nat. TH. BRÖCKER, Universität Regensburg

1980. VI, 361 Seiten mit 114 Bildern, 69 Aufgaben und 33 Beispielen.
(Teubner Studienbücher)

ISBN 3-519-02061-0
Kart. DM 29,80

Das Buch wendet sich an Studenten nach dem ersten Semester mit gewissen mathematischen Vorkenntnissen, insbesondere in der Analysis einer Variablen. Es behandelt die Differentialrechnung mehrerer Variablen, die Theorie der gewöhnlichen Differentialgleichungen und die Integration von Differentialformen auf Mannigfaltigkeiten. Unter den Anwendungen findet man den Kalkül der Vektor- und Tensoranalysis, aber man findet auch geometrische Anwendungen, wie z. B. einen sehr einfachen Beweis des Brouwerschen Fixpunktsatzes.

Aus dem Inhalt: Kurven im R^n, differenzierbare Abbildungen, Taylorentwicklung, lokales Verhalten unter Nebenbedingungen / Umkehrabbildungen, Enveloppen / Differentialgleichungen, lokaler Fluß, lineare DGl, Ljapunofstabilität, Morselemma/Mannigfaltigkeiten, Integration alternierender Formen / Sätze von Stokes und Gauß, Fixpunktsatz von Brouwer, Fundamentalsatz der Algebra, Vektoranalysis

Darstellungstheorie von endlichen Gruppen

Von Prof. Dr. rer. nat. W. MÜLLER, Universität Bayreuth

1980. IX, 211 Seiten (Teubner Studienbücher)
ISBN 3-519-02060-2
Kart. DM 24,80

Das Buch gibt auf der Basis der elementaren Ring- und Modultheorie eine Einführung in die gewöhnliche und modulare Darstellungstheorie endlicher Gruppen. Der Leser wird dabei mit wesentlichen Hilfsmitteln und grundlegenden Methoden vertraut gemacht, die in der aktuellen Forschung auf diesem Gebiet von Bedeutung sind.

Aus dem Inhalt: [illegible]

Neuerscheinungen

Algebraische Strukturen

Von Prof. Dr. phil. G. SIMM, Universität (Gesamthochschule) Duisburg,
und Dr. rer. nat. H. GONSKA, Universität (Gesamthochschule) Duisburg

1980. ca. 200 Seiten mit zahlreichen Bildern, Beispielen und Aufgaben.
(Mathematik für die Lehrerausbildung) ISBN 3-519-02706-2
Kart. DM 24,80

In diesem Buch werden solche Strukturen und Begriffe der Algebra erörtert, die für den Mathematikunterricht auf allen Schulstufen von grundlegender Bedeutung sind. Die Beziehungen der Begriffe homomorphe Abbildung, Partition, Äquivalenz- und Kongruenzrelation, Gruppe und Normalteiler, Ring und Ideal ermöglichen an zentralen Stellen des Buches eine genetische Entwicklung der Begriffe und Einsichten. Diese Vorstellungen werden vertieft durch Einblicke in die Theorie endlicher Gruppen, durch die Betrachtung einiger Bezüge zum praktischen Rechnen und konstruktiver Verfahren zur Gewinnung algebraischer Strukturen. In jedem Kapitel werden didaktische Bezüge aufgezeigt.

Aus dem Inhalt: Gruppoide und Untergruppoide / Homomorphismen und Partitionen / Elemente der Gruppentheorie: Homomorphismen, Gruppen der Ordnungen 6 bis 12 / Ringe: Regeln für das Rechnen in Ringen, Ringhomomorphismen und Partitionen, Endomorphismen- und Polynomringe, Lösung algebraischer Gleichungen

Die Bewegungsgruppe einer euklidischen Ebene

Ein axiomatischer Aufbau ohne Anordnungsbegriff

Von Dr. rer. nat. H. KINDER, Kiel, und Prof. Dr. rer. nat. U. SPENGLER,
Pädagogische Hochschule Kiel

1980. ca. 160 Seiten mit 116 Bildern und 153 Aufgaben.
(Mathematik für die Lehrerausbildung) ISBN 3-519-02710-0
Kart. DM 22,80

Ausgehend von den fünf Grundbegriffen Punkt, Gerade, inzident, senkrecht, Bewegung und sechs Axiomen vom Verbinden, Schneiden, Lotfällen und Spiegeln wird die Geometrie der euklidischen Geometrie bis zur vollständigen Übersicht über alle Typen von Bewegungen in einer Allgemeinheit entwickelt, die endliche Modelle einschließt. Zusammen mit dem Folgeband: „Von der euklidischen Geometrie zur linearen Algebra" wird der mathematische Hintergrund der Geometrie für die Sekundarstufe I abgedeckt.

Aus dem Inhalt: Punkt, Gerade, Inzidenz, Orthogonalität und Bewegung als Grundbegriffe / 6 Axiome vom Verbinden, Lotfällen, Schneiden und vom Bewegen eines gleichschenkligen Dreiecks / Ein Modell mit 9 Punkten / Spiegelungen, Drehungen, Translationen, Gleitspiegelungen und Untergruppen der Bewegungsgruppe / Beweise elementargeometrischer Sätze durch Rechnen mit Bewegungen / Analytische Geometrie als Modell

B. G. Teubner Stuttgart