82. Band Heft 4
ausgegeben am 22. 10. 1980

DMV

Jahresbericht
der Deutschen Mathematiker-Vereinigung

Herausgegeben von K. Jacobs
unter Mitwirkung von
P. L. Butzer, W.-D. Geyer

B. G. Teubner Stuttgart 1980

In den nächsten Heften erscheinende Arbeiten:

I. Elstrodt: Die Selbergsche Spurformel für kompakte Riemannsche Flächen

M. Frewer: Felix Bernstein

L. Gårding: Microlocal Analysis of Distributions

[illegible]

E. Hölder: Lichtensteins wissenschaftliche Wirksamkeit – Zum 100. Geburtstag von Leon Lichtenstein

M. Kracht: Maximilian Pinl in memoriam

H. Rohrbach: Richard Brauer zum Gedächtnis

R. Walter: Konvexität in Riemannschen Mannigfaltigkeiten

Anschriften der Herausgeber

Prof. Dr. K. Jacobs, Bismarckstr. 1½, 8520 Erlangen

Prof. Dr. P. L. Butzer, Templergraben 55, 5100 Aachen
Prof. Dr. W.-D. Geyer, Bismarckstr. 1½, 8520 Erlangen

Bezugshinweis

Früher erschienene Bände (ab Band 68) des „Jahresberichts der Deutschen Mathematiker – Vereinigung“ können durch den Buchhandel oder den Verlag bezogen werden.

Nachdruck der Bände 1 bis 40 liefert: Johnson Reprint. Corp., 111 Fifth Avenue, New York, N. Y. 10003

Nachdruck der Bände 41 bis 67 liefert: Swets & Zeitlinger, Heereweg 347 b, POB 810, NL-2160 SZ Lisse/Holland

Jber. d. Dt. Math.-Verein.
82 (1980) 153–166

Funktionalanalysis und nichtlineare Differentialgleichungen*)

H. Amann, Zürich

1.

Es ist das Ziel dieses Artikels, einen Einblick zu geben in neuere Entwicklungen auf einem Teilgebiet der nichtlinearen Funktionalanalysis, und zwar auf einem Gebiet, das eng zusammenhängt mit der Theorie der nichtlinearen gewöhnlichen und partiellen Differentialgleichungen. Ich möchte versuchen, anhand einiger einfacher Modellprobleme und durch heuristische Überlegungen dem Nichtspezialisten einen Eindruck zu vermitteln von den Problemstellungen, den Resultaten und auch einigen Beweismethoden auf diesem relativ jungen Teilgebiet der Analysis.

Es sei ausdrücklich darauf hingewiesen, daß an vielen Stellen die Darstellung „übersimplifiziert" ist und heuristische Betrachtungen verwendet werden, mit dem Ziel, dem Leser möglichst klar die wesentlichen Gedankengänge herauszuarbeiten. Für mathematisch präzise, technisch oft sehr anspruchsvolle Beweise sei auf die zitierte Literatur verwiesen.

2.

Zur Illustration betrachten wir die folgenden drei Probleme aus der Theorie der Differentialgleichungen.

$$\text{(E)} \qquad \begin{cases} \text{Gesucht ist eine Lösung u des elliptischen Randwertproblems} \\ -\Delta u = f(u) \quad \text{in } \Omega \quad , \\ \quad u = 0 \qquad \text{auf } \partial\Omega\,. \end{cases}$$

Hierbei ist Ω ein beschränktes Gebiet in $\mathbf{R}^n$ mit glattem Rand $\partial\Omega$, und $f : \mathbf{R} \to \mathbf{R}$ ist eine gegebene glatte Funktion.

Im zweiten Problem interessieren wir uns für die Existenz von, bezüglich der t-Variablen 2π-periodischen Lösungen der nichtlinearen Wellengleichung

$$\text{(W)} \qquad \begin{cases} u_{tt} - u_{xx} = f(u) & \text{in } (0, \pi) \times \mathbf{R}, \\ u(0, t) = u(\pi, t) = 0 & \forall \; t \in \mathbf{R}\,. \end{cases}$$

*) Hauptvortrag auf der Tagung der Deutschen Mathematiker-Vereinigung in Hamburg 1979.

0012–0456/80/04 0153–14$02.80/0

Im letzten Problem schließlich sind T-periodische Lösungen des folgenden Hamiltonschen Systems gewöhnlicher Differentialgleichungen gesucht:

(H) $\dot{p} = -\mathscr{H}_q(p, q) \qquad \dot{q} = \mathscr{H}_p(p, q)$,

wobei $\mathscr{H}: \mathbf{R}^n \times \mathbf{R}^n \to \mathbf{R}$ eine gegebene glatte Hamilton-Funktion und T eine fest vorgegebene Periode sind.

In allen obigen Problemen ist es das Ziel, Aussagen über die Existenz von Lösungen zu gewinnen. Da es sich stets um nichtlineare Probleme handelt, und nichtlineare Probleme in der Regel nicht eindeutig lösbar sind, ist es ein weiteres – und im allgemeinen viel schwerer zu erreichendes – Ziel, Abschätzungen für die Anzahl von Lösungen zu finden.

Beim näheren Betrachten der Probleme (E), (W) und (H), die aus verschiedenen Gebieten der Theorie der Differentialgleichungen stammen – nämlich aus der Theorie der elliptischen Randwertprobleme, der Theorie der hyperbolischen Differentialgleichungen und der Theorie der gewöhnlichen Differentialgleichungen – sieht man, daß sie alle eine gemeinsame Struktur besitzen. Sie sind nämlich alle von der Form

$$A u = F(u),$$

wobei A ein linearer Operator und F eine nichtlineare Abbildung sind. So entspricht z. B. A im Falle (E) dem Differentialoperator $-\Delta$, wobei die Randbedingung „$u = 0$ auf $\partial\Omega$" in den Definitionsbereich von A eingearbeitet wird.

Zu einer genaueren Beschreibung des abstrakten Problems muß natürlich zuerst der zugrundeliegende abstrakte Raum spezifiziert werden. In der Regel empfiehlt es sich, einen möglichst reich strukturierten Raum zu wählen, da es das Ziel sein muß, möglichst viel der in den konkreten Problemen vorhandenen Struktur in die abstrakte Formulierung zu übertragen. In unserem Fall können wir stets einen Hilbertraum H – z. B. $H = L_2(\Omega)$ im Falle (E) – wählen. In diesem Fall kann der lineare Operator A näher spezifiziert werden. Er bildet nämlich einen in H dichten Definitionsbereich D(A) in H ab:

$$A : D(A) \subset H \to H,$$

d. h., A ist i. a. ein unbeschränkter Operator. Bei geeigneter Interpretation der Differentialoperatoren – nämlich im Sinne der Distributionen – und unter Heranziehen der gut entwickelten Theorie der linearen Differentialoperatoren kann man zeigen, daß in jedem Fall A als selbstadjungierter Operator gewählt werden kann:

$$A = A^* .$$

Was die Nichtlinearität anbelangt, so ist es naheliegend zu verlangen, daß F den Raum H in sich abbildet, d. h.

(1) $F : H \to H$.

Diese harmlos scheinende Voraussetzung kann sich allerdings als recht restriktiv herausstellen. Falls nämlich H ein L_2-Raum ist und F durch die Funktion f definiert wird, d. h.

$$F(u)(x) := f(u(x)) \qquad \forall x \in \Omega, \ \forall u \in L_2(\Omega),$$

so impliziert (1) bereits die Existenz von Konstanten a, b mit

$$|f(\xi)| \leqslant a + b|\xi| \qquad \forall\, \xi \in \mathbf{R},$$

d. h., die Nichtlinearität muß notwendigerweise linear beschränkt sein (z. B. [14]). Diese Schwierigkeit ist typisch für nichtlineare Probleme, d. h. die Wahl des zugrundeliegenden Funktionenraumes, die oft für den linearen Operator natürlich erscheint, wirkt sich stark auf die zugelassenen Nichtlinearitäten aus. In gegebenen konkreten Problemen ist es deshalb wesentlich, unter Berücksichtigung der Eigenschaften der Nichtlinearitäten die zugrundeliegenden Funktionenräume möglichst optimal zu wählen.

Da wir uns in unseren Betrachtungen in erster Linie für linear beschränkte zu betrachten, wobei $\langle\,.\,,.\,\rangle$ das innere Produkt in H darstellt. Die Berechnung der 1. Variation von ϕ an der Stelle u in Richtung h, d. h. des Gateaux-Differentials an der Stelle u in Richtung h, ergibt

$$\delta\phi(u;h) = \langle Au - F(u), h\rangle \qquad \forall\, h, u \in D(A)\,.$$

Hieraus ist ersichtlich, daß $u \in D(A)$ genau dann ein kritischer Punkt von ϕ ist, d. h. ein Punkt, an dem die 1. Variation in jeder zulässigen Richtung verschwindet, wenn $A\,u = F(u)$ gilt. In andern Worten, die Gleichung $A\,u = F(u)$ kann formal als die Eulersche Gleichung des Variationsproblems

$$\delta\phi = 0$$

betrachtet werden, und das Problem (A) wird reduziert auf den Nachweis der Existenz und Abschätzungen für die Anzahl kritischer Punkte von ϕ.

Diese Betrachtensweise hat allerdings zwei erhebliche technische Nachteile, welche eine strenge Durchführung dieses Programms erschweren bzw. verunmöglichen:

(i) ϕ ist a priori nur auf $D(A)$, also nicht auf ganz H definiert. Folglich ist ϕ nicht (Fréchet-)differenzierbar, was die Anwendung von Variationsmethoden zum Nachweis kritischer Punkte praktisch unmöglich macht.

(ii) Im allgemeinen ist ϕ weder nach unten noch nach oben beschränkt, so daß weder ein globales Minimum noch ein globales Maximum existiert. Folglich kann i. a. nur die Existenz von Sattelpunkten erwartet werden, die relativ schwer nachzuweisen sind.

Um ein Gefühl dafür zu bekommen, was bzgl. der Lösbarkeit der Gleichung $A\,u = F(u)$ überhaupt erwartet werden kann, wollen wir nur einige formale heuristische Betrachtungen anstellen. Dazu fassen wir F als eine nichtlineare Störung des linearen Operators A auf, die wir aufgrund des Mittelwertsatzes linearisieren, d. h.

$$F(u) = F(0) + F'(\tilde{u})u \quad ,$$

wobei die „Zwischenstelle" $\tilde{u}$ natürlich von u abhängt. Dann nimmt die Gleichung $A\,u = F(u)$ die Form

$$(2) \qquad [A - F'(\tilde{u})]\,u = F(0)$$

an. Wenn nun $F'(\tilde{u})$ eine Zahl λ wäre, hätten wir die Gleichung $(A - \lambda)\,u = F(0)$ zu lösen, die bekanntlich eindeutig lösbar ist, falls λ nicht zum Spektrum $\sigma(A)$ von A gehört. Folglich wird man erwarten, daß (2) lösbar ist, falls $F'(\tilde{u}) \notin \sigma(A)$ gilt. Diese Annahme ist allerdings wenig sinnvoll, da (i) $F'(\tilde{u})$ keine Zahl, sondern ein symmetrischer beschränkter linearer Operator ist und (ii) $\tilde{u}$ ja von u abhängt. Folglich wird eine Annahme über eine einzige Stelle $\tilde{u}$ wenig hilfreich sein. Also wird man verlangen, daß $F'(\tilde{u}) \notin \sigma(A)$ für alle $\tilde{u} \in H$ gilt, oder – in einer vernünftigeren Formulierung –, daß

$$(3) \qquad \sigma(F'(u)) \cap \sigma(A) = \emptyset \qquad \forall\, u \in H$$

gilt. Wenn diese Bedingung erfüllt ist, wäre es aufgrund der obigen heuristischen Überlegung zumindest nicht überraschend, wenn die Gleichung $A\,u = F(u)$ eindeutig lösbar wäre.

Anschaulich und nicht sehr präzise kann man die Bedingung (3) auch so formulieren, daß man sagt, „die Nichtlinearität F tritt nicht in Resonanz mit dem Spektrum von A".

Um diese These, daß die Gleichung $A\,u = F(u)$ in diesem „Nichtresonanzfall" eindeutig lösbar ist, durch Verifizieren ihrer Richtigkeit in einem Spezialfall zu untermauern, benötigen wir nun Information über $\sigma(A)$ in den konkreten Fällen (E), (W) und (H).

Im elliptischen Fall (E) ist es wohlbekannt, daß A positiv definit ist und eine kompakte Inverse besitzt. Folglich besitzt A ein reines Punktspektrum

$$0 < \lambda_0 < \lambda_1 < \lambda_2 < \dots$$

ohne endlichen Häufungspunkt, und jedes $\lambda \in \sigma(A)$ ist ein Eigenwert endlicher Vielfachheit.

Im hyperbolischen Fall (W) besitzt A ebenfalls ein reines Punktspektrum, das keinen endlichen Häufungspunkt besitzt, sich aber von $-\infty$ bis $+\infty$ erstreckt:

$$\dots\ \lambda_{-2} < \lambda_{-1} < \lambda_0 = 0 < \lambda_1 < \lambda_2 < \dots$$

Hierbei ist jedes $\lambda \in \sigma(A)\backslash\{0\}$ ein Eigenwert endlicher Vielfachheit, und $\lambda_0 = 0$ ist ein Eigenwert unendlicher Vielfachheit.

Im Falle (H) gilt $\sigma(A) = \frac{2\pi}{T}\mathbf{Z}$, und jedes $\lambda \in \sigma(A)$ ist ein Eigenwert der Vielfachheit 2 n.

Betrachten wir nun den Fall (E). Da A positiv definit ist, existiert eine positiv definite Quadratwurzel $A^{1/2}$, und hierfür gilt

$$\langle A\,u, u\rangle = \| A^{1/2} u \|^2 \qquad \forall\, u \in D(A)\,.$$

Dies zeigt, daß das Funktional ϕ in diesem Fall eine natürliche Fortsetzung auf $D(A^{1/2})$ (im konkreten Fall auf den Sobolevraum $H_0^1(\Omega)$) besitzt. In äquivalenter Weise können wir mit dem stetigen linearen Operator $R := A^{-1/2} \in \mathscr{L}(H)$ ein Funktional

$$\psi \in C^1(H, \mathbf{R})$$

definieren durch

$$\psi(x) = \frac{1}{2}\,\|x\|^2 - \Phi(Rx) \qquad \forall\, x \in H\,.$$

Dann verifiziert man leicht, daß x ein kritischer Punkt von ψ ist, d. h. $\psi'(x) = 0$ gilt, genau dann wenn Rx eine Lösung der Gleichung $A\,u = F(u)$ ist. Folglich haben wir in diesem Spezialfall unser Problem (A) auf das äquivalente Problem des Studiums der kritischen Punkte des C^1-Funktionals ψ zurückgeführt.

Wir setzen nun voraus, daß $f' \leqslant 0$ gilt. Dies impliziert für den Operator F die „Monotonieungleichung"

$$(4) \qquad \langle F(u) - F(v),\ u - v\rangle \leqslant 0 \qquad \forall\, u, v \in H\,.$$

Hieraus und aus der Symmetrie von R leitet man leicht ab, daß das Funktional ψ streng konvex und koerziv (d. h. $\psi(u) \to \infty$ für $\|u\| \to \infty$) ist. Folglich kann ψ höchstens einen kritischen Punkt, nämlich an der Stelle des globalen Minimums, besitzen. Die tatsächliche Existenz des globalen Minimums folgt leicht aus der

Koerzivität von ψ und der schwachen Kompaktheit der Einheitskugel in H. Auf diese Weise folgt, daß unter der Voraussetzung (4) die Gleichung $Au = F(u)$ im Falle eines positiv definiten Operators A genau eine Lösung besitzt.

Die Ungleichung (4) impliziert aber, daß $F'(u)$ für jedes $u \in H$ negativ semi-definit ist. Folglich gilt

$$\sigma(F'(u)) \subset (-\infty, 0] \qquad \forall\, u \in H,$$

während $\sigma(A) \subset (0, \infty)$ erfüllt ist. D. h., in diesem Fall „tritt die Nichtlinearität F nicht in Resonanz mit dem Spektrum von A", und die Gleichung $Au = F(u)$ ist eindeutig lösbar.

Das folgende allgemeine Theorem zeigt nun, daß diese Aussage in der Tat auch dann richtig ist, wenn die Nichtlinearität zwischen zwei Eigenwerten von A „variiert" (während sie im obigen Fall auf einer Seite des Spektrums von A „variierte").

Theorem 1 *Es gelte:*

(i) $$\alpha \leqslant \frac{\langle F(u) - F(v), u - v\rangle}{\| u - v \|^2} \leqslant \beta \qquad \forall\, u, v \in H$$

und

(ii) $[\alpha, \beta] \subset \rho(A)$.

Dann ist die Gleichung $Au = F(u)$ eindeutig lösbar.

4.

Es erhebt sich nun natürlich die Frage, was passiert, wenn $W(F) \cap \sigma(A) \neq \emptyset$ gilt. Die Erfahrung zeigt, daß in diesem Fall i. a. Nichteindeutigkeit vorliegt. Um die Problematik zu vereinfachen, wollen wir den Spezialfall betrachten, daß bereits die Existenz einer Lösung bekannt ist. In praktischen Fällen handelt es sich dabei oft um die „uninteressante" Lösung, und man möchte etwas über die Existenz anderer Lösungen wissen. Wenn bereits eine Lösung bekannt ist, kann durch eine einfache Translation stets angenommen werden, daß dies die Nullösung ist, d. h., daß

$$F(0) = 0$$

gilt, *was* also *im folgenden stets vorausgesetzt wird.*

In diesem Fall reduziert sich die linearisierte Gleichung (2) auf die Form

$$[A - F'(\tilde{u})]\, u = 0, \tag{5}$$

und gesucht sind Lösungen $u \neq 0$. Wäre nun $F'(\tilde{u})$ eine Zahl λ, so hätte die Gleichung (5) genau dann eine nichttriviale Lösung, wenn λ zum Punktspektrum $\sigma_p(A)$ von A gehörte. Im Lichte der vorangehenden Überlegungen führt dies zur Vermutung der Existenz einer nichttrivialen Lösung von $Au = F(u)$, falls

$$W(F) \cap \sigma_p(A) \neq \emptyset$$

gilt. Um zu einer „stabilen" oder „generischen" Formulierung zu gelangen, wird man etwas mehr verlangen, nämlich, daß ein Eigenwert von A im Innern $\mathring{W}(F)$ des numerischen Wertebereichs von F liegt, d. h., *es ist zu erwarten, daß die Gleichung* $Au = F(u)$ *mindestens eine nichttriviale Lösung besitzt, falls* $F(0) = 0$ *und*

$$\mathring{W}(F) \cap \sigma_p(A) \neq \emptyset$$

gelten.

Um diese Vermutung zu untermauern, betrachten wir die konkreten Realisierungen (E) und (W), denen in den letzten Jahren zahlreiche Untersuchungen gewidmet worden sind. (Für Überblicke und Zusammenfassungen vgl. [11], [12], [19]). Hierbei beschränken wir uns zuerst auf den sog. *superlinearen Fall,* d. h., wir setzen voraus, daß

$$\lim_{|\xi| \to \infty} f'(\xi) = \infty \tag{6}$$

gilt. (Auf die zusätzliche Schwierigkeit, die daraus entsteht, daß in diesem Fall f nicht linear beschränkt und somit F im Falle $H = L_2$ nicht auf ganz H definiert ist, gehen wir hier nicht ein, da es uns nur darum geht, qualitative Aspekte zu beschreiben.) Aus (6) folgt leicht, daß

$$W(F) \supset [f'(0), \infty)$$

gilt, so daß $W(F)$ in jedem Fall unendlich viele Eigenwerte enthält oder, anders ausgedrückt, „F mit unendlich vielen Eigenwerten von A in Resonanz tritt". In der Tat folgt z. B. aus Untersuchungen von Ambrosetti und Rabinowitz [5] im elliptischen Fall und von Rabinowitz [17] im Falle der Wellengleichung, daß mindestens eine nichttriviale Lösung für (E) und (W) existiert, falls (6) (sowie einige weitere Voraussetzungen mehr technischer Natur) erfüllt ist.

Nach diesem Extremfall – Resonanz von F mit unendlich vielen Eigenwerten von A – wenden wir uns Situationen zu, bei denen F nur mit endlich vielen Eigenwerten in Resonanz tritt. Eine relativ einfache Situation dieser Art liegt z. B. vor, wenn f *asymptotisch linear* ist, d. h., wenn der Grenzwert

$$f'(\infty) := \lim_{|\xi| \to \infty} f(\xi)$$

in $\mathbf{R}$ existiert. Der Einfachheit halber beschränken wir uns hierbei auch auf den „generischen" Fall, in dem „im Unendlichen keine Resonanz auftritt", d. h.

$$f'(\infty) \notin \sigma(A)$$

gilt.

Auch in diesem Fall wurden den Problemen (E) und (W) bereits viele Untersuchungen gewidmet, wobei im Falle (E) die neuesten und weitestreichenden auf Thews [18] und Hess [13] zurückgehen. Aus allen diesen Untersuchungen geht hervor, daß (E) mindestens eine nichttriviale Lösung besitzt, falls zwischen $f'(0)$ und $f'(\infty)$ mindestens ein Eigenwert von A echt eingeschlossen ist. Allerdings wurde dieses Resultat bis jetzt von keinem der Autoren in dieser Allgemeinheit bewiesen. In jeder uns bekannten Arbeit muß f Zusatzbedingungen erfüllen, welche dem Problem nicht angemessen erscheinen. So verlangt z. B. Hess in [13], daß

$$(7) \qquad (f(\xi) - \lambda_k \xi)\, \xi \geqslant 0 \qquad \forall\, \xi \in \mathbf{R}$$

gilt, falls

$$\lambda_k \leqslant f'(0) < \lambda_{k+1} \leqslant \lambda_\ell < f'(\infty) < \lambda_{\ell+1}$$

erfüllt ist.

Ähnliche, allerdings weit weniger allgemeine Resultate sind im Fall (W) bekannt. Hier gehen die wichtigsten Untersuchungen auf Brézis und Nirenberg [7] und auf Mancini [15] zurück, wobei stets angenommen werden muß, daß f monoton wachsend oder fallend ist (was mit der Tatsache zusammenhängt, daß $\lambda_0 = 0$ ein Eigenwert unendlicher Vielfachheit ist).

Das folgende Theorem, das einer gemeinsamen Arbeit des Verfassers mit E. Zehnder [3] entnommen ist, zeigt, daß in der Tat die Existenz einer nichttrivialen Lösung von (E) oder (W) garantiert werden kann, falls zwischen $f'(0)$ und $f'(\infty)$ mindestens ein Eigenwert von A echt eingeschlossen ist, wobei – außer einer Monotonievoraussetzung im Falle (W) – keine weiteren Annahmen (z. B. der Art (7)) notwendig sind.

Theorem 2 *Im Falle der Probleme* (E) *und* (W) *gelte* $f(0) = 0$ *und* $f'(\infty) \notin \sigma(A)$. *Außerdem gelte im Falle* (W) $f'(\xi) \neq 0$ *für alle* $\xi \in \mathbf{R}$. *Dann hat das Problem* (E) *bzw.* (W) *mindestens eine nichttriviale Lösung, falls mindestens ein Eigenwert* λ *von* A *existiert mit*

$$\min(f'(0),\ f'(\infty)) < \lambda < \max(f'(0),\ f'(\infty)) .$$

Es sei bemerkt, daß eine entsprechende Aussage auch für das Problem (H) gilt. Da jedoch in diesem Fall, wegen der größeren Komplexität des Problems, die exakte Formulierung nur unter relativ großem technischen Aufwand möglich ist, werden wir auf die Beschreibung dieser Resultate verzichten (vgl. [3]).

5.

Um eine Vorstellung von den Beweismethoden zu vermitteln, wollen wir in diesem Abschnitt mit wenigen Worten die wichtigsten Beweisschritte von Theorem 2 skizzieren. Hierbei werden wir das weit allgemeinere Problem (A) betrachten, ohne allerdings die allgemeinen Sätze explizit anzugeben. Für einen vollständigen Beweis sowie allgemeine Resultate verweisen wir den interessierten Leser auf [3].

Zur effektiven Behandlung von Problem (A) machen wir die folgenden Grundvoraussetzung:

Es seien $\alpha < \beta$ *reelle Zahlen mit* $\alpha, \beta \in \rho(\mathrm{A})$ *derart, daß gilt:*

(i) *das Intervall* $[\alpha, \beta]$ *enthält höchstens endlich viele Eigenwerte von* A *endlicher Vielfachheit;*

(ii) $\mathrm{W}(\mathrm{F}) \subset [\alpha, \beta]$.

Es sei bemerkt, daß (ii) erfüllt ist, wenn

$$\alpha \leqslant f'(\xi) \leqslant \beta \qquad \forall\, \xi \in \mathbf{R}$$

gilt und daß (i) erfüllt ist, wenn $\alpha, \beta \in \rho(\mathrm{A})$ im Falle (E) beliebig gewählt werden, während im Falle (W) entweder $\alpha > 0$ oder $\beta < 0$ gelten muß.

In einem ersten Schritt ordnen wir dem Problem $\mathrm{A\,u} = \mathrm{F(u)}$ ein C^1-Funktional auf einem geeigneten Hilbertraum zu, dessen kritische Punkte genau den Lösungen der Gleichung $\mathrm{A\,u} = \mathrm{F(u)}$ entsprechen. Hierbei lassen wir uns von dem einfachen, in Abschnitt 2 behandelten Fall des positiv definierten Operators A leiten.

Aus der Spektraltheorie ergibt sich die Zerlegung von H in die orthogonale Summe

$$\mathrm{H} = \mathrm{X} \oplus \mathrm{Y} \oplus \mathrm{Z},$$

wobei X, Y und Z invariante Unterräume von H sind, derart daß gilt

$$\begin{aligned} \sigma(\mathrm{A} \mid \mathrm{X} \cap \mathrm{dom(A)}) &= \sigma(\mathrm{A}) \cap (\beta, \infty), \\ \sigma(\mathrm{A} \mid \mathrm{Y} \cap \mathrm{dom(A)}) &= \sigma(\mathrm{A}) \cap (-\infty, \alpha), \\ \sigma(\mathrm{A} \mid \mathrm{Z}) &= \sigma(\mathrm{A}) \cap (\alpha, \beta). \end{aligned}$$

Insbesondere ist Z ein endlichdimensionaler Untervektorraum von H, der von den endlich vielen Eigenfunktionen aufgespannt wird, die zu den Eigenwerten von A im Intervall $[\alpha, \beta]$ gehören. Ferner folgt die Existenz stetiger linearer Operatoren

$$\mathrm{R} \in \mathscr{L}(\mathrm{H}, \mathrm{X}), \qquad \mathrm{S} \in \mathscr{L}(\mathrm{H}, \mathrm{Y}), \qquad \mathrm{T} \in \mathscr{L}(\mathrm{H}, \mathrm{Z})$$

mit

$$\mathrm{R}^2 - \mathrm{S}^2 + \mathrm{T}^2 = (\mathrm{A} - \alpha)^{-1}.$$

Schließlich setzen wir

$$\Phi_\alpha(\mathrm{u}) := \Phi(\mathrm{u}) - \frac{\alpha}{2}\|\mathrm{u}\|^2 \qquad \forall\, \mathrm{u} \in \mathrm{H}$$

und definieren $\psi: X \times Y \times Z \to \mathbf{R}$ durch

$$\psi(x, y, z) := \frac{1}{2}(\|x\|^2 - \|y\|^2 + \|z\|^2) - \Phi_\alpha(Rx + Sy + Tz) .$$

Dann ist es nicht schwer zu verifizieren, daß gilt:

(i) $\psi \in C^1(X \times Y \times Z, \mathbf{R})$

(ii) $(x, y, z) \in X \times Y \times Z$ ist ein kritischer Punkt von ψ

(d. h. $\psi'(x, y, z) = 0$) genau dann, wenn $Rx + Sy + Tz$ eine Lösung der Gleichung $A u = F(u)$ ist. Es bleibt somit die Aufgabe, die Existenz kritischer Punkte von ψ

zu bestimmen.

Es ist nun eine Konsequenz der Voraussetzung $W(F) \subset [\alpha, \beta]$, daß für jedes festgehaltene $z \in Z$ das Funktional

$$\psi(\cdot, \cdot, z) : X \times Y \to \mathbf{R}$$

genau einen Sattelpunkt $(x(z), y(z))$ besitzt, d. h. einen Punkt, in dem die durch $\psi(\cdot, \cdot, z)$ beschriebene „Fläche" eine „horizontale Tangentialebene" besitzt. Analytisch bedeutet dies, daß gilt:

$$D_1 \psi(x(z), y(z), z) = 0, \qquad D_2 \psi(x(z), y(z), z) = 0 .$$

Somit verbleibt die Aufgabe, Punkte $z \in Z$ zu finden, für die

$$D_3 \psi(x(z), x(z), z) = 0$$

gilt. Dies führt auf naheliegende Weise zur Betrachtung des Funktionals

$$g(z) := \psi(x(z), x(z), z) \qquad \forall z \in Z .$$

Unter Ausnützung der Eigenschaften von Sattelpunkten kann gezeigt werden, daß

(ii) $g'(z) = 0$ genau dann eintritt, wenn $Rx(z) + Sy(z) + Tz$ die Gleichung $A u = F(u)$ löst.

Durch diese in [2] eingeführte „Sattelpunktreduktion" ist es also gelungen, dem ursprünglichen Problem (A) ein C^1-Funktional auf einem *endlichdimensionalen* Hilbertraum zuzuordnen, dessen kritischen Punkte genau den Lösungen der Gleichung $A u = F(u)$ entsprechen.

Es sei bemerkt, daß die obigen Überlegungen insbesonders auch gelten, wenn $\sigma(A) \cap [\alpha, \beta] = \emptyset$. In diesem Fall ist $Z = \{0\}$, d. h., das Funktional ψ besitzt genau einen kritischen Punkt, woraus die Behauptung von Theorem 1 folgt.

Das ursprüngliche Problem ist nun auf die Aufgabe reduziert, die Existenz kritischer Punkte des Funktionals g auf dem endlichdimensionalen Hilbertraum Z nachzuweisen. Um dies zu tun, ist es naheliegend, die Morse-Theorie heranzuziehen, die allerdings den Nachteil hat, daß die kritischen Punkte von g als nicht-singulär vorausgesetzt werden müssen, was in unserem Falle nicht verifizierbar ist. Jedoch definierten Flusses. Die stationären Punkte dieses Flusses sind genau die kritischen Punkte von g.

Da es sich um einen Gradientenfluß handelt, genügt es, die Existenz beschränkter Orbits der Differentialgleichung (8) zu zeigen, da jeder ω-Limespunkt eines solchen Orbits notwendigerweise ein stationärer Punkt ist.

Unter Voraussetzungen an das asymptotische Verhalten von g', welche das abstrakte Analogon der Bedingung der asymptotischen Linearität von f in den Problemen (E) und (W) darstellen, kann gezeigt werden, daß die Menge der beschränkten Orbits von (8) kompakt ist. Diese Eigenschaft ist eng verwandt mit der Tatsache, daß g die Palais-Smale-Bedingung – eine in der Variationstheorie wohlbekannte Bedingung – erfüllt.

Aufgrund der obigen Tatsachen ist es nun möglich, eine verallgemeinerte Morse-Theorie heranzuziehen, die im wesentlichen von C. C. Conley [8] entwickelt wurde. Gemäß dieser Theorie kann der Menge aller beschränkten Orbits von (8) ein Index zugeordnet werden, der in diesem Fall keine numerische Invariante ist, sondern sich als Homotopietyp eines geeigneten topologischen Raumes ausdrückt. Durch geeignete topologische Deformationen des betrachteten Vektorfeldes g' ist es in unserem Fall auch möglich, diesen Index zu berechnen.

Unter der Voraussetzung $F(0) = 0$ folgt, daß 0 ein stationärer Punkt des betrachteten Flusses ist. Da wir jedoch an der Existenz nichttrivialer stationärer Punkte interessiert sind, müssen wir die Existenz eines beschränkten Orbits beweisen, welcher 0 nicht im topologischen Abschluß enthält. Dazu können wir auch dem stationären Punkt 0 einen Index zuordnen – ebenfalls ein geeigneter Homotopietyp – , und die Conleysche Morse-Theorie garantiert dann das gewünschte Resultat, falls gezeigt werden kann, daß diese beiden Indizes verschieden sind. Da dies – unter Heranziehung nichttrivialer topologischer Normalformen des betrachteten Flusses sowie unter Verwendung von Methoden und Resultaten der algebraischen Topologie – in der Tat gezeigt werden kann, erhalten wir auf diesem Weg einen Beweis von Theorem 2.

Es sei bemerkt, daß das Heranziehen nichttrivialer topologischer Methoden unvermeidbar sein dürfte, da die Behauptung im Grunde ein topologisches Resultat darstellt. Es soll nämlich aus dem asymptotischen Verhalten von F im Punkt 0 und im Unendlichen allein, d. h. ohne quantitative Abschätzungen, auf die Existenz von nichttrivialen Lösungen geschlossen werden.

6.

Die oben geschriebenen Resultate legen natürlich sofort die Frage nahe, ob die Gleichung $A\,u = F(u)$ mehrere Lösungen besitzt, wenn der numerische Wertebereich $W(F)$ mehrere Eigenwerte von A enthält. Genauer: *besitzt die Gleichung* $A\,u = F(u)$ *mindestens* ℓ *nichttriviale Lösungen, falls*

(9) $\quad \operatorname{card}\,[\sigma_p(A) \cap \overset{\circ}{W}(F)] = \ell$

gilt?

Für diese Vermutung gibt es einige Evidenz. Zum Beispiel ist die Aussage richtig, wenn F ungerade ist, d. h., wenn $F(u) = -F(-u)$ für alle $u \in H$ gilt (vgl.

z. B. [2]). Auch ohne zusätzliche Voraussetzungen an die Nichtlinearität können wir Multiplizitätsaussagen der obigen Art beweisen, und zwar im Fall der Wellengleichung (und für das Problem (H)).

Ein Ergebnis dieser Art wird im folgenden Theorem 3 beschrieben (vgl. [4]).

Theorem 3 *Im Falle des Problems* (W) *gelte:* $f(0) = 0$, $f'(\infty) \notin \sigma(A)$ *und* $f' \leqslant \beta < 0$ *für eine geeignete Konstante* β. *Gilt dann für ein* $k \in \mathbf{Z}$ *und ein* $\ell \in \mathbf{N}$

$$\min(f'(0), f'(\infty)) < \lambda_{k+1} < \ldots < \lambda_{k+\ell} < \max(f'(0), f'(\infty)),$$

so besitzt das Problem (W) *mindestens* ℓ *nichttriviale Lösungen.*

Der Grund, weswegen dieses Multiplizitätsresultat bewiesen werden kann, liegt in der folgenden trivialen Beobachtung, die jedoch zeigt, daß das Problem (W) wesentlich mehr Struktur besitzt. Falls nämlich u eine Lösung von (W) ist, so ist

$$(x, t) \longmapsto u(x, t + \tau)$$

eine Lösung von (W). Aufgrund der 2π-Periodizität von u genügt es, modulo 2π zu rechnen, d. h., die Parameter aus dem Einheitskreis $S^1 \approx \mathbf{R}/2\pi\mathbf{Z}$ zu wählen. Folglich setzen wir für $\sigma = e^{i\tau} \in S^1$

$$U_\sigma u(\cdot, t) := u(\cdot, t + \tau).$$

Dann zeigt man, daß durch (stetige Fortsetzung von) U_σ ein unitärer linearer Operator auf dem Hilbertraum $H = L_2((0, \pi) \times (0, 2\pi))$ definiert wird und daß man durch

$$S^1 \ni \sigma \longmapsto U_\sigma \in \mathscr{L}(H)$$

eine stark stetige unitäre Darstellung der Kreisgruppe S^1 erhält. Man sieht leicht, daß A und F mit U_σ kommutieren, d. h., die Gleichung $Au = F(u)$ bzgl. dieser Aktion der S^1 äquivariant ist. Unter Ausnützung dieser Tatsachen kann man zeigen, daß U_σ auf dem Unterraum Z von H eine stetige Aktion der S^1 induziert, bezüglich der das Funktional g invariant ist. Da $g'(0) = 0$ gilt, und da wir an der Existenz nichttrivialer kritischer Punkte interessiert sind, genügt es, g auf $Z - \{0\}$ zu betrachten. Da g invariant ist, also konstant auf den Orbits der S^1-Aktion, wird

[illegible]

kritischer Punkt von g entspricht.

Auf diese Weise kann man Theorem 3 beweisen, falls man zeigen kann, daß der Orbitraum $\widetilde{Z}$ Mengen genügend hoher Ljusternik-Schnirelmann-Kategorie enthält. Dies läuft auf Abschätzungen nach unten der „cup-length“ von $\widetilde{Z}$ hinaus, d. h. auf Abschätzungen der Nilpotenz des Kohomologieringes von $\widetilde{Z}$, was erhebliche technische Schwierigkeiten bereitet und zum gegenwärtigen Zeitpunkt nicht durchgeführt ist.

Eine andere Möglichkeit besteht darin, anstelle der Ljusternik-Schnirelmann-Kategorie einen von Fadell und Rabinowitz [10] eingeführten Kohomologieindex zu verwenden, der speziell auf Operationen Liescher Gruppen zugeschnitten ist. Mit Hilfe dieses „Index“ kann nach dem oben beschriebenen Prinzip Theorem 3 bewiesen werden.

Schließlich noch ein Wort zur Voraussetzung $f' \leqslant \beta < 0$. Unter dieser Voraussetzung kann gezeigt werden, daß die S^1 fixpunktfrei auf $Z - \{0\}$ operiert, was die Durchführung des obigen Programms ermöglicht. Im Fall $f' \geqslant \alpha > 0$ ist die Operation der S^1 i.a. nicht fixpunktfrei. In diesem Fall werden sowohl die Ljusternik-Schnirelmann-Kategorie als auch der Fadell-Rabinowitz-Index „singulär“, d. h.,

[illegible]

[10] F a d e l l , E. R.; R a b i n o w i t z , P. H.: Generalized cohomological index theories for Lie group actions with an application to bifurcation questions for Hamiltonian systems. Inventiones math. **45** (1978) 139–174

[11] F u č i k , S.: Ranges of Nonlinear Operators. Vorlesungsausarbeitung der Karls-Universität Prag 1977 (erscheint in Buchform)

[12] G a i n e s , R. E.; M a w h i n , J. L.: Coincidence Degree and Nonlinear Differential Equations. Berlin – Heidelberg – New York: Springer 1977. = Lecture Notes in Mathematics Vol. 568

[13] H e s s , P.: Solutions nontriviales d'un problème aux limites elliptique non linéaire. C. R. Acad. Sci. Paris, im Druck

[14] K r a s n o s e l' s k i i, M. A.: Topological Methods in the Theory of Nonlinear Integral Equations. Oxford: Pergamon Press 1964

[15] M a n c i n i , G.: Periodic solutions of some semilinear autonomous wave equations. Boll. U. M. I. (5) **15-B** (1978) 649–672

[16] M a w h i n , J. L.: Solutions périodiques d'equations aux derivées partielles hyperboliques non linéaires. Rapport No 84, Inst. math. pure appl. Université Catholique de Louvain, 1976

[17] R a b i n o w i t z , P. H.: Free vibrations for a semilinear wave equation. Comm. Pure Appl. Math. **31** (1978) 157–184

[18] T h e w s , K.: A reduction method for some nonlinear Dirichlet problems. J. Nonlinear Analysis, Theory, Methods and Applications **3** (1979) 795–813

[19] [illegible]

[20] Z e i d l e r , E.: The Ljusternik-Schnirelman theory for indefinite and non necessarily odd nonlinear operators and its applications, I and II. J. Nonlinear Analysis, Theory, Methods and Applications **4** (1980) 451–489

Prof. Dr. H. Amann
Mathematisches Institut
Universität Zürich
Freiestraße 36
CH-8032 Zürich

(*Eingegangen: 5. 11. 1979*)

Jber. d. Dt. Math.-Verein.
82 (1980) 167–180

Nonstandard Methods in Stochastic Analysis and Mathematical Physics*)

J. E. Fenstad, Oslo

Nonstandard analysis has one of its roots in a critique of the idea that the real line is a pointset constructed from below by the methods of set theory as codified in e. g. the Zermelo-Fraenkel axioms.

Set theory and in particular Zermelo's axiomatization of 1908 was at that time repeatedly criticized as a "true" foundation for mathematics. We shall briefly focus on one line which led to the development of nonstandard methods.

In the winter of 1915/16 Thoralf Skolem had extensive discussions with the mathematicians in Göttingen on the axiomatization of set theory. Already at that time he had the notion of a countable model which leads to a certain relativity or non-absoluteness of the notion of set with respect to any first-order axiomatization.

Skolem did not then publish his critique. He seemed to have believed that no mathematician would take axiomatic set theory seriously as an ultimate foundation for mathematics.

In 1922, however, "habe ich aber zu meinem Erstaunen gesehen, daß sehr viele Mathematiker diese Axiome der Mengenlehre als die ideale Begründung der Mathematik betrachten; deshalb schien mir die Zeit gekommen, eine Kritik zu publizieren", [26].

It is perhaps an irony that the weapons of the critique now are the standard tools of the orthodox theory. This we shall not further pursue. But we shall note that since there are countable models of consistent theories, Skolem points out that one should be able to add new sets to the model without violating the axioms of the theory. If we could add sufficiently many new subsets of ω, we might even be able to violate the continuum hypothesis.

This is no trivial matter. In fact, it was accomplished first in 1963 by P. J. Cohen using his forcing technique. Skolem at the time settled for a simpler task. To which extent can the non-negative integers 0, 1, 2, . . . be characterized by elementary numbertheoretic statements, such as the Peano axioms or extensions thereof.

In this task Skolem succeeded. In 1934 he published the "founding" memoir of the nonstandard theory, "Über die Nichtcharakterisierbarkeit der Zahlenreihe mittels endlich oder abzählbar unendlich vieler Aussagen mit ausschließlich Zahlenvariablen", [27].

*) Überarbeitete Fassung eines Hauptvortrages auf der Jahrestagung 1979 der Deutschen Mathematiker-Vereinigung in Hamburg

0012-0456/80/04 0167–14 $02.80/0

Skolem's aim had in a certain sense been destructive. But a deep insight cannot be only negative. In 1960 Abraham Robinson turned the nonstandard methods into a new and efficient technique in mathematics. This was certainly a remarkable step forward. He extended Skolem's analysis from arithmetic to the reals, and saw how the nonstandard version could provide a suitable framework for the development of analysis by means of infinitely small and infinitely large numbers; see the exposition in his book [23] and the many original papers put together in volume 2 of his collected works [24].

Some have seen a vindication of the Leibnizian infinitesimals in nonstandard analysis. There certainly are similarities. But one should be careful in claiming that novel developments "prove" or vindicate older ideas. And besides, such claims have also limited importance.

What is important is that nonstandard methods suggest a new idea of the real line; that the real line can support a pointset richer than the standard real numbers, that the real line is not a pointset constructed from below as an exercise of axiomatic set theory.

To this we shall return. But first a sample of methods and results from the nonstandard theory.

On the Method

Excellent introductions to nonstandard analysis exist; the reader may consult M. Davis [5], H. J. Keisler [11], D. Laugwitz [13], P. Loeb [20], or Stroyan-Luxemburg [28]. One should also not fail to look up the recent address of E. Nelson [22].

What we have learned is that the complete ordered field **R** of *real numbers* has a (not unique) proper ordered field extension ***R**, the *hyperreals*. And the extension is *elementary*, i. e. preserves the elementary true statements about **R**.

We shall describe the situation somewhat more carefully. Given any set S,

$$V_1(S) = S$$

$$V_{n+1}(S) = V_n(S) \cup \{X : X \subseteq V_n(S)\}$$

2 Transfer Principle *Let* $S_1, \ldots, S_n \in V(\mathbf{R})$. *Any elementary statement* Φ *which is true of* $S_1, \ldots, S_n$ *in* $V(\mathbf{R})$ *is true of* $^*S_1, \ldots, {}^*S_n$ *in* $V({}^*\mathbf{R})$.

Extension and transfer tells us at once that $^*\mathbf{R}$ is an ordered field which

By transfer let us do this for some $\lambda \in {}^*\mathbf{N} - \mathbf{N}$. An elementary calculation shows that for $1 \leqslant \omega \leqslant \lambda$

$$\text{(iii)} \qquad v_\lambda(t_\omega) = U_0 + \sum_{i=1}^{\omega-1} f(t_i, v_\lambda(t_i))\,(t_{i+1} - t_i).$$

Introduce a standard function

$$u(t) = \mathrm{st}(v_\lambda({}^*t)), \qquad t \in [0,1].$$

Elementary considerations (using the compactness of $[0,1]$ and the boundedness of f) show that

$$f(t, {}^*u(t)) \approx f(t, v_\lambda(t)),$$

$t \in {}^*[0,1]$. This means that for all $t \in {}^*[0,1]$ there is some infinitesimal δ_t such that

$$|f(t, {}^*u(t)) - f(t, v_\lambda(t))| < \delta_t.$$

We need to make the choice of δ_t uniform, i. e. independent of t. Consider the set

$$K = \{\delta \in {}^*\mathbf{R}_+ : |f(t, {}^*u(t)) - f(t, v_\lambda(t))| < \delta, \text{ all } t \in {}^*I\}.$$

It follows from the internal definition principle that K is an internal set. By transfer we know that if an internal subset of $^*\mathbf{R}$ has a lower bound, then it has a greatest lower bound. Thus since K contains all positive standard reals it must contain an infinitesimal $\delta_0 > 0$. This gives the uniformity required to pass from (iii) to

$$\text{(iv)} \qquad u(t) \approx U_0 + \sum_{i=1}^{\omega-1} f(t_i, u(t_i))\,(t_{i+1} - t_i),$$

where ω is such that $t \approx t_\omega$. But (iv) is nothing but the standard

$$\text{(v)} \qquad u(t) = U_0 + \int_0^t f(s, u(s))\,ds,$$

and the proof is complete.

The example is now text-book material but irresistible as a pedagogical example of the elementary part of nonstandard techniques. Let us round-off this introductory section with a few general remarks.

Given a mathematical structure E we know of two useful extensions, the completion $\hat{E}$ and the nonstandard extension $^*E$. In $^*E$ we can distinguish a set of *bounded* points B_E (which is defined using the uniformity or norm on E, see [6] for details). We have the following commutative diagram

$$\begin{tikzcd}
{}^*E \supseteq B_E \arrow[rr, "\pi"] & & \hat{E} \\
& E \arrow[ul] \arrow[ur] &
\end{tikzcd}$$

There is a map $\pi : B_E \to \hat{E}$ which is onto but not $1-1$ such that whenever F is complete and $f : E \to F$ has an extension to a map $\hat{f} : \hat{E} \to F$, then

$$\mathrm{st}(^*f(x)) = \hat{f}(\pi(x))$$

for all $x \in B_E$.

Letting E be the set $\mathbf{Q}$ of rational numbers (with the standard metric uniformity) B_E will be the set $\mathbf{Q}_f$ of finite elements in the extension $^*\mathbf{Q}$. In this case the map $\pi: \mathbf{Q}_f \to \hat{\mathbf{Q}}$ is given by identifying mod. infinitesimals. Let $\mathbf{Q}_i$ denote the set of infinitesimals in $^*\mathbf{Q}$. Then $\mathbf{R} = \hat{\mathbf{Q}} = \mathbf{Q}_f/\mathbf{Q}_i$; we have perhaps the most direct construction of the reals from the rationals.

Our diagram "explains" the successful use in many situations of nonstandard methods. It is, in fact, behind our example above.

Distribution theory offers another example. In this case we work in $^*C^\infty(\mathbf{R})$. The strategy, useful in many applications, is not to develop a general theory of distributions, but to construct the functions we need, e. g. the δ-function, as $^*C^\infty$ functions.

One final remark. In the general situation described above it is well-known that the algebra of E does not always extend to $\hat{E}$. By transfer it does extend to $^*E$. The map $\pi: {}^*E \to \hat{E}$ "confuses" points that from the algebraic point of view should be kept distinct. It is this richness of $^*E$ which adds power and intuition to the nonstandard methods.

Let us, however, add that we make no claim of universality for nonstandard methods, that nonstandard methods should everywhere replace standard ones. At most we claim that here we have *one* new method to add to the tool-kit of mathematicians, and that there are situations where this new tool can be put to good use! We proceed to some examples.

Singular Perturbations

Our first example will illustrate the use of nonstandard analysis in the study of some problems of singular perturbations. In Albeverio, Fenstad, Høegh-Krohn [1] we studied two types of problems. One was the perturbation problems of the type

$$-\Delta - \lambda \sum_{i=1}^{n} \delta(x - x_i),$$

where Δ is the Laplacain in $\mathbf{R}^3$ and δ the delta-function. This expression is purely formal but can be given good meaning in the nonstandard framework. And it has applications to physics, see the recent work of Grossman, Høegh-Krohn and Mebkhout [7].

To indicate the type of results obtained let n = 1 and consider the operator

$$H_\alpha = -\Delta + \lambda_\epsilon(\alpha) \cdot \chi_\epsilon$$

where α is some standard real parameter and ϵ a positive infinitesimal. χ_ϵ is the characteristic function of the nonstandard ball $|x| \leqslant \epsilon$ in $^*\mathbf{R}^3$ which for n = 1 replaces the deltafunction $\delta(x - x_i)$. In [1] we showed that if

$$\lambda_\epsilon(\alpha) = -\left(k + \frac{1}{2}\right)^2 \frac{\pi^2}{\epsilon^2} + \frac{2}{\epsilon} \cdot \alpha,$$

where $k \in \mathbf{N}$, then H_α is in the appropriate sense nearstandard and as α runs through $\mathbf{R}$ stH_α give all self-adjoint extensions of the restriction of $-\Delta$ to $C_0^\infty(\mathbf{R}^3 - \{0\})$. This analysis extends some results of Nelson [22].

We shall not go further into this part of the theory but rather concentrate on the somewhat conceptual simpler problem confronting us in the singular Sturm-Liouville theory. In this case we shall study the equation

$$-Y''(t) + \mu Y(t) = \lambda Y(t), \qquad 0 \leqslant t \leqslant 1 \tag{1}$$

where μ is positive Borelmeasure on $[0,1]$ and λ a real parameter and with boundary conditions

$$Y(0) = Y(1) = 0. \tag{2}$$

(1) does not as it stands make "standard" sense. In [1] we converted μ into a nonstandard smooth function (replace μ by $\delta_\epsilon * \mu$, where δ_ϵ is a $^*C^\infty$ "deltafunction" with support in $[-\epsilon, \epsilon]$, where ϵ is a positive infinitesimal). And by transfer we would apply ordinary Sturm-Liouville to the nonstandard equation and in this way obtain new information also in the standard case.

It now turns out that standard Sturm-Liouville theory has been given a direct and conceptually simple nonstandard treatment in a work by A. L. McDonald [21]. MacDonald's ideas were successfully extended in a study by B. Birkeland [4], and I shall now give a brief exposition of Birkeland's treatment.

The key idea is to replace the system (1) and (2) by the difference equation

$$N^2\Delta^2 y(k) + (\lambda - q(k))y(k) = 0, \qquad 0 < k < N \tag{3}$$

with the boundary conditions

$$y(0) = y(N) = 0, \tag{4}$$

where N is some large – but still finite – integer, and where $q = \{q(0), \ldots, q(N)\}$ is a given vector such that $q(k) \geqslant 0$ for all $0 \leqslant k \leqslant N$. The difference operators are defined by

$$\Delta y(k) = y(k+1) - y(k),$$
$$\Delta^2 y(k) = \Delta(\Delta y(k-1)) = y(k+1) - 2y(k) + y(k-1).$$

The system (3), (4) is nothing but a system of $N - 1$ linear equations for the $N - 1$ unknows $y(1), \ldots, y(N-1)$. The corresponding matrix is of the form

$$A - \lambda I$$

where I is the identity matrix and where

$$A_{ij} = O \quad \text{if } |i-j| > 1$$
$$A_{ij} = N^2 \quad \text{if } |i-j| = 1$$
$$A_{ii} = -2N^2 - q(i)$$

Since A is a symmetric matrix it follows from elementary linear algebra that (3), (4) has $N - 1$ pairwise orthogonal real eigenvectors $y_1, \ldots, y_{N-1}$ and that the corresponding eigenvalues $\lambda_1, \ldots, \lambda_{N-1}$ are real.

trivial, is to get sharp and uniform bounds on the eigenvectors and eingenvalues in order to be able to obtain useful information about the system (1), (2) from the discrete problem (3), (4).

A careful analysis shows that

$$\begin{aligned} \|y_j\|_\infty &\leqslant 30(1 + B^2) \\ N \cdot \|\Delta y_j\|_\infty &\leqslant 30\lambda_j(1 + B^2) \end{aligned} \tag{5}$$

where B is some suitable constant depending only upon the given vector q. One may also give "good" bounds on the eigenvalues λ_j, in fact, one proves that

$$\sigma_j \leqslant \lambda_j \leqslant (\sigma_j^{\frac{1}{2}} + 3B^2)^2 \tag{6}$$

where $\sigma_j = 2N^2(1 - \cos(\pi j/N))$. We omit the proofs, let us only note that it among other things requires an analog of the standard Sturm-Liouville theory for difference equations, which is elementary but somewhat tedious to supply.

We shall now bring out the connection between (1), (2) and (3), (4). Let N be a suitably chosen hyperinteger such that the measure μ may be represented by a vector $q = \{q(0), \ldots, q(N)\}$. With this N and this q consider problem (3), (4). By transfer (5) and (6) still are valid. In particular it follows from (6) that if j is finite, then $st(\lambda_j)$ exists and satisfies

$$\pi^2 j^2 \leqslant st(\lambda_j) \leqslant (\pi j + 3\beta^2)^2,$$

where $\beta = st(B) = (1 + \mu([0,1]))$.

Next from the inequalities in (5) we obtain

$$|y_j(m) - y_j(1)| = |\sum_{k=1}^{m} \Delta y_j(k)| \leqslant \lambda_j \cdot (m - 1)\, 30(1 + B^2)/N$$

If j is finite this implies that $st(y_j(m)) = st(y_j(1))$ whenever $(m - 1)/N$ is infinitesiasking for a function $Y(x)$ satisfying (8) is one way of giving classical meaning to (1). It can also be given meaning by considering the quadratic form given by

$$A\varphi = \int_0^1 (\varphi')^2 dt + \int_0^1 \varphi^2 d\mu,$$

where φ is a continuously differentiable function on [0,1].

We shall not state a precise and full theorem. Let us just remark that the orthonormal properties of the solutions $y_1, y_2, \ldots$ translate to the fact the sequence $Y_j, j = 1, 2, \ldots$ is orthonormal and complete in $L^2[0,1]$. We may further prove that Y_j has exactly $j + 1$ zeros in [0,1] and that the zeros of Y_{j+1} separate the zeros of Y_j.

What is the moral of this story: Replace the continuous by a hyperfinite discrete problem. Study the genuinely finite version of this problem and prove sharp and uniform inequalities. Then by transfer and standard parts you have a solution to the continuous problem. This is a theme which we shall meet more than once in applicable nonstandard analysis. And it does give nonstandard methods a certain concreteness and constructivity.

Topics in Stochastic Analysis

Nonstandard methods give an alternative to the usual mathematical analysis in modeling "large finite phenomena", e. g. rather than considering an infinite sequence $x_1, x_2, \ldots, x_n, \ldots$ of tosses with an idealized coin, one studies a "finite", i. e. *hyperfinite*, extension of the sequence $x_1, x_2, \ldots, x_n, \ldots, x_\eta$, where η is a nonstandard integer. The power of the method comes from the fact that the nonstandard finite sequence $x_1, \ldots, x_\eta$ has many of the (algebraic and combinatorial) properties of a standard finite sequence $x_1, \ldots, x_n$.

Measure theory and probability was early studied within the context of nonstandard analysis. It was, however, P. Loeb [18] in a paper published in 1975 who first gave the "correct" construction of a probability space associated with "large finite phenomena".

To explain Loeb's construction properly we have to return to the basics of nonstandard theory. The construction of $^*\mathbf{R}$ and of the imbedding $^*: V(\mathbf{R}) \to V(^*\mathbf{R})$ is a typical ultrapower construction and it has the following basic property: Given a condition $\Phi(A, B)$. If for all finite sequences $A_1, \ldots, A_n \in V(\mathbf{R})$ there exists a $B \in V(\mathbf{R})$ such that $\Phi(A_1, B), \ldots, \Phi(A_n, B)$, then there exists a $B \in V(^*\mathbf{R})$ such that $\Phi(^*A, B)$ for all A in $V(\mathbf{R})$ (of the appropriate kind).

This is a very important uniformity principle which lies behind many mathematical arguments, viz. a transition from a quantifier structure $\forall \exists$ to one of the form $\exists \forall$, which is the heart of many finiteness, compactness, or uniform boundedness arguments.

And a basic motivation for constructions of various completions and compactifications is the wish to adjoin "limit points" to certain families with the finite intersection properties (such as e. g. Cauchy-filters). This is exactly what the construction of $V(^*\mathbf{R})$ does.

But sometimes this saturation property is not enough, we need to know that if X is a family of internal sets in the extension $V(^*\mathbf{R})$ with the finite intersection property, then $\bigcap X$ is non-empty. Provided the cardinality of X is less than the cardinality of $^*\mathbf{R}$, it is possible to construct an imbedding $^*: V(\mathbf{R}) \to V(^*\mathbf{R})$ with this richer saturation property.

3 Saturation Principle *If* $A_1 \supseteq A_2 \supseteq \ldots$ *is a countable decreasing chain of non-empty internal sets, then* $\bigcap_{n \in \mathbf{N}} A_n \neq \emptyset$.

This is as we see a simple version of the general saturation property and it suffices for applications to stochastic analysis.

It is saturation which allows us to extend a countable sequence $\{A_n : n \in \mathbf{N}\}$ of internal sets to an internal sequence $\{A_n : n \in {}^*\mathbf{N}\}$. Define for each $n \in \mathbf{N}$ a set B_n by

$$f \in B_n \quad \text{iff} \quad \operatorname{dom} f = {}^*\mathbf{N} \ \wedge \ \forall i \leqslant n, f(i) = A_i.$$

Each set B_n is internal, and thus every $f \in B_n$ is internal. Since $B_1 \supseteq B_2 \supseteq \ldots$, $\bigcap B_n \neq \emptyset$ by saturation. Let $f \in \bigcap B_n$, then f is the required internal sequence.

From this it is easy to conclude that a countable union of disjoint internal sets never itself is internal; a key observation in the construction of the Loeb measure.

Let $(X, \mathscr{A}, \nu)$ be an internal probability space, i. e. $\mathscr{A}$ is an internal algebra of internal subsets of X and ν is a finitely, hence hyper-finite but not σ-additive measure on $\mathscr{A}$. Let $^\circ\nu$ be the standard part of ν. Because of the "key observation" it can be extended to a σ-additive measure $L(\sigma)$ on the completion of the smallest σ-algebra, $L(\mathscr{A})$, containing $\mathscr{A}$, and the extension is unique. We now have a standard measure space $(X, L(\mathscr{A}), L(\nu))$, however, in many cases on some unusual underlying space X.

We proceed to an example. Probabilists know how to construct Brownian motion as a limit of random walks. In an important paper R Anderson [2] constructed Brownian motion as a hyperfinite random walk. See also Keisler [12] whose exposition we follow.

First we replace the interval [0,1] by a *hyperfinite time line* $T = \{0, \Delta t, 2\Delta t, \ldots, 1\}$, where Δt is of the form $1/\eta$ for some $\eta \in {}^*\mathbf{N} - \mathbf{N}$. Note that when $^*\mathbf{R}$ is the underlying space the standard-part map $t \to {}^\circ t$ maps T onto the standard interval [0, 1]. Let $\Omega = \{-1, +1\}^T$. A hyperfinite stochastic process is an internal map

$$X : \Omega \times T \to {}^*\mathbf{R}.$$

Brownian motion (in one dimension) is now simply given by the explicit formula

$$B(\omega, t) = \sum_{s=\Delta t}^{t} \omega(s)\sqrt{\Delta t},$$

i. e. between times t and $t + \Delta t$ the "particle" moves a distance $\sqrt{\Delta t}$ either to the "left" or to the "right" independently with probability $\frac{1}{2}$.

Let $\mathscr{A}$ be the algebra of all internal subsets of Ω, and for $A \in \mathscr{A}$ set $\nu(A) = |A|/2^n$, where $|A|$ is the internal cardinality of A, i. e. the number of elements in A.

Standard Brownian motion is obtained by setting

$$b(\omega, {}^{\circ}t) = {}^{\circ}B(\omega, t).$$

b is a standard stochastic process from $\Omega \times [0,1]$ to R where Ω has the measure structure given by the Loeb construction, $(\Omega, L(\mathscr{A}), L(\nu))$. Anderson's proof that b is a Brownian motion is remarkably simple using the explicit construction of B.

Anderson also developed a theory of stochastic integration with respect to Brownian motion in [2]. His hyperfinite approach led among other things to a direct and remarkably simple proof of Ito's lemma.

The topic of stochastic integration was further developed by T. Lindstrøm [14]. In general we understand by a hyperfinite time line a hyperfinite subset T of $^*\mathbf{R}_+$ such that $0 \in T$ and for each $a \in \mathbf{R}_+$ there is a $t \in T$ such that $t \approx a$, i. e. $t - a$ is infinitesimal. A hyperfinite stochastic process in general is a mapping

$$X : \Omega \times T \to {}^*\mathbf{R}$$

where T is a hyperfinite time line and $\langle \Omega, \mathscr{A}, \nu \rangle$ is a hyperfinite probability space (i. e. Ω is hyperfinite) such that the mappings $\omega \to X(\omega, t)$ are $\mathscr{A}$-measurable for all $t \in T$.

A hyperfinite time-line T can be given as a sequence $0 = t_0 < t_1 < \ldots < t_\xi$, where $\xi \in {}^*\mathbf{N} - \mathbf{N}$. We shall write $\Delta X(\omega, t_i) = X(\omega, t_{i+1}) - X(\omega, t_i)$. And if $s = t_i$, $t = t_j$, $i < j$, we write $\sum_s^t X(\omega, r)$ for $\sum_{k=i}^{j-1} X(\omega, t_k)$. With this bit of notation we can e. g. write the quadratic variation of the process X as

$$[X](\omega, t) = \sum_0^t (\Delta X(\omega, s))^2.$$

And if $X, Y : \Omega \times T \to {}^*\mathbf{R}$ are two hyperfinite processes we may give the following explicit definition of the stochastic integral of X with respect to Y,

$$\int X\, dY(\omega, t) = \sum_0^t X(\omega, s)\, \Delta Y(\omega, s).$$

A detailed development of stochastic integration, extending and simplifying the standard theory, is given by Lindstrøm [14].

Stochastic integration has applications to stochastic differential equations. Let us briefly focus attention on the work of H. J. Keisler [12]. His main theorem states that the equation

$$x(\omega, t) = x_0 + \int_0^t f(s, x(\omega, s))\, ds + \int_0^t g(s, x(\omega, s))\, d\, b(\omega, s) \qquad \text{(a)}$$

has a solution, where $f : [0,1] \times \mathbf{R}^d \to \mathbf{R}^d$ and $g : [0,1] \times \mathbf{R}^d \to \mathbf{R}^d \oplus \mathbf{R}^d$ are bounded, measurable, and continuous in the time variable (but n o t necessarily continuous in the space variables). We further assume that $|\det g|^{-1}$ is bounded. $b(\omega, s)$ is a d-dimensional Brownian motion (obtained as the standard part of a d-dimensional hyperfinite random walk $B(\omega, t)$).

The proof in Keisler [12] is not at all simple. The obvious strategy is to rewrite (a) as a hyperfinite stochastic difference equation. But it is not so straight forward to prove the right uniform inequalities in the hyperfinite case in order to obtain a solution to (a) from the hyperfinite solution by taking standard parts. Recently Lindstrøm [15] gave a simpler proof based on a general result telling us when it is possible to write the "standard part" of a nonstandard stochastic integral $\int X dM$, where M is a (nonstandard) martingale, as a standard stochastic integral of a d-dimensional Brownian motion. This allows one to prove a suitable nonstandard version of an inequality of Krylov, which gives the right uniform inequalities in the hyperfinite case.

Recently Lindstrøm [17] has developed a theory of stochastic integration in hyperfinite-dimensional linear spaces (i. e. nonstandard separable Hilbert spaces). There are some applications to stochastic partial differential equations. But a convincing nonstandard approach is a topic for the future.

Limit Measures

We shall in this section use the Loeb construction to give some further examples of hyperfinite limit constructions. We shall first discuss the case of cylindrical measure on projective systems. Thereafter we shall briefly touch upon the hyperfinite approach to limit equilibrium measures in statistical mechanics.

Let $\langle X_i, \pi_{ij}\rangle_{i,j\in I}$ be a projective system of Hausdorff spaces. A cylindrical measure is a system of Radon measures $\{\mu_i\}_{i\in I}$ such that $\pi_{ij}(\mu_j) = \mu_i$, $i, j \in I$. The following question is basic. When does there exist a Radon measure μ on the projective limit $\langle X, \pi_i\rangle$ such that $\pi_i(\mu) = \mu_i$ for all $i \in I$?

The answer is given by Prohorov's theorem which states that a necessary and sufficient condition for μ to exist is the following:

(*) *For all* $\epsilon > 0$ *there is a compact set* $K_\epsilon \subseteq X$ *such that* $\mu_i(\pi_i(K_\epsilon)) \geqslant 1 - \epsilon$ *for all* $i \in I$.

Necessity is rather immediate. Let us outline the existence of μ using the Loeb-measure on a hyperfinite element of the system $\langle X_i, \pi_{ij}\rangle$: Take the *-extension of the given system and chose an $\omega \in {}^*I - I$ so large that $\omega > i$ for all $i \in I$. We shall use the hyperfinite extension $\langle X_\omega, \pi_{i\omega}\rangle$ to construct a measure on the projective limit $\langle X, \pi_i\rangle$. Note that we have an internal measure μ_ω on X_ω, and hence an associated Loeb-measure $L(\mu_\omega)$.

We define a map $\theta : X_\omega \to X$ by setting

$$\pi_i(\theta(x)) = st_i(\pi_{i\omega}(x)).$$

The basic fact is now that θ maps internal subsets of X_ω to closed sets in X. We hope that by setting $\mu = \theta(L(\mu_\omega))$ we have produced a Radon measure on the projective limit $\langle X, \pi_i\rangle$.

This construction works. The key approximation argument is to show (using the condition (*)) that if B is a Borel set in X, then $\theta^{-1}(B) \in L(\mathscr{B}_\omega)$, where $\mathscr{B}_\omega$ is the *-Borel algebra on X_ω. Thus for every $\epsilon > 0$ there exists an internal $A \in \mathscr{B}_\omega$ such that $A \subset \theta^{-1}(B)$ and $L(\mu_\omega)(\theta^{-1}(B)) - L(\mu_\omega)(A) < \epsilon$. Then $\theta(A)$ is a closed subset of B such that $\mu(B) - \mu(\theta(A)) < \epsilon$. We may now intersect $\theta(A)$ with a large enough compact set to get the Radon property of μ. And Prohorov's theorem follows easily.

The above proof follows the exposition in Lindstrøm [16]. The reader should also consult Anderson, Rashid [3], Loeb [19], and Henson [6]. Lindstrom has also used the same "hyperfinite extension" trick to give direct and appealing proofs of theorems of Sazonov and Gross (see [16]). The basic idea is always the same, choose a sufficiently large hyperfinite extension X_ω. The Loeb construction gives at once a σ-additive measure $L(\mu_\omega)$ on X_ω and we can thus freely calculate on the hyperfinite extension, even if the standard limit measure does not exist. This extra freedom is actually used in Lindstrøm's proof of Sazonov's theorem [16].

The same idea gives an easy access to several results in statistical mechanics. The reader should consult papers by Hurd [10] and Helms, Loeb [8].

Helms and Loeb study the stochastic Ising model via a suitable hyperfinite spin system, which replaces the usual "thermodynamic limit". In the classical approach the basic configuration space is

$$S = \{-1, +1\}^{\mathbf{Z}^d}.$$

The stochastic evolution of the system is described by giving a "speed" function $c(x, q)$ where $x \in \mathbf{Z}^d$ is a site of the lattice and $q \in S$ is a configuration. In the Ising case we have

$$c(x, q) = \exp\Big[-\frac{\beta}{2} \sum_{\|x-y\|=1} q_x q_y + h \cdot q_x\Big]$$

where $h \neq 0$ indicates the presence of an external field. Define an operator

$$(\Omega f)(q) = \sum_{x \in \mathbf{Z}^d} c(x, q)\,[f(q^{(x)}) - f(q)],$$

where $q^{(x)}$ reverses the spin at x given by q. The problem of studying the stochastic evolution of the system now becomes one of determining if there exists a semigroup T_t, $t \geqslant 0$, which has an infinitesimal generator extending Ω.

The hyperfinite approach used by Helms and Loeb is to go to a sufficiently large hyperfinite lattice $\Gamma \subseteq {}^*(\mathbf{Z}^d)$ and to consider the version $\Omega_{\Gamma,\Phi}$ of Ω on Γ, where we now have to specify some boundary condition Φ on Γ. Since $\Omega_{\Gamma,\Phi}$ is an internally bounded operator we may at once introduce an internal Markov semigroup by setting

$$S_{\Gamma,\Phi}(t) = \exp(t\Omega_{\Gamma,\Phi}).$$

Conforming to the general strategy we must now prove certain inequalities to show e. g. that we have only infinitesimal influence from the boundary conditions Φ and the lattice Γ. Thus we can use a standard part map to extract the wanted semigroup T_t from the semigroup $S_{\Gamma,\Phi}(t)$. In somewhat more detail: From $S_{\Gamma,\Phi}$ we get a transition function $U_t(q, \cdot)$ by the equation

$$S_{\Gamma,\Phi}(t) f(q) = \int_{S_\Gamma} f(q') U_t^\Phi(q, dq')$$

where S_Γ is the set of all internal maps from Γ to $\{-1, +1\}$. For each $q \in S_\Gamma$ $U_t^\Phi(q, \cdot)$ is a measure on the algebra of internal subsets of S_Γ. Let $\hat{U}_t^\Phi(q, \cdot)$ be the associated Loeb-measure. For $q \in S$ define the standard part by $st_\Gamma q = q \mid \mathbf{Z}^d$, i. e. q restricted to $\mathbf{Z}^d$. Using the map st_Γ we can now transfer $\hat{U}$ to a "classical" transition T_t^Φ function by setting

$$T_t^\Phi(q, A) = \hat{U}_t^\Phi({}^*q \mid_\Gamma, st_\Gamma^{-1} A),$$

where $q \in S$ and A is a Borelset on S. We remarked above that due to the appropriate inequalities the influence of Φ is only infinitesimal, hence we can drop Φ and obtain the semigroup T_t, $t \geqslant 0$, by setting $T_t f = \int_S f(q) T_t(\cdot, dq)$.

Helms and Loeb go on to discuss phase transition in the stochastic Ising model

References

[1] Albeverio, S.; Fenstad, J. E.; Høegh-Krohn, R.: Singular perturbations and nonstandard analyis. Trans. Amer. Math. Soc. **252** (1979) 275–295

[2] Anderson, R. M.: A nonstandard representation for Brownian motion and Ito integration. Israel J. Math. **25** (1976) 15–46

[3] Anderson, R. M.; Rashid, S.: A nonstandard characterization of weak convergence. Proc. AMS **69** (1978) 237–332.

[4] Birkeland, B.: Singular Sturm-Liouville theory. Oslo Prepr. 1979

[5] Davis, M.: Applied Nonstandard Analysis. New York: Wiley 1977

[6] Fenstad, J. E.; Nyberg, A.: Standard and nonstandard methods in uniform topology. In: Gandy and Yates (eds.): Logic Colloquium '69. Amsterdam: North-Holland 1971, 353–359

[7] Grossman, A.; Høegh-Krohn, R.; Mebkhout, M.: The one particle theory of point interaction. Oslo Prepr. 1979

[8] Helms, L. L.; Loeb, P. A.: Applications of nonstandard analysis to spin models. J. Math. Anal. Appl. **69** (1979) 341–352

[9] Henson, C. W.: Analytic sets, Baire sets and the standard part map. Can J. Math. **31** (1979) 663–672

[10] Hurd, A. E.: Nonstandard analysis and lattice statistical mechanics: A variational principle. Univ. of Victoria prepr. 1977

[11] Keisler, H. J.: Foundations of infinitesimal calculus. Boston: Prindle, Weber & Schmidt 1976

[12] Keisler, H. J.: An infinitesimal approach to stochastic analysis. Univ. of Wisconsin prepr. 1978

[13] Laugwitz, D.: Infinitesimalkalkül. Mannheim: B. I. Wissenschaftsverlag 1978

[14] Lindstrøm, T.: Hyperfinite stochastic integration, I, II, III. Math. Scand., to appear.

[15] Lindstrøm, T.: Hyperfinite stochastic integration and stochastic differential equations. Oslo Prepr. 1979

[16] Lindstrøm, T.: A Loeb-measure approach to theorems of Prohorov, Sazonov, and Gross. Oslo Prepr. 1979

[17] Lindstrøm, T.: Stochastic integration in hyperfinite dimensional linear spaces. Oslo Prepr. 1979

[18] Loeb, P. A.: Conversion from nonstandard to standard measure spaces and applications in probability theory. Trans. Amer. Math. Soc. **221** (1975) 113–122

[19] Loeb, P.: Weak limits of measures and the standard part map. Proc. Amer. Math. Soc. **77** (1979) 128–135

[20] Loeb, P.: An introduction to nonstandard analysis and hyperfinite probability theory. In: Bharucha-Reid (ed.): Probabilistic Analysis and Related Topics, Vol. 2. New York – London: Academic Press 1979, 105–142

[21] MacDonald, A. L.: Sturm-Liouville theory via nonstandard analysis. Ind. J. Math. **25** (1976) 531–540

[22] Nelson, E.: Internal set theory: a new approach to nonstandard analysis. Bull. Amer. Math. Soc. **83** (1977) 1165–1198

[23] Robinson, A.: Non-standard analysis. Amsterdam: North-Holland 1966

[24] Robinson, A.: Collected Works. Vol. 2. Amsterdam: North-Holland 1979

[25] Skolem, T.: Selected Works in Logic. Oslo: Universitetsforlaget 1971

[26] Skolem, T.: Einige Bemerkungen zur axiomatischen Begründung der Mengenlehre. In: [25] pp. 137–152

[27] Skolem, T.: Über die Nichtcharakterisierbarkeit der Zahlenreihe mittels endlich oder abzählbar unendlich vieler Aussagen mit ausschließlich Zahlenvariablen. In: [25] pp. 355–366

[28] Stroyan, K. D.; Luxemburg, W. A. J.: Introduction to the theory of infinitesimals. New York – London: Academic Press 1976

Prof. J. E. Fenstad
Institute of Mathematics
Universitet i Oslo
P. O. Box 1053
N-Blindern, Oslo 3

(*Eingegangen: 28. 2. 1980*)

82 (1980) 181–192

Fundstellen für biographische und bibliographische Angaben über deutsche Mathematiker, die nach 1933 verstorben sind (Stand 1977)

Im Auftrag des Präsidiums der DMV habe ich die mathematischen Fachbereiche um Informationen über die seit 1933 verstorbenen Mathematiker gebeten und die in den Antworten enthaltenen Angaben im folgenden zusammengestellt. Die Zitate sind so knapp gehalten, wie es die Brauchbarkeit noch zuläßt.

Die folgenden Nachschlagewerke sind leicht zugänglich:

- J. C. Poggendorff, Biographisch-literarisches Handwörterbuch der exakten Naturwissenschaften, hrsg. von der Sächsischen Akademie der Wissenschaften zu Leipzig, letzter erschienener Band: 7a. Berlin: Akademie-Verlag 1956–1971
- Kürschners Deutscher Gelehrten-Kalender. Berlin: W. de Gruyter
- Neue Deutsche Biographie. Hrsg. von der Historischen Kommission bei der Bayerischen Akademie der Wissenschaften. 1. Bd. 1953, letzter erschienener Band: 11. Bd., 1977. Die erschienenen Bände enthalten die Namen mit den Anfangsbuchstaben A – K, letzter Name: Kleinfercher
- H. Meschkowski, Mathematiker-Lexikon. 2. Aufl. Mannheim: Bibliographisches Institut 1973

Das Vorkommen eines Namens in diesen Werken wird im folgenden nicht erwähnt.

Wenn von einem Autor Gesammelte Werke erschienen sind, enthalten sie oft biographische Angaben; auch das wird im folgenden nicht erwähnt.

M. Pinl hat unter dem Titel „Kollegen in einer dunklen Zeit“ Angaben über diejenigen Kollegen zusammengestellt, die unter dem Nationalsozialistischen Regime Schaden erlitten haben:

Teil I Jber. DMV **71** (1969) 167–228
Teil II Jber. DMV **72** (1970/71) 165–189
Teil III Jber. DMV **73** (1971/72) 153–208

Diese Arbeiten werden hier als Pinl I, Pinl II, Pinl III zitiert. –
Abkürzungen: T = Todesanzeige, S = Artikel enthält Schriftenverzeichnis, A = autobiographische Skizze, R = Rede.
Vielen Kollegen habe ich für bereitwillige Hilfe zu danken.

H. Tietz

A c k e r m a n n , Wilhelm, *29. 3. 1896, †24. 12. 1962; T: Jber. DMV 65.

A r t i n , Emil, *3. 3. 1898, †20. 12. 1962; Bull. Amer. Math. Soc. 73 (R. Brauer)/ Abh. Math. Sem. Univ. Hamburg 28 (H. Cartan)/ S: Bull. Soc. Math. France 92 (Chevalley)/ Math.-Phys. Semesterber. 10 (Schoeneberg)/ S: Notre Dame J. Formal Logic 5 (Zassenhaus)/ Acta Sci. Biography 1 (Schoeneberg)/ Pinl III, 155.

B a l d u s , Richard, *11. 5. 1885, †28. 1. 1945; Jbuch. Bayer. Akad. Wiss. (1944–48) (Faber)/ Geist u. Gestalt 2 (1959).

B a u l e , Bernhard, *4. 5. 1891, †5. 4. 1976; Jber. DMV 77 (Pinl)/ Akad. Monatsbl. (1976) (Heimann).

B e c k , Hans, *16. 8. 1876, †24. 10. 1942; Math.-Naturwiss. Unterricht 74 (Ohlmesdahl)/ S: Jber. DMV 53 (Salkowski)/ Chronik d. Rh. Fr. W. Univ. Bonn (1949)/ Bonn Verz. Prof. (1968)/ 150 Jahre Rh. Fr. W. Univ. Bonn (1970) (Krull).

B e c k e r , Oskar, *5. 9. 1889, †13. 1. 1964; Praxis Math. (1965) (J. E. Hofmann).

B e h r e n d , Felix Adalbert, *23. 4. 1911, †27. 5. 1962; S: J. London Math. Soc. 38 (B. H. Neumann)/ Pinl I, 173.

B e r n s t e i n , Felix, *24. 2. 1878, †3. 12. 1956; Gerontologia 1/ Rev. Inst. Internat. Statist. 25/ Zeitschr. f. Indukt. Abstammungs- u. Vererbungslehre 88/ S: Pinl II, 166; S: Jber. DMV (Frewer) noch nicht erschienen.

B e r w a l d , Ludwig, *8. 12. 1883, †27. 3. 1942; Scripta Math. 27 (Pinl).

B e s s e l - H a g e n , Erich, *12. 9. 1898, †29. 3. 1946; Chronik d. Rh. Fr. W. Univ. Bonn (1939–49)/ Gesch. Rh. Fr. W. Univ. Bonn II (1933)/ 150 Jahre Rh. Fr. W. Univ. Bonn (1970)/ Göttingen Cat. Prof. (1962)/ Bonner Literaturkalender (1929)/ Bonn Verz. Prof. (1968).

B i l h a r z , Herbert, *3. 11. 1910, †6. 10. 1956; Ber. Phys.-Med. Ges. Würzburg 68 (H. Schmidt) & (Söhringen)/ S: Jber. DMV 61 (H. König).

B l a s c h k e , Wilhelm, *13. 9. 1885, †17. 3. 1962; Mitt. Math. Ges. Hamburg 9 (Burau)/ Jber. Akad. Wiss. Lit. Mainz (1962) (Haupt)/ Almanach Österreich. Acad. Wiss. 112 (Kruppa)/ S: Russian Math. Surveys 18, 1 (J. M. Jaglom)/ Abh. Math. Sem. Univ. Hamburg 25 (H. R. Müller)/ Jber. Deut. Akad. Wiss. Berlin (1964) (Reichardt)/ S: Jber. DMV 69 (Reichardt)/ S: Abh. Math. Sem. Univ. Hamburg 26 (Sperner)/ Internat. Math. Nachr. 71 (Wunderlich)/ Acta Sci. Biography 2 (C. J. Scriba)/ Abh. Math. Sem. Univ. Hamburg 39 (Chern)/ Forschungen u. Fortschritte 29 (Kähler)/ A: „Reden und Reisen eines Geometers“, Deut. Verlag d. Wiss. (1957) S. 112–116.

B l u m e n t h a l , Otto, *20. 7. 1876, †12. 11. 1944; S: Jahrb. d. TH Aachen 1951 (Krauß, Sommerfeld)/ Pinl I, 168.

B o e h m , Carl, *29. 4. 1873, †7. 3. 1958; T: Jber. DMV 61.

B o l z a , Oskar, *12. 5. 1857, †5. 7. 1942; S: Jber. DMV 53 (Heffter)/ Science 97/ A: Aus meinem Leben (München 1936, Nachtrag 1940).

B o p p , Karl, *28. 3. 1877, †5. 12. 1934; Jber. DMV 44 (Lorey).

B o s , Werner, *26. 9. 1924, †24. 4. 1973; Didaktik d. Math. 2 (Fritsch)/ S: Jber. DMV 78 (Brinkmann, Fritsch, Kamps, Wolff).

B r a n d t , Heinrich, *8. 11. 1886, †9. 10. 1954; S: Math. Nachr. 13 (Eichler).

B r a u e r , Richard, *10. 2. 1901, †11. 4. 1977; S: Jber. DMV (Rohrbach) noch nicht erschienen.

B r i l l , Alexander von, *20. 9. 1842, †18. 6. 1935; R: Jber. DMV 31 (Severi)/ Deutsche Math. 1 (Schönhardt)/ Jber. DMV 53 (Löffler)/ Jbuch. Bayer. Akad. Wiss. (1935–36) (Finsterwalder)/ Math. Ann. 112 (Finsterwalder)/ R: Tübinger Chronik 1932 S. 175 & S. 178.

B r u n n , Hermann, *1. 8. 1862, †20. 9. 1939; S: Jber. DMV 50 (Blaschke).

C a r a t h é o d o r y , Constantin, *13. 9. 1873, †2. 2. 1950; Jber. DMV 75 (Behnke)/ Jberb. DMV 55 (Perron)/ Arch. Math. 2 (Tietze)/ Bull. Soc. Math. Grèce 26 (Sakellariou)/ S-B. Math.-Nat. Kl. Bayer. Akad. Wiss.(1950) (Tietze)/ Forschungen u. Fortschritte 26 (E. Hölder)/ Almanach Österreich. Akad. Wiss. 100 (Radon)/ Hannover Cat. Prof. (1956)/ C. Carathéordory international symposium, Athen 1974 (Behnke)/ A: Gesammelte math. Schriften V.

C a u e r , W., *24. 6. 1900, †22. 4. 1945; T: Jber. DMV 54.

C o h n - V o s s e n , Stefan, *28. 5. 1902, †25. 6. 1936; S: Pinl III. 183/ Uspehi Math. Nauk 2 (A. D. Aleksandrov).

C o u r a n t , Richard, *8. 1. 1888, †27. 1. 1972; S: Russian Math. Surveys 30,4 (P. S. Aleksandrov, Oleinik)/ Pinl II, 171 / Math. Phys. Semesterber. 19 (Behnke)/ S: Jbuch. Akad. Wiss. Göttingen (1972) (Heinz)/ A: Wiadom Mat. 18/ Courant (New York 1976) (Reid).

D e h n , Max, *13. 11. 1878, †27. 6. 1952; S: Math. Ann. 127 (Magnus, Moufang)/ Frankfurt (1965) (Siegel)/ The Math. Intelligencer 1 (Magnus)/ Pinl I, 212.

D e m b o w s k i , Peter, *1. 4. 1928, †28. 1. 1971; Attempto 39/40 (Tübingen 1971) (Salzmann)/ S: Jber. DMV 74 (Hughes)/ Proc. internat. Conf. Prospective Plans (Washington State Univ. Press 1973) (Salzmann).

D i n g h a s , Alexander, *9. 2. 1908, †19. 4. 1974; Bull. London. Math. Soc. 8 (Haymann)/S: Jber. DMV 81 (Begehr) / FU Berlin, Ansprachen u. Vorträge Gedenkkolloq. A. Dinghas (1977) (hrsg. Begehr).

D ö r g e , Karl, *5. 11. 1898, †16. 6. 1975.

D o e t s c h , Gustav, *29. 11. 1892, †8. 6. 1977

D y c k , W. von, *6. 12. 1856, †9. 11. 1934; S: Jber. DMV 45 (Faber).

E h r m a n n , Hans, *27. 9. 1922, †30. 3. 1966; Z. Angew. Math. Mech. 46 (1966) (Collatz).

E n g e l , Friedrich, *26. 12. 1861, †29. 9. 1941; Nordisk Mat. Tidskr. 23 (Heegard)/ Mitt. Math. Sem. Univ. Giessen 34 (Ullrich)/ Mitt. Math. Sem. Univ. Giessen 40 (Ullrich)/ A: Deutsche Math. 3/ Nachr. Gießener Hochschulgemeinschaft 20 (1951) (Ullrich).

E p s t e i n , Paul, *24. 7. 1871, †11. 8. 1939; Pinl I, 213/ Frankfurter Universitätsreden (1965) (Siegel).

Faber, Georg, *5. 4. 1877, †7. 3. 1966; R: Jbuch. Bayer. Akad. Wiss. München (1957)/ R: Jbuch. Bayer. Akad. Wiss. München (1962)/ Jbuch. Bayer. Akad. Wiss. München (1966) (Lense).

Falkenberg, Hans, *31. 8. 1885, †2. 2. 1946.

Feigl, Georg, *13. 10. 1890, †24. 4. 1945; S: Jber. DMV 70 (Pinl).

Feller, Willy, *7. 7. 1905, †14. 1. 1970; S: Pinl III, 175

Finsterwalder, Sebastian, *4. 10. 1862, †5. 12. 1951; Jber. DMV 56 (H. Graf)/ Jbuch. Bayer. Akad. Wiss. München (1952) (Sauer, Kneißl)/ Nachr. Öster. Math. Ges. 77 (Sauer)/ Österreich. Z. Vermessgswes. 40 (Kneißl)/ Zeitschr. f. Vermessgswes. 77 (Kneißl)/ R: Zeitschr. f. Vermessgswes. (1932) (Clauß)/ S, R: Bildmessung u. Luftbildwesen (1942) (Kneißl)/ S in: S-B. Mat.-Nat. Kl. Bayer. Akad. Wiss. (1950)/ Geist u. Gestalt 2 (1959) (Faber)/ R: Festschr. Deut. Ges. Photogrammetrie (1937) (Gruber).

Fischer, Ernst, *12. 7. 1875, †14. 11. 1954; Pinl III, 181.

Fitting, Hans, *13. 11. 1906, †15. 6. 1938; S: Jber. DMV 49 (Zassenhaus).

Fränkel, Abraham Adolf, *17. 2. 1891, †15. 10. 1965; Pinl III, 179/ Nature 210 (Bar-Hillel)/ A: Lebenskreise (1967).

Frank, Phillip, *20. 3. 1884, †21. 7. 1966; Jber. DMV 75 (Pinl).

Fröhlich, Walter, *2. 12. 1902, †29. 11. 1942; S: Jber. DMV 75 (Pinl).

Ges. (1950–51) (Heffter).

Fuhr, Heinrich, *2. 6. 1897, †6. 9. 1939; T: Jber. DMV 54.

Funk, Paul Georg, *14. 4. 1886, †3. 6. 1969; Jber. DMV 75 (Pinl).

Furch, Robert, *15. 3. 1894, †7. 11. 1967; S: Jber. DMV 72 (Benz, Ewald).

H a m b u r g e r , Hans Ludwig, *5. 8. 1889, † 14. 8. 1956; Pinl III, 182–183.

H a m e l , Georg, *12. 9. 1877, †4. 10. 1954; Jber. DMV 58 (Schmeidler)/ S-B. Berlin. Math. Ges. (1951–52) & (1952–54) (Schmeidler)/ Z. Angew. Math. Mech. 28 (Prandtl) & (Vogelpohl)/ Z. Angew. Math. Mech. 32 (Kucharski)/ nur S: Jber. Berlin. Math. Ges. (1951/52).

H a m m e r s t e i n , Adolf, *7. 6. 1888, † 25. 2. 1941; T: Jber. DMV 54.

H a r t o g s , Friederich, *20. 5. 1874, †18. 8. 1943; S: Pinl III, 201.

H a u s d o r f f , Felix, *8. 11. 1868, † 26. 1. 1942; S: Jber. DMV 69 (Dierkesmann) & (Lorentz) & (G. Bergmann)/ Pinl I, 199/ 150 Jahre Rh. Fr. W. Univ. Bonn (1970) (Krull)/ Praxis Math. 10 (Pallmann)/ Fiz.-Mat. Spis. Bulgar. Akad. Nauk. 11 (44) (1968) (Jentsch)/ Geschichte Rh. Fr. W. Univ. Bonn II (1933) (Bezold)/ Bonn (1949)/ Menschen u. Zeiten (1948) (P. Fechter)/ Greifswald, 500-Jahr-Festschr. (1956) (v. Krbeck)/ Bonn Verz. Prof. (1968).

H a u s s n e r , Robert, *6. 2. 1863, † 24. 4. 1948; T: Jber. DMV 54.

H e c k e , Erich, *20. 9. 1887, †13. 2. 1947; S: Abh. Math. Sem. Univ. Hamburg 16 (Maak) & (Petersson)/ Jbuch. Bayer. Akad. Wiss. München (1944–48) (Perron)/ Acta Sci. Biography 6 (B. Schoeneberg).

H e f f t e r , Lothar, *11. 6. 1862, †1. 1. 1962; S: Jber. DMV 66 (Tautz)/ Forschungen u. Fortschritte 36 (Gericke)/ A: Mein Lebensweg u. meine Math. Arbeit (1937)/ A: Beglückte Rückschau auf neun Jahrzehnte (1952).

H e l l e r , Siegfried, *1. 12. 1876, †9. 6. 1970; S: Jber. DMV 73 (C. J. Scriba)/ Math.-Phys. Semesterber. 19 (Behnke)/ Arch. Internat. Histoire Sci. 23 (J. E. Hofmann).

H e l l i n g e r , Ernst, *30. 9. 1883, †28. 3. 1950; S: Pinl I, 214/ Frankfurter Universitätsreden (1965) (Siegel).

H e n s e l , Kurt, *29. 12. 1961, †1. 6. 1941; S: J. Reine Angew. Math. 187 (Hasse)/ Pinl III, 199.

H e r g l o t z , Gustav, *2. 2. 1881, † 22. 3. 1953; S-B. Math.-Nat. Kl. Bayer. Akad. Wiss. München (1953) (Tietze).

H e r m a n n , Horst, *10. 7. 1906, †17. 11. 1973.

H e r t z , Paul, *29. 7. 1881, † 24. 3. 1940; S: Pinl II, 173.

H e y m a n n , Walther, *28. 2. 1893, †27. 6. 1963; T: Jber. DMV 66.

H i l b e r t , David, *23. 1. 1862, †14. 2. 1943; R: Jber. DMV 42 (Weyl, Buberback, Blumenthal, Hasse)/ Pokroky Mat. Fyz. Astronom 18 (Zich)/ Math. Phys. Semesterber. 18 (Behnke)/ Naturwissenschaften 31 (Sommerfeld, Carathéodory)/ Mathematica, Zuthpen. a. 11 (v. Veen)/ Physik Z. 44 Heisenberg)/ Revista. Mat. Hisp.-Amer. 4/ S-B. Math. Nat. Kl. Bayer. Akad. Wiss. München (1943) (Carathéodory)/ Gaz. Math. Lisboa 4 (Machado)/ Obit. Notices Roy. Soc. London 4 (Weyl)/ Bull. Amer. Math. Soc. 50 (Weyl)/ Math. Mag. 26 (Hille)/ Briefe an Hilbert (1973) (Rudenberg, Zassenhaus)/ Hilbert Gedenkband (1971) (Reidemeister)/ Hilbert towards a Philosophy of modern mathematics II (Paideia Press 1970)/ Hilbert (1970) (Reid).

H ö l d e r , Otto, *22. 12. 1859, † 29. 8. 1937; T: Jber. DMV 54/ Ber. Verh. Sächs. Akad. Wiss. Leipzig 90 (v. d. Waerden).

H o f m a n n , Josef Ehrenfried, *7. 3. 1900, † 7. 5. 1973; R, S: Mitt. Math. Sem. [illegible]

lungstech. 2 (Busard)/ S: Historia Math. 2 (J. J. Burckhardt) & (C. J. Scriba)/ Praxis Math. 15 (Töpfer)/ Attempto 47/48 (Tübingen 1973) (Salzmann, Schramm)/ Bull. Amer. Math. Soc. 81 (A. Weil).

H o h e i s e l , Guido, *14. 7. 1894, † 11. 10. 1968.

H o p f , Heinz, *19. 11. 1894, † 3. 6. 1971; S: Jber. DMV 78 (P. Alexandrov) & (Samelson)/ Math. Phys. Semesterber. 19 (Behnke)/ S: Bull. London Math. Soc. 4 (Hilton)/ Enseign. Math. 2 (Eckmann)/ Vierteljahrschr. Naturforsch. Ges. Zürich 116 (Freudenthal)/ Bol. Soc. Brasil Mat. 2 (Eckmann)/ Elemente d. Math. 28 (Voss)/ Math. Ann. 196 (Behnke, Hirzebruch)/ A: Jber. DMV 68.

H o p f , Ludwig, *23. 10. 1884, †21. 12. 1939; Pinl I, 170/ Jahrb. d. Rhein. Westf. TH Aachen (1952–53) (Sommerfeld, Seewald)/ Nature 145 (P. P. Ewald).

H o r n , Jakob, *17. 2. 1867, † 24. 2. 1946; Festschrift z. Jahrhundertfeier (Darmstadt 1936) (Dingelday)/ Jahrb. d. TH Darmstadt (1946) (A. Walther).

J a k o b s t h a l , Ernst, *16. 10. 1882, † 6. 2. 1965; S: Pinl I, 180/ Norske Vid. Selsk. Forh. 38 (S. Selberg).

J ö r g e n s , Konrad, *3. 12. 1926, † 28. 4. 1974; S: Jber. DMV 77 (Köthe).

J o l l e s , Stanislaus, *25. 7. 1857, † 14. 2. 1942; T: Jber. DMV 54/ S-B. Berlin. Math. Ges. (1952–54).

J u n g , Heinrich, *4. 5. 1876, †12. 3. 1953; Jber. DMV 58 (Keller, Engel)/ Wiss. Z. Martin-Luther Univ. Halle-Wittenberg Math. Natur. Reihe 4 (Keller, Engel)/ nur S: Wiss. Z. Martin-Luther Univ. Halle-Wittenberg Math.-Natur. Reihe 3.

K a l u z a , Theodor, *9. 11. 1885, †19. 1. 1954.

Kommerell, Karl, *19. 8. 1871, †30. 7. 1962; Attempto 10 (Tübingen).

Koppenfels, Werner von, *7. 11. 1904, †31. 8. 1945; Hannover Cat. Prof. (1956).

Korn, Arthur, *20. 5. 1870, †22. 12. 1945; S: Pinl I, 182/ Revista Math. Hisp.-Amer. 2. ser 3, 9.

Korth, Georg, † 25. 3. 1974.

Koschmieder, Lothar, *22. 4. 1890, †6. 3. 1974; Attempto (Tübingen 1974) (Wielandt).

Kowalewski, Gerhard, *27. 3. 1876, †21. 2. 1950; T: Jber. DMV 54.

Krafft, Maximilian, *3. 11. 1889, †26. 6. 1972.

Kropp, Gerhard, *6. 4. 1910, †13. 7. 1974.

Krull, Wolfgang, *26. 8. 1899, †12. 4. 1971; S: Jber. DMV 82 (Nastold) & (Schöneborn)/Bonner Literaturkalender (1961).

Künneth, Hermann, *6. 7. 1872, †7. 5. 1975; S: Jber. DMV 78 (Haupt).

Kutta, W. M., *3. 11. 1867, †25. 12. 1944; R: Z. Angew. Math. Mech. 17 (F. Pfeiffer)/ Reden und Aufsätze 16 (Stuttgart 1950) (F. Pfeiffer).

Lagally, Max, *7. 1. 1881, †31. 1. 1945; T: Jber. DMV 54.

Landau, Edmund, *14. 2. 1877, †19. 2. 1938; Jber. DMV 54 (Knopp)/ Pinl II, 176/ J. London Math. Soc. 13 (Hardy, Heilbronn)/ S in: Abh. aus Zahlentheorie u. Analysis (1968) (Thurau).

Lettenmeyer, Fritz, *7. 9. 1891, †2. 1. 1953; S: Jber. DMV 61 (H. Schmidt).

Levi, Friedrich Wilhelm, *6. 2. 1888, †1. 1. 1966; S: Pinl III, 188.

Lichtenstein, Leon, *16. 5. 1878, †21. 8. 1933; S: Pinl III, 191/S: Jber. DMV (Hölder) noch nicht erschienen. S-B. Berlin. Math. Ges. (1952–54).

Liebmann, Heinrich, *22. 10. 1874, †12. 6. 1939; S: Pinl II, 162.

Lietzmann, Walter, *7. 8. 1880, †12. 7. 1959; T: Jber. DMV 62.

Lilienthal, Reinhold von, *25. 6. 1857, †2. 12. 1935; Semesterber. Pflege d. Zusammenh. v. Univ. u. Schule 7 (1935) (Behnke).

Lindemann, Ferdinand von, *12. 4. 1852, †6. 3. 1939.

Löbell, Frank, *11. 5. 1893, †31. 5. 1964; S: Jber. DMV 70 (O. Bauer, Lenz)/ Jbuch. Bayer. Akad. Wiss. München (1964) (Lense)/ R: Geist u. Gestalt II (1959).

Löwner, Karl, *29. 5. 1893, †8. 1. 1968; Jber. DMV 75 (Pinl).

Loewy, Alfred, *20. 6. 1873, †25. 1. 1935; Jahresheft Heidelberg Akad. (1935–36) (Heffter)/ S: Pinl I, 217.

Lorey, Wilhelm, *23. 1. 1873, †3. 7. 1955; T: Jber. DMV 58.

Ludwig, Konrad, *22. 8. 1898, †11. 2. 1951; Hannover Cat. Prof. (1956).

Ludwig, Rudolf, *1. 5. 1910, †10. 9. 1969; S: Jbuch. Deu. Ges. Luft- u. Raumfahrt (1969) (W. Schulz).

Ludwig, Walter, *10. 6. 1876, †20. 12. 1946; T: Jber. DMV 54.

Lyra, Gerhard, *23. 6. 1910, †7. 6. 1975.

M a e n n c h e n , Philipp, *11. 10. 1869, †6. 9. 1945; T: Jber. DMV 54.

M a r u h n , Karl, *5. 12. 1904, †8. 2. 1976; S: Jber. DMV 81 (Boerner).

M e h m k e , Rudolf, *28. 8. 1857, †19. 11. 1944; R: Z. Angew. Math. Mech. 17 (F. Pfeiffer)/ Reden und Aufsätze (Stuttgart 1953) (O. Bauer, Lotze).

M e y e r , Wilhelm Franz, *2. 9. 1856, †11. 4. 1934; S: Jber. DMV 45 (Arndt).

M i s e s , Richard Edler von, *19. 4. 1883, †14. 7. 1953; Pinl I, 183/ S: Ann. Math. Statistics 24 (Cramér)/ Österreich. Ing.-Arch. 7 (Basch)/ Physik. Bl. 10 (Rehbock).

M o h r m a n n , Hans Georg, *24. 4. 1881, †2. 1. 1941.

M o u f a n g , Ruth, *10. 1. 1905, †26. 11. 1977; Frankfurter Universitätsreden 10 (Franz).

M ü l l e r , Conrad, *12. 12. 1878, †9. 1. 1953; Jber. DMV 57 (Quade)/ Hannover Cat. Prof. (1956).

M ü l l e r , Johannes Oswald, *28. 6. 1877, †7. 8. 1940; Chronik d. Rh. Fr. W. Univ. Bonn (1910)/ Bonn Verz. Prof. (1968)/ 150 Jahre Rh. Fr. W. Univ. Bonn (1970).

M ü l l e r , Max, *9. 5. 1901, †3. 11. 1968; Tübingen (1969) (Wielandt).

M ü l l e r , Reinhold, *11. 5. 1857, †4. 3. 1939; T: Jber. DMV 54.

N a e t s c h , Emil, *29. 7. 1869, †25. 11. 1946; T: Jber. DMV 54

N e d e r , Ludwig, *22. 5. 1890, †29. 2. 1960; T: Jber. DMV 63.

N e i s s , Fritz, *1883, †3. 9. 1952; S-B. Berlin. Math. Ges. (1951–52) (Haack).

N e u m a n n , Ernst Richard, *9. 11. 1875, †19. 8. 1955; Leopoldina Mitt. Deutsch. Akad. Natforsch. Halle (3) 1 (Zaunek).

N e u m a n n , John (Janos) von, *8. 12. 1903, †8. 2. 1957; Pinl I, 187/Bull. Amer. Math. Soc. 64 (Ulam)/ Amer. Math. monthly 80 (Halmos).

N o a c k , Albert, *22. 10. 1904, †14. 12. 1956.

N o e t h e r , Emmy, *23. 3. 1882, †15. 4. 1935; Pinl II, 180/ Amer. Math. monthly 79 (Kimberling)/ Elem. Math. Beiheft 13 (Dick).

N o e t h e r , Fritz, *7. 10. 1884, † nach 1939; S: Pinl I, 203.

O s t m a n n , Hans-Heinrich, *16. 10. 1913, †4. 11. 1959; T: Jber. DMV 62/ S-B. Berlin. Math. Ges. (1964) (Kanold).

P a n n w i t z , E r i k a , *26. 5. 1904, †25. 11. 1975; Zentralbl. Math. 309 (Köthe).

P e r r o n , Oskar, *7. 5. 1880, †22. 2. 1975; Jbuch. Bayer. Akad. Wiss. München (1976) (H. Schmidt)/ S: Jber. DMV 80 (Hlawka).

P f e i f f e r , Friedrich, *2. 5. 1883, †21. 12. 1961; R: Z. Angew. Math. Mech. 23 (Lösch)/ R: Reden und Aufsätze 28 (Stuttgart 1963).

P i c k , Georg, *10. 8. 1859, †26. 7. 1942; S: Jber. DMV 75 (Pinl).

P ö s c h l , Theodor, *6. 9. 1882, †1. 10. 1955; T: Jber. DMV 58/ S: Pinl III, 170.

P r a n d t l , Ludwig, *4. 2. 1875, † 15. 8. 1953; A: Physik. Bl. 4/ Z. Angew. Math. Mech. 24 (Tollmien)/ Physik. Bl. 6 (Görtler)/ Physik. Bl. 9 (Görtler)/ Forschh. f. Schiffstech., Hamburg (Nov. 1953) (Wieghardt)/ Z. Flugwiss. 1 (Blenk)/ Hansa 43/44 (Weinblum).

P r a n g e , Georg, *1. 1. 1885, † 3. 2. 1941; S: Jber. DMV 52 (W. v. Koppenfels)/ Hannover Cat. Prof. (1956).

P r i n g s h e i m , Alfred, *2. 9. 1850, †25. 6. 1941; Jber. DMV 56 (Perron)/ Pinl III, 202.

P r ü f e r , Heinz, *10. 11. 1896, †7. 4. 1934; Semesterber. Pflege d. Zusammenh. v. Univ. u. Schule 5 (1934) (Behnke, Köthe)/ S: Jber. DMV 45 (Behnke, Köthe).

Q u a d e , Wilhelm, *1. 12. 1898, †10. 6. 1975; S: Jber. DMV 82 (Schottlaender)/ Hannover Cat. Prof. (1956).

R a d e m a c h e r , Hans, *3. 4. 1892, †7. 2. 1969; S: Pinl I, 205–208.

R a d o n , Johann, *16. 12. 1887, †25. 5. 1956; Jber. DMV 63 (Hornich)/ Monatsh. Math. 62 (Funk).

R e i d e m e i s t e r , Kurt, *13. 10. 1893, † 8. 7. 1971; S: Jber. DMV 74 (Artzy)/ Math.-Phys. Semesterber. 19 (Behnke)/ Math. Ann. 199 (Bachmann, Behnke, Franz)/ Almanach Österreich. Akad. Wiss. 122 (Vietoris)/ Pinl III, 185.

R e i n h a r d t , Karl, *17. 1. 1895, † 27. 4. 1941; S: Jber. DMV 52 (W. Maier).

R e l l i c h , Franz, *14. 9. 1906, †25. 9. 1955.

R e m a k , Robert Erich, *14. 2. 1888, † nach 1942; S: Pinl I, 190–193.

R e m b s , Eduard, *17. 9. 1890, † 5. 6. 1964; S: Pinl I, 193–195.

R i e b e s e l l , Paul, *9. 6. 1883, †16. 3. 1950; T: Jber. DMV 54/ Bl. Deutsch. Ges. Vers. Math. 1 (Lorey).

R i t t e r , Robert, *12. 4. 1905, †27. 7. 1959; S: Jber. DMV 63 (Pinl)/ S-B. Berlin. Math. Ges. (Pinl).

R o d e n b e r g , Carl Friedrich, *1. 4. 1851, † 5. 1. 1933; Hannover Cat. Prof. (1956).

R o g o s i n s k i , Werner, *9. 1. 1894, † 29. 7. 1964; Pinl III, 185–186/ Biograph. Mem. Fellows Roy. Soc. 11 (Hayman)

R o s e m a n n , Walther, *16. 9. 1899, †4. 9. 1971; Hannover Cat. Prof. (1956).

R o s e n t h a l , Arthur, *24. 2. 1887, †15. 9. 1959; S: Jber. DMV 63 (Haupt)/ Pinl III, 167.

R o s s b a c h , Heinrich, *22. 3. 1909, † 29. 7. 1944; T: Jber. DMV 54.

R o s t , Georg, *26. 2. 1870, † 3. 9. 1958; T: Jber. DMV 61.

R o t h e , Rudolf, *15. 10. 1873, †10. 1. 1942; S-B. Berlin. Math. Ges. (1952–54)/ Z. Angew. Math. Mech. 22 (Grüss)/ Hannover Cat. Prof. (1956).

R o t h s t e i n , Wolfgang, *11. 10. 1910, †27. 1. 1975; S: TU Hannover 2 (1975) (Kopfermann).

Salkowski, Erich, *3. 2. 1881, †15. 7. 1943; Hannover Cat. Prof. (1956).

Sanden, Horst von, *26. 12. 1883, † 19. 3. 1965; Hannover Cat. Prof. (1956).

Sauer, Robert, *16. 9. 1898, †22. 8. 1970; Jbuch. Bayer. Akad. Wiss. München (1971) (Lense)/ Z. Angew. Math. Mech. 51 (Heinhold)/ Atti. Accad. Sci. Torino Cl. Sci. Fis. Math. Natur. 105 (Tricomi)/ Numer. Math. 16 (Götze, F. L. Bauer).

Scheffers, Georg, *21. 11. 1866, †12. 8. 1945; T: Jber. DMV 54/ Pog 7a.

Schilling, Friedrich, *9. 4. 1868, †25. 5. 1950; Jber. DMV 55 (U. Graf).

Schlesinger, Ludwig, *1. 9. 1864, †16. 12. 1933; Z. f. Deutschtum u. Judentum 50/ Scripta Math. 3 (Dunnington)/ S: Pinl I, 224.

Schmeidler, Werner, *7. 6. 1890, †1. 4. 1969.

Schmid, H. Ludwig, *26. 6. 1908, †16. 4. 1956; S: Math. Nachr. 18 (Hasse)/ Jber. DMV 61 (H. Schmidt)/ Zentralblatt Math. 57.

Schmid, Wilhelm, *21. 12. 1888, †31. 5. 1963.

Schmidt, Erhard, *13. 11. 1876, †6. 12. 1959; R: Math. Nachr. 15 (R. Nevanlinna)/ S: Jber. DMV 69 (Rohrbach)/ Jber. DMV 72 (Dinghas)/ S-B. Berlin. Math. Ges. (1959–60)/ Mitt. Math. Ges. DDR 1/2 (Pietsch)/ Forschungen u. Fortschritte 30 (R. Nevanlinna).

Schmidt, Friedrich Karl, *22. 9. 1901, †25. 1. 1977; S: Jber. DMV (Kunz, Nastold) noch nicht erschienen/ Jbuch. Heidelberger Akad. Wiss. (1978) (Puppe).

Schmidt, Harry, *21. 6. 1894, †7. 9. 1951; T: Jber. DMV 55.

Schnee, Walter, *8. 8. 1885, †10. 6. 1958; T: Jber. DMV 62.

Scholz, Arnold, *24. 12. 1904, †1. 2. 1942; T: Jber. DMV 54/ Math. Nachr. 7 (Taussky-Todd).

Scholz, Heinrich, *17. 12. 1884, †30. 12. 1956; Schriften d. Ges. Förderung Westf. Wilh. Univ. Münster 41.

Schottky, Friedrich, *24. 7. 1851, †12. 8. 1935; S-B. Preuss. Akad. Wiss. (1936) (Bieberbach).

Schüssler, Rudolf, *5. 4. 1864, †15. 1. 1942; S: Deutsche Math. 7 (Horninger).

Schulz, Günther, *30. 11. 1903, †19. 11. 1962; Z. Angew. Math. Mech. 43 (Collatz)/ Reden und Aufsätze 28 (Stuttgart 1963) (Lösch).

Schur, Issai, *10. 1. 1875, †10. 1. 1941; S: Pinl I, 195/ Jber. DMV 77 (A. Brauer)/ S: Istor.-Mat. Issled. 17 (Dahija).

[illegible]

erschienen.

S t o h l e r , Karl, *1. 7. 1897, †2. 3. 1959; Hannover Cat. Prof. (1956).

S ü s s , Wilhelm, *7. 3. 1895, †21. 5. 1958; S: Jber. DMV 69 (Gericke)/ Math.-Naturwiss. Unterricht 9 (Raith)/ Freiburger Universitätsreden, Neue Reihe 28 (1958) (Ostrowski).

S z á s z , Otto, *11. 12. 1884, †19. 9. 1952; Pinl I, 215/ Frankfurter Universitätsreden (1965) (Siegel)/ Bull. Amer. Math. Soc. 60 (Szegö).

T e i c h m ü l l e r , Oswald, *14. 6. 1913, † 1943; T: Jber. DMV 54.

T h o m s e n , Gerhard, *23. 6. 1899, †4. 1. 1934; Pinl III, 205–206/ S: Abh. Math. Sem. Univ. Hamburg 10.

T h r e l f a l l , William, *25. 6. 1888, †4. 4. 1949; T: Jber. DMV 54.

T i e t z e , Heinrich, *31. 8. 1880, †17. 2. 1964; Almanach Österreich. Akad. Wiss. 114 (Vietoris)/ Chronik d. Ludw.-Max.-Univ. München (1963–64) (Perron)/ Jbuch. Bayer. Akad. Wiss. München (1964) (Aumann).

T i m e r d i n g , Heinrich, *23. 1. 1873, †12. 4. 1945; Deutsche Math. 7 (Rehbock).

T i m p e , Aloys, *14. 3. 1882, †14. 9. 1959; T: Jber. DMV 62.

T o e p l i t z , Otto, *1881, †15. 2. 1940; S: Jber. DMV 66 (Behnke, Köthe)/ Math. Phys. Semesterber. 1 (Behnke)/ Pinl I, 201–202/ Math.-Phys. Semesterber. (1949)/ Nature 145 (M. Born)/ Bonn Verz. Prof. (1968)/ 150 Jahre Rh. Fr. W. Univ. Bonn (1970) (Behnke)/ Juden im Deutschen Kulturberich (Volbehr).

T r e f f z , Erich, *21. 2. 1888, †21. 1. 1937; T: Jber. DMV 54/ Z. Angew. Math. Mech. 17 (Prandtl)/ Z. Angew. Math. Mech. 18 (Grammel)/ Z. Angew. math. Mech. 42 (Biezeno)/ Z. Flugwiss. 2.

U l l r i c h , Egon, *1. 11. 1902, †30. 5. 1957; S: Jber. DMV 61 (R. Nevanlinna) & (Wittich)/ Nachr. d. Gießen. Hochschulges. 26 (Hofmann).

U l m , Helmut, *21. 6. 1908, †18. 6. 1975.

U n k e l b a c h , Helmut, *18. 4. 1910, †17. 1. 1968; S: Jber. DMV (Peschl)

W e i s s , Ernst August, *5. 5. 1900, †9. 2. 1942; S: Jber. DMV 52 (Blaschke)/

[redacted]

W e n z l , Fritz, *19. 7. 1913, †28. 9. 1953.

W e y l , Hermann, *9. 11. 1885, †18. 12. 1955; Pinl II, 185–189/ Math. Z. 126 (Polya)/ J. London Math. Soc. 33 (Newman)/ Jaarboek Nederl. Akad. Wetensch. (1955) (Freudenthal)/ Forschungen u. Fortschritte 29 (Hölder)/ Die Anfechtbarkeit der klassischen Mathematik (Dissertation Stuttgart 1965) (Beisswanger).

W i a r d a , Georg, *12. 4. 1889, †19. 3. 1971; S: Jber. DMV 74 (Bufler).

W i e n e r , H., *15. 5. 1857, †13. 6. 1939; T: Jber. DMV 54.

W i l l e r s , Friedrich, *29. 11. 1883, †5. 1. 1959; Pinl I, 216/ S: Z. Angew. Math. Mech. 40 (Sauer).

W i n k e l m a n n , Max, *10. 1. 1879, †31. 12. 1945; T: Jber. DMV 54.

W i n t e r n i t z , Arthur, *16. 6. 1893, †9. 7. 1961; S: Jber. DMV 75 (Pinl).

Z e r m e l o , Ernst, *27. 7. 1871, †21. 5. 1953; S: Pinl I, 221–222.

Prof. Dr. H. Tietz
Institut für Mathematik
der Universität
Welfengarten 1
3000 Hannover 1

Jber. d. Dt. Math.-Verein.
82 (1980) 193–198

Zum Gedenken an Wilhelm Quade*)

St. Schottlaender, Clausthal-Zellerfeld

Der Mathematiker und Ingenieur Friedrich Wilhelm August Quade starb am 10. Juni 1975 in Hannover. Er hat testamentarisch darum gebeten, von allen feierlichen Ansprachen, musikalischen Darbietungen und Traueranzeigen anläßlich seines Todes abzusehen. Daher wollen wir hier auch nicht über seinen Tod klagen, sondern seines Lebens gedenken, welches am 1. Dezember 1898 in Straßburg im Elsaß begann. Sein Vater war reichsdeutscher Beamter, seine Mutter Elsässerin, und er hat sich zeitlebens dem französischen Kulturkreis, französischer Lebensart eng verbunden gefühlt. Er ist dort gemeinsam mit seinem jüngeren Bruder Walter aufgewachsen, hat in Metz und Straßburg die Schule besucht, ging jedoch noch vor ihrem Abschluß zur Deutschen Kriegsmarine. Das Kriegsende brachte ihn dann mit den Resten der Deutschen Hochsee-Flotte zu den Orkney-Inseln, die er – wie er später erzählte – wegen des dort herrschenden Wetters in denkbar schlechter Erinnerung behielt. Nach der Selbstversenkung der Deutschen Flotte in der Bucht von Scapa Flow wurde er vom Militärdienst entlassen, konnte aber nicht mehr nach Straßburg, wo er noch Verwandte besaß, zurück, sondern ging nach Augsburg, um sein Abitur nachzuholen. Er studierte dann Elektrotechnik an der Technischen Hochschule in Karlsruhe und legte dort bereits am 21. November 1923 seine Hauptprüfung als Diplom-Ingenieur ab. Vom 1. März 1924 bis zum 31. August 1927 war er Berechnungsingenieur bei den Siemens-Werken, zunächst in Berlin und später in Nürnberg. In Berlin hörte er abends nach seiner Tagesarbeit Vorlesungen über Mathematik, der schon in seiner Karlsruher Studienzeit sein besonderes Interesse gegolten hatte. Dieser seiner Neigung entsprechend verließ er auch seine Ingenieurtätigkeit bei Siemens und nahm ab 1. September 1927 eine Assistentenstelle am Lehrstuhl für Höhere Mathematik der Technischen Hochschule Karlsruhe an, die er bis zum 30. September 1937 innehatte. Am 6. Mai 1931 promovierte er in Karlsruhe zum Doktor-Ingenieur und habilitierte sich zwei Jahre darauf; er wurde am 29. Mai 1933 zum Privatdozenten für das Fach „Mathematik und mathematisch-technische Grenzgebiete" ernannt. Dann folgte am 1. Oktober 1937 die Übertragung einer Diätendozentur; am 29. September 1938 wurde er zum nichtbeamteten außerordentlichen Professor und am 21. November 1939 zum beamteten außerplanmäßigen Professor (eine etwas ungewohnte Reihenfolge) ernannt, alles an der Technischen Hochschule Karlsruhe.

---

*) Vortrag vor der Braunschweigischen Wissenschaftlichen Gesellschaft am 8. Dezember 1978 zum 80. Geburtstag von W. Quade.

0012–0456/80/04 0193–6 $01.20/0

Karlsruhe, oder in weiterem Sinne das Land Baden, war überhaupt das Zentrum seiner Manneszeit, hier verbrachte er mit kurzen Unterbrechungen fast 30 Jahre seines Lebens. Hier hatte er seinen Freundes- und Bekanntenkreis und hier fand er auch im Kriegsjahr 1943 seine Frau Maria Theresia, geb. Maucher, die aus Mindelheim in Schwaben stammte und seit 1938 ebenfalls in Karlsruhe lebte. Von Karlsruhe aus war ihm das Elsaß seiner Jugendzeit nahe, ebenso konnte der geübte Bergsteiger und Matterhornbezwinger leicht die Alpen, der passionierte Angler schnell den Bodensee erreichen. Am Bodensee zum Beispiel, mitten in friedlichen Ferien, überraschte ihn der Kriegsausbruch 1939, doch er hatte keine Eile, seinen Urlaub abzubrechen. In aller Ruhe – so erzählte er später – besorgte er sich in Tankstellen und Drogerien das nötige Benzin für sein Motorrad – er war begeisterter Motorradfahrer – und rollte dann, jeden Abhang benzinsparend ausnutzend, gemächlich der Heimatstadt Karlsruhe zu. In den späteren Kriegs- und Nachkriegsjahren widmete er sich dem von seiner Frau in die Ehe mitgebrachten Gartengrundstück in Ettlingen, an dem er auch noch hing, als er längst in Hannover tätig war. Bis in seine späten Jahre hinein plante er, dort (oder wenigstens in der Nähe) zu bauen, was er [illegible]

von den Erben nicht irgendwohin verkauft, sondern zunächst dem langjährigen Pächter zum Kauf angeboten werden müsse. All dies paßte zum Bild des Mannes, der nichts mit Hast und Ungeduld überstürzte, sondern stets überlegt, voller Ruhe, mit Würde handelte. Er liebte Klarheit, Geradlinigkeit, Aufrichtigkeit, man konnte ihm alles sagen, nur mußte es ruhig geschehen, er hörte allem geduldig zu, nur durfte man ihm nicht mit leeren Phrasen kommen. Daher hielt er auch wenig von zungenfertigen Wortemachern und gar nichts von Titeln und Ehrenzeichen, er konnte sarkastisch von den „öffentlichen Lebemännern" sprechen, mit denen er nicht gern zu tun haben wollte (viel lieber fuhr er mit dem Amtsboten der Hannoverschen Gartenbaufakultät zum Angeln an die Aller). Er wanderte auch gern und oft, sei es in den Alpen oder in der Lüneburger Heide, mit Freunden oder auch allein. Er liebte Voltaire – und doch war er voller Güte und Herzlichkeit, wenn er ganz sicher sein konnte, daß sein Vertrauen nicht mißbraucht werden würde.

Aber kehren wir zurück in seine Lebensmitte, die – wie es für einen guten Wissenschaftler der Normalfall ist – gekennzeichnet wird durch die Berufung auf ein Ordinariat. Wilhelm Quade vertrat vom 1. November 1944 an den ordentlichen Lehrstuhl für Höhere Mathematik an der Technischen Hochschule Danzig und hielt doch auch weiterhin mit der Hand schreiben), wurde erfüllt; offenbar waren dazu aber noch langwierige ministerielle Verhandlungen erforderlich, denn erst am 19. Dezember 1950 wurde er mit Wirkung vom 1. November 1950 zum ordentlichen Professor und Direktor des Instituts für Höhere Mathematik B ernannt. Er hat dieses Amt mit großem Pflichtbewußtsein ausgefüllt, vor allem seinen Lehraufgaben ist er mit äußerster Regelmäßigkeit nachgekommen. Ohne jede Unterbrechung hat er bis zum Tage seiner Emeritierung den viersemestrigen Ingenieurmathematik-Kurs abgehalten, daneben immer noch eine Vorlesung aus dem Gebiet der Analysis für die Mathematikstudenten. Als er seinen Dienst aufnahm, hatte er nur einen Assistenten und eine Viertel-Schreibkraft zur Verfügung, als er ausschied, waren seinem Institut ein wissenschaftlicher Rat, ein Dozent, ein akademischer Rat, ein Oberassistent, sechs Assistenten und eine Ganztags-Sekretärin zugeordnet.

Er hat, wenn auch ungern, höhere akademische Ämter ausgeübt, z. B. als Dekan der Mathematisch-Naturwissenschaftlichen Fakultät, als Leiter des Immatrikulationsamtes der Hochschule, zuletzt als Mitglied des Senats der Pädagogischen Hochschule Niedersachsen. Mit viel größerer Freude war er dagegen in Ämtern tätig, deren wissenschaftlichen Nutzen er einsah. Er war 1953/54 als Schatzmeister im Vorstand der Deutschen Mathematiker-Vereinigung, war langjähriges Mitglied des Ausschusses für Einheiten und Formelgrößen (AEF) im Deutschen Institut für Normung e. V. und seit 1957 Mitglied der Braunschweigischen Wissenschaftlichen Gesellschaft. Seine wissenschaftliche Tätigkeit, die nie zur voreiligen Publikation drängte, sondern nur Ausgereiftes zum Druck gab, erstreckte sich über verschiedene Teilgebiete der Mathematik. Am Beginn stehen natürlich die aus der Elektrotechnik stammenden mathematischen Probleme. Sehr bald kommen aber auch schon Fragen der Interpolations- und allgemeiner der Approximationstheorie hinzu, Fragen der numerischen Integration von Differentialgleichungen und deren Stabilität, Eingrenzung von Eigenwerten einer Sturmschen Randwertaufgabe und Anwendungen der Perronschen Methode der Ober- und Unterfunktionen auf die Bestimmung impliziter Funktionen. Das Gebiet der Differentialgleichungen ganz allgemein (nicht nur ihre numerische Behandlung) hat wohl immer im Zentrum seines mathematischen Interesse gestanden. Seine Arbeit über die „Konstruktion einer Integralbasis an einer schwach singulären Stelle“ aus dem Jahre 1953 ist durch ihre Aufnahme in die 4. Auflage des Standardwerkes von E. Kamke über Differentialgleichungen (Band I von 1962) recht bekannt geworden; er selber hat längere Zeit erwogen, auch ein Lehrbuch über Differentialgleichungen zu schreiben, ein Plan, der aber nicht mehr zur Ausführung kam. In den letzten Jahren [illegible] über „Matrizenrechnung und elektrische Netze". In beiden Arbeiten dokumentiert sich besonders schön, daß Wilhelm Quade nicht nur seinem Ausbildungsgang nach, sondern auch in seiner späteren wissenschaftlichen Tätigkeit ein echter „Ingenieurmathematiker" gewesen ist, einer der ganz wenigen, die es in den letzten Jahren überhaupt noch gegeben hat.

Der Lebensweg Wilhelm Quades neigte sich dem Ende zu. Bereits am 8. Juli 1959 starb seine Frau Resi, mit der er gut übereinstimmte; er blieb kinderlos zurück und hat nie mehr versucht, eine neue Lebensgefährtin zu finden.

Mit Ablauf des Sommersemesters 1964 ließ er sich (vorzeitig) emeritieren [illegible]

behielt aber ein kleines Zimmerchen im Hannoverschen Mathematischen Institut, wo er regelmäßig an den Werktagsvormittagen arbeitete. Er hielt auch dann noch regelmäßig Vorlesungen über Funktionalanalysis, Partielle Differentialgleichungen und Fouriersche Reihen, in den letzten vier Lebensjahren nur noch Spezialvorlesungen für Doktoranden und Diplomanden.

Er reiste im Urlaub gern in südliche Richtungen, wo das Klima warm und sonnig, das Leben einfach, aber das Essen gut war. Als Italien von Touristen überfüllt wurde, reiste er lieber in den Südwesten Deutschlands, ins „Alemannische", oder auch zum Kurzurlaub nur mit seinem Bruder Walter in ein Bauernhaus im Spessart, zum Angeln und Pilzesuchen.

In seinen letzten Jahren hatte er den Plan, Karlsruhe als Alterssitz zu wählen, dann aufgegeben; zu viele der alten Freunde und Bekannten dort waren schon gestorben. In Hannover bzw. in mäßiger Entfernung davon waren ein paar Freunde und ehemalige Schüler, bei denen er sich wohl fühlte und von denen er regelmäßig eingeladen wurde. Bis in sein letztes Lebensjahr hinein fühlte er sich geistig und – von seinem empfindlichen Magen vielleicht abgesehen – auch körperlich gesund. Er war keine Kämpfernatur, ließ sich aber nie in bequeme oder konventionelle Bahnen zwingen. Er war immer ausgeglichen und voller Gelassenheit, mit viel Sinn für Humor, ja im Grunde ein sehr fröhlicher Mensch, aber von einer stillen Fröhlichkeit

7. Über die Schwingungsvorgänge in gekoppelten Systemen. Ing.-Arch. **6** (1935) 15–34
8. Annäherung reeller periodischer Funktionen durch trigonometrische Interpolation. Jber. d. Dt. Math.-Verein. **45** (1935) 128–129 (Auszug aus einem auf dem 11. Deutschen Physiker- und Mathematikertag gehaltenen Vortrag)
9. Ein neues, genaues und einfaches Verfahren zur Bestimmung der Trennwirkung von Austauschböden (gemeinsam mit E. Kirschbaum). Forschg. Ing. Wes. **8** (1937) 63–67
10. Mathematische Begründung der komplexen Schwingungsrechnung. Deutsche Mathematik 2 (1937) 18–31
11. Zusammensetzung der Wirk-, Blind- und Scheinleistung bei Wechselströmen beliebiger Kurvenform und neue Leistungsdefinitionen für unsymmetrische Mehrphasenströme beliebiger Kurvenform. Elektrotechn. Zeitschr. **58** (1937) 1313–1316 und 1341–1344
12. Zur Interpolationstheorie der reellen periodischen Funktionen (gemeinsam mit L. Collatz). Sitzungsber. d. Preuss. Akademie der Wiss., Phys.-Mathem. Klasse 1938, XXX, 383–429
13. Neue Darstellung der Verzerrungsleistung eines Wechselstromes mit Hilfe des Funktionenraumes. Arch. f. Elektrotech. **33** (1939) 277–305
14. Matrizenrechnung und elektrische Netze. Arch. f. Elektrotech. **34** (1940) 545–567
15. Abschätzungen zur trigonometrischen Interpolation. Deutsche Mathematik **5** (1941) 482–512
16. Ein neues Verfahren der schrittweisen Näherungen der Lösung von $y' = f(x, y)$. Math. Zeitschrift **48** (1942) 324–368
17. Auflösung linearer Gleichungen durch Matrizeniteration. Bericht über die Mathematikertagung Tübingen 1946, 123–124
18. Zur Theorie der ebenen stetigen Gaswellen von endlicher Schwingungsweite. Z. f. d. angew. Math. Mech. **25/27** (1947) 215–232
19. Schranken für die Eigenwerte der Sturmschen Randwertaufgabe zweiter Ordnung. Math. Zeitschrift **51** (1948) 92–125
20. *Fritz Emde* (Würdigung). Elektrotechnik **2** (1948) 209
21. Grundsätzliches zur numerischen Integration gewöhnlicher Differentialgleichungen. Z. f. d. angew. Math. Mech. **30** (1950) 276–278
22. Numerische Integration von Differentialgleichungen bei Approximation durch trigonometrische Ausdrücke. Z. f. d. angew. Math. Mech. **31** (1951) 237–238
23. Über die Tätigkeit des Ausschusses für Einheiten und Formelgrößen (AEF). Math.-Phys. Semesterberichte, Bd. II, Heft 3/4 (1952) 190–198
24. Konstruktion einer Integralbasis an einer schwach singulären Stelle. Jber. d. Dt. Math.-Verein. **56** (1953) 88–104
25. Beweis eines Satzes über positive Matrizen. Proc. Nederl. Akad. Wetenschapen **56** Ser. A (1953) 50–51
26. Numerische Integration gewöhnlicher Differentialgleichungen durch Interpolation nach Hermite. Proc. Int. Congr. Math. Amsterdam 1954 Vol. II 372–373
27. *Conrad Müller* (Würdigung). Jber. d. Dt. Math.-Verein. **57** (1954) 1–5
28. Zur Interpolationstheorie der reellen Funktionen. Z. f. d. angew. Math. Mech. **35** (1955) 144–156
29. Mathematische Fragen aus der Arbeit des AEF. Elektrotechn. Zeitschrift **78** (1957) 285–287
30. Numerische Integration gewöhnlicher Differentialgleichungen durch Interpolation nach Hermite. Z. f. d. angew. Math. Mech. **37** (1957) 161–169
31. Das Problem der Interpolation auf der Schule und auf der Hochschule. Wiss. Z. Hochschule Schwermaschinenbau Magdeburg **2** (1958) 111–115
32. Über die Mathematik, ihr Wesen und ihre Anwendung (Festvortrag, gehalten anläßlich der Einweihung des Auditorium Maximum der Technischen Hochschule Hannover 1958). Jahrbuch der TH Hannover 1958/60, 30–33
33. Über die Stabilität numerischer Methoden zur Integration gewöhnlicher Differentialgleichungen erster Ordnung. Z. f. d. angew. Math. Mech. **39** (1959) 117–134
34. Über die algebraische Struktur des Größenkalküls der Physik. Abhandlungen der Braunschweigischen Wissenschaftlichen Gesellschaft XIII (1961) 24–65
35. Die Dimensionsanalysis vom Standpunkt der modernen Algebra. Z. f. d. angew. Math. Mech. **43** Sonderheft (1963) 31–32
36. Über das Verhalten von Fourierkoeffizienten von speziellen, beliebig oft differenzierbaren 2π-periodischen Funktionen. (In: Über Approximationstheorie, Abhandlungen zur Tagung im Mathematischen Forschungsinstitut Oberwolfach) Basel und Stuttgart 1964, 252–261

37. Über implizite Funktionen (gemeinsam mit St. Schottlaender). Math. Zeitschrift **89** (1965) 137–180
38. Zur Theorie und Anwendung des Größenkalküls der Physik, Abhandlungen der Braunschweigischen Wissenschaftlichen Gesellschaft XVIII (1966) 15–49
39. The algebraic structure of dimensional analysis (Übersetzung von 34.), als Anhang in: De Jong, F. J.: Dimensional Analysis for Economists, North-Holland Publishing Company Amsterdam (1967) 143–199
40. Analysis im Größenkalkül der Physik (gemeinsam mit H.-W. Alten), Abhandlungen der Braunschweigischen Wissenschaftl. Gesellschaft XXIII (1971/1972) 311–341

Prof. Dr. S. Schottlaender
Institut für Mathematik
Technische Universität Clausthal
Erzstr. 1
D-3392 Clausthal-Zellerfeld 1

(*Eingegangen: 8. 11. 1979*)

Buchbesprechungen

Gårding, L., Encounter with Mathematics, Berlin – Heidelberg – New York: Springer Verlag 1977, 82 figs. IX, 270 p. Cloth DM 30,–

Dies Buch wendet sich in erster Linie an Hochschulstudenten und Studienräte des Fachs Mathematik. Es setzt Training im mathematischen Arbeiten in gewissem, aber nicht allzu hohem Maße voraus. Das Ziel des Buches besteht darin, dem genannten Personenkreis Ein- und Überblicke in das Gesamtgebiet der Mathematik zu geben, die in den üblichen Kursvorlegungen i.a. nicht zu vermitteln sind. Die der fachlichen Arbeit mit dieser Zielsetzung gewidmeten Kapitel 2–5 und 7–11 beginnen jeweils mit einer historischen Einleitung, breiten sodann ein gewisses Grundmaterial vor dem Leser aus und enden mit kurzen Texten aus historisch bedeutenden Originalabhandlungen des betr. Gebiets, die auf englisch bearbeitet sind. Die Kapitelüberschriften: 2. Number Theory, 3. Algebra, 4. Geometry and Linear Algebra, 5. Limits, continuity and topology, 7. Differentiation. 8. Integration, 9. Series, 10. Probability, 11. Applications. Zur näheren Erläuterung greife ich Kap. 2 heraus: Number theory. Es beginnt mit allgemeinen Bemerkungen über natürliche, ganze, rationale, reelle und komplexe Zahlen und präsentiert dann 1. Primzahlen (Euklid's Beweis, daß es unendlich viele Primzahlen gibt, Inhaltsangabe über den Primzahlsatz, Satz vom größten gemeinsamen Teiler) 2. den „kleinen" Fermat'schen und den Wilson'schen Satz, sowie eine Angabe des Hauptresultats über quadratische Reziprozität, 3. die Gauss'schen ganzen Zahlen in der komplexen Ebene. In diesen Abschnitten werden für die einfacheren Resultate kurze, aber vollständige Beweise gegeben. Es folgt 4. ein Bericht über berühmte Ergebnisse und Probleme der Zahlentheorie: „großer" Fermat'scher Satz, Goldbach'sche Vermutung, diophantische Approximation, Transzendenz von e und π. 5. Euklid's (geometrischer) Text über die Unendlichkeit der Primzahlfolge (in der englischen Übersetzung von Heath), sowie ein kurzer Abschnitt aus einer Abhandlung (1828) von Dirichlet über das Fermatproblem (in der englischen Übersetzung des Autors) beschließen das Kapitel. – Die 9 „Arbeitskapitel" sind umrahmt von einem 1. Kapitel über Mathematik und Wirklichkeit (Realität-Modell-Schema mit Beispielen, innermathematisches Modelldenken) und einem in Form fiktiver Biographien und Begegnungen amüsant verfaßten Kap. 12 über Soziologie, Psychologie und Didaktik der Mathematik. Kap. 6 ist dem „heroischen" Jahrhundert (ca. 1600–1700) der Mathematik gewidmet, mit Texten von Galilei, Newton und Leibniz. Zahlreiche Abbildungen, insbesondere Porträts, die von den verschiedensten Vorlagen her auf einen einheitlich granulierten Zustand hin bearbeitet sind, machen das Buch auch zu einer Augenweide. Vor allem aber ist es eine Weide für den Geist, u.z. nicht nur für Studenten und Lehrer, sondern auch für Dozenten, die nach einer Textgrundlage für eine allgemeinbildende Mathematikvorlesung suchen. In einem Punkte allerdings läßt einen das Buch im Stich: Grundlagen der Mathematik, Logik, Unentscheidbarkeit. Es ist ein Bericht aus der üblichen mathematischen Arbeitswelt, unangefochten von der Frage nach den erkenntnismäßigen Grundlagen und Möglichkeiten unserer Wissenschaft. Als Einführung und Bericht dieser Art ist es genuß- und gewinnreich zu lesen; es sollte in keiner mathematischen Bibliothek, sei sie nun öffentlich oder privat, fehlen.

Erlangen — K. Jacobs

Van der Waerden, B. L., Die Pythagoreer. Religiöse Bruderschaft und Schule der Wissenschaft, Zürich – München: Artemis Verlag 1979, 505 S., gebd., DM 95,–

Der als Mathematiker und Wissenschaftshistoriker gleich überragend ausgewiesene Autor gibt in diesem Werk einen umfassenden Bericht über den Stand der Forschung zum Thema

„Pythagoras und die Pythagoreer". Das Buch zeichnet sich durch die Lebendigkeit und allgemeinverständliche Klarheit aus, für die der Verfasser seit langem bekannt ist. Besonders hervorzuheben ist der in einer Fülle von ausführlichen, z.T. eigens für dies Buch übersetzten Zitaten gegebene Einblick in die Quellen. Die Kapitel: 1. Pythagoras von Samos, 2. Legenden über Pythagoras, 3. Akusmata und Mathemata, Akusmatiker und Mathematiker, 4. Kosmische Harmonie und Tetraktys, 5. Unsterblichkeit, göttliche Herkunft und Himmelsreise der Seele, 6. Die „Goldenen Verse" und die „Heilige Rede", 7. Vom pythagoreischen Leben, 8. Die Reden des Pythagoras, 9. Die Politik der Pythagoreer, 10. Die Göttlichkeit der Gestirne, 11. Die ewige Wiederkehr und der astrologische Fatalismus, 12. Die Pythagoreer in der hellenistischen und römischen Zeit, 13. Nikomachos von Gerasa, 14. Die vier Mathemata, 15. Die Geometrie der Pythagoreer, 16. Die Harmonielehre der Pythagoreer, 17. Die Arithmetik der Pythagoreer, 18. Die Astronomie der Pythagoreer, 19. Die Erkenntnistheorie der Pythagoreer. Für den Mathematiker sind die Kapitel Nr. 15 und Nr. 17 von besonderem Interesse. Sie enthalten u.a. neue Einsichten über die Codifizierung pythagoreischen Gedankenguts in den Elementen des Euklid. Das Buch gehört in die Bibliothek jedes interessierten Gebildeten. Uns Mathematiker erinnert es nachdrücklich an das „griechische Wunder": den Ursprung unserer Wissenschaft aus einer religiös vertieften Philosophie.

Erlangen K. Jacobs

Griffiths, H. B., Hilton, P.: Klassische Mathematik in zeitgemäßer Darstellung, a. d. Englischen übersetzt von D. Wode: (Studia Mathematica · Mathematische Lehrbücher), Göttingen und Zürich: Verlag Vandenhoeck & Ruprecht. Band 1 (1976): 223 S., DM 27,–; Band 2 (1976): 244 S., DM 30,–; Band 3 (1978): 320 S., DM 39,–.

Griffiths, H. B., Hilton, P.: A Comprehensive Textbook of Classical Mathematics; New York – Heidelberg – Berlin: Springer-Verlag 1978; XXIX, 637 S., DM 44,–.

Bei der Ausgabe im Springer-Verlag handelt es sich um eine Neuauflage der 1970 bei Van Nostrand Reinhold Co. erschienenen Erstauflage. Die Ausgabe im Verlag Vandenhoeck & Ruprecht ist eine von D. Wode besorgte Übersetzung der Erstauflage. Inhaltlich stimmen die beiden neuen Editionen überein, so daß sich eine gemeinsame Besprechung anbietet.

[redacted]

werden Konzeption und Darstellung geprägt. Zur Konzeption: Das Hauptanliegen der Autoren besteht nicht in einer ersten Einführung, sondern in einer Behandlung (mehr oder weniger) bekannter

Bei einem in jeder Hinsicht gelungenen Buch wirken Hinweise auf belanglose Ungenauigkeiten geradezu hergesucht: die Vermutung von Goldbach ist nicht korrekt formuliert; bei der Definition reeller Kugeln sollten die Radien positiv sein.

In der deutschsprachigen Ausgabe wäre eine Ergänzung des Literaturverzeichnisses um deutschsprachige Mathematikbücher ohne Frage wünschenswert und auch nützlich gewesen. Denn: das Buch enthält eine Fülle von gezielten Literaturhinweisen. Wenn aber im Anschluß an die Behandlung von Kettenbrüchen auf die Bücher von Davenport und Olds verwiesen wird, so werden nur wenige Leser hierzulande diese Bücher ausfindig machen können. Ein Hinweis auf die Übersetzung von Hardy-Wright oder das Standardwerk von Perron hätte sicher mehr Chancen, vom Leser realisiert zu werden. Ganz analog sieht es bei der Determinanten-Literatur (Hodge-Pedoe, Halmos) und vielen anderen Literatur-Anregungen aus. Man darf hoffen und wünschen, daß diese Lücke in einer zweiten Auflage geschlossen wird.

Überhaupt kann und muß man dem Werk viele Auflagen und große Resonanz wünschen. Wer in irgendeiner Weise lehrend mit Mathematik umgeht, wird dieses Buch mit Freude, Interesse und Gewinn lesen. Er wird nach der Lektüre seine Mathematik in neuen, besseren Zusammenhängen sehen; vermutlich wird auch seine Lehre dadurch attraktiver. So ist dieses Buch denn nicht nur für die Lehrenden, sondern auch für die Lernenden ein Gewinn. Für diese Leistung ist den Autoren herzlich zu danken; in diesen Dank muß auch der Übersetzer für seine vorzügliche Arbeit eingeschlossen werden.

Kaiserslautern K. Radbruch

Goldstine, H. H., A History of Numerical Analysis from the 16th through the 19th Century (Studies in the History of Mathematics and Physical Sciences, vol. 2), Berlin – Heidelberg – New York: Springer Verlag 1977, 23 figs, XIV, 348 p., Cloth, DM 56,–.

Hier wird der Versuch unternommen, wie der Verfasser schreibt, die Spuren der Entwicklung der Numerischen Analysis aufzufinden, mit eindrucksvollem Erfolg, wie ich meine. Ein umfangreiches Studium vieler berühmter oder aber auch vergessener wissenschaftlicher Publikationen, erschwert durch die rasch gewandelte mathematische Denkweise und Symbolik, zeigt, daß eine einschneidende Auswahl bei der geschichtlichen Darstellung erforderlich ist.

wenigstens zeitweilig in das Detail zu vertiefen. Übrigens macht es auch den Reichtum an Ideen deutlich, der nicht nur in der Mathematik eines der hervorstechendsten Merkmale des späten achtzehnten und des frühen neunzehnten Jahrhunderts war.

Mannheim G. Meinardus

Brauner, H., Geometrie projektiver Räume I, II, Mannheim – Wien – Zürich: Bibliographisches Institut 1976, Bd. I: 225 S., kart., DM 24,–. Bd. II: 250 S., kart., DM 24,–

Das vorliegende aus Vorlesungen des Autors hervorgegangene zweibändige Werk kann von Mathematikstudenten vom 3. Semester an gelesen werden.

Es behandelt projektive Ebenen, Kegelschnitte in projektiven Papposebenen, projektive Räume, Kollineationen projektiver Räume, Korrelationen endlichdimensionaler projektiver Räume, Quadriken in klassischen projektiven Räumen, die beiden Hauptsätze der projektiven Geometrie, affine Ebenen und affine Räume, affine Räume mit Orthogonalität und dreidimensionale projektive Papposräume.

Der Aufbau des Buches ist bestimmt durch den Willen des Autors, dem synthetischen gegenüber dem analytisch-algebraischen Standpunkt bei der Behandlung des Stoffes so weit wie irgend möglich den Vorzug zu geben. Dabei werden auch für den Kenner einige neue Zusammenhänge sichtbar. Z.B. wird deutlich, daß die synthetische Behandlung der Quadriken, wie sie für den reellen Fall seit langem bekannt ist, mit entsprechenden Modifikationen auf endlichdimensionale projektive Papposräume mit einer von 2 verschiedenen Charakteristik (hier „klassisch" genannt) übertragen werden kann. Dabei verwendet der Autor in zwangloser Weise neuere Begriffsbildungen, so daß die mathematische Sprache dem heutigen Stand entspricht.

Die Lesbarkeit ist im allgemeinen gut; insbesondere werden sowohl der „eilige" Leser als auch der lernende Student es begrüßen, daß sich am Ende eines jeden Abschnittes eine Zusammenfassung der wichtigsten Resultate findet. Jedoch sei angemerkt, daß eine frühere Einbringung der algebraischen Darstellungsmöglichkeiten den mehrfach auftretenden Verweis auf spätere Kapitel überflüssig gemacht hätte und überdies an manchen Stellen zum besseren Verständnis beigetragen hätte.

Abgesehen davon, daß die Theorie der nichtdesarguesschen Ebenen so gut wie gar nicht behandelt wird, und daß der hier eingeschlagene Weg zur Behandlung von Quadriken im Falle der Charakteristik 2 versagt, darf man feststellen, daß hier ein solides Werk vorliegt, welches dem Studenten einen fundierten Einstieg in wesentliche Bereiche der projektiven Geometrie vermittelt.

Hamburg E. M. Schröder

Bogoljubov, N. N., Mitropoliskii, J. A., Samoilenko, A. M., Methods of Accelerated Convergence in Nonlinear Mechanics (translated from the Russian by V. Kumar), Berlin – Heidelberg – New York: Springer Verlag 1976; Coproduction with Hindustan Publ. Co. New Delhi, Cloth, out of print.

Die Frage nach der Existenz quasi-periodischer Lösungen (d. h. fast-periodische Lösungen mit endlicher Frequenzbasis oder Parallelflüsse auf Tori) bei gewissen gewöhnlichen Differentialgleichungssystemen, die aus der Mechanik, insbesondere aber aus der Himmelsmechanik stammen (etwa durch kleine Nichtlinearitäten schwach gekoppelte Oszillatoren) muß schon sehr alt sein. Jedenfalls haben sich (cf. J. Moser, Stable und Random Motions in Dynamical Systems, 1973) Dirichlet, Kronecker, Weierstrass, Poincaré in der zweiten Hälfte des letzten Jahrhunderts mit ihr intensiv und durchaus kontrovers beschäftigt. Die grundlegende Schwierigkeit kann darin gesehen werden, daß das Integral einer quasi-periodischen Funktion selbst dann nicht beschränkt zu sein braucht, wenn der Mittelwert der Funktion verschwindet und die Frequenzen über den rationalen Zahlen linear unabhängig sind. (Diese Problematik wird als das „Problem der kleinen Nenner“ bezeichnet).

Die Bewältigung dieser Schwierigkeit gelingt wie folgt: Die Frequenzbasis wird einer zahlentheoretischen Bedingung unterworfen (im Falle zweier Frequenzen etwa wird verlangt, daß ihr Verhältnis stark irrational ist). Dadurch wird das Kleine-Nenner-Problem keineswegs eliminiert aber wenigstens kontrolliert. Eine solche Bedingung ist wohl zuerst von C. L. Siegel in einer 1942 erschienenen Arbeit zum sog. funktionentheoretischen Zentrumsproblem in diesen Gedankenkreis eingeführt worden. Die zweite Säule zur Überwindung des Problems der kleinen Nenner ist die Benutzung eines schnell konvergierenden (d. h. überlinearen) Verfahrens bei der iterativen Konstruktion der quasi-periodischen Lösung um die nach wie vor vorhandene Wirkung der kleinen Nenner zu kompensieren. Dieser Baustein ist 1953 von A. N. Kolmogorov hinzugefügt worden. So natürlich dieses Konzept auch ist, seine effektive Durchführung jedoch ist alles andere denn trivial, ist doch eine ungewöhnliche Fülle von subtilen technischen Schwierigkeiten zu meistern; es ist deshalb nicht unverständlich, daß die fundamentalen Resultate, wie die Existenz analytischer und differenzierbarer quasi-periodischer Lösungen bei Hamilton'schen und reversiblen Systemen, die Existenz invarianter Kurven in der Umgebung eines elliptischen Fixpunktes einer flächentreuen Abbildung etc. erst etliche Jahre nach den Pionierarbeiten von Siegel und Kolmogorov in den frühen sechziger Jahren durch V. I. Arnold und J. Moser erzielt wurden. Die hiermit umrissene Theorie wird nun allgemein als KAM-Theorie bezeichnet.

Trotz ihrer unbestrittenen Bedeutung, ist die Anzahl der Bücher über Differentialgleichungen oder Mechanik, die der KAM-Theorie wenigstens ein Kapitel widmen, beinahe an einer Hand aufzuzählen. Wenn deshalb das zu besprechende Buch nicht uneingeschränkt begrüßt werden kann, so hängt dies weniger mit dem Material als mit der Präsentation zusammen. Doch nun zunächst zum Inhalt dieses Buches.

Das erste, zweite und sechste Kapitel ist der Existenz invarianter Tori auf denen quasiperiodische Lösungen liegen und deren Nachbarschaft gewidmet. Da wird etwa Bogoljubov's nun schon klassische Methode zur Konstruktion eines invarianten Torus mit der KAM-Technik kombiniert um die Parallelität des Flusses auf dem Torus nachzuweisen. Oder: Ein beachtlicher Teil ist Reduktions- oder Linearisierungssätzen gewidmet, d.h. es wird gezeigt, daß gewisse Systeme mit toroidalem Phasenraum analytisch oder differenzierbar äquivalent zu trivialen linearen Systemen sind.

An dieser Stelle muß auf folgende Besonderheit hingewiesen werden: Da die Autoren weder eine Hamilton'sche noch eine reversible Struktur voraussetzen, müssen sie jeweils statt einem festen Ausgangssystem eine endlich-dimensionale Schar von Systemen betrachten und simultan mit der Konstruktion der quasi-periodischen Lösungen muß auch dasjenige System aus der Schar ermittelt werden, zu dem die quasi-periodischen Lösungen gehören.

Das siebte und letzte Kapitel des Buches bringt die Übertragung einiger der genannten Resultate auf allgemeine kompakte Mannigfaltigkeiten.

Es verbleibt die kurze Charakterisierung der verbleibenden drei Kapitel. Das dritte Kapitel gibt eine kurze Einführung in die Glättungstechnik, die gestattet vom analytischen Fall zum differenzierbaren überzugehen und die in den folgenden Kapitel zahlreiche Anwendungen findet. Das vierte Kapitel ist der Reduktion von schwach nichtparallelen Flüssen auf dem n-dimensionalen Torus auf parallele Flüsse gewidmet. Das verbleibende vierte Kapitel beschäftigt sich mit linearen quasi-periodischen Systemen und deren Reduktion auf Systeme mit konstanten Koeffizienten, sowie dem Maß der reduzierbaren Systeme.

Schließlich haben die Autoren der englischen Übersetzung des russischen Originals 14 Appendizes beigefügt, die Kommentare und Hinweise auf neuere, seit der Auflage in russisch erschienene Arbeiten enthalten.

Jeder der schon einmal versucht hat, die KAM-Technik zu präsentieren, weiß um die beträchtlichen Schwierigkeiten: Es ist nicht leicht die Details genügend genau zu beschreiben und trotzdem die Übersicht zu wahren. Dennoch, was dem Leser dieses Buches geboten wird, ist nicht sehr sorgsam zubereitete Kost und zweifellos für den Nichtspezialisten ungeeignet. Für den Fachmann dürfte die unzählige Wiederholung derselben Beweisideen an doch immer ähnlichen Gegenständen ermüdend sein. Die Lektüre wird weiter durch die unsorgfältige Übersetzung, Druck- und Orthografiefehler erschwert. Etwas schwer verständlich ist sodann, daß in einer derart auf den Spezialisten ausgerichteten Monographie nicht einmal der Versuch gemacht wird auch die Arbeiten, die in den letzten fünfzehn Jahren in westlichen Zeitschriften erschienen sind, wenigstens zum größten Teil zu zitieren.

Zürich U. Kirchgraber

Métivier, M., Reelle und Vektorwertige Quasimartingale und die Theorie der Stochastischen Integration (Lecture Notes in Mathematics, vol 607) Berlin – Heidelberg – New York: Springer Verlag 1977, x + 310 p., DM 32,–

Seit den grundlegenden Arbeiten von Doob und Itô spielen Martingale und stochastische Integrale in der Wahrscheinlichkeitstheorie und ihren Anwendungen eine zentrale Rolle. Insbesondere hat sich eine elegante und flexible, allerdings aus guten Gründen technisch sehr anspruchsvolle „allgemeine Theorie" entwickelt, mit neuartigen Anwendungen außerhalb der klassischen Diffusionstheorie, z.B. bei der Filterung und Kontrolle von Punktprozessen. Diese Entwicklung läßt sich anhand der Veröffentlichungen des ‚Séminaire de Probabilités Strasbourg' in den Springer Lecture Notes sehr gut verfolgen. Insbesondere liegen in den Bänden I und X bereits zwei „Kurse" zur stochastischen Integration vor. Jemandem, der sich nach einer Grundausbildung in Maß- und Wahrscheinlichkeitstheorie in die Sache einarbeiten will, wird dort allerdings der Einstieg nicht leicht gemacht. Ein Ziel der vorliegenden Ausarbeitung einer Vorlesung von M. Métivier (1976 in Erlangen gehalten) ist es deshalb, den Leser mit möglichst geringem Aufwand in die stochastische Integration für Quasimartingale bis zur allgemeinen Itô-Formel einzuführen. Ein zweites Anliegen ist, den Leser von vornherein mit der Erweiterung auf vektorwertige Prozesse vertraut zu machen. Die Folge ist, daß das Buch zugleich Einführungs- und Spezialtext ist.

Kapitel I ist ein in sich geschlossener Einführungskurs in die stochastische Integration bei stetigen Pfaden, mit einem ersten Exkurs über Prozesse mit Werten in einem Hilbertraum. Kapitel II und III entwickeln die allgemeine Prozeßtheorie bis zur Doob-Meyer-Zerlegung, Kapitel IV behandelt stochastische Integrale für allgemeine Quasimartingale bis zum Transformationssatz. Im letzten Kapitel werden die Ergebnisse auf Hilbertwertige Prozesse übertragen; die Anwendung auf stochastische Evolutionsgleichungen, die als Motiv dahinter steht, wird kurz erläutert. Methodisch wird durchweg der Zusammenhang zwischen Quasimartingalen und Massen auf der σ-Algebra der previsiblen Mengen betont (wegen der Einschränkung auf die „üblichen Bedingungen" allerdings nicht voll ausgeschöpft). Leider fehlt ein Hinweis auf die folgende interessante Version dieses Zusammenhangs, die auf Pellaumail und Métivier selbst zurückgeht. Man kann nämlich einem Quasimartingal X ein vektorwertiges Maß M^X so zuordnen, daß sich stochastische Integrale $\int HdX$ als „gewöhnliche" Integrale $\int HdM^X$ auffassen lassen (vgl. z.B. A. U. Kussmaul: Stochastic Integration and generalized Martingales, Pitman 1977). Insgesamt aber liegt eine sehr geschickte Einführung in den modernen Stand der stochastischen Integrationstheorie vor, die vor allem dann zu empfehlen ist, wenn man an vektorwertigen Prozessen interessiert ist.

Zürich H. Föllmer

Lamperti, J., Stochastic Processes. A Survey of the Mathematical Theory (Applied Mathematical Sciences, vol 23), Berlin – Heidelberg – New York: Springer Verlag 1977, xvii + 266 p., gebd. DM 22,50

Der Untertitel könnte mißverstanden werden: es handelt sich nicht etwa um einen Überblick über neuere Entwicklungen, sondern um ein systematisches Textbuch zur Einführung in die Theorie der stochastischen Prozesse, wobei stationäre Prozesse und Markoffsche Prozesse im Vordergrund stehen. Angesprochen sind Studenten und Studentinnen (nach meiner Zählung im Verhältnis 1 : 2) mit guten Kenntnissen in Maß- und Wahrscheinlichkeitstheorie und in Funktionalanalysis.

Für stationäre Prozesse wird zunächst die Theorie 2. Ordnung entwickelt: Spektraldarstellung in diskreter und stetiger Zeit, Wold-Zerlegung und lineare Prognose. Es folgt eine kurze Einführung in die Ergodentheorie mit Wiederkehrsatz von Poincaré und Birkhoff'schen Ergodensatz. Die Behandlung der Markoffschen Prozesse konzentriert sich zunächst auf die Zusammenhänge zwischen Halbgruppe und infinitesimalem Erzeuger. Erst dann wird der Leser mit einigen Instrumenten der modernen Theorie vertraut gemacht: Stopzeiten, starke Markoff-Eigenschaft, Dynkin-Formel. Damit wird die Lösung des Dirichlet-Problems durch die Brownsche Bewegung hergeleitet und der wichtige Zusammenhang zwischen Markoffschen Prozessen und Potentialtheorie illustriert. Die Konstruktion von Markoffschen Prozessen mit vernünftigen Pfaden wird auf Martingalsätze reduziert. Das letzte Kapitel gibt die dazu nötige kurze Einführung in die Martingaltheorie.

Bemerkenswert ist die methodische Sorgfalt, die auf Erläuterung und Motivierung von Begriffen und Beweisen verwandt wird. Lamperti schreibt in der Einleitung: „I did not discuss specific applications of the theory; I d i d strive for a spirit friendly to application by coming to grips as fast as I could with the major problems and techniques and by avoiding too high levels of abstraction and completeness. As the same time, I tried to make the proofs both rigorous and motivated and to show how certain results have e v o l v e d rather than just presenting them in polished final form". In diesem Sinne ist z.B. die Einführung in die Markoffsche Prozesse sehr gut gelungen. Dagegen hebt sich z.B. das Kapitel über Martingale kaum von der Standardversion ab. Zur Motivierung (?) wird hier, abgesehen von einem Halbsatz über Spielsysteme, nur die Konstruktion Markoffscher Prozesse angeboten, obwohl man z.B. mit wenig Aufwand die für den Anfänger sicher attraktivere Querverbindung zwischen Konvergenzsatz und dem Randverhalten harmonischer Funktionen hätte ziehen können. Angesichts der Themenwahl im ersten

Ingenieur angesprochen ist, so kann das Buch gleichwohl – wie der Referent aus eigener Erfahrung weiß – sehr gut mathematischen Seminaren zu Grunde gelegt werden.

Der erste von sechs Teilen gibt auf rund 100 Seiten eine Einführung in die Theorie des Hilbertraumes und verwandter Fragen.

Der zweite Teil enthält auf etwa 75 Seiten die wesentlichen Grundideen der Variationsmethoden, insbesondere die Methode der Orthonormal-Reihen, das Ritzsche Verfahren, das Galerkinsche Verfahren, die Methode der kleinsten Quadrate ebenso wie ihre Kombination mit dem Ritzschen Verfahren in Gestalt der Courantschen Methode und die Methode des steilsten Abstieges.

Im dritten Teil folgen Anwendungen auf Randwertprobleme bei gewöhnlichen und partiellen Differentialgleichungen, insbesondere zur Plattengleichung und zur Stabgleichung. Gewöhnlich handelt es sich um die Minimierung eines positiv definiten quadratischen Funktionals. Zur Untersuchung der Definitheit werden die Ungleichungen von Friedrichs bzw. Poincaré benutzt.

Der vierte Teil beginnt mit Abschnitten über das Lebesgueintegral, über Sobolevräume, den Begriff der schwachen Lösung elliptischer Gleichungen und der Formulierung von elliptischen Randwertproblemen. Zur Untersuchung der Existenz und Eindeutigkeit schwacher Lösungen zieht Rektorys wesentlich das Lax-Milgram-Theorem heran, eine Verallgemeinerung des Rieszschen-Theorems.

Im fünften Teil werden die Ideen auf Eigenwertprobleme mit vollstetigen Operatoren übertragen.

Der sechste Teil endlich bezieht sich auf einige weitere spezielle Methoden wie Randmethoden, das Trefftzsche Verfahren sowie die Methode der orthogonalen Projektionen.

Die Methode der finiten Elemente wird auf 8 Seiten nur kurz angesprochen. Nach der Schilderung der grundlegenden Idee wird auf die umfangreiche Spezialliteratur verwiesen. Die vom Verfasser diskutierten Methoden sind vornehmlich für lineare Probleme geeignet.

Die Seiten 556–561 enthalten eine tabellarische Zusammenstellung der von Rektorys behandelten Problemtypen. Es handelt sich um lineare, gewöhnliche und partielle Differentialgleichungen in selbstadjungierter Form.

Die Durchrechnung zahlreicher Beispiele bis zum numerischen Endergebnis mit Fehlerabschätzungen unter Verwendung geeigneter Normen erhöhen den Wert des Buches.

So müssen Bücher geschrieben sein, die die Brücke schlagen sollen zwischen mathematisch interessierten Ingenieuren und anwendungsorientierten Mathematikern.

Hannover G. Bertram

Michlin, S. G. Approximation auf dem kubischen Gitter (Mathematische Lehrbücher und Monographien Band 40), Berlin: Akademie Verlag 1976, 195 S. In deutscher Sprache herausgegeben von Prof. Dr. S. Prössdorf. Leinen, DM 36,–

Der durch seine Standardwerke über Variationsmethoden, Integralgleichungen und mathematische Physik bekannte Autor gibt in der vorliegenden Monographie einen sehr gründlichen theoretischen Überblick über eine gewisse Klasse von Methoden, die zur Methode der finiten Elemente zählen. Die Darstellung ist in der für den Autor bekannten sehr klaren und übersichtlichen Form gegeben und setzt vom Leser gründliche Mitarbeit und Kenntnis der Elemente der Funktionalanalysis einschließlich der Sobolev'schen Einbettungssätze und Grundlagen der Variations- und Differenzenmethoden voraus. Das Buch ist wohl in erster Linie für den an der Theorie interessierten Numeriker gedacht und weniger für denjenigen, der die Methode der finiten Elemente auf ein praktisch vorkommendes Problem anzuwenden hat, obwohl auch praktische Gesichtspunkte genannt werden.

Die Methode wird zunächst an einem einfachen charakteristischen Beispiel, der ersten Randwertaufgabe der ebenen Potentialtheorie auf beschränktem Gebiete mittels Triangulierung, vorgeführt, indem in einem rechtwinkligen x-y-Achsensystem die Quadrate eines Quadratgitters durch Geraden $y = x + \text{const}$ halbiert werden. Je 6 an einem Gitterpunkt P beteiligte Dreiecke bilden dann ein 6-Eck S, und als „Ausgangsfunktion“ wird eine „Pyramidenfunktion“ $\omega(x,y)$ eingeführt, die in jedem der 6 Dreiecke linear ist, in P den Wert 1 und auf dem Rande des Sechseckes den Wert 0 annimmt. Durch Transformationen (Verschiebungen) erhält man aus ω die Koordinatenfunktionen ϕ als Basis eines endlichdimensionalen für die „Variationsdifferenzenmethode“ zugrundegelegten Teilraumes, und es wird die Vollständigkeit des Systems der Koordinatenfunktionen und die Approximationsordnung für die Annäherung von Funktionen gewisser Klassen in Sobolev'schen Räumen untersucht. Es werden Ausgangssysteme für verschiedene Dimensionen m und verschiedene Genauigkeitsstufen s betrachtet, für $m = 1$ gibt eine Tabelle Ausgangsfunktionen bis zu $s = 6$ an, aber bereits der Fall $m = s = 2$ ist mühsam. Höhere Approximationsordnung ist bei „Ausgangsfunktionen mit breitem Träger“ erreichbar. Genauer untersucht werden dann eindimensionale und radiale Gitter, und Eigenwertaufgaben, auch bei variablen Koeffizienten und mit natürlichen Randbedingungen. Ein Kapitel befaßt sich mit der Aufstellung von Variationsdifferenzengleichungen, insbesondere mit Grenzschicht, und ein weiteres Kapitel mit Fehleranalyse und Stabilität. Das Buch bringt auch ein numerisches Beispiel einer Randwertaufgabe mit einer gewöhnlichen linearen Differentialgleichung zweiter Ordnung mit bekannter Lösung.

Die Approximationen führen auch zu Quadratur- bzw. Kubatur-formeln, wie anhand der Euler-MacLaurinschen Formel und ihrem Analogon für den Kubus gezeigt wird. Im letzten Kapitel werden Variationsdifferenzen-Approximationen des Kernes einer linearen Integralgleichung zu deren genäherter Lösung benutzt.

So hat der Autor eine verdienstvolle tiefgehende abgerundete Theorie gegeben, wobei fahren, die in den letzten Jahren an Bedeutung gewonnen haben, findet man nicht, aber dies würde sich mit dem Charakter des Buches auch nicht vertragen.

Behandelt werden im ersten Band lineare Gleichungssysteme mit einem besonderen Kapitel für solche mit positiv definiter Koeffizientenmatrix, beinhaltend auch einen Abschnitt über lineare Ungleichungen, Verfahren für nichtlineare Gleichungen in einer Veränderlichen, Ausgleichsprobleme und Interpolation mit je einem Abschnitt über genäherte Quadratur sowie Glättungsprozeduren und ein Kapitel über Tschebyscheff-Approximation einschließlich ihrer numerischen Berechnung. Die ersten beiden Kapitel des zweiten Bandes befassen sich mit gewöhnlichen Differentialgleichungen. Der Verf. stellt die Grundtypen von Verfahren für Anfangswertaufgaben dar und geht auf die wichtigen Stabilitätsfragen genauer ein. Für Randwertaufgaben werden Anfangswertmethoden, Differenzenverfahren und Variationsmethoden dargestellt. In zwei weiteren Kapiteln finden sich Grundtatsachen über Differenzenverfahren bei den drei Grundtypen partieller Differentialgleichungen. Es folgt ein Kapitel über die Lösung algebraischer Eigenwertaufgaben. In einem Anhang von ca. 40 Seiten Umfang ist eine Axiomatik des numerischen Rechnens und ihre Anwendung auf den qd-Algorithmus aufgenommen, worin letzte Forschungsergebnisse des Verf. enthalten sind.

Dieses anregende Buch ist besonders auch Studierenden zur Lektüre zu empfehlen.

Berlin R. D. Grigorieff

Gander, W., Molinario, L., Svešova, H. (Herausgeber), Numerische Prozeduren aus Nachlaß und Lehre von Prof. Heinz Rutishauser (Internationale Schriftenreihe zur Numerischen Mathematik 33), Basel – Stuttgart: Birkhäuser Verlag 1977, 127 S., Kunstleder, DM 48,–

Es war J. H. Wilkinson F. R. S., der im Vorwort zu seinem Standardwerk über das algebraische Eigenwertproblem von dem Schweizer Numeriker Heinz Rutishauser als dem genialen Algorithmenfinder und einer Quelle der Inspiration sprach. Das erste dieser Attribute hat sich der so Angesprochene wohl mit der Schaffung des QD-Algorithmus und seiner Verallgemeinerung zum LR-Algorithmus verdient, der dann durch weitere Verfeinerungen und Abwandlungen von J. G. F. Francis zum praktisch konkurrenzlosen Matrix-Diagonalisierungsverfahren entwickelt worden ist.

Auch das andere Attribut war wohlverdient, denn seine Veröffentlichungen waren in ihrem schlichten und bescheidenen Stil didaktische Meisterwerke, in denen ihr Verfasser nicht nur die Theorie sondern auch die umfassendste eigene numerische Erfahrung vermittelte. Er war also nicht nur der Analytiker, der es mit der Angabe eines effizienten, neuen Algorithmus bewenden läßt, vielmehr führte er auch die Verpflichtung des Numerikers zur Schaffung von mathematischer „software" höchster Qualität. Aus diesem Grunde war er nicht nur an der Definition der Programmiersprache ALGOL 60 beteiligt, sondern auch führend aktiv in zwei frühen Gemeinschaftsprojekten, nämlich des Programmsammeldienstes der ALCOR-Gruppe und der sogenannten Handbuchserie „Lineare Algebra" in der Zeitschrift Numerische Mathematik, dessen Herausgeberstab er angehörte. Sein letzter Beitrag dort, die simultane Vektoriteration zur Berechnung von Eigenwerten und -vektoren dünn besiedelter symmetrischer Matrizen zeigt eindrucksvoll die Spanne seines Talentes von der Untersuchung der theoretischen Voraussetzung eines Algorithmus bis zu seiner Realisierung in Form eines ausgeklügelten Rechenprogrammes.

Rutishausers letzte Neuschaffungen von Algorithmen sind die zweifache Relaxation zur nach Original-Algorithmen durch drei weitere Rechenprogramme zu Standard-Algorithmen, nämlich der Interpolation mit natürlichen, kubischen Splinefunktionen an äquidistanten Knoten, der Gauß-Elimination mit vollständiger Pivotsuche und impliziter Zeilen-Äquilibrierung, und schließlich des Orthogonalisierungsverfahrens nach Gram-Schmidt. Jedem dieser fünf Algorithmen ist ein Kapitel im vorliegenden Band gewidmet und diese Kapitel sind in der Manier der oben erwähnten Handbuchserie wiederum einheitlich unterteilt in (1) Einleitung, (2) theoretische Grundlagen, (3) Prozeduraufruf und Parameterliste, (4) Protokoll des Rechenprogrammes in Form einer ALGOL 60 Prozedur, (5) Bemerkungen über Organisation und Notation, (6) Numerische Eigenschaften, (7) Anwendungen und Beispiele.

Es gibt bei diesen sorgfältig ausgearbeiteten Rechenprogrammen nur wenig Punkte zur Kritik. Man kann etwa darauf hinweisen, daß natürliche Randbedingungen bei der kubischen Spline-Interpolation zu einem Restglied $O(h^2)$ führen, während andere Randbedingungen mit minimaler Änderung im Programm zu $O(h^4)$ führen und deshalb in der Praxis stets vorgezogen werden. Weiter wird es Stimmen geben, die bei der Gauß-Elimination totale Pivotsuche an der einseitig skalierten Matrix $D_1 A$ für widersprüchlich halten und entweder Spaltenpivotsuche an $D_1 A$ oder totale Pivotsuche an $D_1 A D_2$ empfehlen. Zweckmäßig wäre vielleicht auch bei der Ausgleichsrechnung ein klarerer Hinweis darauf, daß das Programm mittels zweifacher Relaxation zwar eine maschinengenaue Approximation der Pseudoinversen A^+ von A liefert, jedoch normalerweise nicht die Lösung A^+b des verallgemeinerten Ausgleichsproblems

$$\| Ax - b \|_2 = \text{min!} \quad \text{hilfsweise} \quad \| x \|_2 = \text{min!}$$

Tatsächlich wird durch die interne Skalierung stattdessen die hilfsweise Nebenbedingung abgeändert zu $x^T \operatorname{diag}(A^T A) x = \text{min!}$ Es ist also nicht sinnvoll, wenn die so berechnete Lösung mit der anderswo berechneten Lösung A^+b verglichen wird. Die lakonische Feststellung, daß beide Lösungen in keiner Dezimale übereinstimmen (S. 74, Z. 16) ist nur für den Eingeweihten keine Überraschung.

Das Buch ist ansprechend gestaltet und auch die ALGOL-Protokolle der Rechenprogramme sind unschwer zu lesen, obwohl diese im Fotosatz von dem Original-Ausdruck des Computers unmittelbar reproduziert worden sind. Diese Methode dient der Sicherheit, weil sie das Einschleichen von Druckfehlern in diesen sehr empfindlichen Teil der Information verhindert. Demgegenüber sind die übrigen Teile des Buches einschließlich der tabellierten Testergebnisse gesetzt. Dabei finden sich im Text keine störenden Druckfehler, doch scheinen sie bei den Testergebnissen etwas häufiger zu sein (in dem zur Kontrolle überprüften Beispiel, den Elementen der 5 x 8 doppeltrelaxierten Pseudoinversen auf S. 75 oben fanden sich insgesamt vier verdruckte und eine fehlende Ziffer).

Besonders zu empfehlen ist der vorliegende Band für Numeriker, die mit der Produktion von mathematischer software befaßt sind. Darüber hinaus kann er mit Vorteil im Unterricht verwendet werden, etwa in einem mathematischen Praktikum; die fünf Kapitel bieten dabei Material von steigendem Schwierigkeitsgrad.

München C. Reinsch

Eilenberg, S., Automata, Languages, and Machines, Volume A (Pure and Applied Mathematics, vol. 59-A), New York – London: Academic-Press 1974, XVI + 451 pp., cloth, $ 24.00

Das Buch ist der erste von 4 Bänden eines großangelegten Versuchs einer einheitlichen algebraischen Darstellung eines klassischen Teils der theoretischen Informatik, der Theorie der Automaten und Maschinen sowie der durch sie definierten Mengen (üblicherweise Sprachen genannt) bzw. Relationen oder Funktionen. Vom Leser werden jedoch keinerlei Informatikkenntnisse vorausgesetzt – zumindest dieser erste (und auch der 1976 erschienene zweite) Band bedarf keiner aus der Informatik kommenden Motivation, sondern kann als reines Mathematik-buch gelesen werden. Obwohl fast alle mathematischen Begriffe im Laufe des Textes eingeführt und erklärt werden, ist einiges Vertrautsein mit der Algebra sowie eine Grundkenntnis der Analysis für das Verständnis des Werkes notwendig. Für einen Informatiker, selbst für viele theoretische Informatiker, ist das Buch sicher schwer zu lesen, für einen Algebraiker sollte es jedoch angenehm lesbar und nicht zu schwierig sein.

Fülle der von der theoretischen Informatik gehaltenen Resultate über Automatensprachen und Maschinen bringen:

Er schränkt sich im wesentlichen auf die grundlegenden klassischen Arbeiten zu den verschiedenen Teilgebieten und einige der daraus hervorgegangenen Entwicklungen ein. Dabei legt er Wert auf eine einheitliche systematische Behandlung der Grundprobleme und eine enge Beziehung zur reinen Mathematik. Die Darstellung und viele Beweise bekannter Resultate sind deshalb neu; viele neue bisher unpublizierte Resultate kommen hinzu. Entstehung und Inhalt des Werkes sind sehr stark beeinflußt durch M. P. Schützenberger und seine Schule – nicht nur die Stoffauswahl und die Darstellungsweise sind von Schützenberger mitgeprägt, sondern viele neue Ergebnisse stammen von Schützenberger oder sind von Eilenberg und Schützenberger gemeinsam erzielt worden.

Praktisch alle Sätze und Folgerungen sind detailliert und klar bewiesen – nur bei ganz wenigen Resultaten wird auf die Originalliteratur verwiesen. Terminologie und Bezeichnungen sind, obwohl oft anders als in der theoretischen Informatik üblich, leicht zu erfassen und zu handhaben. Viele Beispiele und Übungsaufgaben erleichtern das Verständnis. Leider sind die Literaturhinweise recht spärlich; auf die grundlegenden Arbeiten zu den verschiedenen Themenkreisen wird jedoch hingewiesen. Dagegen fehlen fast gänzlich Hinweise auf weiterführende Arbeiten, Anwendungen in anderen Bereichen oder benachbarte Gebiete.

Im Unterschied zu vielen anderen Versuchen, eine einheitliche mathematische Theorie der Automatensprachen und Maschinen zu entwickeln, geht Eilenberg nicht von einem möglichst abstrakten und allgemeinen Modell aus, sondern entwickelt die Theorie von den einfachen Automaten- und Maschinentypen her. So werden in den ersten beiden Bänden im wesentlichen endliche akzeptierende Automaten und endliche sequentielle Maschinen behandelt. Erst in Kapitel 10 des ersten Bandes wird der allgemeine Maschinenbegriff eingeführt – es handelt sich um einen neuen Begriff, der es gestattet (unter algebraischen Gesichtspunkten), viele verschiedene Automaten- und Maschinentypen der theoretischen Informatik durch einfache Spezialisierung zu erhalten.

Untersuchungen über Turingmaschinen bilden den zentralen Teil des Buches – angefangen mit Beispielen, mit Mehrband-, normalisierten und universellen Turingmaschinen über das Halte- und Äquivalenzproblem bis zu den Zusammenhängen mit Rekursivität und rekursiver Aufzählbarkeit. Im dritten Kapitel betrachtet der Autor Markov-Algorithmen und μ-(partiell-) rekursive Funktionen. Vor allem bei diesen sieht man die Vorteile der Verwendung von Zeichenreihen: Die erweiterte Initialisierung, die Rekursion mit variablen Schritten oder auch die speziellen Beispiele kommen damit direkt aus dem „Alltag" des Informatikstudenten. Sehr schön ist auch, daß die Umsetzung einer primitiv rekursiven Funktionsdefinition in einen Algorithmus ohne rekursive Aufrufe angegeben wird. Im weiteren werden kurz (aber für eine Einführung ausreichend) nichtdeterministische Algorithmen an Hand von Semi-Thue-Systemen und deren Zusammenhang mit Grammatiken untersucht; außerdem wird die Unlösbarkeit des Post' schen Korrespondenzproblems bewiesen. Dessen Bedeutung wird aus dem Text heraus allerdings nicht klar.

Damit sind wir auch bei den Schwächen des Buches: So kann die „Menge aller Mengen von unendlichen Zeichenreihen" zu Mißverständnissen führen. Die historischen Bemerkungen sind leider zu kurz und manchmal unvollständig; z. B. wird die Church-Turing' sche These als [illegible]

wird zwar Church erwähnt, nicht aber Gödel, Herbrand oder Kleene. Außerdem vermißt man die für die Informatik bedeutenden Begriffe wie allgemein-rekursive und λ-rekursive Funktionen.

Alles in allem aber ist das Buch präzise und übersichtlich geschrieben und bietet gerade konkreten Elementen der Programmierung gezeigt, der Programmiersprache LISP 1.5 und den Entscheidungstabellen.

Das vorliegende Buch verbindet in ganz ausgezeichneter Weise theoretische Erkenntnisse und praktische Anwendung. Ebenso bildet es insofern eine rühmliche Ausnahme, als es einmal neuere Ergebnisse vermittelt, aber dennoch als Lehrbuch oder Überblick hervorragend geeignet ist. Lediglich zum Auffinden weiterer Literatur wird der Leser auf ein Buch von Barron: Rekursive Techniken in der Programmierung (Hanser, München) verwiesen.

So kann das Buch sowohl dem Theoretiker empfohlen werden, der darin Anwendungen der Theorie sieht, als auch dem Anwender, der die theoretischen Grundlagen der von ihm benutzten Programmierelemente in einleuchtender Weise vermittelt bekommt.

Bochum M. Rosendahl

Tukey, J. W., Exploratory Data Analysis. (Addison-Wesley Series in Behavioral Science: Quantitative Methods.) Reading (Mass.): Addison-Wesley 1977, XVI + 688 S., Gln. £ 14.40

Dies Buch des bekannten Numerikers behandelt eine Kunst, der weite Verbreitung zu wünschen wäre: den praktischen Umgang mit Daten. Praktische wie mathematische Statistik sind in gewisser Weise nur weitgehend theoretisch durchdrungene Ausprägungen dieser Kunst, die hier in ihren elementarsten Anfängen gelehrt wird. Wie schreibt man einen gegebenen Datenhaufen hin, um die in ihm enthaltene Information möglichst gut in die Augen springen zu lassen? Wie verändert man Daten, um Unwesentliches abzutrennen, und wie beurteilt man die Ergebnisse solcher Verarbeitung im Vergleich zum Ausgangsmaterial? Wie stellt man graphische Darstellungen her und wie interpretiert man sie? Dies ist eine kleine Auswahl der vom Autor mittels einer enormen Fülle von Beispielen und Aufgaben behandelten Probleme. Man lernt dabei, wie man Gesetzmäßigkeiten aufspürt; der Autor betont, daß es ihm im Gegensatz zu (beispielsweise) gängigen Methoden der Statistik nicht darum geht, zu lehren, wie man vermutete oder theoretisch abgeleitete Gesetzmäßigkeiten prüft und bestätigt.

Man kann das Buch also als Einführung in die Kunst der Induktion anhand von Daten betrachten. Der Text ist aus Einführungskursen hervorgegangen. Teile haben vorher in hektographierter Form zirkuliert, das Erscheinen des Buches ist ein lang erwartetes Ereignis. Es tut sicher jedem Mathematiker gut, Einblick in die hier eröffnete Elementarwelt zu nehmen. Vor allem aber möchte man deutschen Mathematiklehrern ein intensives Studium dieses Werkes nahelegen. Sie würden damit eine dringend erforderliche Ergänzung ihrer Ausbildung erfahren und eine Fülle von Material für praktische Übungen mit Schülern gewinnen. Es scheint mit dringlich, daß einer unserer Didaktik-Verlage eine kurzgefaßte Variante von Tukey's Werk in eine seiner Ergänzungsreihen aufnimmt.

Erlangen K. Jacobs

Lüthi, H. J., Komplementaritäts- und Fixpunktalgorithmen in der mathematischen Programmierung, Spieltheorie und Ökonomie (Lecture Notes in Economics, vol 129), Berlin – Heidelberg – New York: Springer Verlag 1976, 21 Abb., vii + 145 p., DM 21.50

Dieses Buch stellt in sehr anschaulicher und gut lesbarer Weise die Entwicklung eines „kombinatorischen Prinzips" oder auch „Algorithmus" dar. Der Algorithmus wurde von Lemke und Howson 1964 in einer Arbeit beschrieben, die sich mit der Bestimmung von Gleichgewichtspunkten in einem 2-Personen-Nichtnullsummen- („Bimatrix"-) Spiel befaßt. Die Existenz solcher Gleichgewichtspunkte wurde bis dahin mit Hilfe des Brouwerschen Fixpunktsatzes bewiesen. Für ein bilineares Problem mußte die Verwendung eines Fixpunktsatzes von vornherein als ein zu schweres Geschütz gelten. Lemke und Howson kamen mit einer außerst überraschenden und vielseitigen Lösung heraus. Der von ihnen entwickelte Algorithmus ist konstruktiv. Er endet nach endlich vielen Schritten. Die Beweismethode zeigt zudem, daß die Anzahl der Gleichgewichtspunkte ungerade sein muß – gewisse Nichtdegenerationsbedingungen vorausgesetzt. Die Tatsache, daß der Algorithmus i. a. nicht alle Gleichgewichtspunkte liefert, kann als kleiner Schönheitsfehler betrachtet werden.

In der Folgezeit erkannte man, daß der LH-Algorithmus verschiedene Zusammenhänge schlagartig aufgehellt hatte: Einmal waren die benutzten Prinzipien keineswegs auf den engen Bereich eines Bimatrixspiels eingeschränkt; zahlreiche Probleme der Optimierung, des Operations Research, der mathematischen Wirtschaftstheorie und der Spieltheorie sind von ganz ähnlichem Charakter und erlauben die Anwendung eines passend modifizierten Algorithmus. Andererseits stellte sich heraus, daß der LH-Algorithmus eine enge Verwandschaft zum bekannten Spernerschen Lemma aufweist. Von dieser Beobachtung aus lag es nahe, die Abkommen des LH-Algorithmus zum Aufsuchen oder zumindest Ankonvergieren von Fixpunkten zu benutzen oder dementsprechend abzuändern.

Das vorliegende Buch ist in zwei Kapitel unterteilt. Im ersten wird das Komplementaritätsproblem untersucht. Darunter kann man ganz allgemein den Versuch verstehen, die Klasse der Probleme zu definieren, für die ein LH-Algorithmus angegeben werden kann. Der zweite Teil beschäftigt sich mit Fixpunktalgorithmen.

Im einzelnen nimmt die Darstellung etwa die folgende Entwicklung.

Das „Komplementaritätsproblem" ist rasch beschrieben. Es ist gegeben durch eine Abbildung f des $\mathbf{R}^n$ in sich. Man schreibt $[f \mid \mathbf{R}^n_+]$ und versteht darunter die Aufgabe, ein $z \in \mathbf{R}^n$ zu finden, welches

1) $f(z) \geqq 0, z \geqq 0$ (komponentenweise)

2) [illegible]

thode der Triangulation im allgemeinen nur eine Approximation zu erblicken. Der Begriff einer „approximativen Lösung" ist nicht unproblematisch.

Nachdem ein Algorithmus „zur Verfeinerung" der Triangulation angegeben wird, führt die Beschäftigung mit dem Fixpunktproblem zwanglos zum zweiten Teil, „Fixpunktalgorithmen", über. Erneut wird ein Markierungsalgorithmus angegeben, der Zusammenhang mit dem Spernerschen Lemma herausgearbeitet und der Scarfsche Fixpunktalgorithmus dargestellt. Anwendungen auf den Brouwerschen Fixpunktsatz und auf den Fixpunktsatz von Kakutani werden diskutiert.

Die oben erwähnte Problematik läßt sich bei einem Fixpunktsatz besonders leicht verstehen. Ein „ϵ-approximativer Fixpunkt" einer Abbildung ist ein Argument, das etwa der Norm nach von seinem Funktionswert nicht mehr als ϵ abweicht. Die diskutierten Fixpunktalgorithmen sind im allgemeinen in der Lage, nach endlich vielen Schritten einen „ϵ-approximativen Fixpunkt" zu erzeugen. Aus Kompaktheitsgründen ist klar, daß damit ein Fixpunkt durch Grenzübergang erhalten werden kann; ebenso einleuchtend ist es aber, daß ein ϵ-approximativer Fixpunkt im allgemeinen nicht unbedingt nahe bei einem Fixpunkt liegen muß.

Das Buch ist sehr gut lesbar geschrieben. Selbst mit geringen Vorkenntnissen wird man sehr rasch und mühelos in ein interessantes Gebiet eingeführt. Zudem wird ein Überblick über verschiedene grundsätzliche Probleme aus den Anwendungsbereichen geliefert; ein Überblick, der gleichzeitig ein in vielen Problemen grundsätzliches Prinzip („Komplementarität") sehr deutlich herausarbeitet und verschiedene verstreute Fragestellungen unter diesem Prinzip subsummiert.

Bielefeld — J. Rosenmüller

Kelly, J. S., Arrow Impossibility Theorems (Economic Theory and Mathematical Economics Series), New York: Academic Press 1978, xi + 194 p., Cloth, \$ 19.75

Wenn $n \geqslant 2$ Personen vor der Aufgabe stehen, aus dem n-Vektor ihrer individuellen Präferenzordnungen über $m \geqslant 2$ Alternativen eine einzige, gemeinsame Präferenzordnung zu bilden, so weiß man im Falle $m = 2$, was man zu tun hat: Mehrheitswahl mit Stichentscheid. Bereits für $m = 3$ ergibt sich das klassische „Wahl-Paradoxon" als Hinweis darauf, daß es hier mit Wahlverfahren nicht abgeht. Eine unschöne Lösung besteht darin, eine Person zum Diktator zu ernennen und einfach deren Präferenzordnung zu nehmen. 1950 gab Kenneth Arrow (Nobelpreis 1972 für Ökonomie) dem Problem die heute gängige Form des nach ihm benannten Paradoxons oder Unmöglichkeitstheorems. Arrow formulierte 5 Forderungen, darunter $n \geqslant 2$, $m \geqslant 3$, die man gerne an eine Entscheidungsregel stellen möchte und bewies (ein Beispiel von J. Blau erzwang eine kleine Korrektur in der Formulierung der 5 Forderungen), daß es keine allen 5 Forderungen genügende Entscheidungsregel gibt. Da eine der 5 Forderungen das Nichtvorhandensein eines Diktators zum Inhalt hat, läßt sich der Satz auch als „Diktatortheorem" (Existenz eines Diktators) formulieren. Dies Ergebnis hat begreiflicherweise Ökonomen und Mathematiker sehr beschäftigt und bildet heute das Forschungsthema einer internationalen Spezialistengruppe. Unterthema 1: Wie weit lassen sich die Arrow'schen Bedingungen abändern, ohne das Ergebnis, die Existenz eines Diktators, außer Kraft zu setzen? Unterthema 2: Gibt es „vernünftige" Entscheidungsregeln ohne Diktator? – Das vorliegende Buch ist in erster Linie ein systematischer Bericht, mit kompletten Beweisen, über den Stand der Forschung zum Unterthema 1.

Kap. 1 bietet den allgemeinen Rahmen der Theorie. Kap. 2 behandelt das Thema der „ruling families". Kap. 3 untersucht die Möglichkeit, das Entscheidungsverfahren, das in diesem Buch viel allgemeiner konzipiert wird, als man nach meinen einleitenden Bemerkungen vermuten möchte, auf Rangordnungen zu bringen. Kap. 4 bringt dann die Hauptsätze

Kap. 6 beschäftigt sich mit der Ausschließung von Bluff-Möglichkeiten und bringt u.a. das Diktator-Theorem von Gibbard-Satterthwaite. Kap. 7 und 8 behandeln die Frage, ob Einschränkungen der Meinungsvielfalt eine Diktatur zu vermeiden gestatten; praktisch alle dargestellten Resultate sind negativ. Kap. 9 macht die Hoffnung zuschanden, durch Zugestehen von Individualrechten um die Diktatur herumzukommen. Kap. 10 ist ungelösten Problemen gewidmet. Ein mathematisch-terminologischer Anhang, eine Literaturliste mit über 350 Nummern und zwei Register beschließen das Buch. – Es handelt sich um eine knappe, umfassende Darstellung der bis ca. 1977 verfügbaren Resultate zum genannten Problemkreis. Als Leser kommen praktisch nur Spezialisten in Frage, obwohl der Autor das Buch als Ganzes und die einzelnen Kapitel mit kurzen motivierenden Einleitungen teils historischen, teils systematischen Charakters versehen hat. Wer schnell durch die Problematik hindurchblicken und ein neues Nicht-Diktator-Theorem kennenlernen will, lese besser B. Peleg, Consistent voting systems, Econometrica **46** (1978) 153–161.

Erlangen K. Jacobs

Gabasov, R., Kirillova, F., The Qualitative Theory of Optimal Processes, translated by J. L. Casti (Control and Systems Theory Series, vol. 3) Basel – New York: Marcel Dekker 1976, 688 p., Cloth, SFrs 176,–.

Mit diesem Werk demonstrieren die beiden international bekannten sowjetischen Autoren vor allem Tragweite und Anwendungsmöglichkeiten der von ihnen entwickelten „Methode der Zuwächse". Diese Methode erschließt auf relativ elementarem analytischen Weg einen Zugang zu notwendigen (und in geringerem Umfang auch zu hinreichenden) Bedingungen für optimale Lösungen von Kontrollproblemen. Der Grundgedanke wird auf wenigen Seiten in Kap. VI, § 1, beschrieben. Es handelt sich, grob gesprochen, um einen Kalkül, der die Variation des Zielfunktionals unter Benutzung der Hamiltonfunktion mit der Variation der Kontrollfunktion unmittelbar in Beziehung bringt. Da differenziertere Hilfsmittel aus Variationsrechnung und allgemeiner Optimierungstheorie nicht benötigt werden, kommt diesem Kalkül auch unter didaktischen Gesichtspunkten eine gewisse Bedeutung zu. Allerdings ist er nur anwendbar auf Probleme mit festem Anfangspunkt, bei denen der Endpunkt keinerlei Beschränkung unterliegt. Für solche Probleme gibt es nun durchaus Beispiele aus den verschiedensten Anwendungsbereichen; daß man kein einziges auf den rund 600 Seiten des vorliegenden Werkes findet, ist schade. Es wäre nämlich gerade für den nicht einschlägig vorgebildeten Leser wichtig, an einem Beispiel zu sehen, daß z.B. die Einbeziehung von Systemen mit zustands- und kontrollabhängidie mit der Existenz von optimalen Lösungen zusammenhängen, dar. Daß hierbei auch „chattering regimes“ zur Sprache kommen, ist sicher verdienstvoll, nur hätte der entscheidende Punkt – nämlich die Frage nach der Nicht-Singularität der Lösung – nicht unerwähnt bleiben sollen. Ohne eine zusätzliche Voraussetzung in dieser Richtung dürfte sich wohl der Satz 3 auf p. 187 nicht beweisen lassen.

Kap. VI ist notwendigen Bedingungen gewidmet und enthält die wesentlichen Resultate des gesamten Werkes. Zunächst (§ 1) wird das Pontryaginsche Maximumprinzip mit der Methode der Zuwächse bewiesen und auf gewisse Typen von Funktionaldifferentialgleichungen und impliziten Differentialgleichungen ausgedehnt. Dies alles, wie schon bemerkt, für Probleme mit festem Anfangs- und freiem Endpunkt. Ein eigener Abschnitt (§ 5) ist singulären Extremalen gewidmet, ein Gebiet, auf dem sich die Verfasser durch eigene Beiträge besonders hervorgetan haben. Angemerkt sei noch, daß die grundlegende Bedingung 1. Ordnung – Satz 13 auf p. 242 – mit Hilfe einer Matrix-Differentialgleichung sehr viel durchsichtiger geschrieben werden kann und sich dann als ein in der westlichen Literatur unter dem Namen „Jacobson's condition“ wohlbekanntes Resultat entpuppt. – Alternative Methoden werden im Rest des Kapitels (§§ 8–17) vorgestellt, wobei auf die vorangehenden Abschnitte kaum Bezug genommen wird. Auch für den Nicht-Fachmann dürfte die Lektüre dieses Teils des Buches recht informativ sein, und zwar einerseits im Hinblick auf die benutzten Hilfsmittel (Momentensatz, Minimax-Theorem, Trennungssätze für konvexe Mengen), andererseits im Hinblick auf die Vielzahl der angeschnittenen Fragestellungen (u.a. auch aus dem Gebiet der Differentialspiele). Freilich werden hier auch gelegentlich Probleme konstruiert, die zu den Methoden „passen“, für die sich aber wohl kaum interessante Anwendungen finden lassen (etwa § 16).

Im Kap. VII geht es um die Frage, in wieweit die Gültigkeit des Maximumprinzips hinreichend für die Optimalität einer Lösung ist, und um damit zusammenhängende Fragen nach der Eindeutigkeit von optimalen Lösungen. In §1–§4 werden die Probleme zunächst wieder direkt mit der Methode der Zuwächse angegangen, ein typisches Resultat stellt der Satz 1 auf p. 415 dar, der eine globale Aussage enthält, allerdings unter sehr einschneidenden und unrealistischen Voraussetzungen. Für lineare Systeme stehen auch hier alternative Methoden zur Verfügung, einige Kostproben findet man im §8.

Kap. VIII dient der Überprüfung früherer Resultate und Abschätzungen unter dem Gesichtspunkt ihrer Verwendbarkeit für die Approximation optimaler Lösungen. Insbesondere wird die Frage diskutiert, ob sich vom Maximumprinzip her eine Steuerfunktion schrittweise verbessern läßt. Die Überlegungen führen jedoch nicht zu konkreten numerischen Verfahren oder Konvergenzaussagen.

Der Gesamteindruck des Buches läßt sich etwa so wiedergeben. Der Aufbau ist ausschließlich an den Methoden orientiert. Die Problemstellungen werden passend zu den Methoden gewählt und dabei in einer Weise aneinandergereiht, die nicht frei von Willkür ist. So fällt es oft schwer, den roten Faden zu erkennen, da zudem Kommentare und motivierende Einleitungen recht spärlich sind. Nicht nach jedermanns Geschmack ist wohl auch eine gewisse Ungenauigkeit in den Details. So arbeiten die Verfasser unentwegt mit Variationen, ohne jemals präzise zu sagen, was sie darunter verstehen. Aus allem ergibt sich, daß das Buch wohl in erster Linie für einen Leser gedacht ist, der die Materie schon weitgehend kennt. Ihm bietet es eine nützliche Ergänzung zur vorhandenen Literatur und manche Anregung für Vorlesung und Seminare.

Wünschenswert wäre – vor allem angesichts des exorbitanten Preises – mehr Sorgfalt bei der Drucklegung. Störend wirkt nicht nur die Vielzahl der Druckfehler, sondern auch vor allem die lückenhafte Numerierung der Formeln, die das Aufsuchen von Verweisen oft zu einem Ratespiel werden läßt.

Würzburg H. W. Knobloch

Jahresbericht
der Deutschen Mathematiker-Vereinigung

Herausgegeben von K. Jacobs
unter Mitwirkung von
P. L. Butzer, W.-D. Geyer

82. Band

B. G. Teubner Stuttgart 1980

Printed in Germany – ISSN 0012–0456
Gesamtherstellung: Schwetzinger Verlagsdruckerei GmbH, D-6830 Schwetzingen

Inhalt

1. Abteilung

2. Abteilung

Buchbesprechungen

The 1981 Springer Mathematics Calendar

Mathematics Calendar **81**

January: **The Dictator Theorem**

A small set of apparently reasonable conditions on a voting system must necessarily lead to the institution of a dictator – Arrow's paradox, mathematically an ultrafilter theorem, is illustrated and resolved democratically by modifying the conditions.

February: **Minimal Surfaces**