

86. Band Heft 3  
ausgegeben am 23. 7. 1984

**DMV**

# Jahresbericht

der Deutschen Mathematiker-Vereinigung

Herausgegeben von K. Jacobs  
unter Mitwirkung von  
P. L. Butzer, U. Felgner,  
W.-D. Geyer, J. Stoer



**B. G. Teubner Stuttgart 1984**

# Jahresbericht

der Deutschen Mathematiker-Vereinigung

Der „Jahresbericht“ ist das offizielle Veröffentlichungsorgan der Deutschen Mathematiker-Vereinigung, für dessen inhaltliche Gestaltung im Auftrag des Präsidiums der jeweilige Herausgeber zuständig ist. Im „Jahresbericht“ sollen vornehmlich Überblicksartikel über Teilgebiete der reinen und angewandten Mathematik, Nachrufe sowie historische Artikel und Buchbesprechungen veröffentlicht werden.

## Manuskripte

Alle für die Schriftleitung des Jahresberichts bestimmten Sendungen (Briefe, Manuskripte, Ankündigung von neuerscheinenden Büchern) sind an Prof. Dr. K. Jacobs zu richten. Bücher, von denen eine Besprechung erfolgen soll, werden bei den Verlagen angefordert. Die Autoren werden gebeten, bei der Vorbereitung ihrer Manuskripte die „Hinweise für Autoren“ am Ende von Heft 86/2 zu beachten.

Grundsätzlich sollen nur solche Manuskripte eingereicht werden, die nicht gleichzeitig an anderer Stelle zur Veröffentlichung eingereicht oder bereits veröffentlicht worden sind. Mit der Annahme zur Veröffentlichung erwirbt der Verlag das Verlagsrecht zur Vervielfältigung und Verbreitung sowie das Recht der Übersetzung in andere Sprachen.

## Bezugsinformationen

Jährlich wird ein Band veröffentlicht, bestehend aus 4 Heften, die vierteljährlich erscheinen. Der Bezug ist nur bandweise möglich.

Der im voraus zahlbare Bezugspreis pro Band beträgt DM 84,- einschließlich Versand. Bestellungen nehmen jede Buchhandlung oder der Verlag entgegen.

Für Mitglieder der DMV ist der Bezug des Jahresberichts im Mitgliedsbeitrag enthalten.

Verlag:

B. G. Teubner, Industriestr. 15, Postfach 80 10 69

D-7000 Stuttgart 80, Tel. (07 11) 7 80 30 76

Verantwortlich für den Anzeigenteil: Walter Hirtz

Das Werk ist urheberrechtlich geschützt. Die dadurch begründeten Rechte, besonders die der Übersetzung, des Nachdrucks, der Bildentnahme, der Funksendung, der Wiedergabe auf photomechanischem oder ähnlichem Wege, der Speicherung und Auswertung in Datenverarbeitungsanlagen, bleiben auch bei Verwertung von Teilen

des Werkes, dem Verlag vorbehalten.

Bei gewerblichen Zwecken dienender Vervielfältigung ist an die Verwertungsgesellschaft Wort, Abteilung Wissenschaft, Goethestraße 49, D-8000 München 2, gemäß § 54 UrhG eine Vergütung zu zahlen, deren Höhe mit der VG Wort zu vereinbaren ist.

Copying in the USA: Authorization to photocopy items for internal or personal use, or the internal or personal use of specific clients, is granted by B. G. Teubner, Stuttgart, for libraries and other users registered with the Copyright Clearance Center (CCC) Transactional Reporting Service, provided that the base fee of \$ 1.00 per copy, plus 0.20 per page is paid directly to CCC, 21 Congress Str., Salem, MA 01970. 0012-0456/83 \$ 01.00 + .20.

# Jahresbericht

der Deutschen Mathematiker-Vereinigung

## Inhalt Band 86, Heft 3

### 1. Abteilung

- D. Jungnickel: Lateinische Quadrate, ihre Geometrien und ihre Gruppen . . . . . 69  
J. Heinhold; A. Kerber: Dem Andenken an Hermann Boerner . . . . . 109

### 2. Abteilung

- M. Barner, F. Flohr, Analysis II (*W. Degen*) . . . . . 47  
W. T. Reid, Sturmian Theory for Ordinary Differential Equations (*W. Walter*) . . . . . 48  
S. Fenyő, H. W. Stolle, Theorie und Praxis der linearen Integralgleichungen  
(*G. Hämmerlin*) . . . . . 48

- J. Smoller, Shock Waves and Reaction – Diffusion Equations (*M. Schneider*) . . . . . 52  
J. K. Beem, P. E. Ehrlich, Global Lorentzian Geometry (*N. M. J. Woodhouse*) . . . . . 54  
O. Giering, Vorlesungen über höhere Geometrie (*H. Brauner*) . . . . . 55  
A. Beutelspacher, Einführung in die endliche Geometrie II (*W. Heise*) . . . . . 56  
K. Jacobs, Einführung in die Kombinatorik (*H. Lenz*) . . . . . 57  
J. Szép, F. Forgó, Einführung in die Spieltheorie (*J. Rosenmüller*) . . . . . 58  
W. H. Ruckle, Geometric Games and their Applications (*J. Rosenmüller*) . . . . . 59  
I. H. Conway, Über Zahlen und Spiele (*W.-D. Geyer*) . . . . . 60

### **In den nächsten Heften erscheinende Arbeiten:**

- V. Bangert:** Geodätische Linien auf Riemannschen Mannigfaltigkeiten  
**S. D. Chatterji:** A Subsequence Principle in Probability Theory  
**D. Gaier:** Approximation im Komplexen  
**O. Giering:** Othmar Baier zum Gedenken  
**P. Henrici:** Die Lagrange-Bürmannsche Formel bei formalen Potenzreihen  
**S. Koppelberg:** Booleschwertige Logik  
**R. Tijdeman:** On the Fermat-Catalan Equation  
**E. Viehweg:** Zur Klassifikationstheorie drei(und höher)dimensionaler projektiver Mannigfaltigkeiten

---

### **Anschriften der Herausgeber**

- Prof. Dr. K. Jacobs, Bismarckstr. 11/2, 8520 Erlangen  
Prof. Dr. P. L. Butzer, Templergraben 55, 5100 Aachen  
Prof. Dr. U. Felgner, Auf der Morgenstelle 10, 7400 Tübingen  
Prof. Dr. W.-D. Geyer, Bismarckstr. 11/2, 8520 Erlangen  
Prof. Dr. J. Stoer, Am Hubland, 8700 Würzburg

### **Bezugshinweis**

Früher erschienene Bände (ab Band 68) des „Jahresberichts der Deutschen Mathematiker-Vereinigung“ können durch den Buchhandel oder den Verlag bezogen werden.

Nachdruck der Bände 1 bis 40 liefert: Johnson Reprint Corp., 111 Fifth Avenue, New York, N.Y. 10003

Nachdruck der Bände 41 bis 67 liefert: Swets & Zeitlinger, Heereweg 347b, POB 810, NL-2160 SZ Lisse/Holland

---

## ihre Geometrien und ihre Gruppen\*)

D. Jungnickel, Gießen

*Meinem verehrten Lehrer, Herrn Professor Hanfried Lenz,  
in Dankbarkeit gewidmet*

*Cuentan que Ulises, harto de prodigios,  
Lloró de amor al divisar su Itaca  
Verde y humilde. El arte es esa Itaca  
De verde eternidad, no de prodigios.  
(Jorge Luis Borges)*

Die endliche Geometrie kann, grob gesprochen, als der Schnitt von Algebra, Geometrie, Kombinatorik und Zahlentheorie beschrieben werden. Hieraus werden bereits einige ihrer Wurzeln sichtbar:

1. Die endlichen affinen und projektiven Geometrien sind Analoga der entsprechenden klassischen Strukturen; außerdem sind endliche Ebenen als Beispiele bei axiomatischen Untersuchungen in den Grundlagen der Geometrie wichtig. Diese Standpunkte finden sich wohl zuerst bei Veblen/Bussey [116] bzw. bei Veblen/Wedderburn [117].

2. Endliche projektive und affine Ebenen können auch rein kombinatorisch als spezielle Blockpläne definiert werden; Blockpläne tauchen bereits um 1845 zunächst im Rahmen der Unterhaltungsmathematik auf, vgl. Woolhouse [129], Kirkman [76] und Steiner [112].

3. In jüngerer Zeit werden auch (analog zum Kleinschen Standpunkt) die Transformationsgruppen endlicher Geometrien studiert, was oft wesentlich zum besseren Verständnis gewisser endlicher Gruppen beiträgt. Die bahnbrechenden Arbeiten in dieser Richtung sind die von Witt [126], [127], der so die Mathieu-Gruppen verständlicher machte (für neuere Darstellungen dieses Themas mit Hilfe der endlichen Geometrie siehe etwa Lüneburg [78] und Beth/Jungnickel [4]). Auch bei der Klassifikation der endlichen einfachen Gruppen haben geometrische Betrachtungen eine wichtige Rolle gespielt, vgl. Gorenstein [51].

Hinzu kommen als Motivationen zahlreiche Verbindungen zu den Anwendungen. Wir erwähnen hier nur zwei Aspekte:

4. Die eigentliche Entwicklung der Blockplan-Theorie hat ihren Ausgangspunkt in statistischen Anwendungen; die bahnbrechenden Arbeiten hierzu stammen von Yates [130], [131], und Bose [12]; man vergleiche auch die Bücher von Fisher [48] und Raghavarao [95].

5. In neuerer Zeit sind insbesondere die Zusammenhänge zur Nachrichtentechnik und Datenverarbeitung von großer Bedeutung. Z. B. hat Pless [94] als

Golay-Codes beschrieben (siehe auch [4]). Wir erwähnen noch das fundamentale Lehrbuch der Codierungstheorie von MacWilliams/Sloane [81], sowie Harwit/Sloane [56]. Eine elementare Einführung in die Zusammenhänge zwischen endlicher Geometrie, linearer Algebra, Gruppentheorie, Codierungstheorie und Darstellungstheorie am Beispiel der projektiven Ebene der Ordnung 2 findet sich bei Beth/Jungnickel [5].

In diesem Übersichtsartikel möchte ich die angesprochenen Themen anhand der Theorie der Lateinischen Quadrate erläutern. Die speziellen Aspekte der eben durchgeführten Überlegungen sind hier wie folgt:

1. Den Lateinischen Quadraten entspricht geometrisch eine Verallgemeinerung der affinen (bzw. projektiven) Ebenen, die sogenannten Netze (vgl. § 1).
2. Die rein kombinatorische Definition der Lateinischen Quadrate (als einer neuen Art magischer Quadrate) hat bereits Euler [47] im Jahre 1782 gegeben

Im Rest dieses Artikels werde ich die folgenden Einzelthemen behandeln:  
 1. Grundlagen; 2. Existenzsätze; 3. Komplettierung; 4. Geometrische Konfigurationen; 5. Translationsnetze; 6. Gruppen auf TD's und Netzen; 7. Verallgemeinerungen; 8. Ausblick und einige offene Fragen.

## 1 Grundlagen

Im ersten Teil dieses Abschnitts will ich die kombinatorisch-algebraische und im zweiten Teil die geometrische Seite meines Themas einführen.

### 1.1 Lateinische Quadrate, Quasigruppen und OA's

Die folgende Definition dürfte den meisten Lesern vertraut sein.

**1.1.1 Definition.** Es sei  $S$  eine Menge von  $s$  Symbolen. Ein *lateinisches Quadrat* über  $S$  ist eine  $(s \times s)$ -Matrix  $Q$  mit Einträgen aus  $S$ , für die jedes Symbol in jeder Zeile und in jeder Spalte genau einmal vorkommt. Zwei lateinische Quadrate  $Q = (q_{ij})$  und  $Q' = (q'_{ij})$  über  $S$  heißen *orthogonal*, wenn gilt:

$$\{(q_{ij}, q'_{ij}) : i, j = 1, \dots, s\} = S \times S.$$

Sind  $Q_1, \dots, Q_n$  lateinische Quadrate über  $S$  und sind  $Q_i$  und  $Q_j$  für  $i \neq j$  ( $i, j = 1, \dots, n$ ) stets orthogonal, so sprechen wir von einer Menge von  $n$  paarweise orthogonalen lateinischen Quadraten der Ordnung  $s$ , kurz von  $n$  MOLS (für „mutually orthogonal Latin squares“) der Ordnung  $s$ .

**1.1.2 Beispiele.** Im allgemeinen wählt man  $S = \{1, \dots, s\}$ .

2 MOLS der Ordnung 3:

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 1 \\ 3 & 1 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 1 & 2 \\ 2 & 3 & 1 \end{pmatrix}$$

3 MOLS der Ordnung 4:

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 2 & 1 & 4 & 3 \\ 3 & 4 & 1 & 2 \\ 4 & 3 & 2 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 3 & 4 & 2 \\ 2 & 4 & 3 & 1 \\ 3 & 1 & 2 & 4 \\ 4 & 2 & 1 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 4 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 1 & 4 \\ 3 & 2 & 4 & 1 \\ 4 & 1 & 3 & 2 \end{pmatrix}$$

Dagegen gibt es zu dem folgenden Quadrat der Ordnung 4 kein orthogonales Quadrat:

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 2 & 3 & 4 & 1 \\ 3 & 4 & 1 & 2 \\ 4 & 1 & 2 & 3 \end{pmatrix}$$

Der Leser wird bemerkt haben, daß jeweils das erste angegebene Quadrat einfach eine Gruppentafel ist. Dies muß nicht notwendig der Fall sein; jedoch kann jedes lateinische Quadrat als Verknüpfungstafel bzgl. einer Multiplikation auf  $S$  aufge-

faßt werden, für die Gleichungen der Form  $ax = b$  bzw.  $ya = b$  stets eindeutig lösbar sind. Derartige algebraische Strukturen heißen *Quasigruppen*; spezielle Typen von Quasigruppen sind vielfach untersucht worden, vgl. Bruck [22] und Dénes/Keedwell [38]. Zwei Quasigruppen  $G$  und  $G'$  auf derselben Trägermenge  $S$  heißen *orthogonal*, wenn ihre Verknüpfungstafeln orthogonal sind. Wir haben also trivialerweise das folgende Resultat.

**1.1.3 Lemma.** Genau dann gibt es  $n$  MOLS der Ordnung  $s$ , wenn es  $n$  paarweise orthogonale Quasigruppen auf einer  $s$ -elementigen Trägermenge gibt.

Wir werden im nächsten Abschnitt eine Anwendung dieser „algebraischen“ Interpretation kennenlernen, siehe 2.3.6. Als nächstes betrachten wir eine kombinatorische Umformulierung der lateinischen Quadrate.

**1.1.4 Definition.** Es sei wieder  $S$  eine  $s$ -elementige Symbolmenge. Ein OA( $s, r$ ) (für „orthogonal array“) ist eine  $(r \times s^2)$ -Matrix  $A = (a_{ij})$  mit Einträgen aus  $S$ , für die gilt:

$$\{(a_{ij}, a_{kj}) : j = 1, \dots, s^2\} = S \times S$$

für je zwei verschiedene Indizes  $i$  und  $k$  mit  $i, k \in \{1, \dots, r\}$ .

Jedes OA kann in eine „Normalform“ gebracht werden: Da die ersten beiden Zeilen jedes geordnete Paar von Elementen von  $S$  genau einmal enthalten, können wir nach Spaltenpermutation annehmen, daß die ersten beiden Zeilen von  $A$  wie folgt aussehen (mit  $S = \{1, \dots, s\}$ ):

$$\begin{matrix} 1 \dots 1 & 2 \dots 2 & \dots & s \dots s \\ 1 \dots s & 1 \dots s & \dots & 1 \dots s \end{matrix}$$

Man sieht dann leicht, daß man aus jeder weiteren Zeile ein lateinisches Quadrat über  $S$  erhält, indem man die  $s$  Blöcke von je  $s$  Einträgen in dieser Zeile als die Zeilen des Quadrates wählt. Es sei also für  $i = 1, \dots, r - 2$  die Matrix  $Q_i$  definiert durch

$$Q_i = \begin{pmatrix} a_{i+2,1} & \dots & a_{i+2,s} \\ a_{i+2,s+1} & \dots & a_{i+2,2s} \\ \dots & \dots & \dots \\ a_{i+2,s^2-s+1} & \dots & a_{i+2,s^2} \end{pmatrix}.$$

Dann sind  $Q_1, \dots, Q_{r-2}$  paarweise orthogonal. Umgekehrt erhält man aus  $r - 2$  MOLS über  $S$  durch „Hintereinanderschreiben“ der Zeilen ein OA( $s, r - 2$ ), welches durch Hinzufügen der beiden Zeilen

$$\begin{matrix} 1 \dots 1 & 2 \dots 2 & \dots & s \dots s \\ 1 \dots s & 1 \dots s & \dots & 1 \dots s \end{matrix}$$

zu einem OA( $s, r$ ) erweitert werden kann. Es gilt also:

**1.1.5 Lemma.** Ein OA( $s, r$ ) ist äquivalent zu  $r - 2$  MOLS der Ordnung  $s$ .

Es sei jetzt  $A$  ein OA( $s, r$ ), dessen erste beiden Zeilen wie beschrieben normalisiert sind. Offenbar überführt eine Permutation der Symbole  $\{1, \dots, s\}$  in einer gegebenen Zeile  $A$  wieder in ein OA. Daher kann man noch erreichen, daß die ersten  $s$



Einträge der Zeilen  $3, \dots, r$  jeweils  $1 \dots s$  sind. Dann enthält aber jedes Paar von Zeilen, bei dem die erste Zeile nicht vorkommt, bereits alle Symbolpaare  $(1, 1), \dots, (s, s)$ . Somit müssen in der  $(s + 1)$ -ten Spalte die Einträge der Zeilen  $2, \dots, r$  paarweise verschieden sein. Insbesondere gilt sicherlich  $r - 1 \leq s$ . Wir haben also bewiesen:

**1.1.6 Lemma.** Es gibt höchstens  $s - 1$  MOLS der Ordnung  $s$ .

MOLS der Ordnung  $s$ . Per Konvention setzt man  $N(0) = N(1) = \infty$ .

1.1.6 schreibt sich dann als  $N(s) \leq s - 1$ . Trotz größter Anstrengungen ist über die Funktion  $N(\cdot)$  wenig bekannt; wir werden diese Frage in Abschnitt 2 betrachten. Zunächst wollen wir uns aber der geometrischen Interpretation von MOLS zuwenden.

## 1.2 Netze und TD's

Unendliche Analoga der jetzt zu behandelnden „Netze“ wurden Mitte der zwanziger Jahre von Blaschke, Thomsen und Reidemeister unter dem Namen „Gewebe“ eingeführt und für topologische Untersuchungen in der Differentialgeometrie verwendet (siehe etwa Blaschke/Bol [10] und Blaschke [9]). Endliche Netze (mit 3 Parallelklassen) sind wohl zuerst 1929 von Reidemeister [97] betrachtet worden.

**1.2.1 Definition.** Ein *Netz* der *Ordnung*  $s$  und des *Grades*  $r$  (kurz: ein  $(s, r)$ -Netz) besteht aus einer nicht-leeren Menge  $P$  von *Punkten* und einer Menge  $G$  von Teilmengen von  $P$ , den *Geraden*. Ferner gelten folgende Axiome:

Der Leser zeige als Übungsaufgabe, daß jedes  $(s, s + 1)$ -Netz eine affine Ebene ist. (Hinweis: Man zähle die Zahl der mit einem gegebenen Punkt verbundenen Punkte.) Nun zum Zusammenhang zwischen Netzen und lateinischen Quadraten:

**1.2.4 Lemma.** Ein  $OA(s, r)$  existiert genau dann, wenn es ein  $(s, r)$ -Netz gibt.

**B e w e i s.** Sei  $N$  ein  $(s, r)$ -Netz mit Parallelenklassen  $G_1, \dots, G_r$ . Ferner sei  $S = \{1, \dots, s\}$ . Wir numerieren die Geraden in jedem  $G_i$  beliebig mit den Zahlen in  $S$ . Ferner seien  $p_1, \dots, p_{s^2}$  die Punkte von  $N$ . Die Matrix  $A = (a_{ij})$  ( $i = 1, \dots, r$ ;  $j = 1, \dots, s^2$ ) wird nun wie folgt definiert:  $a_{ij} = k$  genau dann, wenn der Punkt  $p_j$  auf der  $k$ -ten Geraden in  $G_i$  liegt. Da die Punkte bijektiv den Geradenpaaren  $(G, H)$  mit  $G \in G_i$  und  $H \in G_j$  entsprechen (für  $i \neq j$ ;  $i, j = 1, \dots, r$ ), erhält man so ein  $OA(s, r)$ . Diese Konstruktion läßt sich leicht umkehren.

In 1.1.2 haben wir ein lateinisches Quadrat der Ordnung 4 angegeben, zu dem es kein orthogonales Quadrat gibt. Mit 1.1.5 und 1.2.4 erhält man hieraus ein  $(4, 3)$ -Netz, das nicht Teil einer affinen Ebene ist. Fragen der „Einbettbarkeit“ oder „Erweiterbarkeit“ von Netzen werden wir in Abschnitt 3 betrachten. Mit 1.1.3 und 1.2.4 hat man allgemein die Möglichkeit, jeder beliebigen Quasigruppe ein Netz mit 3 Parallelklassen zuzuordnen. Diese algebraischen Strukturen erfahren

Z. B. ist die volle Automorphismengruppe (oder auch Gruppen spezieller Automorphismen) eine interessante Invariante für die betrachtete Quasigruppe. Sehr schöne Ergebnisse in dieser Richtung sind kürzlich von Barlotti/Strambach [2] erzielt worden, vgl. auch Strambach [113]. Als erster hat Reidemeister [97] mit einer beliebigen Gruppe ein Netz assoziiert; weitere wichtige Untersuchungen dieser Art stammen von Thomsen [115], Bol [11] und Baer [1]. Ich werde einige dieser Ergebnisse in Abschnitt 4 behandeln. Manchmal ist es vorteilhaft, statt der Netze die „dualen“ Strukturen zu betrachten, die sogenannten TD's. Man erhält diese, indem man in den Axiomen die Rollen von Punkten und Geraden vertauscht

- (iii) ein  $OA(s, r)$ ;
- (iv) ein  $(s, r)$ -Netz;
- (v) ein affines  $S_r(1, s; s^2)$ ;
- (vi) ein  $(s, r)$ -TD.

## 2 Existenzsätze

In diesem Abschnitt betrachten wir das Existenzproblem für lateinische Quadrate, d. h. wir untersuchen die Funktion  $N(\cdot)$  aus 1.1.7. Uns interessieren hier untere Schranken; außer der trivialen oberen Schranke  $N(s) \leq s - 1$  gibt es nur einen allgemeinen Nichtexistenzsatz, den wir im Zusammenhang mit Einbettungsfragen im nächsten Abschnitt betrachten werden.

### 2.1 Direkte Konstruktionen

Für kleine Werte von  $s$  kann man Existenzaussagen nur durch direkte Konstruktionen gewinnen; wir werden in den Abschnitten 2.2 bis 2.4 für größere Werte von  $s$  dann mit Gewinn rekursive Methoden heranziehen.

Sei zunächst  $s >$  eine Primzahlpotenz. Dann gibt es bekanntlich eine affine Ebene der Ordnung  $s$ , nämlich die affine Ebene über dem Körper  $GF(s)$  mit  $s$  Elementen. Nach 1.2.3 und 1.2.6 folgt also  $N(s) \geq s - 1$  und wegen 1.1.6:

**2.1.1 Satz.** Es gilt  $N(s) = s - 1$  für Primzahlpotenzen  $s$ .

Wir geben gleich noch einen anderen Beweis für 2.1.1. Dazu benötigen wir einen weiteren Begriff, der von vielen Autoren unabhängig entdeckt wurde. Zum ersten Mal ist er wohl bei Bose/Bush [13] aufgetreten.

**2.1.2 Definition.**  $G$  sei eine additiv geschriebene Gruppe der Ordnung  $s$ . Eine  $(s, r; G)$ -Differenzenmatrix über  $G$  ist eine  $(r \times s)$ -Matrix  $D = (d_{ij})$  mit Einträgen aus  $G$ , für die gilt:

$$\{d_{hj} - d_{ij} : j = 1, \dots, s\} = G \quad \text{für alle } h, i = 1, \dots, r \text{ mit } h \neq i.$$

Die Differenz zweier beliebiger Zeilen von  $D$  enthält also jedes Element von  $G$  genau einmal.

**2.1.3 Satz.** Die Existenz einer  $(s, r; G)$ -Differenzenmatrix impliziert  $N(s) \geq r - 1$ .

**Beweis.** Es sei  $G = \{g_1, \dots, g_s\}$ . Man sieht unmittelbar ein, daß  $(D + g_1, \dots, D + g_s)$  ein  $OA(s, r)$  ist. Aber dieses  $OA$  kann durch die Zeile  $(g_1 \dots g_s \dots g_1 \dots g_s)$  zu einem  $OA(s, r + 1)$  erweitert werden.

Wegen des Distributivgesetzes ist offenbar die Multiplikationstafel von  $GF(q)$  eine  $(q, q; (GF(q), +))$ -Differenzenmatrix. Mit 2.1.3 liefert dies den angekündigten Alternativbeweis für 2.1.1. Wir nennen einige weitere Beispiele:

**2.1.4 Beispiele.** a) Die folgende  $(12, 6; \mathbf{Z}_2 \oplus \mathbf{Z}_6)$ -Differenzenmatrix stammt von Dulmage/Johnson/Mendelsohn [46] (wir schreiben kurz  $xy$  statt  $(x, y)$ ):

$$D = \begin{pmatrix} 00 & 00 & 00 & 00 & 00 & 00 & 00 & 00 & 00 & 00 & 00 & 00 \\ 00 & 01 & 02 & 03 & 04 & 05 & 10 & 11 & 12 & 13 & 14 & 15 \\ 00 & 03 & 10 & 01 & 13 & 15 & 02 & 12 & 05 & 04 & 11 & 14 \\ 00 & 12 & 01 & 15 & 05 & 13 & 03 & 14 & 02 & 11 & 10 & 04 \\ 00 & 04 & 15 & 14 & 02 & 11 & 12 & 10 & 13 & 01 & 03 & 05 \\ 00 & 10 & 12 & 02 & 11 & 01 & 13 & 15 & 04 & 14 & 05 & 03 \end{pmatrix}$$

b) Die Matrix  $D = (A \quad -A \quad 0)$  ist eine  $(15, 4; \mathbf{Z}_{15})$ -Differenzenmatrix für

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 \\ 2 & 5 & 7 & 9 & 12 & 4 & 1 \\ 6 & 3 & 14 & 10 & 7 & 13 & 4 \\ 10 & 6 & 1 & 11 & 2 & 7 & 12 \end{pmatrix}$$

(Schellenberg/van Rees/Vanstone [99]).

Näheres über Differenzenmatrizen findet man bei Beth/Jungnickel/Lenz [6, VIII. § 3 und X. § 12] sowie bei Jungnickel [64]. Interessante weitere Beispiele stammen von Mills [86]. Leider benötigt man in der Praxis für viele Werte von  $s$  wesentlich kompliziertere direkte Konstruktionen. Zwei besonders wichtige Verfahren stammen von Wilson [124] und von Wang [120]. Diese Verfahren benutzen ebenfalls Differenzenmethoden in geeigneten Gruppen und lassen sich gut mit Hilfe sogenannter „Quasi-Differenzenmatrizen“ und „partieller Quasi-Differenzenmatrizen“ beschreiben. Eine ausführliche Darstellung dieser Thematik einschließlich zahlreicher Beispiele findet der Leser in [6, VIII. § 7]. Wir wenden uns jetzt den rekursiven Methoden zu.

## 2.2 Der Satz von MacNeish

Die einfachste rekursive Konstruktion für lateinische Quadrate wurde im 1922 von MacNeish [80] angegeben.

**2.2.1 Satz.** Es gilt  $N(ss') \geq \min \{N(s), N(s')\}$ .

**B e w e i s.** Es seien  $Q_1, \dots, Q_r$  und  $Q'_1, \dots, Q'_r$  paarweise orthogonale Quasigruppen der Ordnungen  $s$  bzw.  $s'$ . Dann sind auch die direkten Produkte  $Q_1 \times Q'_1, \dots, Q_r \times Q'_r$  paarweise orthogonal.

**2.2.2 Korollar.** Es sei  $s = q_1 \dots q_n$  die Primzahlpotenzzerlegung von  $s$ . Dann gilt  $N(s) \geq \min \{q_i - 1 : i = 1, \dots, n\}$ .

Lange Zeit war die in 2.2.2 angegebene Schranke das beste bekannte Ergebnis. MacNeish hatte vermutet, daß stets sogar Gleichheit in 2.2.2 gelten mußte (und in der Tat einen inkorrekten Beweis dafür publiziert). Insbesondere wäre hierin die Gültigkeit der berühmten *Eulerschen Vermutung*  $N(s) = 1$  für  $s \equiv 2 \pmod{4}$  enthalten gewesen. Beide Vermutungen wurden um 1960 widerlegt. In 2.1.4 haben wir bereits Gegenbeispiele zur MacNeishschen Vermutung gesehen. Die Eulersche Vermutung ist in etwa so falsch, wie man es sich nur wünschen könnte, wie der folgende berühmte Satz von Bose/Shrikhande/Parker [15] zeigt, für den wir in 2.4.3 einen kurzen Beweis angeben werden.

### 2.2.3 Satz. Es gilt $N(s) \geq 2$ für $s \neq 2, 6$ .

Zum Beweis wurden neben direkten Konstruktionen vor allem rekursive Methoden herangezogen, in denen erstmals Blockpläne und Verallgemeinerungen von Blockplänen zur Konstruktion lateinischer Quadrate dienten. Diese Verfahren sollen im nächsten Teilabschnitt erläutert werden.

## 2.3 Die Konstruktion von Bose und Shrikhande

Wir benötigen zunächst eine Definition:

**2.3.1 Definition.** Es sei  $V$  eine  $v$ -elementige Punktmenge,  $P$  eine Zerlegung von  $V$  und  $G$  eine Menge von Teilmengen von  $V$  (die Elemente von  $P$  heißen *Punkt-klassen*<sup>1</sup>) und die von  $G$  *Geraden*).  $\mathcal{D} = (V, G, P)$  heißt ein GDD $[K, L; v]$  (für „group divisible design“), wenn gilt:

- (G<sub>1</sub>) Je zwei Punkte aus verschiedenen Punkt-klassen haben genau eine Verbindungsgerade; je zwei Punkte aus derselben Punkt-klasse sind unverbunden.
- (G<sub>2</sub>) Es gilt  $|G| \in K$  für jedes  $G \in G$  und  $|P| \in L$  für jedes  $P \in P$ .

Sind alle Elemente von  $P$  einelementig (also je 2 Punkte in  $V$  verbunden), so heißt  $\mathcal{D}$  ein PBD oder genauer ein  $B[K; v]$  (für „pairwise balanced design“). Ist noch  $K = \{k\}$  einelementig, erhält man einen *Blockplan*  $B[k; v]$ .

**2.3.2 Beispiele.** a) Eine affine Ebene der Ordnung  $s$  ist ein  $B[s; s^2]$ . Eine projektive Ebene der Ordnung  $s$  ist ein  $B[s+1; s^2+s+1]$ . Allgemeiner bilden die Punkte und Geraden eines endlichen affinen oder projektiven Raumes einen Blockplan.

- b) Ein  $(s, k)$ -TD ist ein GDD $[\{k\}, \{s\}; ks]$ , und umgekehrt.
- c) Entfernt man aus einem  $B[k; v]$  einen Punkt und alle mit ihm inzidenten Geraden, so erhält man ein GDD $[\{k\}, \{k-1\}; v-1]$ . Die Beispiele in a) liefern also die Existenz von GDD $[\{s\}, \{s-1\}; s^2-1]$  und von GDD $[\{s+1\}, \{s\}; s^2+s]$  für Primzahlpotenzen  $s$ .

Bevor wir das Verfahren von Bose und Shrikhande erläutern können, brauchen wir noch eine weitere Definition:

**2.3.3 Definition.** a) Eine *Parallelklasse* eines  $(s, r)$ -TD ist eine Menge von  $s$  Geraden, die die Punktmenge überdecken (und dann aus Anzahlgründen paarweise diesjunkt sein müssen).

b) Ein lateinisches Quadrat heißt *idempotent*, wenn es Verknüpfungstafel einer idempotenten Quasigruppe ist (d. h. einer Quasigruppe  $Q$ , in der  $xx = x$  für alle  $x \in Q$  gilt).

c)  $N^*(s)$  sei die Maximalzahl von paarweise orthogonalen idempotenten lateinischen Quadraten der Ordnung  $s$ .

Der Leser möge sich als Übung von der Gültigkeit des folgenden Lemmas überzeugen.

<sup>1</sup> In der Literatur findet sich unglücklicherweise häufig der Term „Gruppe“ statt „Punkt-klasse“, obwohl kein Zusammenhang zum algebraischen Gruppenbegriff besteht.

**2.3.4 Lemma.** Ein  $(s, r)$ -TD mit einer Parallelklasse existiert genau dann, wenn es  $r - 2$  idempotente MOLS der Ordnung  $s$  gibt.

**2.3.5 Korollar.** Es gilt stets  $N^*(s) \geq N(s) - 1$ .

**Beweis.** Man entferne aus einem  $(s, r)$ -TD eine Punktklasse  $P$ ; dann erhält man ein  $(s, r - 1)$ -TD und jeder Punkt in  $P$  bestimmt eine Parallelklasse dieses kleineren TD's. Die Behauptung folgt nun aus 2.3.4 und 1.2.6.

**2.3.6 Satz (Bose/Shrikhande [14]).** Es sei ein  $\text{GDD}[K, L; v] \mathcal{D}$  gegeben. Wenn für jedes  $k \in K$  und für jedes  $\ell \in L$  die Ungleichung  $N^*(k) \geq n$  bzw.  $N(\ell) \geq n$  gilt, so gilt auch  $N(v) \geq n$ . Ist  $\mathcal{D}$  ein  $B[K; v]$ , so gilt sogar  $N^*(v) \geq \min \{N^*(k) : k \in K\}$ .

**Beweis.** Wir wollen hier den etwas technischen Beweis für den allgemeinen Fall nicht durchführen und verweisen z. B. auf Beth/Jungnickel/Lenz [6, X. 1.1]. Der Spezialfall von PBD's erlaubt jedoch einen transparenten Beweis über Quasigruppen. Nach Voraussetzung können wir auf jeder Geraden  $G$  von  $\mathcal{D}$  paarweise orthogonale idempotente Quasigruppen  $Q_1^G, \dots, Q_n^G$  erklären. Wir definieren nun Operationen  $\circ_1, \dots, \circ_n$  auf der gesamten Punktmenge wie folgt: Es sei stets  $x \circ_i x = x$ ; für verschiedene Punkte  $y$  und  $z$  sei  $y \circ_i z$  das Produkt von  $y$  mit  $z$  in der Quasigruppe  $Q_i^G$ , wobei  $G$  die eindeutige Verbindungsgerade von  $y$  und  $z$  sei. Es ist nicht schwer einzusehen, daß man so  $n$  paarweise orthogonale idempotente Quasigruppen  $Q_1, \dots, Q_n$  erhält.

**2.3.7 Beispiele.** a) Nach 2.3.2.c) gibt es für jede Primzahlpotenz  $q$  ein  $\text{GDD}[\{q\}, \{q - 1\}; q^2 - 1]$ . Nach 2.3.3 gilt also  $N(q^2 - 1) \geq \min \{N^*(q), N(q - 1)\} \geq N(q - 1)$ , da nach 2.1.1 und 2.3.5  $N^*(q) \geq N(q) - 1 = q - 2 \geq N(q - 1)$  ist. Z. B. erhält man so  $N(24) \geq 3$  und  $N(80) \geq 7$ .

b) Entfernen von 3 nicht auf einer Geraden gelegenen Punkten eines  $B[k; v]$  liefert ein  $\text{GDD}[\{k, k - 1\}, \{1, k - 2\}; v - 3]$ , also  $N(v - 3) \geq \min \{N^*(k), N^*(k - 1), N(k - 2)\}$ . Wählt man die projektive Ebene der Ordnung 4 bzw. 8 für unser  $B[k; v]$ , erhält man  $N(18) \geq 2$  und  $N(70) \geq 6$ ; aus der affinen Ebene der Ordnung 5 bzw. 9 ergibt sich  $N(22) \geq 2$  und  $N(78) \geq 6$ .

c) Die projektive Ebene der Ordnung  $q$  liefert  $N^*(q^2 + q + 1) \geq N^*(q + 1)$ , z. B.  $N^*(21) \geq 3$ ,  $N^*(57) \geq 6$ .

Auch rekursive Konstruktionen mit Verwendung von Differenzen- oder Quasidifferenzenmatrizen sind sehr nützlich. So kann man etwa Beispiel 2.3.7.c zu  $N(q^2 + q + 1) \geq N(q + 1)$  für Primzahlpotenzen  $q$  verfeinern, ein weiteres Resultat von Bose/Shrikhande [14]: der einfachste Beweis dafür dürfte Differenzenmatrizen verwenden. Man vergleiche etwa Beth/Jungnickel/Lenz [6, IX. § 1] und Jungnickel [64], [66] für Beispiele derartiger rekursiver Verfahren. Schließlich sei noch bemerkt, daß 2.3.6 zeigt, daß die Menge der  $v \in \mathbf{N}$ , für die eine Menge von  $n$  idempotenten MOLS existiert, im Sinne der Wilsonschen Theorie PBD-abgeschlossen ist, vgl. Wilson [121], [122], [125]. Der nächste wesentliche Fortschritt in den rekursiven Methoden wurde 1974 von Wilson [123] erzielt und soll im folgenden skizziert werden.

## 2.4 Wilsons Konstruktion

Die folgende Konstruktion von Wilson ist recht kompliziert, aber zum Verständnis neuerer Entwicklungen unentbehrlich. Für den Beweis sei der Leser auf Beth/Jungnickel/Lenz [6, X.3.1] verwiesen.

**2.4.1 Satz (Wilson [123]).** Es sei  $\mathcal{D} = (V, G, P)$  ein  $(s, k + \ell)$ -TD mit  $P = \{P_1, \dots, P_k, Q_1, \dots, Q_\ell\}$ . Ferner sei  $T$  eine  $t$ -Teilmenge von  $Q_1 \cup \dots \cup Q_\ell$ . Für jede Gerade  $G \in \mathcal{G}$  sei  $u_G := |G \cap T|$ . Ferner seien die beiden folgenden Bedingungen erfüllt:

- (i) Es gibt ein  $(t_i, k)$ -TD mit  $t_i := |T \cap Q_i|$  für  $i = 1, \dots, \ell$ .
- (ii) Es gibt ein  $(m + u_G, k)$ -TD mit  $u_G$  paarweise disjunkten Blöcken für jede Gerade  $G$ .

Dann gibt es auch ein  $(ms + t, k)$ -TD.

Wir werden zwei Anwendungen als Beispiele durchführen. Zunächst:

**2.4.2 Korollar.** Es sei  $0 \leq t \leq s$ . Dann gilt für jede natürliche Zahl  $m$ :

$$N(ms + t) \geq \min \{N(m), N(m + 1), N(s) - 1, N(t)\}.$$

**Beweis.** Es sei  $k - 2$  das in der Behauptung genannte Minimum. Dann gibt es also ein  $(s, k + 1)$ -TD. Wir wenden 2.4.1 mit  $\ell = 1$  an und wählen dazu irgendeine  $t$ -Teilmenge von  $Q_1$  als  $T$ . Dann sind die beiden Bedingungen in 2.4.1 nach Voraussetzung erfüllt; man beachte dabei, daß hier stets  $u_G = 0$  oder  $1$  ist.

**2.4.3 Beispiel.** Es sei  $s \equiv 1, 5, 7, 9, 11, 13$  oder  $17 \pmod{18}$ . Mit 2.2.2 folgt  $N(s) \geq 4$ . Sei ferner  $t \leq s$  ungerade, also nach 2.2.2  $N(t) \geq 2$ . Mit  $m = 3$  erhalten wir aus 2.4.2 dann  $N(3s + t) \geq 2$ , z. B.  $N(18) \geq 2$  wegen  $18 = 3 \cdot 5 + 3$  und  $N(22) = N(3 \cdot 7 + 1) \geq 2$ . Es ist nicht schwer zu zeigen, daß man so  $N(4n + 2) \geq 2$  für alle  $n \geq 4$  erhalten kann. Zusammen mit 2.2.2 liefert das einen sehr kurzen Beweis für Satz 2.2.3, allerdings mit Ausnahme der Werte  $s = 10$  und  $14$ , die man dann noch durch direkte Konstruktion lösen muß.

Dieses Beispiel dürfte bereits klarmachen, wie stark der Wilsonsche Satz ist. Ähnlich wie 2.4.2 zeigt man noch das folgende Korollar. (Der Leser überzeuge sich, daß jedes TD zwei disjunkte Blöcke enthält: dies wird für die Bedingung (ii) aus 2.4.1 benötigt.)

**2.4.4 Korollar.** Es sei  $0 \leq t \leq s$  und  $0 \leq u \leq s$ . Dann gilt für jede natürliche Zahl  $m$ :

$$N(ms + t + u) \geq \min \{N(m), N(m + 1), N(m + 2), N(s) - 2, N(u), N(t)\}.$$

**2.4.5 Übung.** Man zeige  $N(51) \geq 4$ ,  $N(62) \geq 4$ ,  $N(58) \geq 5$  sowie  $N(s) \geq 6$  für  $s = 84, 85, 86, 87, 92, 93, 94, 95, 98$  und  $N(96) \geq 7$ .

Wir erwähnen schließlich noch die zur Zeit bekannten Resultate über die Existenz von  $k$  orthogonalen lateinischen Quadraten für  $k \leq 6$ . Alle diese Ergebnisse können mit dem Wilsonschen Satz 2.4.1 und einigen direkten Konstruktionen für kleine Werte von  $s$  bewiesen werden. Die Beweise sind leider sämtlich recht langwierig; eine verhältnismäßig einfache Darstellung dieser Ergebnisse findet der

## 2.4.6 Satz

(i) Es gilt  $N(s) \geq 3$  für  $s \neq 2, 6, 10, 14$  (Wang [120]),

(iii) Es gilt  $N(s) \geq 5$  für  $s \geq 63$  (Hanani [54]).

(iv) Es gilt  $N(s) \geq 6$  für  $s \geq 77$  (Wilson [124], Wojtas [128]).

2.5 Die Zahlen  $n_k$ 

Mit Wilsons Methode ist der folgende Satz von Chowla/Erdős/Straus [34] ebenfalls leicht zu beweisen, vgl. Beth/Jungnickel/Lenz [6, X. § 5].

2.5.1 Satz. Es gilt  $N(s) \rightarrow \infty$  für  $s \rightarrow \infty$ .

Genauer konnten Chowla, Erdős und Straus zeigen, daß für hinreichend große  $s$  stets  $N(s) \geq s^a$  mit  $a = 1/91$  gilt. Der Wert für  $a$  wurde danach mehrfach verbessert; der beste zur Zeit bekannte Exponent ist  $a = 1/14,8$  (Beth [3]). Diese Resultate benutzen die Siebmethoden der Zahlentheorie und Satz 2.4.1. Wegen Satz 2.5.1 ist die folgende Definition möglich:

2.5.2 Definition. Für  $k \in \mathbf{N}$  sei  $n_k$  die größte natürliche Zahl mit  $N(n_k) < k$ .

Die Ergebnisse aus 2.2.3 und 2.4.6 lassen sich dann als  $n_2 = 6$ ,  $n_3 \leq 14$ ,  $n_4 \leq 52$ ,  $n_5 \leq 62$  und  $n_6 \leq 76$  schreiben. Wir geben im folgenden alle weiteren bekannten Resultate an. Zum Nachweis dieser Sätze werden komplizierte Verallgemeinerungen der Wilsonschen Konstruktion 2.4.1 benötigt. Außerdem braucht man weitere direkte Konstruktionen; auch scheint die Verwendung eines Computers unvermeidlich.

2.5.3 Satz (Brouwer [19], Brouwer/van Rees [20]). Es gilt  $n_7 \leq 780$ ,  $n_8 \leq 4738$ ,  $n_9 \leq 5842$ ,  $n_{10} \leq 7222$ ,  $n_{11} \leq 7478$ ,  $n_{12} \leq 9286$ ,  $n_{13} \leq 9476$ ,  $n_{14} \leq n_{15} \leq 10632$ ,  $n_{30} \leq 65278$ .

Eine Tabelle mit den besten bekannten unteren Schranken für  $N(s)$  mit  $s \leq 100$  findet sich im Anhang von Beth/Jungnickel/Lenz [6]. Schranken für  $s \leq 10000$  findet man bei Brouwer [17]; seit dieser Tabellierung haben sich einige Verbesserungen ergeben, vgl. Brouwer [18], [19], Brouwer/van Rees [20] und Jungnickel [66].

Insgesamt kann man wohl feststellen, daß seit 1960 deutliche quantitative Verbesserungen in den uns bekannten Schranken erzielt worden sind, wobei die Wilsonsche Arbeit [123] von 1974 als weiterer Durchbruch gelten kann. Trotzdem bleibt der Grad unserer Unkenntnis über die genaueren Eigenschaften von  $N(\cdot)$



### 3.1 Der Brucksche Kompletierungssatz

Der in der folgenden Definition eingeführte Parameter  $d$  gibt ein Maß dafür, wie weit ein Netz davon entfernt ist, eine affine Ebene zu sein:

**3.1.1 Definition.** Die *Defizienz* eines  $(s, r)$ -Netzes ist die Zahl  $d = s + 1 - r$ .

Die affinen Ebenen sind also gerade die Netze der Defizienz 0.

**3.1.2 Definition.** Ein  $(s, r)$ -Netz heißt *t-erweiterbar*, wenn es möglich ist, die Geradenmenge um  $st$  Geraden so zu erweitern, daß das Resultat ein  $(s, r + t)$ -Netz ist. Ist ein Netz  $d$ -erweiterbar für die Defizienz  $d$ , heißt es *kompletierbar* (oder *einbettbar*).

Man könnte vermuten, daß einerseits Netze mit sehr kleinem  $d$  kompletierbar sein sollten (eine affine Ebene sollte rekonstruierbar sein, wenn man nur sehr wenige Parallelklassen wegläßt) und daß andererseits Netze mit sehr kleinem  $r$  (also sehr großem  $d$ ) mindestens 1-erweiterbar sein sollten (zu jedem Punkt gibt es noch sehr viele unverbundene Punkte, also eine große „Auswahl“ für neue Geraden). Die erste dieser Vermutungen ist die Aussage des berühmten Kompletierungssatzes von Bruck [23], den wir gleich beschreiben werden. Die zweite Vermutung ist dagegen falsch, wie wir im Abschnitt 3.3 sehen werden.

**3.1.3 Satz (Bruckscher Kompletierungssatz).** Das Polynom  $p$  sei definiert durch  $p(x) = \frac{1}{2}x^4 + x^3 + x^2 + \frac{3}{2}x$ . Dann ist jedes  $(s, r)$ -Netz der Defizienz  $d$  kompletierbar, falls  $p(d - 1) < s$  ist.

Der Beweis benutzt graphentheoretische Methoden und ist recht umfangreich. Der interessierte Leser sei auf die Originalarbeit von Bruck [23] oder auf [6, X. § 7] verwiesen. Nach 3.1.3 ist z. B. jedes Netz der Defizienz 1 kompletierbar und jedes Netz der Defizienz 2 für  $s > 4$ , der Defizienz 3 für  $s > 23$ , etc. Kombiniert man 3.1.3 mit dem bekannten Nichtexistenzsatz von Bruck und Ryser [25] für projektive Ebenen, so erhält man die einzige bekannte nicht-triviale obere Schranke für die Funktion  $N(\cdot)$ :

**3.1.4 Korollar.** Es sei  $s$  eine natürliche Zahl, für die es keine projektive

**3.1.6 Satz (Bruckscher Eindeutigkeitssatz).**  $\mathcal{D}$  sei ein  $(s, r)$ -Netz der Defizienz  $d$  mit  $s > (d - 1)^2$ . Dann schneiden sich je zwei Transversalen von  $\mathcal{D}$  in höchstens einem Punkt und  $\mathcal{D}$  hat höchstens  $sd$  Transversalen. Gleichheit gilt genau dann, wenn  $\mathcal{D}$  komplettierbar ist; in diesem Fall erhält man die Komplettierung durch Hinzunahme sämtlicher Transversalen. Insbesondere ist die Komplettierung, falls überhaupt möglich, eindeutig.

Der Beweis dieses Satzes ist ziemlich einfach und sei dem Leser überlassen. Schon Bruck [23] hat gezeigt, daß die Schranke in 3.1.6 bestmöglich ist; die Qualität der Schranke in 3.1.3 werden wir im Abschnitt 3.2 untersuchen. Netze mit  $s = (d - 1)^2$  sind von Ostrom [87] untersucht worden, der zeigte, daß ein derartiges Netz höchstens  $2sd$  Transversalen hat und höchstens 2 nicht-isomorphe Komplettierungen gestattet. Der Fall der Gleichheit liefert genau die Theorie der Ableitungen projektiver Ebenen, vgl. etwa Hughes/Piper [61]. Eine noch allgemeinere Konstruktionsmethode für Ebenen ist die Theorie des „net replacement“. Diese Ideen stammen sämtlich von Ostrom; sein Buch [89] ist eine gute Referenz hierfür. Aufgrund der Ergebnisse dieses Abschnitts bietet sich noch folgende nützliche Sprechweise an:

**3.1.7 Definition.**  $\mathcal{D}$  sei ein  $(s, r)$ -Netz.  $\mathcal{D}$  heißt ein Netz mit *kritischer* Defizienz, falls  $s = (d - 1)^2$  ist.  $\mathcal{D}$  heißt ein Netz mit (*sehr*) *kleiner* Defizienz, falls  $s > (d - 1)^2$  gilt (bzw. falls  $p(d - 1) < s$  ist).

## 3.2 Maximale Netze mit kleiner Defizienz

In diesem Abschnitt betrachten wir, wie angekündigt, die Güte der Schranke in Satz 3.1.3. Zunächst eine Definition:

**3.2.1 Definition.**  $\mathcal{D}$  sei ein  $(s, r)$ -Netz mit Defizienz  $d \neq 0$ .  $\mathcal{D}$  heißt *transversalfrei*, wenn  $\mathcal{D}$  keine Transversale besitzt.  $\mathcal{D}$  heißt *maximal*, wenn  $\mathcal{D}$  nicht 1-erweiterbar ist.

Man beachte, daß in dieser (nicht unbedingt üblichen) Terminologie die affinen Ebenen keine maximalen Netze sind, da sie  $d = 0$  haben. Ich spreche in diesem Fall lieber von einem *vollständigen* Netz. Die bekannten Beispiele maximaler Netze



quasigr. Automorphismen oder die Gültigkeit elementarischer Bedingungen für die

#### 4.1 Loops und Netze mit 3 Parallelenklassen

In diesem Abschnitt betrachten wir nur Netze mit 3 Parallelenklassen. Jedes solche Netz ist zu einer gewissen Menge von Quasigruppen äquivalent; umgekehrt liefert jede Quasigruppe ein Netz mit 3 Parallelenklassen nach 1.2.6. Man kann noch erreichen, daß die Quasigruppe ein neutrales Element hat, also eine *Loop* ist. Einer additiv geschriebenen Loop  $L$  ordnet man üblicherweise ein Netz auf  $L \times L$  zu, indem man als Parallelenklassen wählt:

- alle Geraden der Form  $\{(x, y) : x = c\}$ ;
- alle Geraden der Form  $\{(x, y) : y = c\}$ ;
- alle Geraden der Form  $\{(x, y) : y = x + c\}$ .<sup>1)</sup>

Dieses Netz wollen wir  $\mathcal{D}(L)$  nennen. Dieses Verfahren geht im wesentlichen auf Reidemeister [97] zurück. Es gilt der folgende interessante Satz von Baer [1]:

**4.1.1 Satz.** Es seien  $L$  und  $L'$  Loops. Genau dann sind  $\mathcal{D}(L)$  und  $\mathcal{D}(L')$  isomorph, wenn  $L$  und  $L'$  *isotop* sind, d. h., wenn es Bijektionen  $\rho, \sigma, \tau : L \rightarrow L'$  gibt mit  $(x + y)^\rho = x^\sigma + y^\tau$  für alle  $x, y \in L$ .

Wohl die wichtigste geometrische Konfiguration für Netze mit 3 Parallelenklassen ist die Reidemeister-Konfiguration:

die Richtung von  $\alpha$ .  $\mathcal{D}$  heißt *transitiv* bzgl. der Richtung  $G_0$ , wenn es für je zwei Punkte  $p, q$ , die auf einer Geraden aus  $G_0$  liegen, eine strikte Translation  $\alpha$  mit Richtung  $G_0$  gibt, für die  $p^\alpha = q$  ist.

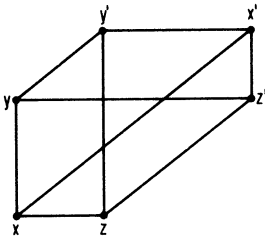
Der folgende Satz stammt im wesentlichen von Reidemeister [97], vgl. auch Pickert [91].

**4.1.4 Satz.**  $L$  sei eine Loop. Dann sind die folgenden Aussagen äquivalent:

- (i)  $L$  ist assoziativ, also eine Gruppe.
- (ii) In  $\mathcal{D}(L)$  gilt die Reidemeister-Bedingung.
- (iii)  $\mathcal{D}(L)$  ist transitiv bzgl. jeder der drei Richtungen.

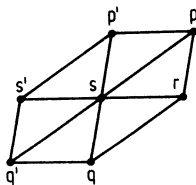
Wir erwähnen noch zwei weitere wichtige Konfigurationen.

**4.1.5 Definition.**  $G_1, G_2, G_3$  seien die Parallelenklassen des Netzes  $\mathcal{D}(L)$ . Die folgende Bedingung heißt die *Thomsen-Bedingung*: Wenn die Geraden  $xx', yy', zz'$  sämtlich zu  $G_1$ , die Geraden  $xy, y'z, x'z'$  sämtlich zu  $G_2$  und die Geraden  $xz$  und  $yz'$  zu  $G_3$  gehören, so gehört auch  $x'y'$  zu  $G_3$ .



**4.1.6 Satz** (Thomsen [115]).  $L$  sei eine Loop. Genau dann ist  $L$  eine kommutative Gruppe, wenn in  $\mathcal{D}(L)$  die Thomsen-Bedingung gilt. Insbesondere folgt aus der Thomsen-Bedingung die Reidemeister-Bedingung für  $\mathcal{D}(L)$ .

**4.1.7 Definition.** Die *Sechseck-Bedingung* für  $\mathcal{D}(L)$  ist die Bedingung, die für  $r' = s$  aus der Reidemeister-Bedingung hervorgeht. Man beachte, daß dann  $p, q', s$  sowie  $p', q, s$  und  $r, s, s'$  jeweils kollinear werden.



**4.1.8 Satz** (Bol [11], Pickert [90]).  $L$  sei eine Loop. Dann sind die folgenden Aussagen äquivalent:

- (i) In  $\mathcal{D}(L)$  gilt die Sechseck-Bedingung.
- (ii) Jede zu  $L$  isotope Loop ist *potenz-assoziativ*, d. h. jedes Element  $x$  erzeugt eine assoziative Unter-Loop.
- (iii) In jeder zu  $L$  isotopen Loop gilt die Identität  $(x + x) + x = x + (x + x)$ .

(iv) In jeder zu  $L$  isotonen Loop  $L'$  gibt es zu jedem Element  $x$  ein In-

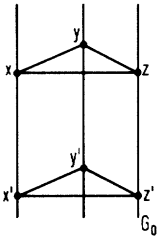
verses  $-x$ , d. h. es gilt  $x + (-x) = (-x) + x = 0$  mit  $0$  als dem neutralen Element von  $L'$ .

Eine ausführliche Diskussion dieser sowie weiterer Bedingungen und Beweise der aufgeführten Sätze findet man bei Pickert [91], vgl. auch Bruck [24].

#### 4.2 Geometrische Konfigurationen in Netzen mit mehr als 3 Parallelenklassen

Die große geometrische und algebraische Bedeutung von Schließungssätzen in affinen (bzw. projektiven) Ebenen ist wohlbekannt, vgl. etwa Pickert [91] und Hughes/Piper [61]. Wir wollen hier nur ganz kurz auf Konfigurationen in Netzen mit mindestens 4 Parallelenklassen eingehen.

**4.2.1 Definitionen.**  $\mathcal{D}$  sei ein  $(s, r)$ -Netz und  $G_0$  eine Parallelenklasse von  $\mathcal{D}$ . Die *Desargues-Bedingung* bzgl.  $G_0$  ist die folgende Bedingung: Sind  $xx'$ ,  $yy'$ ,  $zz'$  Geraden von  $G_0$ , sind weiter  $xy$  und  $x'y'$  sowie  $xz$  und  $x'z'$  jeweils parallele Geraden und ist  $yz$  eine Gerade, so gibt es auch eine Gerade  $y'z'$ , und es gilt  $yz \parallel y'z'$ .



**4.2.2 Satz.**  $\mathcal{D}$  sei ein  $(s, r)$ -Netz. Dann sind die folgenden Bedingungen äquivalent:

- (i)  $\mathcal{D}$  ist transitiv bzgl. der Richtung  $G_0$ .
- (ii)  $\mathcal{D}$  erfüllt die Desargues-Bedingung bzgl.  $G_0$  und die Reidemeister-Bedingung bzgl.  $G_0$  und je zweier anderer Richtungen.
- (iii) Zu  $\mathcal{D}$  gehört eine Menge  $O_1, \dots, O_s$  von orthogonalen lateinischen

Quadraten, für die  $Q_1$  eine Gruppentafel ist und für die jedes  $Q_i$  mit  $i > 1$  aus  $Q_1$  durch eine geeignete Spaltenpermutation hervorgeht.

Einen ausführlichen Beweis hierfür findet man bei Pickert [92]. Interessant ist auch die folgende Aussage, die sich bisher nur implizit in der Literatur findet und im wesentlichen von Jungnickel [64] stammt, vgl. auch [6, X.12.8].

**4.2.3 Satz.** Ein  $(s, r)$ -Netz  $\mathcal{D}$  mit  $G$  als einer Gruppe von auf einer Richtung

$\{B_{rj} : j = 1, \dots, s\}$ , wobei  $B_{ix} = \{(j, x + d_{ij}) : j = 1, \dots, s\}$  und  $B_{rj} = \{(j, x) : x \in G\}$  ist.

Offenbar hat man so wirklich Parallelenklassen definiert. Ferner schneidet jede Gerade  $B_{rj}$  jede Gerade  $B_{ix}$  ( $i < r$ ) genau einmal. Seien schließlich Geraden  $B_{ix}$  und  $B_{i'x'}$  ( $i \neq i' < r$ ) gegeben. Dann ist  $(j, y)$  genau dann ein Schnittpunkt dieser beiden Geraden, wenn  $x + d_{ij} = x' + d_{i'j} = y$  ist. Da  $D$  eine Differenzenmatrix ist, gibt es aher genau ein  $j$  mit  $-x + x' = d_{i'j} - d_{ij}$ , d. h. es existiert genau 1 Schnittpunkt.

Schließlich operiert  $G$  transitiv als Gruppe strikter Translationen mit der Richtung  $G_r$  gemäß  $g : (i, x) \rightarrow (i, x + g)$ .

Die Umkehrung ist ähnlich und sei dem Leser überlassen.

Man kann übrigens zeigen, daß für eine maximale  $(s, r - 1; G)$ -Differenzenmatrix das eben konstruierte Netz transversalfrei ist, siehe [6, X. 12.8]. Zum Abschluß erwähnen wir noch, daß bestimmte, in der Ostromschen Theorie [89] wichtige Netze, die man aus Vektorräumen konstruiert, von Thiele [114] geometrisch charakterisiert worden sind.

## 5 Translationsnetze

Nachdem sich schon im letzten Abschnitt Zusammenhänge zu gewissen Automorphismen von Netzen ergeben haben, sollen in diesem und im nächsten Abschnitt Automorphismengruppen von Netzen betrachtet werden. Diese Frage wird noch nicht sehr lange behandelt; eine allgemeine Theorie, wie sie etwa für affine Ebenen vorliegt, kann man also noch nicht erwarten. Die bisher am besten untersuchte Klasse dürften die Translationsnetze sein, die wir in diesem Abschnitt behandeln.

### 5.1 Grundlagen

Allgemeine Translationsnetze sind explizit zuerst in einem erst einige Jahre später publizierten Manuskript von Sprague [111] um 1979 eingeführt worden; implizit waren sie im Kontext der „Klingenberg-Strukturen“ bereits in Drake/Jungnickel [43] behandelt worden. Da das Studium einzelner „Translationen“ gewisse Schwierigkeiten bereitet, wählt man die folgenden Definitionen.

sehen. Als erstes wollen wir den Begriff „Translationsnetz“ in die Sprache der Gruppentheorie übersetzen.

**5.1.2 Definition.**  $G$  sei eine Gruppe\*) der Ordnung  $s^2$  und  $\mathcal{U} = \{U_1, \dots, U_r\}$  mit  $r \geq 3$  eine Menge von Untergruppen von  $G$  der Ordnung  $s$ .  $\mathcal{U}$  heißt eine  $(s, r)$ -PCP in  $G$  (für „partial congruence partiton“), wenn stets  $|U_i \cap U_j| = 1$  gilt (für  $i \neq j$ ). Die  $U_i$  heißen die *Komponenten* von  $\mathcal{U}$ .

Äquivalent zur letzten Bedingung ist natürlich die Forderung  $U_i U_j = G$  für  $i \neq j$ . Man beachte, daß die  $(s, s+1)$ -PCP's genau die Kongruenzpartitionen sind, mit denen André in seiner Arbeit [0] aus dem Jahre 1954 die Translationsebenen beschrieben hat. PCP's wurden erstmals unter dem Namen „uniforme Klingenberg-Matrizen“ von Drake/Jungnickel [43] verwendet. Wie im Fall von Translations-ebenen beweist man ohne Mühe das folgende Resultat.

**5.1.3 Satz.**  $\mathcal{U}$  sei eine  $(s, r)$ -PCP in der Gruppe  $G$ . Dann ist die Struktur  $\mathcal{D}(\mathcal{U})$  mit Punktmenge  $G$  und Geradenmenge  $\{Ug : U \in \mathcal{U}, g \in G\}$  ein  $(s, r)$ -Netz mit  $G$  als Translationsgruppe. Umgekehrt läßt sich jedes Translationsnetz so beschreiben.

Beispiele von echten Translationsnetzen kann man natürlich einfach durch Weglassen einiger Parallelenklassen aus einer Translationsebene erhalten; dann ist die Translationsgruppe elementar-abelsch. (Leser, die mit den im folgenden auftretenden gruppentheoretischen Grundbegriffen nicht vertraut sind, seien auf das Buch von Huppert [62] verwiesen.) Wir wollen jetzt einige weniger triviale Beispiele angeben, indem wir in einigen nicht-abelschen Gruppen PCP's finden.

**5.1.4 Beispiele.** a)  $H$  sei eine beliebige Gruppe der Ordnung  $s$  und  $G := H \times H$ . Dann bilden  $U_1 = H \times \{1\}$ ,  $U_2 = \{1\} \times H$  und  $U_3 = \{(h, h) : h \in H\}$  eine  $(s, 3)$ -PCP in  $G$ .

b) Es sei  $G = \langle a, b, c, x, y, w \rangle$ , wobei das Quadrat jedes Erzeugers und sämtliche Kommutatoren zweier Erzeuger gleich 1 seien, mit den beiden Ausnahmen  $[x, y] = a$  und  $[x, w] = b$ . Die Untergruppen  $\langle x, y \rangle$ ,  $\langle cx, w \rangle$ ,  $\langle ac, by, aw \rangle$  und  $\langle c, xyw \rangle$  bilden eine  $(8, 4)$ -PCP in  $G$ . Diese Untergruppen sind der Reihe nach zu  $D_4$ ,  $D_4$ ,  $C_2^3$  und  $C_4 \times C_2$  isomorph (Sprague [111]).

c)  $G$  sei die metazyklische Gruppe der Ordnung  $p^4$  vom Exponenten  $p^2$  ( $p$  Primzahl), d. h.  $G = \langle a, b \rangle$  mit  $a^{p^2} = b^{p^2} = 1$  und  $a^b = a^{p+1}$  (siehe Huppert [62, III. 12.6]). Dann bilden die Untergruppen  $U_i = \langle ba^i \rangle$  ( $i = 1, \dots, p$ ) und  $U_{p+1} = \langle a \rangle$  eine  $(p^2, p+1)$ -pcp in  $G$  (Jungnickel [65]).

d) Bestimmte kombinatorische Objekte in den endlichen projektiven Räumen, nämlich die „ $t$ -Teilfaserungen“, liefern eine spezielle Klasse von PCP's, die schon seit 1967 untersucht wird; hier ist  $G$  stets elementar abelsch. Wir werden diese PCP's in den Abschnitten 5.3 und 5.4 betrachten.

Es sei angemerkt, daß die PCP's aus b) und c) maximal sind. Leider muß hieraus nicht unbedingt die Maximalität der zugehörigen Netze folgen. Trotzdem lassen sich unter Zusatzvoraussetzungen aus PCP's oft interessante maximale Netze kon-

\*) In diesem Abschnitt werden die Gruppen multiplikativ geschrieben.



struieren, siehe Abschnitt 5.4. Als nächstes wollen wir eine einfache rekursive Konstruktion für PCP's betrachten, die analog zur MacNeish-Konstruktion aus 2.2.1 ist.

**5.1.5 Lemma.**  $U = \{U_1, \dots, U_r\}$  und  $V = \{V_1, \dots, V_r\}$  seien  $(s, r)$ - bzw.  $(t, r)$ -PCP's in  $G$  bzw.  $H$ . Dann ist  $U \times V = \{U_1 \times V_1, \dots, U_r \times V_r\}$  eine  $(st, r)$ -PCP in  $G \times H$ .

Ich bezeichne im folgenden mit  $T(G)$  die Maximalzahl von Komponenten einer PCP in  $G$ , falls  $G$  quadratische Ordnung hat. Weiter sei  $T(s)$  die Maximalzahl von Komponenten einer PCP in irgendeiner Gruppe der Ordnung  $s^2$ . Man beachte, daß  $T(q) = q + 1$  für Primzahlpotenzen  $q$  gilt. Aus 5.1.5 folgt dann sofort:

**5.1.6 Korollar.** Es sei  $s = q_1 \dots q_n$  die Primzahlpotenzerlegung von  $s$ . Dann gilt  $T(s) \geq \min \{q_i + 1 : i = 1, \dots, n\}$ .

Ich vermute, daß in 5.1.6 stets Gleichheit gilt. Für die Klasse der nilpotenten Gruppen trifft das jedenfalls zu, wie wir in 5.2.2 sehen werden. Zum Abschluß dieser einführenden Betrachtungen wollen wir noch den Zusammenhang zwischen Translationen und strikten Translationen betrachten. Man zeigt ohne Mühe:

**5.1.7 Lemma.**  $U = \{U_1, \dots, U_r\}$  sei eine  $(s, r)$ -PCP in  $G$ . Dann operiert  $U_i^g = g^{-1} U_i g$  regulär auf der Geraden  $U_i g$  von  $\mathcal{D}(U)$ . Insbesondere besteht  $U_i$  aus strikten Translationen ( $\mathcal{D}(U)$  ist dann transitiv bzgl. der Richtung von  $U_i$ ), wenn und nur wenn  $U_i$  normal in  $G$  ist.

Sprague [111] nennt dann die Richtung von  $U_i$  „normal“. Die beiden folgenden Sätze von Sprague [111] zeigen, daß die Existenz normaler Komponenten in einer PCP die Struktur von  $G$  stark einschränkt.

**5.1.8 Satz.**  $U$  sei eine  $(s, r)$ -PCP in  $G$ , für die mindestens 3 Komponenten normal in  $G$  sind. Dann ist  $G$  abelsch und  $\mathcal{D}(U)$  bzgl. jeder Richtung transitiv.

**5.1.9 Satz.**  $U = \{U_1, \dots, U_r\}$  sei eine  $(s, r)$ -PCP in  $G$ . Wenn  $U_1 \triangleleft G$  ist, folgt  $U_2 \cong \dots \cong U_r$ . Ist auch noch  $U_2 \triangleleft G$ , folgt  $G \cong U_1 \times U_2$  und  $U_1 \cong U_2$ .

Die Sätze 5.1.8 und 5.1.9 können als Nichtexistenzsätze angesehen werden. Im folgenden sollen weitere derartige Sätze behandelt werden.

### 5.2 Nichtexistenzsätze

Wir beginnen mit dem folgenden, leicht zu beweisenden Lemma von Sprague [111].

**5.2.1 Lemma.**  $U = \{U_1, \dots, U_r\}$  sei eine  $(s, r)$ -PCP in  $G$ . Es sei  $p$  eine  $s$  teilende Primzahl. Falls die  $p$ -Sylogruppe  $P$  von  $G$  normal ist, gilt

$$r \leq \min \{T(P), T(G/P)\}.$$

$B \in w \in i \dots \{U_i \cap P : i = 1, \dots, r\}$  und  $\{U_i P/P : i = 1, \dots, r\}$  sind PCP's in

$P$  bzw.  $G/P$ .

Direkt aus 5.2.1 und 5.1.5 folgt:

**5.2.2 Korollar (Drake/Jungnickel [43]).**  $G$  sei eine nilpotente Gruppe der Ordnung  $s^2$ . Dann gilt:  $T(G) = \min \{T(P_i) : i = 1, \dots, n\}$ , wobei  $P_1, \dots, P_n$  die Sy-

lowgruppen von  $G$  seien. Insbesondere folgt

$$T(G) \leq \min \{q_i + 1 : i = 1, \dots, n\},$$

wobei  $s = q_1 \dots q_n$  die Primzahlpotenzzerlegung von  $s$  sei.

Sehr nützlich ist auch das folgende Lemma von Sprague [111]:

**5.2.3 Lemma.**  $G$  sei eine Gruppe der Ordnung  $s^2$ , wobei  $s = p^a m$  sei für eine Primzahl  $p$  mit  $m < p$ . Wenn  $G$  zwei Untergruppen  $U, V$  der Ordnung  $s$  mit  $G = UV$  besitzt, ist die  $p$ -Sylowgruppe von  $G$  normal in  $G$ .

Kombiniert man 5.2.1 und 5.2.3, so folgt wegen  $T(p^a) = p^a + 1$ :

**5.2.4 Satz.** Es sei  $s = p^a m$  für eine Primzahl  $p$  mit  $m < p$ . Dann gilt  $T(s) = T(m) \leq m + 1$ .

Insbesondere ist  $T(2q) = 3$  für ungerade Primzahlpotenzen  $q$ . Dieses Resultat läßt sich (auf dem Umweg über Differenzenmatrizen) verstärken (Jungnickel [65]).

**5.2.5 Satz.** Es gilt  $T(s) = 3$  für  $s \equiv 2 \pmod{4}$ .

Der folgende Satz von Jungnickel [65] zeigt, daß eine nichtabelsche Gruppe keine allzugroßen PCP's gestatten kann:

**5.2.6 Satz.**  $G$  sei eine nicht-abelsche Gruppe der Ordnung  $s^2$  und  $p$  sei die kleinste  $s$  teilende Primzahl. Dann gilt:

$$T(G) \leq \left\lfloor \frac{2s - 2}{p + 1} \right\rfloor + 2,$$

wobei  $\lfloor x \rfloor$  die größte ganze Zahl  $\leq x$  bezeichnet.

Schränkt man sich auf nilpotente Gruppen  $G$  ein, so reduziert sich die Bestimmung von  $T(G)$  nach 5.2.2 auf die Bestimmung von  $T(P)$  für  $p$ -Gruppen  $P$ . Ebenfalls aus [65] stammt die folgende Schranke:

**5.2.7 Satz.**  $P$  sei eine Gruppe der Ordnung  $p^{2n}$ . Wenn  $P$  nicht elementar-abelsch ist, gilt  $T(P) \leq p^{n-1} + \dots + p + 1$ .

Für  $n = 2$  ist diese Schranke nach Beispiel 5.1.4.b) bestmöglich. Falls  $P$  als abelsch vorausgesetzt wird, gibt es wesentlich bessere Schranken, die wieder aus [65] stammen.

**5.2.8 Satz.**  $P$  sei eine abelsche Gruppe der Ordnung  $p^{2n}$  und  $U$  eine  $(p^n, r)$ -PCP in  $P$ . Ferner sei  $U$  der Isomorphietyp der Komponenten von  $U$ , vgl. 5.1.9. Wenn der Exponent  $p^a$  von  $U$  genau  $h$ -mal unter den Invarianten von  $U$  auftritt, gilt  $T(P) \leq p^h + 1 \leq p^{\lfloor n/a \rfloor} + 1$ . Insbesondere gilt stets  $T(P) \leq p^{\lfloor n/2 \rfloor} + 1$ , sofern  $P$  nicht elementar abelsch ist.

Wir wollen noch einige Folgerungen aus 5.2.7 und 5.2.8 betrachten. 5.2.6 und 5.2.8 zusammen ergeben:

**5.2.9 Korollar.**  $G$  sei eine Gruppe der Ordnung  $s^2$  und  $p$  die kleinste  $s$  teilende Primzahl. Wenn  $T(G) > \lfloor (2s - 2)/(p + 1) \rfloor + 2$  ist, ist  $s$  eine Potenz von  $p$  und  $G$  elementar-abelsch.

Aus 5.2.2 und 5.2.8 folgt

**5.2.10 Korollar.**  $G$  sei eine abelsche Gruppe der Ordnung  $s^2$  und  $T(G) > \sqrt{s} + 1$ . Dann ist  $s$  eine Primzahlpotenz und  $G$  elementar-abelsch.

Schließlich folgt aus 5.2.7 noch

**5.2.11 Korollar.**  $G$  sei eine nilpotente Gruppe der Ordnung  $s^2$ . Genau dann nimmt  $T(G)$  die in 5.2.2 angegebene Schranke an, wenn jede Sylowgruppe von  $G$  elementar-abelsch ist.

Allen in allem sehen die aufgeführten Resultate nicht  $\Delta = 1, 2, 3, \dots, s-1, s, s+1, \dots, 2s-1, 2s$

Komponentenzahl einer maximalen 1-Teilfaserung stammen von Glynn [50], Mesner [85] und Bruen [28].

**5.3.4 Satz.**  $F$  sei eine maximale 1-Teilfaserung von  $PG(3, q)$  mit  $r$  Komponenten. Dann gilt  $2q \leq r \leq q^2 - \sqrt{q}$ . Falls  $q$  kein Quadrat ist, kann die obere Schranke zu  $p(d-1) > q^2$  verbessert werden, wobei  $p$  das in 3.1.3 definierte Polynom sei.

Alle bekannten Beispiele von maximalen 1-Faserungen kleiner Defizienz (also  $d \leq q$ ) haben die folgenden Parameter:

**5.3.5 Beispiele.** Für  $q \geq 3$  existiert stets eine maximale 1-Teilfaserung mit Defizienz  $d = q$  in  $PG(3, q)$  (Bruen [26]). Für  $q \geq 4$  existiert auch eine maximale 1-Teilfaserung mit  $d = q - 1$  (Bruen [26], Bruen/Thas [33], Freeman [49]).

Die Beweise hierfür sind ziemlich kompliziert. Bruens Methode besteht darin, aus einer 1-Faserung spezieller Art zunächst  $q + 1$  Geraden zu entfernen und dann durch Hinzufügen von 1 oder 2 geschickt gewählten anderen Geraden eine maximale 1-Faserung zu erhalten. Der verhältnismäßig einfache Fall  $d = q$  wird nach dieser Methode auch in [6, X. § 9] behandelt. Besonders schwierig ist der Fall  $d = q - 1$  für eine gerade Primzahlpotenz  $q$ ; hier findet man bei Jungnickel [71] einen verhältnismäßig einfachen Alternativbeweis. Für Beispiele maximaler 1-Faserungen mit  $d > q$  (ein Fall, der uns hier nicht weiter interessiert, weil man nicht weiß, ob man so maximale Netze erhalten kann) verweisen wir etwa auf Beutelspacher [8]. Wir wollen schließlich noch kurz den Fall  $t > 1$  betrachten. Zunächst erwähnen wir wieder die bekannten Schranken, die hier von Beutelspacher [8] und Bruen [29] stammen.

$PG(2t + 1, q)$ . Dann gilt  $q + \sqrt{q} \leq r \leq q^{t+1} - \sqrt{q}$ ; für  $q \geq 4$  kann die untere Schranke zu  $r \geq q + \sqrt{q} + 1$  verbessert werden.

**5.3.7 Beispiele.** Es sei  $t = 2a + 1$  mit  $a \geq 1$ . Dann gibt es für  $q \geq 4$  stets eine maximale  $t$ -Teilfaserung der Defizienz  $d = q^{a+1}$  in  $PG(2t + 1, q)$  (Beutels-

Der folgende Satz zeigt, daß Translationsnetze kleiner Defizienz fast immer durch  $t$ -Teilfaserungen beschrieben werden können.

**5.4.2 Satz** (Jungnickel [71]).  $\mathcal{D}$  sei ein Translationsnetz kleiner Defizienz mit Translationsgruppe  $G$ . Falls die Ordnung von  $\mathcal{D}$  nicht 2 oder 4 ist, ist  $G$  elementar-abelsch.

Für Ordnungen  $\geq 16$  folgt Satz 5.4.2 aus Korollar 5.2.9; für kleinere Ordnungen sind detaillierte Überlegungen notwendig. Satz 5.4.2 ist insofern wichtig, als die Beweise der folgenden Sätze im Allgemeinen die Kommutativität von  $G$  verwenden. Mit 5.4.1 und 5.4.2 konnte ich in [71] das folgende Satz beweisen:

**5.4.3 Satz.**  $\mathcal{D}$  sei ein komplettierbares Translationsnetz kleiner Defizienz mit Translationsgruppe  $G$  und  $E$  die Komplettierung von  $\mathcal{D}$ . Dann ist  $E$  eine Translationsebene und  $G$  die Translationsgruppe von  $E$ .

Mit dem Bruckschen Komplettierungssatz 3.1.3 erhält man sofort ein Ergebnis, das zuerst von Bruen [28] unter stärkeren Voraussetzungen bewiesen worden ist.

**5.4.4 Korollar.**  $\mathcal{D}$  sei ein Translationsnetz sehr kleiner Defizienz. Dann kann  $\mathcal{D}$  zu einer Translationsebene komplettiert werden.

Aus 5.4.3 folgt auch unmittelbar, daß jede maximale  $t$ -Faserung kleiner Defizienz in  $\text{PG}(2t+1, p)$  für Primzahlen  $p$  ein nicht komplettierbares Netz liefert. Für genauere Untersuchungen ist das folgende Lemma von Ostrom [88] sehr nützlich:

**5.4.5 Lemma.**  $U$  sei eine PCP mit mindestens einer normalen Komponente. Dann ist  $\mathcal{D}(U)$  maximal, wenn und nur wenn es transversalfrei ist.

Sei jetzt  $U$  eine maximale  $(s, r)$ -PCP kleiner Defizienz. Mit den bereits erwähnten Resultaten kann man nun verhältnismäßig einfach beweisen, daß  $\mathcal{D}(U)$   $x$ -erweiterbar ist, wobei  $x \neq 1$  ein Teiler von  $s$  ist. Wenn  $s = p^2$  für eine Primzahl  $p$  gilt, muß also  $\mathcal{D}(U)$  komplettierbar sein im Widerspruch zu Satz 5.4.3. Also gilt (Jungnickel [71]):

**5.4.6 Satz.**  $F$  sei eine maximale 1-Teilfaserung kleiner Defizienz in  $\text{PG}(3, p)$ , wobei  $p$  eine Primzahl ist. Dann ist das Netz  $\mathcal{D}(F)$  transversalfrei.

gen erhalten, für die das zugehörige Netz in eine aus der ursprünglichen Ebene durch Ableitung entstandene Translationsebene einbettbar ist. Die in 5.3.7 erwähnten Beispiele sind so konstruiert worden.

### 5.5 Weitere Komplettierungssätze

Abschließend möchte ich noch zwei Resultate über die Komplettierung von Translationsnetzen erwähnen. Wie schon in Abschnitt 3.1 ausgeführt, hat Ostrom [87] gezeigt, daß ein Netz mit kritischer Defizienz (also Ordnung  $q^2$ , Defizienz  $q + 1$ ) höchstens zwei nicht-isomorphe Komplettierungen besitzt. Für Primzahlen  $p$  ist in diesem Zusammenhang das folgende Resultat von Bruen/Silverman [32] interessant:

**5.5.1 Satz.**  $\mathcal{D}$  sei ein Netz der Ordnung  $p^2$  ( $p$  Primzahl) und der Defizienz  $d < 2p - 2$ . Dann gibt es höchstens zwei nicht-isomorphe Translationsebenen, die Komplettierungen von  $\mathcal{D}$  sind.

Sei jetzt  $\mathcal{D}$  ein Netz der Ordnung  $p$  ( $p$  Primzahl). Wenn  $\mathcal{D}$  ein Translationsnetz ist, kann man  $\mathcal{D}$  natürlich in die desarguessche affine Ebene  $AG(2, p)$  einbetten. Weitere Einbettungen sind nur für kleine Netze denkbar:

**5.5.2 Satz (Bruen [28]).**  $\mathcal{D}$  sei ein Translationsnetz der Ordnung  $p$  ( $p$  Primzahl) und der Defizienz  $d < \frac{p+3}{2}$ . Dann ist  $AG(2, p)$  die einzige Komplettierung von  $\mathcal{D}$  und es gilt  $\text{Aut } \mathcal{D} \leq \text{Aut } AG(2, p)$ .

Dieser Satz wäre natürlich trivialerweise richtig, wenn die bekannte Vermutung zutrifft, daß jede Ebene von Primzahlordnung desarguessch ist. Als letztes sei noch der interessante Übersichtsartikel von Bruen [30] erwähnt.

## 6 Gruppen auf TD's und Netzen

Nachdem ich bereits im vorigen Kapitel ziemlich ausführlich Netze mit einer auf der Punktmenge regulären Translationsgruppe behandelt habe, will ich in diesem Abschnitt einige weitere Arten von Automorphismengruppen von Netzen bzw. TD's behandeln. Hier handelt es sich allerdings mehr um Klassen von Beispielen als um eine theoretische Einordnung.

### 6.1 Klassenreguläre TD's

**6.1.1 Definition.**  $T$  sei ein  $(s, r)$ -TD und  $G \leq \text{Aut } T$ . Dann heißt  $T$  *klassenregulär* bzgl.  $G$ , wenn  $G$  die Punktklassen von  $T$  invariant läßt und auf jeder Punktklasse regulär operiert (vgl. 1.2.5).

Man sieht leicht die Gültigkeit des folgenden Lemmas ein.

**6.1.2 Lemma.**  $T$  sei ein bzgl. der Gruppe  $G$  klassenreguläres TD. Dann operiert  $G$  semiregulär auf der Geradenmenge von  $T$  (d. h., nur die Identität hat Fixgeraden). Die Bahnen von  $G$  auf der Geradenmenge sind Parallelklassen von  $T$ , d. h.,  $T$  ist *auflösbar* (vgl. 2.3.3).

**6.1.3 Satz (Jungnickel [63]).** Ein bzgl. der Gruppe  $G$  klassenreguläres  $(s, r)$ -TD existiert genau dann, wenn es eine  $(s, r; G)$ -Differenzenmatrix gibt (vgl. 2.1.2).

Der Beweis ist im wesentlichen dual zu dem von Satz 4.3.3. Der weiteren Parallelen-

klasse des dort konstruierten Netzes entspricht hier die Auflösbarkeit des TD's, aus der man eine weitere Punktmenge erhalten kann. Die geometrische Deutung über Reidemeister- und Desargueskonfigurationen habe ich schon in Satz 4.2.3 vorgenommen; selbstverständlich kann man diesen Satz dualisieren und für TD's aufschreiben. Differenzenmatrizen und klassenreguläre TD's sind also eine Verallgemeinerung des Begriffs der  $(p, L)$ -Transitivität einer projektiven Ebene (für  $p \in L$ ), wie man über die duale Interpretation von Satz 4.2.3 leicht einsieht. Man kann dies auch direkt zeigen, vgl. Jungnickel [63]. Die Theorie der Differenzenmatrizen ist

### 6.3 Punkt- und fahnenreguläre TD's

Vor einigen Jahren fragte Lenz nach der Existenz von TD's mit punktregulärer Automorphismengruppe. Satz 6.2.2 gibt Beispiele hierfür im symmetrischen Fall  $s = r$ . Weitere Beispiele erhält man aus Frobeniusgruppen:

**6.3.1 Satz (Jungnickel [68]).**  $G$  sei eine Frobeniusgruppe des Geraden  $s$  mit Frobeniuskern  $N$  und Frobeniuskomplement  $A$  der Ordnung  $r$ . Dann ist  $\mathcal{D}(G)$  mit Punktmenge  $G$  und Geradenmenge  $\{mAn : m, n \in N\}$  ein  $(s, r)$ -TD mit  $G$  als punktregulärer Automorphismengruppe ( $G$  operiert durch Rechtstranslation).

Man kann zeigen, daß  $\mathcal{D}(G)$  sogar eine fahnenreguläre (also auf inzidenten Punkt-Geraden-Paaren reguläre) Automorphismengruppe isomorph zum halbdirekten Produkt von  $A$  mit  $N \times N$  zuläßt. Außerdem habe ich in [68] gezeigt, daß die Singergruppen aus Satz 6.2.2 ebenfalls in eine fahnenreguläre Gruppe eingebettet werden können. Frobeniusgruppen existieren insbesondere für jede Primzahlpotenz  $s$  (als Grad) und jeden Teiler  $r$  von  $s - 1$  (als Ordnung des Frobeniuskomplements). Für jedes solche Paar  $(s, r)$  gibt es jedoch noch mindestens ein weiteres, nichtisomorphes  $(s, r)$ -TD mit einer punktregulären Gruppe, die ebenfalls in eine fahnenreguläre Gruppe eingebettet werden kann, siehe [68]. Vor kurzem hat Schulz [101] eine weitere Klasse von TD's aus Frobeniusgruppen konstruiert; wie in 6.3.1 operiert auch hier die Frobeniusgruppe durch Rechtstranslation. Schulz konnte auch beachtliche Fortschritte hinsichtlich einer Klassifikation aller TD's, die eine Frobeniusgruppe als Translationsgruppe zulassen, erzielen. Dagegen scheint eine Klassifikation aller fahnenregulären TD's in Anbetracht der verschiedenartigen Beispielsklassen zur Zeit noch aussichtslos.

Wie man sieht, sind die Parameter  $(s, r)$  eines  $(s, r)$ -TD's durch die Ordnung  $r$  des Frobeniuskomplements und die Ordnung  $s$  des Geraden  $s$  bestimmt.



tion auf  $\mathcal{B}$  (die *Parallelität*  $\parallel$ ), für die jede Äquivalenzklasse eine Zerlegung der Punktmenge ist. Schließlich sollen sich je zwei nicht-parallele Blöcke in genau  $\mu$  Punkten schneiden. Wenn  $\mathcal{B}$  in  $r$  Parallelenklassen zerfällt, heißt  $\mathcal{D} = (\mathcal{P}, \mathcal{B}, \parallel)$  ein  $(s, r; \mu)$ -Netz (ausführlicher: ein *Netz* der *Ordnung*  $s$ , des *Grades*  $r$  und vom *Index*  $\mu$ ).

In der Sprache der Design-Theorie sind die  $(s, r; \mu)$ -Netze genau die affinen 1-Designs, vgl. Beth/Jungnickel/Lenz [6]. Die duale Struktur zu einem  $(s, r; \mu)$ -Netz heißt ein  $(s, r; \mu)$ -TD. Ich erwähne zunächst eine Schranke für  $r$ , die von vielen Autoren in verschiedenen äquivalenten Situationen (z. B. für eine entsprechende Verallgemeinerung der OA's aus 1.1.3) gefunden worden ist. Zum ersten Mal wurde sie wohl von Plackett/Burmann [93] bewiesen.

**7.1.2 Satz.**  $\mathcal{D}$  sei ein  $(s, r; \mu)$ -Netz. Dann gilt  $r \leq \frac{s^2\mu - 1}{s - 1}$  mit Gleichheit

genau dann, wenn je zwei Punkte von  $\mathcal{D}$  auf genau  $\lambda = \frac{s\mu - 1}{s - 1}$  Blöcken liegen (d. h.,

Einen Beweis hierfür findet man z. B. in [6, II.8.8]. Falls  $r = \frac{s^2\mu - 1}{s - 1}$  ist, muß natürlich  $s - 1$  ein Teiler von  $\mu - 1$  sein. Andernfalls läßt sich die Schranke aus 7.1.2 etwas verbessern:

**7.1.3 Satz (Bose/Bush [13]).**  $\mathcal{D}$  sei ein  $(s, r; \mu)$ -Netz mit  $\mu - 1 = a(s - 1) + b$  für ein  $b$  mit  $0 < b < s - 1$ . Dann gilt  $r \leq s\mu + \mu + a - \rho$ , wobei  $\rho = -(s - b - \frac{1}{2}) + \sqrt{s(s - 1 - b) + \frac{1}{4}}$  ist.

Einen Beweis für diesen Satz und einige Beispiele, für die die angegebene Schranke für  $r$  angenommen wird, findet man in [6, X. § 6]. Die Konstruktion dieser Beispiele werde ich in 7.2.7 skizzieren. Wenn es in einem Netz unverbundene Punktepaare gibt, können diese Schranken weiter verstärkt werden. Das folgende Resultat stammt von Hine/Mavron [58], siehe auch [6, II.8.18].

**7.1.4 Satz.**  $\mathcal{D}$  sei ein  $(s, r; \mu)$ -Netz. Wenn es in  $\mathcal{D}$  unverbundene Punktepaare gibt, gilt  $r \leq s\mu$ . Im Falle der Gleichheit induziert das Unverbundensein auf der Punktmenge eine Äquivalenzrelation (die Äquivalenzklassen seien als *Punkt-klassen* bezeichnet).

**7.1.5 Definition.** Ein *symmetrisches*  $(s, s\mu; \mu)$ -Netz ist ein Netz, dessen duale Struktur ebenfalls ein  $(s, s\mu; \mu)$ -Netz ist. Mit anderen Worten: Die Punktklassen aus 7.1.4 haben alle die Größe  $s$  und je zwei Punkte in verschiedenen Klassen haben genau  $\mu$  Verbindungsblöcke.

Man kann noch zeigen, daß die zweite Bedingung automatisch erfüllt ist, wenn die Punktklassen Größe  $s$  haben (Hine/Mavron [58], Jungnickel [63]).

**7.2.1 Satz.** Es sei  $\mu > 1$ . Dann gibt es für jedes  $s$  ein  $(s, 7; \mu)$ -Netz.

Es sind jedoch einige weitere Klassen von Netzen mit großem  $r$  bekannt. Zunächst erwähne ich alle bekannten Parameter, für die  $r$  die Schranke aus 7.1.2 annimmt.

**7.2.2 Beispiele.** Es gibt ein  $(s, r; \mu)$ -Netz mit  $r = \frac{s^2\mu - 1}{s - 1}$  mindestens in den folgenden Fällen:

a)  $s$  Primzahlpotenz,  $\mu = s^{d-2}$  für eine natürliche Zahl  $d \geq 2$ . (Beispiele erhält man, indem man die Punkte und Hyperebenen im affinen Raum  $AG(d, q)$  betrachtet; es gibt jedoch weitere Beispiele. Vor kurzem haben Jungnickel/Vedder [73] gezeigt, daß für  $q \neq 2$  stets mindestens 3 nicht-isomorphe Beispiele existieren, vgl. auch Mavron [84].)

b)  $s = 2$  und  $2\mu$  Ordnung einer Hadamard-Matrix. (Eine Einführung in die Theorie der Hadamard-Matrizen findet man z. B. in [6, I. § 9]. Eine bekannte Vermutung besagt, daß derartige Matrizen für jede durch 4 teilbare Ordnung existieren. Ein neuerer Übersichtsartikel ist der von Hedayat/Wallis [57].)

Man vermutet, daß hiermit bereits alle möglichen Parameter aufgeführt sind; ein sehr interessanter Übersichtsartikel über die hier vorliegenden „affinen Blockpläne“ stammt von Shrikhande [104].

Weitere Beispiele von Netzen mit großem  $r$  erhält man aus den symmetrischen Netzen. Hier ist folgendes bekannt:

**7.2.3 Beispiele.** Ein symmetrisches  $(s, s\mu; \mu)$ -Netz existiert mindestens in den folgenden Fällen:

a)  $p$  Primzahl,  $s = p^i$ ,  $\mu = p^j$  ( $i \geq 1, j \geq 0$  beliebig) (Bose/Bush [13]);

b)  $s$  Primzahlpotenz,  $\mu = 2$  (Jungnickel [63]);

c)  $s$  Primzahlpotenz,  $\mu = s - 1$  Primzahlpotenz (Rajkundlia [96], Seberry [102]);

d)  $s = 3, \mu = 4$  (Raukunklia [96]).

Dazu kommt folgende rekursive Konstruktion: Aus der Existenz für  $(s, \mu)$  und für  $(s, \mu')$  folgt die für  $(s, s\mu\mu')$  (Shrikhande [103]).

Diese Konstruktionen erfolgen am einfachsten über eine Verallgemeinerung der Differenzenmatrizen aus 2.1.2:

**7.2.4 Definition.**  $G$  sei eine Gruppe der Ordnung  $s$ . Eine  $(s, r; \mu)$ -Differenzenmatrix über  $G$  ist eine  $(r \times s\mu)$ -Matrix  $D = (d_{ij})$  mit Einträgen aus  $G$ , so daß für  $h \neq i$  ( $h, i = 1, \dots, r$ ) stets unter den Differenzen  $d_{hj} - d_{ij}$  ( $j = 1, \dots, s$ ) jedes Element von  $G$  genau  $\mu$ -mal vorkommt.

Dann gilt (Jungnickel [63]):

**7.2.5 Satz.**  $D$  sei eine  $(s, r; \mu)$ -Differenzenmatrix. Dann gilt  $r \leq s\mu$  mit Gleichheit genau dann, wenn auch  $-D^T$  eine Differenzenmatrix ist ( $D$  heißt dann eine *verallgemeinerte Hadamard-Matrix*). Aus der Existenz von  $D$  folgt die Existenz eines  $(s, r + 1; \mu)$ -Netzes und für  $r = s\mu$  eines symmetrischen  $(s, s\mu; \mu)$ -Netzes.

Den Beweis findet man in [63] oder in [6, VIII. § 3]. Ich will kurz zeigen, wie man nun etwa die Beispiele 7.2.3.a) leicht konstruieren kann. Wie in § 2.1 erläutert, ist

die Multiplikationstafel  $M$  von  $GF(p^{i+j})$  eine  $(p^{i+j}, p^{i+j}; 1)$ -Differenzenmatrix über  $EA(p^{i+j}) =: H$ . Sei  $N$  eine Untergruppe der Ordnung  $p^j$  von  $H$ . Dann ist das Bild von  $M$  unter dem kanonischen Epimorphismus von  $H$  auf  $G := H/N$  eine  $(p^i, p^{i+j}; p^j)$ -Differenzenmatrix.

Oft kann man aus einem symmetrischen Netz noch wesentlich größere Netze erhalten. Dazu ist der folgende Satz von Jungnickel/Sane [72] wichtig, dessen Grundidee auf Shrikhande [103] zurückgeht:

**7.2.6 Satz.**  $\mathcal{D}$  sei ein symmetrisches  $(s, s\mu; \mu)$ -Netz. Genau dann läßt sich  $\mathcal{D}$  durch Hinzufügen von  $r \geq 3$  Parallelenklassen zu einem  $(s, s\mu + r; \mu)$ -Netz  $\mathcal{D}'$  erweitern, wenn  $s$  ein Teiler von  $\mu$  ist und wenn es ein  $(s, r; \mu/s)$ -Netz  $E$  gibt.

**Beweisskizze.** Man wählt eine Bijektion  $\alpha$  von der Punktmenge von  $E$  auf die Menge der Punktklassen von  $\mathcal{D}$ . Als neue Blöcke fügt man zu  $\mathcal{D}$  die Mengen  $B^\alpha = \bigcup_{p \in B} p^\alpha$  für jeden Block  $B$  von  $\mathcal{D}$  hinzu. Dies zeigt den konstruktiven Teil. Für

Einzelheiten und die Umkehrung verweise sich auf [6, X.11.4].

Man überlegt sich leicht, daß das Netz  $\mathcal{D}'$  aus 7.2.6 genau dann maximal\*) ist, wenn dies für  $E$  gilt. Es ist ebenfalls leicht einzusehen, daß jedes symmetrische Netz mit  $s \nmid \mu$  sich um eine, aber nicht um 2 Parallelenklassen erweitern läßt. Durch rekursive Anwendung von 7.2.6 folgt daher

**7.2.7 Satz** (Jungnickel/Sane [72]).  $s$  und  $t$  seien natürliche Zahlen mit  $s \geq 2$  und  $s \nmid t$ . Falls für jedes  $n \geq 0$  eine symmetrisches  $(s, ts^{n+1}; ts^n)$ -Netz existiert, gibt es ein maximales  $(s, t(s^{n+1} + s^n + \dots + s) + 1; ts^n)$ -Netz (für alle  $n$ ).

Wegen 7.2.3 kann man in 7.2.7 wenigstens die folgenden Fälle erreichen: a)  $s = p^i$ ,  $t = p^j$  ( $p$  Primzahl,  $i > j$ ); b)  $s$  ungerade Primzahlpotenz,  $t = 2$ ; c)  $s$  und  $t = s - 1$  Primzahlpotenzen; d)  $s = 3$ ,  $t = 4$ . Man beachte, daß die in 7.2.7 konstruierten Netze nie die Schranke aus 7.1.2 erreichen; die eben in b) genannten Beispiele erreichen aber die Bose-Bush-Schranke aus 7.1.3. In den angegebenen Beispielen ist auch  $s - 1$  kein Teiler von  $\mu - 1$ ; große maximale Netze, die diese Bedingung erfüllen, behandle ich im nächsten Teilabschnitt.

### 7.3 Komplettierung

In diesem Teilabschnitt sei  $\mathcal{D}$  stets ein  $(s, r; \mu)$ -Netz, für welches  $s - 1$  ein Teiler von  $\mu - 1$  ist. Wegen 7.1.2 ist die folgende (zu 3.1.1 analoge) Definition sinnvoll:

**7.3.1 Definition.** Die Defizienz von  $\mathcal{D}$  ist die Zahl  $d = \frac{s^2\mu - 1}{s - 1} - r$ . Wenn

$\mathcal{D}$  durch Hinzufügen von  $d$  Parallelenklassen zu einem  $(s, r + d; \mu)$ -Netz erweitert werden kann, heißt  $\mathcal{D}$  *komplettierbar*.

Das Komplettierungsproblem für Netze mit  $\mu > 1$  ist offenbar sehr viel schwieriger als das im Fall  $\mu = 1$ . Vollständig gelöst sind nur die Fälle  $d = 1$  und  $d = 2$ .

**7.3.2 Satz.** Für  $d = 1$  ist  $\mathcal{D}$  stets komplettierbar (Shrikhande/Bhagwandas [105]). Für  $d = 2$  und  $s \neq 4$  ist  $\mathcal{D}$  ebenfalls komplettierbar (Shrikhande/Singhi [106]).

\*) Dieser Begriff ist analog zu 3.2.1 zu definieren

Einen verhältnismäßig einfachen (aber immer noch umfangreichen) Beweis für diesen Satz, der im wesentlichen von Jungnickel/Sane [72] stammt, findet man in Beth/Jungnickel/Lenz [6, X. § 10]. Bereits der folgende Satz benötigt zum Beweis „stark reguläre Multigraphen“:

**7.3.4 Satz** (Shrinkhande/Singhi [107]). Für  $d = 3$  und  $s \geq 104$  ist  $\mathcal{D}$  komplettierbar.

Im übrigen ist für  $d \geq 4$  nur noch bekannt, daß  $\mathcal{D}$  für  $d \leq 6$  und  $s = 2$  komplettierbar ist (Verheiden [119]). Der folgende Satz von Jungnickel/Sane [72] zeigt, daß das Komplettierungsproblem für  $\mu > 1$  in der Tat mindestens so schwer ist wie das für  $\mu = 1$ :

**7.3.4 Satz.** Es sei  $s$  eine Primzahlpotenz. Wenn es ein maximales Netz der Ordnung  $s$  und der Defizienz  $d$  für den Index  $\mu_0 = 1$  gibt, so gilt das auch für jeden Index  $\mu$  der Form  $\mu = s^n$ .

Zum Beweis verwendet man wieder 7.2.6. Beispiele erhält man nun mit den Resultaten aus Abschnitt 3; z. B. können wir für  $s \equiv 0$  oder  $1 \pmod{4}$  stets  $d = s - 2$  wählen (3.3.1 und 3.3.2). Insbesondere gibt es für  $s = 4$  ein maximales Netz der Defizienz 3 und des Index  $4^n$  für alle  $n$ ; die Ausnahme in Satz 7.3.2 ist also notwendig.

## 7.4 Charakterisierungen

Geometrische Konfigurationen (mit denen man ja für  $\mu = 1$  z. B. die „klassischen“ affinen Ebenen, also die desarguesschen, charakterisiert) scheinen für allgemeine Netze noch nicht untersucht zu sein. Man hat hier aber Charakterisierungen „klassischer“ Beispiele durch kombinatorische Bedingungen oder Transitivitätseigenschaften ihrer Automorphismengruppen. Wir benötigen eine Definition:

**7.4.1 Definition.**  $p$  und  $q$  seien zwei verbundene Punkte in einer Inzidenzstruktur  $\mathcal{D}$ . Die *Gerade* durch  $p$  und  $q$  ist der Schnitt aller mit  $p$  und  $q$  inzidenten Blöcke.

Man beachte, daß diese Definition für Netze mit  $\mu = 1$  mit der alten Terminologie übereinstimmt. Ferner erhält man für die Netze, die aus den affinen Räumen  $AG(d, q)$  wie in 7.2.2.a) konstruiert sind, tatsächlich den üblichen Geradenbegriff. Der Leser überzeuge sich, daß je zwei verbundene Punkte auf einer eindeutig bestimmten Geraden liegen, falls die Anzahl der Verbindungsblöcke für je zwei verbundene Punkte in  $\mathcal{D}$  konstant ist. Die affinen Räume können nun wie folgt charakterisiert werden:

**7.4.2 Satz** (Dembowski [35]).  $\mathcal{D}$  sei ein  $(s, r; \mu)$ -Netz mit  $r = \frac{s^2\mu - 1}{s - 1}$  und  $s > 2$ . Dann sind die folgenden Bedingungen äquivalent:

- (i)  $\mathcal{D}$  besteht aus den Punkten und Hyperebenen eines affinen Raumes  $AG(d, q)$ .
- (ii) Jede Gerade von  $\mathcal{D}$  hat genau  $s$  Punkte.
- (iii)  $\text{Aut } \mathcal{D}$  operiert transitiv auf nicht-kollinearen Punktetripeln.

Die Voraussetzungen von 7.4.2 können noch etwas abgeschwächt werden; außerdem gibt es weitere äquivalente Bedingungen (z. B. über „Ebenen“). Auch der Fall

$s = 2$  kann behandelt werden (Dembowski [76]). Eine ausführliche Darstellung dieses Themas findet man in Beth/Jungnickel/Lenz [6, XII. § 3]. Ich will jetzt noch einen analogen Satz für symmetrische Netze angeben. Die klassischen Beispiele erhält man hier, indem man aus dem projektiven Raum  $PG(d, q)$  eine Hyperebene  $H$  mit allen ihren Punkten und einen Punkt  $p \in H$  mit allen seinen Hyperebenen entfernt und die übrigen Punkte und Hyperebenen als Punkte und Blöcke wählt\*). Dann gilt der folgende Satz, den ich der Einfachheit halber wieder nur für  $s > 2$  angebe:

**7.4.3 Satz** (Mavron [83]). Ein symmetrisches  $(s, s\mu; \mu)$ -Netz  $\mathcal{D}$  mit  $s > 2$  ist genau dann aus einem projektiven Raum  $PG(d, q)$  konstruiert (wie eben beschrieben), wenn jede Gerade von  $\mathcal{D}$  genau  $s$  Punkte hat.

Für weitere äquivalente Eigenschaften (z. B. Transitivitätsforderungen) verweise ich auf Jungnickel [67]. Allgemeine Aussagen über die Anzahl nichtisomorpher Netze mit den Parametern aus 7.4.2 bzw. 7.4.3 findet man bei Mavron [84].

## 7.5 Translationsnetze

In diesem und dem nächsten Teilabschnitt will ich Gruppen von  $(s, r; \mu)$ -Netzen betrachten und wieder mit *Translationsnetzen* beginnen, die genau wie in 5.1.1 definiert sind. Wie in 5.1.3 sind Translationsnetze und PCP's äquivalent, wenn man definiert:

**7.5.1 Definition.**  $G$  sei eine Gruppe der Ordnung  $s^2\mu$ . Eine Menge  $U = \{U_1, \dots, U_r\}$  von Untergruppen der Ordnung  $s\mu$  von  $G$  heißt eine  $(s, r; \mu)$ -PCP in  $G$ , wenn stets  $|U_i \cap U_j| = \mu$  gilt (für  $i \neq j$ ).

Beispiele erhält man gemäß 7.2.2.a), da die affinen Räume offenbar Translationsnetze ergeben. Einige rekursive Verfahren, die es unter anderem gestatten, symmetrische  $(p^i, p^{i+j}; p^j)$ -Translationsnetze ( $i, j$  beliebig) sowie Translationsnetze mit den Parametern aus 7.2.7 für  $s = p^i$  und  $t = p^j$  ( $i > j$ ) für Primzahlen  $p$  zu konstruieren, findet man bei Jungnickel [65]. Weiter gilt eine Analogon von Satz 5.2.2 (Drake/Jungnickel [43]), das die Existenzfrage für PCP's in nilpotenten Gruppen wieder auf den Fall von  $p$ -Gruppen zurückführt. Von besonderem Interesse ist dann die folgende Verallgemeinerung von Satz 5.2.7:

**7.5.2 Satz** (Jungnickel [65]).  $U$  sei eine  $(p^i, r; p^j)$ -PCP in einer Gruppe  $G$ . Wenn  $G$  nicht elementar-abelsch ist, gilt  $r \leq p^{i+j-1} + \dots + p + 1$ .

Schulz [100] hat gezeigt, daß ein Translationsnetz mit  $r = \frac{s^2\mu - 1}{s - 1}$  notwendigerweise als Translationsgruppe eine  $p$ -Gruppe hat. Mit 7.5.2 folgt dann:

**7.5.3 Satz.** Ein  $(s, r; \mu)$ -Translationsnetz mit  $r = \frac{s^2\mu - 1}{s - 1}$  und Translationsgruppe  $G$  existiert genau dann, wenn  $s$  eine Primzahlpotenz,  $\mu$  eine Potenz von  $s$  und  $G = EA(s^2\mu)$  ist.

\*) Die analoge Situation für  $p \notin H$  liefert bestimmte GDD's, die von Jungnickel/Vedder [73] charakterisiert worden sind.

Ähnlich gilt auch

**7.5.4 Satz (Jungnickel [70]).** Ein symmetrisches  $(s, \mu; \mu)$ -Translationsnetz mit Translationsgruppe  $G$  existiert genau dann, wenn  $s$  und  $\mu$  Potenzen derselben Primzahl  $p$  sind und  $G$  elementar-abelsch ist.

Die Beweise von 7.5.3 und 7.5.4 verwenden (außer 7.4.2) die Klassifikation der endlichen Gruppen mit Partition. Alternativbeweise, die ohne dieses recht tief liegende Hilfsmittel auskommen, wurden kürzlich von Hine/Mavron [59] gegeben. Abschließend sei noch erwähnt, daß man einen Zusammenhang zwischen PCP's und einer Verallgemeinerung der in § 5.3 betrachteten  $t$ -Teilfaserungen in endlichen projektiven Räumen bei Drake/Freeman [42] findet.

## 7.6 Gruppen auf TD's und Netzen

Zum Abschluß dieses Kapitels will ich noch kurz auf andere Typen von Gruppen auf TD's bzw. Netzen eingehen. Wie in 6.1.1 kann man *klassenreguläre*  $(s, r; \mu)$ -TD's definieren; diese sind dann (analog zu 6.1.3) zu  $(s, r; \mu)$ -Differenzenmatrizen äquivalent. Abgesehen von Satz 7.2.5 und einigen Konstruktionsmethoden (siehe Jungnickel [63]) ist das einzige allgemeine Resultat die folgende Verallgemeinerung des Hall-Paige-Theorems 3.3:

**7.6.1 Satz (Drake [41]).**  $D$  sei eine  $(s, r; \mu)$ -Differenzenmatrix über einer Gruppe  $G$ . Wenn  $s$  gerade,  $\mu$  ungerade und die 2-Sylowgruppe von  $G$  zyklisch ist, folgt  $r \leq 2$ .

Den Beweis findet man in [41] oder in [6, X.12.2]. Als nächstes komme ich zu symmetrischen Netzen mit Singergruppe, die analog zu 6.2.1 erklärt sind. Aus den Beispielen in 6.2.2 erhält man in geeigneten Faktorgruppen Beispiele für alle Paare  $(s, \mu)$ , bei denen  $s$  und  $\mu$  Potenzen derselben Primzahl sind. Im übrigen scheinen nur noch einige Beispiele für  $s = 2$  und ein Nichtexistenzsatz (ebenfalls für  $s = 2$ ) bekannt zu sein. Für diese Ergebnisse und den Zusammenhang zu verallgemeinerten Hadamard-Matrizen (vgl. 7.2.5) verweise ich auf Jungnickel [69, § 3 und § 7]. Weitere Beispiele von punkt- bzw. fahnenregulären TD's sind für  $\mu > 1$  bislang anscheinend nicht gefunden worden (abgesehen von Translationsnetzen).

Wie schon in § 7.4 angedeutet, sind symmetrische Netze bzw. Netze mit  $r = \frac{s^2\mu - 1}{s - 1}$  und einer hochgradig transitiven Gruppe automatisch klassisch. Im übrigen kennt man eine weitere Klasse von symmetrischen Netzen mit ziemlich großer Gruppe, die von Jungnickel [67] stammt:

**7.6.2 Satz.**  $s$  und  $\mu$  seien Potenzen derselben Primzahl  $p$ . Dann gibt es ein symmetrisches  $(s, \mu)$ -Netz mit einer Gruppe  $G$ , die auf Paaren verbundener Punkte transitiv operiert.

## 8 Ausblick

Zum Abschluß dieser Übersicht möchte ich noch kurz einige verwandte Themen erwähnen und auf einige offene Fragen hinweisen.

## 8.1 Weitere Themen

In der Literatur sind viele spezielle Typen von lateinischen Quadraten untersucht worden. Mit am interessantesten scheinen mir die *selbst-orthogonalen* lateinischen Quadrate (kurz: SOLS), d. h. lateinische Quadrate  $L$ , die zu ihrem transponierten Quadrat  $L^T$  orthogonal sind. Es gilt die folgende Verstärkung von Satz 2.2.3:

**8.1.1 Satz** (Brayton/Coppersmith/Hofman [16]). Ein SOLS der Ordnung  $s$  existiert für alle  $s \neq 2, 3, 6$ .

Es gibt einen engen Zusammenhang zwischen SOLS und PBD's (siehe 2.3.1), deren Blöcke sämtlich Länge  $\neq 2, 3, 6$  haben, vgl. Drake/Larson [44]. Auch über SOLS mit Unter-SOLS sind interessante Ergebnisse erzielt worden, vgl. Drake/Lenz [45]. Ich möchte noch zwei weitere Klassen von lateinischen Quadraten kurz erwähnen: „Sequenzierbare“ Gruppen führen auf einen in statistischen Anwendungen nützlichen Spezialfall von lateinischen Quadraten, vgl. Dénes/Keedwell [38] und Keedwell [75]. Schließlich heißt eine Menge von lateinischen Quadraten „spaltenorthogonal“ (kurz: eine Menge von COLS), wenn je zwei Spalten verschiedener Quadrate höchstens in einer Zeile denselben Eintrag haben. Die Existenz von affinen Ebenen der Ordnung  $s$  ist dann äquivalent zur Existenz von  $s$  COLS der Ordnung  $s - 1$ , vgl. Vedder [118].

Eine Verallgemeinerung der Netze auf höhere Dimensionen geht auf Laskar [77] zurück. Ähnlich wie in der klassischen Geometrie sind alle Netze der Dimension  $\geq 3$  aus projektiven Räumen konstruierbar, vgl. Sprague [109], [110].

## 8.2 Offene Fragen

Ich möchte jetzt einige m. E. besonders wichtige offene Probleme angeben:

- 1) Gibt es Nicht-Primzahlpotenzen  $s$  mit  $N(s) = s - 1$ ? (Das ist die berühmte, lange offene Frage nach Ebenen, deren Ordnung keine Primzahlpotenz ist.)
- 2) Verbesserung der Schranken für die  $n_k$  aus § 2.5.
- 3) Verbesserung des Exponenten  $a$  in der asymptotischen Existenzaussage nach 2.5.1.
- 4) Gibt es unendliche Folgen von Nicht-Primzahlpotenzen  $s$  mit  $N(s) \geq \sqrt{s}$  oder vielleicht sogar  $N(s) \geq cs$  (für eine Konstante  $c$ )? Insbesondere: Gilt die Vermutung  $N(4p) \geq 2p - 1$  für Primzahlen  $p$ ?
- 5) Weitere Beispiele von maximalen Netzen kleiner Defizienz, insbesondere auch für Werte  $s = p^{2a+1}$  ( $p$  Primzahl).
- 6) Gilt Vermutung 5.2.12?
- 7) Sind die Schranken in 5.2.7 bestmöglich?
- 8) Ebenso für 5.2.8. Kann man vielleicht  $T(G)$  für abelsche  $p$ -Gruppen exakt bestimmen?
- 9) Alle bekannten maximalen 1-Faserungen haben Defizienz  $\geq q - 1$ . Gilt die oft geäußerte Vermutung, daß die Schranke aus 5.3.4 in der Tat  $r \leq q^2 - q + 2$  lauten sollte?
- 10) Die analoge Frage für  $t$ -Teilfaserungen.
- 11) Unter welchen Bedingungen ist das zu einer  $t$ -Teilfaserung (oder zu einer PCP) gehörende Netz maximal?

12) Muß eine  $(s, s)$ -Differenzenmatrix stets über einer elementar-abelschen Gruppe definiert sein? Ist die zu einer  $(p, p)$ -Differenzenmatrix ( $p$  Primzahl) gehörende affine Ebene stets desarguessch?

13) Weitere Nicht-Existenzsätze für Differenzenmatrizen.

14) Klassifikation der symmetrischen Netze mit Singergruppe (oder wenigstens der auftretenden Parameter).

15) Klassifikation der fahnenregulären TD's.

16) Weitere Beispiele (oder Nichtexistenz-Sätze) für verallgemeinerte Hadamardmatrizen.

17) Gilt die Vermutung, daß jedes  $(s, r; \mu)$ -Netz mit  $r = \frac{s^2\mu - 1}{s - 1}$  Parameter wie in 7.2.2 hat? Wie groß ist die Anzahl der nichtisomorphen Beispiele für gegebene Parameter?

18) Komplettierung von  $(s, r; \mu)$ -Netzen mit Defizienz  $d \geq 4$ .

19) Bessere Schranken für die PCP's aus § 7.5.

20) Klassifikation der symmetrischen Netze mit einer Gruppe, die auf Paaren verbundener Punkte transitiv operiert (vgl. 7.6.2).

Insgesamt hoffe ich, mit diesem Übersichtsartikel gezeigt zu haben, daß die Geometrie und Gruppen, die zu lateinischen Quadraten gehören, ein umfangreiches

---

und interessantes Thema darstellen. Von besonderem Reiz erscheint mir dabei die Verknüpfung kombinatorischer, algebraischer, geometrischer und zahlentheoretischer Methoden. Obwohl die Literatur zu diesem Thema umfangreich ist und schon viele interessante Ergebnisse erzielt worden sind, bleiben doch noch sehr viele Probleme offen. Es sollte mich freuen, wenn einer meiner Leser dazu angeregt würde, etwa eines der zwanzig oben genannten Probleme zu lösen.



- [10] Blaschke, W. / Bol, G.: Geometrie der Gewebe. Berlin: Springer 1938
- [11] Bol, G.: Topologische Fragen der Differentialgeometrie, 65. Gewebe und Gruppen. Math. Ann. **114** (1937) 414–431
- [12] Bose, R. C.: On the construction of balanced incomplete block designs. Ann. Eugenics **9** (1939) 353–399
- [13] Bose, R. C. / Bush, K. A.: Orthogonal arrays of strength two and three. Ann. Math. Stat. **23** (1952) 508–524
- [14] Bose, R. C. / Shrikhande, S. S.: On the construction of sets of mutually orthogonal Latin squares and the falsity of a conjecture of Euler. Trans. Amer. Math. Soc. **95** (1960) 191–209
- [15] Bose, R. C. / Shrikhande, S. S. / Parker, E. T.: Further results on the construction of mutually orthogonal Latin squares and the falsity of Euler's conjecture. Canad. J. Math. **12** (1960) 189–203
- [16] Brayton, R. K. / Coppersmith, D. / Hoffman, A. J.: Self-orthogonal Latin squares. In: Coll. Internazionale sulle Teorie Combinatorie, Roma 1973. Atti del convegno Lincei **17**, Tomo II (1976) 509–517
- [17] Brouwer, A. E.: The number of mutually orthogonal Latin squares. Math. Centrum Amsterdam Report ZW 123/79 (1979)
- [18] Brouwer, A. E.: A series of separable designs with application to pairwise orthogonal Latin squares. Europ. J. Comb. **1** (1980) 39–41
- [19] Brouwer, A. E.: On the existence of 30 mutually orthogonal Latin squares. Math. Centrum Amsterdam Report ZW 136/80 (1980)
- [20] Brouwer, A. E. / Van Rees, G. H.: More mutually orthogonal Latin squares. Dier. Math. **39** (1982) 263–281
- [21] Bruck, R. H.: Finite nets I. Numerical invariants. Canad. J. Math. **3** (1951) 94–107
- [22] Bruck, R. H.: A survey of binary systems. Berlin – Göttingen – Heidelberg: Springer 1958
- [23] Bruck, R. H.: Finite nets II. Uniqueness and embedding. Pacific J. Math. **13** (1963) 421–457
- [24] Bruck, R. H.: What is a loop? In: Studies in modern algebra. Math. Assoc. of America
- 
- [25] Bruck, R. H. / Ryser, H. J.: The nonexistence of certain finite projective planes. Canad. J. Math. **1** (1949) 88–93
- [26] Bruen, A. A.: Partial spreads and replaceable nets. Canad. J. Math. **23** (1971) 381–391
- [27] Bruen, A. A.: Unembeddable nets of small deficiency. Pacific J. Math. **43** (1972) 51–54
- [28] Bruen, A. A.: Collineations and extensions of translation nets. Math. Z. **145** (1975) 243–249
- [29] Bruen, A. A.: Blocking sets and skew subspaces of projective space. Canad. J. Math. **32** (1980) 628–630
- [30] Bruen, A. A.: Blocking sets and translation nets. In: Finite Geometries (eds. N. L. Johnson, M. H. Kallaher, C. T. Long). New York – Basel: Marcel Dekker 1983, pp. 77–92
- [31] Bruen, A. A. / Freeman, J. W.: Intersections of  $t$ -reguli, rational curves, and orthogonal Latin squares. Lin. Alg. Appl. **46** (1982) 103–116
- [32] Bruen, A. A. / Silverman, R.: Switching sets in  $PG(3, q)$ . Proc. Amer. Math. Soc. **43** (1974) 176–180
- [33] Bruen, A. A. / Thas, J. A.: Partial spreads, packings and Hermitian manifolds in  $PG(3, q)$ . Math. Z. **151** (1976) 207–214
- [34] Chowla, S. / Erdős, P. / Straus, E. G.: On the maximal number of pairwise orthogonal Latin squares of given order. Canad. J. Math. **12** (1960) 204–208
- [35] Dembowski, P.: Eine Kennzeichnung der endlichen affinen Räume. Arch. Math. **15** (1964) 146–154
- [36] Dembowski, P.: Berichtigung und Ergänzung zu „Eine Kennzeichnung der endlichen affinen Räume“. Arch. Math. **18** (1967) 111–112
- [37] Dembowski, P.: Finite geometries. Berlin – Heidelberg – New York: Springer 1968
- [38] Dénes, J. / Keedwell, A. D.: Latin squares and their applications. London: English Universities Press 1974

- [39] Dow, S.: Transversal-free nets of small deficiency. *Arch. Math.* **41** (1983) 472–474
- [40] Drake, D. A.: Maximal sets of Latin squares and partial transversals. *J. Stat. Planning Inf.* **1** (1977) 143–149
- [41] Drake, D. A.: Partial  $\lambda$ -geometries and generalized Hadamard matrices over groups. *Canad. J. Math.* **31** (1979) 617–627
- [42] Drake, D. A. / Freeman, J. W.: Partial t-spreads and group constructible  $(s, r, \mu)$ -nets. *J. Geom.* **13** (1979) 210–216
- [43] Drake, D. A. / Jungnickel, D.: Klingenberg structures and partial designs II. Regularity and uniformity. *Pacific J. Math.* **77** (1978) 389–415
- [44] Drake, D. A. / Larson, J. A.: Pairwise balanced designs whose line sizes do not divide six. *J. Comb. Th. (A)* **34** (1983) 266–300
- [45] Drake, D. A. / Lenz, H.: Orthogonal Latin squares with orthogonal subsquares. *Arch. Math.* **34** (1980) 565–576
- [46] Dulmage, A. L. / Johnson, D. / Mendelsohn, N. S.: Orthomorphisms of groups and orthogonal Latin squares. *Canad. J. Math.* **13** (1961) 356–372
- [47] Euler, L.: Recherches sur une nouvelle espèce des carrés magiques. In: Leonardi Euleri opera omnia, Ser. I., Vol 7 Berlin – Leipzig: Teubner 1923, pp. 291–392
- [48] Fisher, R. A.: The design of experiments. Edinburgh 1949 (5th ed.)
- [49] Freeman, J. W.: Reguli and pseudo-reguli in  $PG(3, s^2)$ . *Geom. Ded.* **9** (1980) 267–280
- [50] Glynn, D. G.: A lower bound for maximal partial spreads in  $PG(3, q)$ . *Ars. Comb.* **13** (1982) 39–40
- [51] Gorenstein, D.: Finite simple groups. An introduction to their classification. New York: Plenum 1982
- [52] Guérin, R.: Existence et propriétés des carrés Latins orthogonaux II. *Publ. Inst. Statist. Univ. Paris* **15** (1966) 215–293
- [53] Hall, M. / Paige, L. J.: Complete mappings of finite groups. *Pacific J. Math.* **5** (1955) 541–549
- [54] Hanani, H.: On the number of orthogonal Latin squares. *J. Comb. Th.* **8** (1970) 247–271
- [55] Hanani, H.: On transversal designs. In: Combinatorics. Amsterdam: Mathematisch Centrum 1974. = *Math. Centre Tracts* **55**, 42–52
- [56] Harwit, M. / Sloane, N. J. A.: Hadamard transform optics. New York – San Francisco – London: Academic Press 1979
- [57] Hedayat, A. / Wallis, W. D.: Hadamard matrices and their applications. *Ann. Stat.* **6** (1978) 1184–1238
- [58] Hine, T. C. / Mavron, V. C.: Embeddable transversal designs. *Discr. Math.* **29** (1980) 191–200
- [59] Hine, T. C. / Mavron, V. C.: Translations of symmetric and complete nets. *Math. Z.* **182** (1983) 237–244
- [60] Hughes, D. R.: Partial difference sets. *Amer. J. Math.* **78** (1956) 650–674
- [61] Hughes, D. R. / Piper, F. C.: Projective planes. Berlin – Heidelberg – New York: Springer 1973
- [62] Huppert, B.: Endliche Gruppen I. Berlin – Heidelberg – New York: Springer 1967
- [63] Jungnickel, D.: On difference matrices, resolvable transversal designs and generalized Hadamard matrices. *Math. Z.* **167** (1979) 49–60
- [64] Jungnickel, D.: On difference matrices and regular Latin squares. *Abh. Math. Sem. Hamburg* **50** (1980) 219–231
- [65] Jungnickel, D.: Existence results for translation nets. In: Finite geometries and designs. Cambridge University Press 1981. = *London Math. Soc. Lecture Notes* **49**, 172–196
- [66] Jungnickel, D.: Einige neue Differenzenmatrizen. *Mitt. Math. Sem. Gießen* **149** (1981) 47–57
- [67] Jungnickel, D.: Transitive symmetric nets. *Arch. Math.* **36** (1981) 92–96
- [68] Jungnickel, D.: Transversal designs associated with Frobenius groups. *J. Geom.* **17** (1981) 140–154
- [69] Jungnickel, D.: On automorphism groups of divisible designs. *Canad. J. Math.* **34** (1982) 257–297
- [70] Jungnickel, D.: Symmetric translation nets. *J. Reine Ang. Math.* **235** (1982) 216–220

- [71] Jungnickel, D.: Maximal partial spreads and translation nets of small deficiency. Erscheint im J. Alg.
- [72] Jungnickel, D.; Sane, S. S.: On extensions of nets. *Pacific J. Math.* **103** (1982) 437–455
- [73] Jungnickel, D. / Vedder, K.: Symmetric divisible designs with  $k = (n + 1)\mu$ . Erscheint in *Arch. Math.*
- [74] Kallaher, M. J.: Affine planes with transitive collineation groups. Amsterdam – New York – Oxford: North Holland 1981
- [75] Keedwell, A. D.: On the existence of super P-groups. *J. Comb. Th. (A)* **35** (1983) 89–97
- [76] Kirkman, T. P.: Query, Lady's and Gentleman's diary (1850) p. 48
- [77] Laskar, R.: Finite nets of dimension 3. *J. Alg.* **32** (1974) 8–25
- [78] Lüneburg, H.: Transitive Erweiterungen endlicher Permutationsgruppen. Berlin – Heidelberg – New York: Springer 1969. = *Lecture Notes in Mathematics* 84
- [79] Lüneburg, H.: Translation planes. Berlin – Heidelberg – New York: Springer 1980
- [80] MacNeish, H. F.: Euler squares. *Ann. Math.* **23** (1922) 221–227
- [81] MacWilliams, F. J. / Sloane, N. J. A.: The theory of error-correcting codes. Amsterdam – New York – Oxford: North Holland 1978
- [82] Mann, H. B.: The construction of orthogonal Latin squares. *Ann. Math. Stat.* **13** (1942) 418–423
- [83] Mavron, V. C.: A characterization of some symmetric substructures of projective and affine geometries. *Arch. Math.* **36** (1981) 281–288
- [84] Mavron, V. C.: Translations and constructions of generalized nets. *J. Comb. Th. (A)* **33** (1982) 316–339
- [85] Mesner, D. M.: Sets of disjoint lines in  $PG(3, q)$ . *Canad. J. Math.* **19** (1967) 273–280
- [86] Mills, W. H.: Some mutually orthogonal Latin squares. In: *Proc. 8th Southeastern Conf. on Combinatorics, Graph Theory and Computing* Baton Rouge 1977, pp. 473–487
- [87] Ostrom, T. G.: Nets with critical deficiency. *Pacific J. Math.* **14** (1964) 1381–1387
- [88] Ostrom, T. G.: Replaceable nets, net collineations, and net extensions. *Canad. J. Math.* **18** (1966) 666–672
- [89] Ostrom, T. G.: Finite translation planes. Berlin – Heidelberg – New York: Springer 1970. = *Lecture Notes in Mathematics* 158
- [90] Pickert, G.: Sechseckgewebe und potenzassoziative Loops. *Proc. Int. Congr. Math. Amsterdam* **2** (1954) 245–246
- [91] Pickert, G.: Projektive Ebenen. Berlin – Göttingen – Heidelberg: Springer 1955
- [92] Pickert, G.: Einführung in die endliche Geometrie Stuttgart: Klett 1974
- [93] Plackett, R. L. / Burman, J. P.: The design of optimum multi-factorial experiments. *Biometrika* **33** (1945) 305–325
- [94] Pless, V.: On the uniqueness of the Golay Codes. *J. Comb. Th.* **5** (1968) 215–228
- [95] Raghavarao, D.: Constructions and combinatorial problems in design of experiments. New York: Wiley 1971
- [96] Rajkundlia, D.: Some techniques for constructing new infinite families of balanced incomplete block designs. Ph. D. Dissertation, Queen's Univ. Kingston, Canada 1978
- [97] Reidemeister, K.: Topologische Fragen der Differentialgeometrie, V. Gewebe und Gruppen. *Math. Z.* **29** (1929) 427–435
- [98] Sade, A.: An omission in Norton's list of  $7 \times 7$  squares. *Ann. Math. Stat.* **22** (1951) 306–307
- [99] Schellenberg, P. J. / van Rees, G. M. J. / Vanstone, S. A.: Four pairwise orthogonal Latin squares of order 15. *Ars. Comb.* **6** (1978) 141–150
- [100] Schulz, R.-H.; Über Blockpläne mit transitiver Dilatationsgruppe. *Math. Z.* **98** (1967) 60–82
- [101] Schulz, R.-H.: Transversal designs and partitions associated with Frobenius groups. Erscheint.
- [102] Seberry, J.: A construction for generalized Hadamard matrices. *J. Stat. Planning Inf.* **4** (1980) 365–368
- [103] Shrikhande, S. S.: Generalized Hadamard matrices and orthogonal arrays of strength strength two. *Canad. J. Math.* **16** (1964) 736–740
- [104] Shrikhande, S. S.: Affine resolvable balanced incomplete block designs: A survey. *Aequat. Math.* **14** (1976) 251–269

- [105] Shrikhande, S. S. / Bhagwandas: On embeddings of orthogonal arrays of strength two. In: Combinatorial mathematics and its applications. University of North Carolina Press 1976, pp. 256–273
- [106] Shrikhande, S. S. / Singhi, N. M.: A note on embeddings of orthogonal arrays of strength two. J. Stat. Planning Inf. 3 (1979) 267–271
- [107] Shrikhande, S. S. / Singhi, N. M.: Embedding of orthogonal arrays of strength two and deficiency greater than two. J. Stat. Planning Inf. 3 (1979) 267–270

ber theory. Trans. Amer. Math. Soc. 43 (1938) 377–385

- [109] Sprague, A. P.: A characterization of 3-nets. J. Comb. Th. (A) 27 (1979) 223–253
- [110] Sprague, A. P.: Incidence structures whose planes are nets. Europ. J. Comb. 2 (1981) 193–204
- [111] Sprague, A. P.: Translation nets. Mitt. Math. Sem. Gießen 157 (1982) 46–68
- [112] Steiner, J.: Combinatorische Aufgabe. J. Reine Ang. Math. 45 (1853) 181–182
- [113] Strambach, K.: Geometry and loops. In: Geometries and Groups. Berlin – Heidelberg – New York: Springer 1981. = Lecture Notes in Mathematics 893, 111–147
- [114] Thiele, J.: Gewebe, deren Ternärkörper aus einem Vektorraum hervorgeht. Mitt. Math. Sem. Gießen 140 (1979)
- [115] Thomsen, G.: Topologische Fragen der Differentialgeometrie. XII. Schnittpunktsätze in ebenen Geometrien. Abh. Math. Sem. Hamburg 7 (1930) 99–106
- [116] Veblen, O. / Bussey, N. J.: Finite projective geometries. Trans. Amer. Math. Soc. 27 (1906) 1–10

## Dem Andenken an Hermann Boerner

J. Heinhold, München, und A. Kerber, Bayreuth



Da seine Dissertation zur Hälfte aus Variationsrechnung bestand, schickte ihn Lichtenstein für das Sommersemester 1931 zu Carathéodory nach München. Freimütig berichtete er später: „Zu meiner Schande muß ich gestehen, daß ich damals mehr Bergsteigerei als Mathematik getrieben habe“. Anfang Mai 1933, dem Beginn der Hitler-Diktatur, kam Boerner für längere Zeit wieder nach München. Zuerst noch von seinem Vater finanziert, wurde er dann Ende 1933 Hilfsassistent (einziger Assistent war Lettenmeyer) bei Perron, der, selbst passionierter Bergsteiger, Boerner nicht nur als Mathematiker, sondern auch als Gefährten auf manch schwieriger Berg- und Klettertour schätzte. Boerner verstand es auch in vorbildlicher Weise, sich der Studierenden anzunehmen und so Freundschaften zu gewinnen, die Zeit seines Lebens angehalten haben. Auch mit dem Ehepaar Lettenmeyer hat Boerner einige schwierige Klettertouren im Wetterstein gemacht.

1934 habilitierte sich Boerner bei Carathéodory mit der Arbeit „Über die Extremalen und geodätischen Felder in der Variationsrechnung der mehrfachen Integrale“ und wurde im Februar 1935 zum Dr. habil. ernannt, ein Verfahren, das seinerzeit unter Hitler eingeführt wurde und das man heute wieder übernommen hat. Um Dozent zu werden, mußte man damals erst noch einige Hürden überwinden, ein Dozentenlager und anschließend eine Dozentenakademie absolvieren. So war Boerner nach der Ernennung zum Dr. habil. zehn Wochen auf einem Dozentenlager erst in Neuhöfe bei Marburg, dann in Schloß Tännich in Thüringen und schließlich auf einer Dozentenakademie in Weichselmünde bei Danzig. (Nach Beginn des Krieges wurden diese Dozenten­hürden wieder abgeschafft.) Anschließend erfolgte Boerners Ernennung zum Dozenten, so daß er nun eigene Vorlesungen halten konnte. Im Wintersemester 1936/37 hatte er dann gleich zwei große Vorlesungen zu halten, eine davon war „Grundlagen der Geometrie“, in Vertretung von Carathéodory, der sich für ein Semester in den USA aufhielt. Im gleichen Jahr bekam er die Assistentenstelle Lettenmeyers, der einem Ruf an die Universität Kiel gefolgt war.

Bei Kriegsausbruch 1939 erfolgte Boerners Einberufung als Meteorologe, zunächst auf verschiedene Fliegerhorste in Deutschland, sodann bis 1941 auf Grund einer freiwilligen Meldung zu einer Wettererkundungsstaffel bei Versailles, die täglich einen Wettererkundungsflug in das Seegebiet zwischen England und Irland zu machen hatte (hierfür erhielt er das EK 1). Anschließend war er zwei Jahre am Fliegerhorst Fürstenfeldbruck. In dieser Zeit konnte er zweimal eine zweistündige Vorlesung an der Universität München halten. 1943 erfolgte seine Ernennung zum apl. Professor. Anfang April 1943 bis Anfang März 1944 war er „Deutscher Leiter des Institut Royal Météorologique“ in Belgien, sodann Geschwadmeteorologe bei einem Zerstörergeschwader in der Bretagne. Nach der Invasion kam das Geschwader ins Schloß Haut Brion bei Bordeaux und schließlich Ende Juli 1944 nach Deutschland zurück und Boerner auf den Fliegerhorst Hailfingen in Württemberg, wo er einmal, aus 4000 m mit dem Fallschirm abspringend, sich aus dem brennenden Flugzeug retten konnte. Nach einem kurzen Aufenthalt in Fürstenfeldbruck und in Schleißheim wurde er kurz vor Weihnachten 1944 auf Anforderung von Süß (Freiburg) aus der Wehrmacht für das Mathematische Forschungsinstitut Oberwolfach entlassen. Dort blieb er bis zur Wiedereröffnung der Universität München, an der im September 1948 der Vorlesungs-

betrieb wieder aufgenommen wurde. Nach einer Lehrstuhlvertretung in Göttingen im WS 1948/49 holte ihn Ullrich nach Gießen auf eine Diätendozentur, aus der im Zuge des Wiederaufbaus der Universität Gießen schließlich ein Ordinariat wurde, auf dem Boerner bis zu seiner Emeritierung im Jahre 1971 blieb.

Neben seiner Liebe zu den Bergen dürfen seine musikalischen Interessen und Fähigkeiten nicht unerwähnt bleiben. Er spielte ausgezeichnet Klavier. Wiederholt konnte der eine der Unterzeichneten mit ihm zusammen die klassischen Violinsonaten spielen. Seine zweite Frau war von Beruf Geigerin, so daß sich auch im häuslichen Kreise reichlich Gelegenheit zum Musizieren ergab. In Gießen betätigte sich Boerner u. a. auch als Veranstalter von Konzerten.

Wie aus dem Lebensbericht Boerners ersichtlich, machten die langen Kriegsjahre und die Verhältnisse im sog. „Dritten Reich“ dem wissenschaftlichen Nachwuchs die wissenschaftliche Arbeit und die Hochschullaufbahn schwer, selbst wenn er, wie Boerner, heil aus dieser Zeit hervorging.

Will man die Spuren verfolgen, die seine wissenschaftlichen Ergebnisse hinterlassen haben, dann beginnt man am besten, in den Werken Carathéodorys zu graben. Dort findet man als ersten Hinweis am Ende des berühmten Buches „Variationsrechnung und partielle Differentialgleichungen erster Ordnung“ (1935) zum Abschluß der Anmerkungen unter Nr. 9 („Mehrdimensionale Variationsprobleme“) die Bemerkung

„... der Beweis, daß man jede reguläre Extremalfläche in ein geodätisches Feld einbetten kann, wurde von H. Boerner erbracht, ist aber noch nicht veröffentlicht...“

Zu diesen Ursprüngen seiner eigenen Entwicklung kehrte Boerner mit

Fachgebiet hochinteressante Heft enthält auf 9 verschiedenen Seiten zahlreiche Eintragungen Boerners. Unter anderem wird auf den Seiten 13/14 ein Kolloquium über kontinuierliche Gruppen erwähnt, das im ersten Abschnitt vom Februar bis Juni 1945 dauerte, Vortragender war Seifert. Es wird im Oktober durch Boerner und Seifert fortgesetzt. Boerners Eintragung liest sich so:

„Fortsetzung des vorigen Kolloquiums:

Darstellungstheorie der halbeinfachen kontinuierlichen Gruppen nach H. Weyl.

I. Kap. Allgemeine Sätze über die Darstellungen. Eindeutige Bestimmtheit einer irreduziblen Darstellung durch das höchste Gewicht.



Später kehrte Boerner – wie bereits erwähnt – noch einmal zu seinen Anfängen zurück mit einem Artikel über Variationsrechnung „à la Carathéodory“. Dieser Münchener Zeit verdankte er auch die Freundschaft mit N. Terzioglu, der damals ebenfalls Schüler von Carathéodory gewesen war. Kontakte zur Türkei nahm er dann während eines Forschungsfreisemesters in Trabzon wieder auf und dann wieder während einer Tagung im türkischen Forschungsinstitut von Silivri, das von Terzioglu als Pendant zu Oberwolfach intendiert war. Die Tagung wurde von Boerner und seinen Schülern Pahlings, Roggenkamp und Kerber bestritten.

In seinen Vorlesungen, die bis zu seiner Emeritierung immer wieder neue Themen zum Inhalt hatten, verstand es Boerner in ganz außerordentlicher Weise, die elegante und ästhetische Seite der Mathematik zu vermitteln. Sie waren stets sehr gut vorbereitet und wurden völlig frei vorgetragen, selbst wenn sie einen alpträumhaften Bezeichnungsaufwand erforderten, wie etwa die Darstellungstheorie symmetrischer Gruppen. Nur ganz schwierige Formeln wurden gelegentlich anhand kleiner Zettel nachgeprüft.

Seine Mitarbeiter schätzten ihn als einen im besten Sinne liberalen Hochschullehrer, der stets offen war für Wünsche und Anregungen und der bei aller Zurückhaltung, die ihm eigen war, auch ein offenes Herz für ihre Nöte und Anliegen erkennen ließ.

### Schriftenverzeichnis

1. Über einige Eigenwertprobleme und ihre Anwendung in der Variationsrechnung. Dissertation, Leipzig 1932
2. Das Eigenwertproblem der selbstadjungierten linearen Differentialgleichung vierter Ordnung. *Math. Z.* **34** (1931) 293–319
3. Über einige Variationsprobleme. *Math. Z.* **35** (1932) 161–180.

4. Ein „belastetes“ Variationsproblem. *J. f. d. reine u. angew. Math.* **171** (1934) 120–127
5. Zur Theorie der zweiten Variation. *Math. Z.* **39** (1935) 492–500
6. Über die Extremalen und geodätischen Felder in der Variationsrechnung der mehrfachen Integrale. *Math. Ann.* **112** (1936) 187–220
7. Über die Häufigkeit der nicht analytisch fortsetzbaren Potenzreihen. *S.-B. math.-nat. Abt. Bayer. Akad. Wiss. München* (1938) 165–174; Forts. **64** (1938) II., 1053
8. Variationsrechnung. In: *Naturforschung Medizin in Deutschland 1939–1946. Band 2, Reine Mathematik, T. II*, 53–65
9. Über die Legendresche Bedingung und die Feldtheorien in der Variationsrechnung der

16. Representations of Groups. Amsterdam: North-Holland 1967; 2nd ed. 1970
17. Carathéodory und die Variationsrechnung. The Greek Mathematical Society. C. Carathéodory Symposium, Sept. 3–7, 1973, 80–90
18. Aus der Geschichte der Darstellungstheorie. Istanbul: Silivri 1973. = Lecture Notes on the Representation Theory of Finite Groups, 1–10.
19. Variationsrechnung à la Carathéodory und das Zermelo'sche Navigationsproblem. Berlin – Heidelberg – New York: Springer 1979. = Selecta Mathematica V, 23–67, Heidelberger Taschenbücher Bd. 201
20. Ludwig Schlesinger (1864–1933). In: Gießener Gelehrte in der ersten Hälfte des 20. Jahrhunderts, Lebensbilder aus Hessen Bd. 2, 1982, 836–846

### Dissertationen seiner Schüler

1. Velte, Waldemar: Zur Variationsrechnung mehrfacher Integrale in Parameterdarstellung. Mitt. Math. Sem. Gießen 45 (1953)
2. Krafft, Günther: Die stetigen Darstellungen der reellen Formen der komplexen unimodularen, orthogonalen und symplektischen Gruppen. Mitt. Math. Sem. Gießen 53 (1955)
3. Kerber, Adalbert: Zur modularen Darstellungstheorie symmetrischer und alternierender Gruppen. Mitt. Math. Sem. Gießen 68 (1966)
4. Mangold, Ruth: Beiträge zur Theorie der Darstellungen endlicher Gruppen durch Kollineationen. Mitt. Math. Sem. Gießen 69 (1966)
5. Roggenkamp, Klaus W.: Darstellungen endlicher Gruppen in Polynombereichen. Mitt. Math. Sem. Gießen 71 (1967)
6. Pahlings, Herbert: Beiträge zur Theorie der projektiven Darstellungen endlicher Gruppen. Mitt. Math. Sem. Gießen 77 (1968)
7. Bayar, Ergün: Eine neue Einführung in die Darstellungstheorie der symmetrischen Gruppen. Mitt. Math. Sem. Gießen 81 (1969)
8. Gündüzalp, Yavuz: Über die gewöhnlichen irreduziblen Charaktere der symmetrischen Gruppe. Mitt. Math. Sem. Gießen 81 (1969)

Prof. Dr. J. Heinhold  
Römerstr. 49  
8035 Gauting

A. Kerber  
Schloßhof Birken 21  
8580 Bayreuth

(Eingegangen: 19. 3. 1984)

**Barner, M.; Flohr, F., Analysis II**, Berlin: deGruyter 1983, 452 S., DM 48,—

Mit dem Erscheinen des zweiten Bandes wird nun das Gesamtwerk über die reelle Analysis abgeschlossen; es entspricht etwa einem dreisemestrigen Vorlesungszyklus der Anfangssemester, weist jedoch in manchen Punkten weit darüber hinaus. Während der erste Band (Bespr. s. Jber. d. Dt. Math.-Verein. DMV 1972, Heft 2) im wesentlichen die Differential- und Integralrechnung der Funktionen  $e$  in  $e$ r Veränderlichen enthält, ist der vorliegende Teil den Funktionen mehrerer Variablen gewidmet. Diese werden als Abbildungen aus dem  $\mathbf{R}^n$  in den  $\mathbf{R}^m$  aufgefaßt, wobei von deren Vektorraumstruktur konsequent Gebrauch gemacht wird. Kap. 13 (fortlaufende Numerierung über Bd. I hinaus) bringt die Topologie des  $\mathbf{R}^n$  und die Theorie der Stetigkeit bis hin zum Stone-Weierstraßschen Approximationssatz. Das nächste Kapitel behandelt die Differenzierbarkeit, die über eine Abschätzung des Fehlers gegenüber ihrer Linearisierung eingeführt wird. Die Stichworte Mittelwertsatz, Taylorformel und Banachscher Fixpunktsatz charakterisieren den weiteren Inhalt. Zahlreiche Anwendungen einschließlich des Existenzsatzes von Picard-Lindelöf für Systeme gewöhnlicher Differentialgleichungen oder der Satz von der lokalen Umkehrbarkeit vertiefen die Einsicht in dessen Tragweite. Man durfte gespannt sein, wie die Integralrechnung weitergeführt werde, nachdem sie im ersten Band auf den Regelfunktionen aufgebaut worden war. Die Autoren haben sich für die Lebesguesche Integrationstheorie entschieden. Den damit gesetzten hohen Ansprüchen steht die ausgezeichnete Didaktik, mit der dies durchgeführt wird, gegenüber. In Kap. 15 wird das Lebesguesche Maß im  $\mathbf{R}^n$  behutsam aus dem Volumenbegriff für Quader heraus entwickelt, in dem es über die  $\sigma$ -Additivität zunächst nur für offene und kompakte Mengen eingeführt wird. Das Integral wird nun (Kap. 16) nicht etwa über das  $(n + 1)$ -dim. Maß der Ordinatenmenge sondern – analog zum Vorgehen bei Regelfunktionen – als Grenzwert der (zuvor definierten) Integrale von  $e$  in  $f$  a  $c$  h  $e$  n Funktionen  $g_n$  eingeführt; dabei müssen die Konvergenz  $g_n \rightarrow f$  gleichmäßig, alle  $g_n$  integrel sein und „einfach“ bedeutet, daß die Wertemenge  $g(M)$   $a$   $b$   $z$   $ä$   $h$   $l$   $b$   $a$   $r$ , alle Urbilder  $M_i = g^{-1}(y_i)$  für  $y_i \in g(M)$  meßbar und die Reihe  $\sum \mu(M_i)$  absolut konvergent ist. Dies hat den Vorteil, daß Vorzeichenfragen vermieden und von vornherein auch unbeschränkte Funktionen zugelassen werden können. Mit diesem Ansatz lassen sich die Hauptsätze der Lebesgueschen Integrationstheorie beinahe mühelos herleiten. Es fehlen dabei keineswegs Approximationsfragen wie z. B. der Glättungsprozeß und die Folgerung  $C^\infty(K) = C(K)$  für ein Kompaktum  $K \subset \mathbf{R}^n$ . Die Vektoranalysis (Kap. 17) wird mit einem Abschnitt über Kurvenintegrale eingeleitet und mittels alternierender Differentialformen auf  $p$ -dim. Mannigfaltigkeiten des  $\mathbf{R}^n$  durchgeführt; sie gipfelt im Integralsatz von Stokes, enthält aber als Folgerungen z. B. auch die Aussage, daß es keine glatte Retraktion von  $G$  auf  $\partial G$  ( $G$  offen in  $\mathbf{R}^n$ ,  $\partial G$  glatt) gibt, sowie den Brouwerschen Fixpunktsatz.

Der Stil des gesamten Werkes bevorzugt eine sehr natürliche Betrachtungsweise, bei längeren Beweisen wird der Aufbau oder der wesentliche Punkt kurz umrissen und in der Durchführung werden technische Details fast völlig vermieden: allerdings verlanot diese Art der Dar-

**Reid, W. T., Sturmian Theory for Ordinary Differential Equations** (Applied Mathematical Sciences 31), Berlin – Heidelberg – New York: Springer-Verlag 1980, 559 S., DM 59,–

Die vorliegende, breit angelegte und ins einzelne gehende Darstellung beschränkt sich im wesentlichen auf die Sturmsche Theorie gewöhnlicher Differentialgleichungen; die dem Eigenwertproblem typischen Fragen der Entwicklung nach Eigenfunktionen und der Vollständigkeit werden eher am Rande behandelt (konsequenterweise fehlt der Name Liouville im Titel). Der wesentliche Zweck der Monographie ist die Darstellung eines historischen und umfassenden Überblicks über die Sturmsche Theorie für selbstadjungierte Differentialsysteme; so formuliert es der 1977 verstorbene Autor im Vorwort. Er hat dieses Gebiet durch gewichtige eigene Beiträge bereichert, und es ist nur natürlich, daß er seine zum Teil wenig bekannten eigenen Forschungen hier einer größeren mathematischen Öffentlichkeit vorstellen will. Das Manuskript war bereits 1975 fertiggestellt, die Herausgeber haben jedoch die Bibliographie an einigen Stellen erweitert.

Die erste Frage, an welchen Leser sich das Buch wohl richten mag, beantwortet sich nicht leicht. Der Student ertrinkt in der Fülle des Materials, auch dem Dozenten wird für eine Vorlesung nur wenig konkrete Hilfe zuteil, zumal die Beweise vielfach nur angedeutet oder durch Literaturverweise ersetzt sind. Mit größtem Gewinn wird man die eingehende Darstellung der historischen Entwicklung lesen.

In den ersten vier Kapiteln wird der skalare Differentialoperator

$$\ell[u](t) = [r(t)u'(t) + q(t)u(t)]' - [q(t)u'(t) + p(t)u(t)]$$

untersucht. Stichworte: klassische Oszillations- und Vergleichssätze, Transformationen, insbesondere auf Polarkoordinaten, quadratische Funktionale und Variationseigenschaften, konjugierte Punkte, Fokalfpunkte, Randwertprobleme für kompakte Intervalle, Oszillationstheorie für nicht-kompakte Intervalle (die Weylsche Theorie von singulären Differentialoperatoren wird nur gestreift). Die Kapitel V bis VII behandeln unter entsprechenden Gesichtspunkten Systeme von gewöhnlichen Differentialgleichungen, jenes Gebiet, auf welchem der Autor selbst vielfach publiziert hat. Hier werden u. a. die Hamiltonschen Systeme, Matrix Riccati-Differentialgleichungen, die Fundamentalformen von Morse, die verschiedenen Begriffe von Selbstadjungiertheit, Normalität und Definitheit besprochen. Unter den Erweiterungen und speziellen Gegenständen im letzten, achten Kapitel findet man auch einen Abschnitt über die Weinsteinische Methode der intermediären Probleme. Die Beschreibung ist typisch für das Buch: sie enthält die wesentlichen Ideen und Ergebnisse. Literaturhinweise, einige Beweisandeutungen.

linearen Operatoren. Die einzelnen Kapitel behandeln: Spektraltheorie in Banachräumen; Grundlagen der Theorie der linearen Operatoren; beschränkte Operatoren im Hilbert-Raum; Integraloperatoren. Der zweite Band, der wohl das Kernstück der vier Bände bildet, enthält die Theorie der linearen Integralgleichungen zweiter Art, gegliedert in die folgenden Kapitel: Auflösung von linearen Integralgleichungen zweiter Art; Theorie der Fredholmschen Determinanten; der lösende Operator in der Umgebung eines Pols; Eigenwerte und Eigenfunktionen, Reihenentwicklungen nach Eigenfunktionen bei symmetrischen Integraloperatoren; Theorie der nichtsymmetrischen Integraloperatoren.

Ein Buch über lineare Integralgleichungen ist in dieser Breite seit Schmeidlers Standardwerk nicht mehr erschienen; wie man dem Vorwort entnimmt, gehen die Bände 1 und 2 auf den erstgenannten Verfasser zurück. Mit dem Hinweis, daß fast alle Sätze vollständig bewiesen werden, wird dort auch vom lehrbuchartigen Charakter des Buches gesprochen; es ist jedoch eher auf einem höheren Niveau einzuordnen. Die Referenzen in den beiden Bänden sind kurz gefaßt und verweisen teilweise auf Sekundärliteratur. Ein ausführliches Literaturverzeichnis soll am Ende des Gesamtwerks folgen.

Den Inhalt von Band 3 werden lineare Integralgleichungen erster Art sowie spezielle Typen von Integralgleichungen bilden. Band 4 ist für numerische Methoden zur Lösung linearer Integralgleichungen und für einige Anwendungen von Integralgleichungen, insbesondere auf physikalische Probleme, vorgesehen.

Breite und Tiefe der Darstellung, die in den beiden ersten Bänden zu erkennen ist, sowie die Anlage aller vier Bände lassen ein Standardwerk erwarten, das gehobenes Lehrbuch und Nachschlagwerk darstellt. Sowohl Dozenten wie auch Studenten werden immer wieder nach dem Buch greifen.

München

G. Hämmerlin

**Rempel, S., Schulze, B.-W., Index Theory of Elliptic Boundary Problems** (Mathematische Lehrbücher und Monographien, Abt. II, Band 55), Berlin: Akademie-Verlag 1982, 393 S., Leinen, DDR 75,- M

Dieses Buch bietet mehr, als der Titel verspricht, nämlich erstmalig eine systematische Behandlung der „modernen“ Theorie elliptischer Randwertaufgaben. „Modern“ soll hier bedeuten, daß eine Behandlung der Randwertprobleme nach dem „Modell“ der Indextheorie elliptischer Operatoren über geschlossenen Mannigfaltigkeiten angestrebt wird, wie sie von M. F. Atiyah und I. M. Singer [2] 1963 skizziert und seither in einer Vielzahl von Arbeiten der globalen reellen und komplexen Analyse ausgearbeitet, weiterentwickelt und auf zutiefst nicht-triviale Probleme, wie das Riemann-Roch-Hirzebruch-Problem der algebraischen Geometrie, die Bestimmung der Anzahl der Instantone in der eichinvarianten Feldtheorie und jüngst darauf aufbauend S. K. Donaldsons Bestimmung der Struktur vierdimensionaler, differenzierbarer Mannigfaltigkeiten angewandt wurde. Vom Standpunkt der Analysis dürfte der durchschlagende Erfolg der quantitativen Behandlung elliptischer Differentialoperatoren über unberandeten Mannigfaltigkeiten auf zwei besondere Umstände zurückzuführen sein:

(1.1) Es gibt eine genügend reichhaltige „Algebra“ von Pseudodifferentialoperatoren, die neben den elliptischen Differentialoperatoren auch ihre Quasiinversen (Parametrices) modulo Operatoren niedrigerer Ordnung enthält und darüber hinaus vielfältige Deformationen zuläßt

In den zurückliegenden zwanzig Jahren hat es nun eine Folge von Versuchen gegeben, dieses „Erfolgsrezept“ auf die Behandlung elliptischer Randwertprobleme zu übertragen. Dabei stieß man auf zwei Schwierigkeiten:

(2.1) Nicht alle elliptischen Operatoren lassen elliptische Randwertbedingungen zu.

(2.2) Randwertprobleme sind ihrer Form

$$\begin{pmatrix} P_X \\ T \end{pmatrix}: C^\infty(X, E) \rightarrow \begin{matrix} C^\infty(X, F) \\ \oplus \\ C^\infty(Y, H) \end{matrix}$$

nach „asymmetrisch“ und passen nicht unmittelbar in das Schema einer Operatoralgebra; hierbei sei  $X$  eine kompakte  $C^\infty$ -Mannigfaltigkeit mit Rand  $Y$ ;  $E$  und  $F$  Vektorraumbündel über  $X$ ;  $H$  ein Vektorraumbündel über  $Y$ ;  $P_X$  die Beschränkung auf  $X$  eines auf einer  $X$  einschließenden Nachbarmannigfaltigkeit definierten elliptischen Pseudodifferentialoperators und  $T$  ein die Randwertbedingungen ausdrückender „Spuroperator“.

(2.1) war schon in [1] bemerkt worden und führte zur Bestimmung der topologischen Hindernisse für die Existenz elliptischer Randwertbedingungen, wodurch die volle Bedeutung der Elliptizitätsbedingungen von Shapiro-Lopatinski aufgedeckt wurde. (2.2) wurde sukzessiv durch Ausweitung des analytischen Apparates überwunden, indem zunächst von M. I. Wischik und G. I. Eskin in [8] eine einheitliche Behandlung von Randwert- und Potentialproblemen in einer

Operatorenklasse der Form

$$\begin{pmatrix} P_X & K \end{pmatrix}: \begin{matrix} C^\infty(X, E) \\ \oplus \end{matrix} \rightarrow \begin{matrix} C^\infty(X, F) \\ \oplus \end{matrix}$$

wo  $K$  ein „Poissonoperator“ und  $S$  ein Pseudodifferentialoperator über  $Y$  ist, erreicht wurde. Dadurch wird garantiert, daß die Bildung der Formal-Adjungierten nicht aus dieser Klasse verallgemeinerter Randwertprobleme herausführt. L. Boutet de Monvel zeigte dann in [3], daß man auch

Tatsächlich wurden in [3] aber nur die Ideen gegeben und die Beweise, wenn überhaupt, allein für die einfachsten Fälle skizziert. So wurde die wichtige Kompositionsregel, daß die Hintereinanderschaltung von  $\mathcal{A}, \mathcal{A}' \in \mathcal{G}(X, Y)$ , vorausgesetzt daß die Bündel zueinander passen, wieder ein Element in  $\mathcal{G}(X, Y)$  ergibt, nur für den Fall konstanter Koeffizienten in 9 Zeilen gezeigt [3; S. 32], während die genaue Nachrechnung insbesondere der delikaten Aussage, daß  $(P \circ Q)_X = P_X \circ Q_X$  für Pseudodifferentialoperatoren  $P, Q$  ein singulärer Greenscher Operator ist, in der vorliegenden Monographie gut und gern 13 Seiten (S. 99–107, 149–153, 175) beansprucht.

Die Fülle dieser konkreten Berechnungen macht den eigentlichen Wert der Monographie aus. Damit werden nicht nur Lücken in der allgemeinen Theorie elliptischer pseudodifferentialer Randwertaufgaben geschlossen, sondern viele, für sich interessante, neue Details über Struktur und Algorithmik elliptischer Randwertprobleme zu Tage gefördert. Zugleich weisen die Autoren nach, daß man mit der eleganten Theorie von Boutet de Monvel wirklich rechnen kann – gewiß mühsam das erste Mal, solange alle Nebenrechnungen noch neu zurechtgelegt werden müssen, aber leichter und effektiver nun, wo man mit diesem Buch zugleich einen Leitfaden und ein Nachschlagewerk für diesen modernen, leistungsfähigen Kalkül hat.

Das Buch ist in 4 Kapitel gegliedert. Das erste Kapitel gibt in bewundernswerter Kürze eine umfassende Einführung in die Theorie der oszillierenden Integrale und Pseudodifferentialoperatoren sowie die Elemente der  $K$ -Theorie. Das zweite, besonders wichtige Kapitel definiert die „Algebra“  $\mathcal{G}(X, Y)$ , behandelt ihre Grundeigenschaften und führt in den symbolischen Kalkül ein. Das dritte und vierte Kapitel ist dann den Anwendungen gewidmet, zunächst den allgemeinen elliptischen Randwertaufgaben und elliptischen Komplexen, dann besonderen Fällen, wie der rein analytischen Ableitung einer Indexformel nach Art von Fedosow [4], nicht-elliptischen Randwertaufgaben und Ausblicken u. a. auf Transmissionsprobleme und gemischte Randwertaufgaben, wo man in natürlicher Weise auf pseudodifferentiale Randwertbedingungen stößt. Die Darstellung berücksichtigt hier die wesentlichen Forschungsergebnisse der letzten Jahre auf diesem Gebiet, das durch eigene umfangreiche Beiträge der Autoren mitgeprägt wurde. Auch zeigt sich hier immer wieder, wie tief das Interesse der Autoren in der Analysis und letztendlich in Anwendungen der Ingenieurwissenschaften und der mathematischen Physik verwurzelt ist, für die die vorliegenden Indexberechnungen offensichtlich den Charakter einer Pilotstudie haben – um am „einfacheren“ Fall der Indexbestimmungen den modernen Kalkül der pseudodifferentiellen Randwertaufgaben zu entwickeln und seine Praktikabilität und Leistungsfähigkeit zu testen.

Zu den angenehmen Vereinfachungen des Kalküls, die eine Indextheorie erlaubt, gehören nicht allein die Berechnungen modulo Operatoren niedrigerer Ordnung („Glättungsoperatoren“), die auch für andere qualitative Untersuchungen und für konstruktive und approximative

„Standortvorteil“ der DDR-Mathematik, engste Vertrautheit mit der sowjetischen Mathematik und zugleich vielfältige, neu geschaffene Kontakte in Westeuropa, gut auszunützen verstanden.

Bedauerlich ist, daß ihr neuer, zusätzlich erweiterter Kalkül der pseudodifferentiellen Randwertaufgaben *ohne* vorausgesetzte Transmissionsbedingung [7] von den Autoren nicht mehr vor Drucklegung in das Buch eingearbeitet werden konnte. Doch auch in der vorliegenden Form ist das Buch als Leitfaden und Nachschlagewerk unbedingt notwendig für jeden, der sich mit elliptischen Randwertproblemen befaßt.

- [1] A t i y a h , M. F., B o t t , R.: The index problem for manifolds with boundary. Coll. Differential Analysis, Tata Institute Bombay, Oxford University Press, Oxford 1964, 175–186
- [2] A t i y a h , M. F., S i n g e r , I. M.: The index of elliptic operators on compact manifolds. Bull. Amer. Math. Soc. **69** (1963) 422–433
- [3] B o u t e t d e M o n v e l , L.: Boundary problems for pseudo-differential operators. Acta Math. **126** (1971) 11–51
- [4] F e d o s o w , B. V. (Федосов, Б. В.): Аналитические формулы индекса эллиптических оператора. Труды Моск. мат. общ. **30** (1974) 159–241
- [5] G r u b b , G.: On pseudo-differential boundary problems. I, IB, IIA, IIB. Preprints 2–79, 1–80, 2–80, 7–80. Matematisk Institut, København's Universitet 1979/80
- [6] G r u b b , G.: Singular Green operators and trace class estimates for exterior boundary problems. Preprint 16–82. Matematisk Institut, København's Universitet 1982
- [7] R e m p e l , S.; S c h u l z e , B.-W.: Parametrices and boundary symbolic calculus for elliptic boundary problems without the transmission property. Math. Nachr. **105** (1982), 45–149
- [8] W i s c h i k , M. I.; E s k i n , G. I. (Вишик, М. И., Эскин, Г. И.): Эллиптические уравнения в свертках в ограниченной области и их приложения. Успехи матем. наук **22**, I (1967) 15–76

Roskilde

B. Booß

**Smoller, J., Shock Waves and Reaction – Diffusion Equations** (Grundlagen der mathem. Wissensch., Band 258), Berlin – Heidelberg – New York: Springer Verlag 1983, 162 figs., 610 p., cloth DM 128,–

Dieses Buch wurde nach Aussagen des Autors aus zwei Gründen geschrieben. Erstens sollte die Theorie „of hyperbolic conservation laws“ und die Theorie „of systems of reaction-diffusion equations“ für Interessierte leichter zugänglich gemacht werden und zweitens war die Absicht, moderne Methoden und Ideen in diesen Gebieten einem größeren Leserkreis als nur Mathematikern darzustellen. Wer in Lehrveranstaltungen über partielle Differentialgleichungen Wert auf Anwendungen in der Strömungslehre und Gasdynamik legt, wird deshalb dieses Buch erwartungsvoll zur Hand nehmen.

Das Buch enthält vier Hauptteile, wobei jeder dieser Teile nach Aussagen des Autors einem einsemestrigen Kurs entspricht und Part I auch als Einführungskurs in Partielle Differentialgleichungen gedacht ist.

Zum Inhalt: Part I (Basic Linear Theory) behandelt die Charakteristikentheorie für Anfangswertprobleme bei hyperbolischen Differentialgleichungen, Eindeutigkeitsaussagen mit der Energie-Integralmethode, bringt den Holmgrenschen Eindeutigkeitsatz und es wird gezeigt, wie mit Hilfe der Energie-Integralmethode und der Fouriertransformation globale Existenzsätze herleitbar sind. – Ein Kapitel führt in die Distributionstheorie ein und bringt die Konstruktion von Fundamentallösungen. Den Abschluß bilden die Untersuchungen linearer elliptischer und parabolischer Differentialgleichungen zweiter Ordnung, deren Maximum-Prinzip und für elliptische Gleichungen die Herleitung von Existenzaussagen mit der Schauder-Methode.



Part II (Reaction-Diffusion Equations) beginnt mit dem Studium einer nichtlinearen parabolischen Gleichung. Mit Hilfe des Maximum-Prinzips werden Vergleichssätze für Lösungen hergeleitet, deren asymptotisches Verhalten für  $t \rightarrow \infty$  wird untersucht und es wird gezeigt, wie mit Hilfe von Ober- und Unterfunktionen Existenzaussagen gewonnen werden. Der Brouwersche Fixpunktsatz wird bewiesen, der Leray-Schauder-Grad wird definiert und gezeigt, wie topologische Methoden zum Nachweis von Lösungen partieller Differentialgleichungen verwendet werden. Nach einer Einführung in die Morse Theorie werden Bifurkation Probleme untersucht und

asymptotisches Verhalten der Lösungen studiert.

Part III (The Theory of Shock Waves) behandelt quasilineare Systeme der Gestalt

Dem Referenten ist unklar, wie Nichtmathematikern, und damit einem größeren Leserkreis, diese Materie nähergebracht und verständlich gemacht werden soll.

Der anwendungsorientierte Mathematiker dagegen wird dieses Buch, mit Hilfe der „Notes“ am Ende eines Kapitels mit Hinweisen auf die Originalliteratur, mit Nutzen studieren. Sehr erleichtert wird dieses Studium durch die Einleitungen zu den einzelnen Kapiteln, in denen die zu erarbeitenden Aussagen vorgestellt und häufig physikalisch interpretiert werden.

Karlsruhe

M. Schneider

**Beem, J. K.; Ehrlich, P. E., Global Lorentzian Geometry (Pure and Applied Math. 67),** New York – Basel: Marcel Dekker 1981, VI + 460 p., hardbound, \$ 45,–

The singularity theorems of Penrose and Hawking, together with subsequent work on black holes and cosmology, have brought into general relativity ideas and techniques from global Riemannian geometry. To a physicist or an applied mathematician investigating the nature of gravitation, it is natural that these ideas should be of more interest for their applications than for the context of their development. So it is, in the view of the authors of this book, that a division has arisen between two groups working on similar geometric theories: physicists on Lorentzian geometry and mathematicians on Riemannian geometry.

The authors intention is to heal the division by presenting to mathematicians a systematic account of Lorentzian geometry as a branch of modern differential geometry. Their technique is to take familiar but fundamental theorems from Riemannian geometry and to examine the modifications that must be made to obtain results in space-time of analogous content.

The early chapters deal with geodesic completeness, motivated by a discussion of the

However, the authors' outlook does also produce some distortion. The motivation from analogies with Riemannian geometry can appear forced and can give a misleading impression of the significance of a result. An example is the treatment in ch. 6 of the stability of geodesic incompleteness in Robertson-Walker space-times. Although interesting, it is not of great physical significance that metrics near Robertson-Walker metrics are past incomplete along all timelike geodesics. The interesting question that arises from the physical analysis is: is it true that in solutions of Einstein's equation (with appropriate energy momentum tensor) that are close to a "big bang" Robertson-Walker model, in the sense of having nearby Cauchy data on some Cauchy surface, *all* past directed timelike geodesics run into a singularity? This question, which the

a mathematical problem for the fact that it is hard to motivate in terms of Riemannian analogies. I feel that the mathematical community is more interested in being given clear statements of mathematical problems that are of physical interest than in attempts to transplant the roots of Lorentzian geometry from relativity to pure mathematics.

Oxford

N. M. J. Woodhouse

das Buch möge „dazu anregen, die höhere Geometrie als Theorie der Räume mit Absolutfigur und die zugehörigen Geometrien auch in Zukunft weiterzuführen“, in Erfüllung gehen wird.

Wien

H. Brauner

**Beutelspacher, A., Einführung in die endliche Geometrie II**, Mannheim – Wien – Zürich: Bibliographisches Institut 1983, 237 S., DM 29,80

Der zweite Band von Beutelspachers Einführung in die endliche Geometrie befaßt sich inhaltlich weitgehend unabhängig vom ersten Band mit der Kombinatorik endlicher projektiver Räume:

Im Kapitel 6 wird das System der Punkte und Hyperebenen als ein symmetrischer  $2$ - $(v, k, \lambda)$ -Blockplan gekennzeichnet, in dem mit je drei nichtkollinearen Punkten stets dieselbe Anzahl von Blöcken inzidiert (Dembowski u. Wagner 1960). Anschließend werden entsprechend die endlichen affinen Räume charakterisiert (Dembowski 1964, 1967, Kimberley 1971). Das inzidenzgeometrische Axiomensystem von Lenz für affine Räume wird benutzt, um einen Satz von Doyen und Hubaut (1971) zu beweisen: Jeder mindestens vierdimensionale lokal projektive  $2$ - $(v, k \geq 3, 1)$ -Blockplan ist ein projektiver oder affiner Raum.

tiven Ebenen, von quadratischen Mengen (Ovoiden, Kegeln über Ovalen, Hyperboloiden) in dreidimensionalen projektiven Räumen und von blockierenden Mengen, Faserungen und Überdeckungen projektiver Räume.

Kapitel 8 ist dem Studium der Möbius- und Minkowski-Ebenen gewidmet. Dembowskis berühmter Satz, daß jede Möbius-Ebene erster Ordnung als Ebenenschnitt Geometrie eines

Jacobs, K., **Einführung in die Kombinatorik**, Berlin – New York: de Gruyter 1983, 274 S., DM 48,—

Aus dem Vorwort des Wilhelm Maak gewidmeten Buches: „Das vorliegende Buch schließt sich soweit wie möglich an das Bändchen von Ryser [1963] an. Es wendet sich nicht so sehr an zukünftige Berufskombinatoriker, sondern vor allem an Mathematiker jeder Arbeitsrichtung, die einen knappen, vielseitigen Einblick in die Kombinatorik gewinnen und mit bescheidenem technischem Aufwand schnell an eine Vielzahl berühmter Resultate herankommen wollen. Damit sind insbesondere Studenten und auch Gymnasiallehrer angesprochen (die Kombinatorik wird wegen ihres Reizes und ihrer Direktheit in Zukunft eine wachsende Bedeutung im Schulunterricht haben). Ich habe deshalb, bildlich gesprochen, versucht, einen möglichst kleinen Kuchen mit möglichst vielen Rosinen zu backen.“

Kurze Inhaltsangabe: Kapitel I: Einfache Anzahlaussagen, Ein- und Ausschließung. Kap. II. Der Heiratssatz und seine Verwandten: Heiratssatz von P. Hall 1935, Graphensatz von König 1916, Satz von Dilworth 1950 über endliche Halbordnungen, Satz von Sperner 1928 über Antiketten in endlichen Potenzmengen, Graphensatz von Menger 1927, Schnitt-Fluß-Theorem von Ford-Fulkerson 1956, Satz von Baranyai 1975. Kap. III. Orthogonale lateinische Quadrate: Der Satz von Bose-Shrikhande-Parker 1960 über die Existenz zweier orthogonaler lateinischer Quadrate jeder Ordnung  $n \neq 2,6$  wird bewiesen, mittels eines von R. M. Wilson 1974 publizierten Lemmas von D. K. Ray-Chaudhuri und des Satzes von MacNeish 1922. Kap. IV. Der Satz vom Diktator (Arrows Paradoxon 1951). Kap. V. 0-1-Folgen, insbes. die Morse-Folgen. Sie sind nicht periodisch, aber fastperiodisch. Kap. VI. Der Satz von Ramsey 1930, endliche und unendliche Fassung. Kap. VII. Die Sätze von van der Waerden 1926 und Hales-Jewett 1963, mit historischen Bemerkungen. Ohne Beweis wird über Sätze von I. Schur 1916, Rado 1933, Deuber 1973 und Szemerédi 1975 berichtet (Szemerédi gewann so den von Erdős privat gestifteten Preis von 1000 Dollar). Kap. VIII. Codes: Sofort entzifferbare und eindeutig entzifferbare, fehlerentdeckende und fehlerberichtigende Codes, Elemente der algebraischen Code-Theorie. Ein Schreibfehler auf S. 137 oben führt nicht zu weiteren Fehlern. Kap. IX. Endliche projektive Ebenen: Anzahlaussagen, Existenz absoluter Punkte von Polaritäten, das Freundschaftstheorem von Erdős-Rényi-Sós 1966, der Nichtexistenzsatz von Bruck-Ryser 1949. Kap. X. Blockpläne: Über das von Kirkman 1851 gestellte Problem wird ein gedrängter Schulmädchenreport gegeben [Beweis des Existenzsatzes von Ray-Chaudhuri und Wilson 1971 für  $k = 3$ , Bericht über weitere Resultate]. Kap. XI. Partitionen: Grundbegriffe, erzeugende Funktionen, Eulers Pentagonalzahlen-theorem. Kap. XII. Polya's Abzähltheorie (Redfield 1927, Polya 1937): Der Zyklenindex, Burnside's Lemma, Alkohole (einschl.  $H_2O$ ). Kap. XIII. Kombinatorische Betrachtungen topologischen Ursprungs: Königsberger Brückenproblem und Euler-Graphen (1936), Eulerscher Polyedersatz 1752/53; Fünffarbensatz und Vierfarbenproblem mit Bericht über den Stand von 1982, insbesondere Appel, Haken und Co.<sup>1)</sup> 1976; Hamiltonsche Kreise, Sätze von Dirac 1952, Ore 1960 und Pósa 1962; das Sperrersche Lemma 1928 mit dem vereinfachten Beweis des Brouwerschen Fixpunktsatzes 1911. Kap. XIV. Spiele auf Graphen: Baumspiele, Kuhnsches Gleichgewichtstheorem 1950, Spiele vom Typ Nim. Kap. XV. Spezielle Folgen ganzer Zahlen: Einleitung mit Tabelle, Fibonacci-Zahlen 1202, Rencontre-Zahlen, Menage-Zahlen, Bellsche Zahlen, Partitionszahlen, Catalansche Zahlen 1869, Stirlingsche Zahlen.

Was dem Referenten besonders gefallen hat: Die Stoffauswahl umfaßt sowohl das unerläßliche Grundwissen als auch eine Einführung in viele reizvolle Problemkreise mit Ausblicken auf neuere Resultate und ungelöste Fragen. Häufig wird eine verbale Ausdrucksweise der streng formalen Schreibweise vorgezogen. Zu den vom Verfasser benutzten mathematischen Begriffen gehören z. B. Dame, Freundschaft, Herr, Lattenzaun, Liebes-Einheit, mächtige Familie, Politiker, Strunk und Trauf. Besonders eingängig für Laien erscheint das Kapitel über Spiele auf Graphen.

<sup>1)</sup> ein Computer

In der Regel (mit Ausnahmen) werden die wesentlichen Begriffe vor oder gleichzeitig mit der mathematischen Definition durch Beispiele, Einkleidungen und Figuren erläutert. Die behandelten Problemkreise werden immer mit historischen Angaben und Jahreszahlen versehen. Das Lit.-Verzeichnis nennt die vollen Vornamen der Autoren und bei nicht mehr lebenden Mathematikern das Geburts- und Todesjahr.

Die vom Referenten bemerkten Druckfehler und sonstigen Ungenauigkeiten (z. B. bei der Wiedergabe asymptotischer Existenzsätze von Ray-Chaudhuri und Wilson) halten sich in dem bei mathematischen Werken üblichen Rahmen.

Berlin

H. Lenz

**Szép, J., Forgó, F., Einführung in die Spieltheorie. Thun — Frankfurt/M.: Verlag Harri**

Deutsch 1983 (© Akadémiai Kiadó, Budapest 1983), 292 S., gebd., DM 28,—

Diese Übersetzung aus dem Ungarischen ist eine sehr detaillierte Einführung in gewisse Teilgebiete der Spieltheorie. Die Autoren machen auch von vornherein gar kein Hehl daraus, daß sie eine ihren subjektiven Präferenzen entsprechende Auswahl getroffen haben. Der Schwerpunkt liegt demgemäß in erster Linie auf nichtkooperativer Theorie, weiter noch auf kooperativer ( $n$ -Personen)-Theorie und weniger auf den dynamischen/stochastischen Aspekten. Besonderes Gewicht gelegt wird stellenweise auf die konkrete Berechnung von Gleichgewichtspunkten. Hier ist das Buch außerordentlich informativ.

Nach einem einleitenden Kapitel, in dem „Systemtheorie“ getrieben und eine Einbettung der Spieltheorie in jene versucht wird, behandeln die ersten Kapitel  $n$ -Personen nichtkooperative Theorie und das Konzept des Nashschen Gleichgewichtspunktes. Man findet Existenzsätze und sehr ausführliche Diskussionen zur Berechnung von Gleichgewichtspunkten (Iterationsverfahren, Scarf-Hansen-Verfahren etc.).

Dagegen kommt die extensive Form etwas zu kurz. Sie wird en passant im dritten Kapitel eingeführt, in dem Spielbäume und Informationsbezirke und andere, die „Spielregeln“ wiedergebenden Konstrukte, kurz erläutert werden. Allein, dem nicht bereits vororientierten Leser ist möglicherweise die Einbettung in die Normalform, die den Hauptgegenstand der ersten Buchhälfte bildet, nicht ohne weiteres ersichtlich. Insbesondere das sehr diffizile Informationsproblem ist in dieser Kürze nicht zu verarbeiten. Vielleicht wäre es vorzuziehen, die Thematik ganz zu streichen.

Nach einigen Beispielen (Oligopolspiel) wird der Komplex Matrix/Bimatrixspiele außerordentlich ausführlich abgehandelt. Zusammenhang mit linearen Programmen wird wie üblich etabliert und die iterativen Verfahren (Brown/Robinson) sowie das kontinuierliche über eine Differentialgleichung (von Neumann) zum Auffinden eines Gleichgewichtspunktes werden in extenso diskutiert. Auch Beispiele werden gerechnet. In diesen Bereichen hat das Buch seine Stärken.

Kapitel 20 fällt etwas aus dem Rahmen. Da die „Dynamik“ ohnehin nicht ein betonter Gegenstand des Buches ist, stehen die hier behandelten stochastischen Spiele etwas allein. Zudem wird nur Shapleys 1953er Resultat für den stationären Fall bei positiver Stopwahrscheinlichkeit erörtert — hier ist man ja nun inzwischen viel, viel weiter. Aber wie gesagt, dieses Kapitel ist eigentlich nicht das Thema des Buches.

Mit Kapitel 23 beginnt die Erörterung der kooperativen Theorie. Erneut wäre es etwas wünschenswerter, wenn die Zusammenhänge „kooperative/nichtkooperative Theorie“ sowie „extensive Form/Normalform/charakteristische Funktion“ etwas klarer herausgearbeitet würden. Dennoch hat der Leser großen Gewinn am Aufbau der bekanntesten Lösungskonzepte. Es werden (in englischer Terminologie) das Core, der Maschler-Davis-Kernel und der Shapley-Wert angeboten sowie in einem weiteren Kapitel Stable Payoff Configurations und Bargaining-set.

Erneut hat man Gelegenheit, die Tragweite der Theorie an netten Beispielen zu überprüfen. Marktspiele und L. P.-Spiele sind wie üblich die geeigneten Ansatzpunkte, um die kooperative Theorie im Licht klassischer ökonomischer Begriffsbildungen neu zu betrachten. Das

abschließende Kapitel 28 befaßt sich (wieder?) mit dem Begriff „incomplete information“. Auch hier ist in gewisser Weise der Zusammenhang offen. Das Kapitel steht etwas allein.

Das Buch bietet eine Fülle von Material auf den Gebieten, auf denen es erklärtermaßen seinen Schwerpunkt hat. Es ist in diesen Bereichen sehr gut geeignet sowohl zum Einlesen wie auch zur Vertiefung. Etwas mehr Wille zur Gliederung wäre dem Buch vielleicht noch zu wünschen.

Ein Wort zur Nomenklatur scheint notwendig: Der Rezensent ist mit der (in einigen osteuropäischen Sprachen ebenfalls üblichen) Methode, das Wort „Core“ mit „(Pflanzen-) Mark“ zu übersetzen und Maschlers „Kernel“ einfach mit dem gut deutschen „Kern“ zu bezeichnen, nur allzu einverstanden. Leider ist (gerade bei Autoren, die sich mit Gleichgewichtstheorie beschäftigen) es ebenso üblich geworden, das „Core“ mit „Kern“ zu bezeichnen. Nur gut, daß im vorliegenden Werk der „Nucleolus“ nur in Klammern als „Kernkörper“ bezeichnet wird. Die Übersetzung „Absprachenmenge“ für „Bargaining-set“ ist vielleicht nur etwas frei – der Begriff

ersetzt werden. Bei der Fülle (meist in englischer Sprache geprägten) Begriffe in der kooperativen Spieltheorie muß man im deutschsprachigen Bereich zunehmend eine Verwirrung der Nomenklatur befürchten.

Bielefeld

J. Rosenmüller

gesamte Länge der von ihm ausgewählten Menge, falls der von Spieler BLAU ausgewählte Pfad diese Menge nicht trifft, und 0 andernfalls.

Dieses Spiel interpretieren wir (S. 135) etwa wie folgt: Spieler ROT (der oftmals, wenn es etwas martialisch zugeht, wie es scheint, nicht ganz das Vertrauen des Lesers verdient) installiert elektrische Untergrundkabel in einem gewissen rechteckigen Feld in der finsternen Absicht, gewisse Hilfseinrichtungen für vertragswidrig installierte Raketensilos damit zu bedienen. Die Lage der Kabel wird durch gewisse Pfosten angezeigt, ihre Länge kann jedoch variiert werden und ein von der Partei BLAU legitimer Inspektor hat das Recht, das Feld, in dem die verdächtige Installation beobachtet wird, einmal quer zu inspizieren. Nun rechnen wir Wert und optimale Strategien aus und sind für allerhand Abrüstungsgespräche bestens präpariert.

Es ist in diesem Falle vielleicht gerechtfertigt, eine Besprechung durch Beispiele zu illustrieren, denn das Buch ist im wesentlichen eine beeindruckende Sammlung solcher Beispiele mit ihren Interpretationen. Dies erklärt der Autor auch ausdrücklich in seiner Einleitung: es komme ihm nicht darauf an, eine Theorie dieser geometrischen „search and ambush“ Spiele aufzustellen; es gehe ihm nur darum, die bisher erreichten Ergebnisse in ihrer ganzen Fülle vorzustellen. Diese sind im wesentlichen von dem oben vorgestellten Typ, zusammen mit den teilweise recht kniffligen Berechnungen des Wertes und der optimalen Strategien. Es folgt dann im allgemeinen ein Satz von Interpretationen zusammen mit ungelösten Problemen. Eine wahre Fundgrube für jemanden, der Beispiele, knifflige Problemchen und interessante Methoden zur Berechnung von Wert und optimalen Strategien gewisser Spiele sucht.

Das Buch ist in 5 Kapitel gegliedert, deren erstes eine Einführung und einige allgemeine Bemerkungen enthält, während die anderen vier nach dem zugrunde liegenden Zustandsraum geordnet sind. Kapitel 2 behandelt endliche Spiele, Kapitel 3 Spiele auf dem Einheitsintervall und im  $\mathbb{R}^n$ , Kapitel 4 ebenfalls, jedoch sind die Strategiemengen von etwas anderem Typ: stetige Funktionen oder ähnliches werden als Strategien zugelassen (oft als Pfade eines Inspektors oder dergleichen zu interpretieren). Kapitel 5 schließlich befaßt sich mit Spielen auf einem zyklischen Graphen.

Das Buch ist mit Vergnügen zu lesen, die Fülle der Beispiele, kleinen und größeren Tricks und der dazu gereichten Interpretationen (oftmals lässig, hie und da vielleicht etwas zu martialisch) ist beeindruckend. Der Mangel an einer übergeordneten Theorie wird vom Autor fröhlich zugegeben. Schließlich, so meint er, habe er sein Buch ja auch nicht „die Theorie der geometrischen Spiele“ genannt.

Bielefeld

J. Rosenmüller

Conway, J. H., **Über Zahlen und Spiele**, Braunschweig – Wiesbaden: Vieweg 1983, VII + 205 S., kart. DM 38,—

Conway publizierte 1976 bei Academic Press sein wunderbares Buch „On Numbers and Games“ (corrected reprint 1977), in dem er Früchte seiner Beschäftigung mit mannigfachen Zwei-Personen-Spielen in farbenreichen, fundierten Skizzen vor dem zum Mitspielen aufgeforderten Leser ausbreitet. Eine dieser Früchte ist ein neuer Aufbau des Zahlensystems, der Dedekinds Theorie der Schnitte, Leibniz' Ideen von den infinitesimalen Zahlen und Cantors Kon-



anregend ist und zugleich mit wenig Vorkenntnissen auskommt, so daß auch Amateure auf ihre Kosten kommen, wenn sie sich Zeit zur Vertiefung nehmen. Inzwischen ist eine ausführlichere zweibändige Darstellung mancher der hier behandelten Spiele erschienen (Berlekamp, Conway & Guy: *Winning Ways*. Acad. Press 1982).

Der Vieweg-Verlag, der schon mehr für Verbreitung der unterhaltenden Mathematik in Deutschland getan hat, hat sich Conways Buch nicht entgehen lassen und legt eine Übersetzung von B. Kunisch vor. Nicht alle Wortspiele des Autors lassen sich adäquat im Deutschen wiedergeben. Doch nicht nur aus diesem Grunde sei dem Leser der deutschen Ausgabe empfohlen, ein wenig ins Original zu sehen, denn an einer Reihe von Stellen ist die Übersetzung ärgerlich: „in-effective“ muß nicht „unbrauchbar“ sein, „domain“ ist nicht immer ein „Integritätsbereich“, sondern hier mehrmals „Grundmenge“, „(bijarv) expansion“ ist nicht „(binäre) Erweiterung“

sondern „(binäre) Ziffernentwicklung“ etc. Auch bei anderen Unklarheiten hilft das Original oft schneller weiter als eigenes Nachdenken.

Trotz der genannten Einschränkungen könnte und sollte diese Übersetzung Conways Ideen in Deutschland populärer machen.

Erlangen

W.-D. Geyer

**Berlekamp, E. R., Conway, J. H., Guy, R. K., *Winning Ways*, Vol. I: *Games in general*, Vol. II: *Games in particular*, London, etc.: Academic Press 1982, 850 p., paperback price: I: £ 10.80/\$ 22.50; II: £ 10.80/\$ 22.50; softcover set price: \$ 39.00**

Back in 1971 the reviewer heard from one of the authors of *Winning Ways*, that he was preparing a book on games. In the last few years the rumours that Elwyn R. Berlekamp, John H. Conway and Richard K. Guy were about to publish a book on games, became stronger and stronger.

Let me start of by expressing my opinion that the fifteen years of toil, of which the authors speak in their preface, have most certainly been worth it.

Of course the authors could never have predicted at that time, that their book would come from the press, around the time that Martin Gardner was retiring. They used, however, the opportunity to dedicate *Winning Ways* to him, with the words: to Martin Gardner, who has brought more mathematics to more millions than anyone else.

The three authors, with a rather diverse background (E. Berlekamp for instance is an electrical engineer, and is one of the worlds leading algebraic coding theorists), share a great passion for games. And as can be expected from people at their level, they are not satisfied with a simple solution (read: the optimal playing strategy) for a game. A game for them is more than just a game.

Most of the games discussed in this book are played by two persons, who each have complete information (so bridge, a two-party game, is excluded). The two players take alternate turns, making moves according to certain rules (restrictions). These restrictions are free of any chance mechanism. The first player unable to move is (normally) the loser.

The authors distinguish between partizan games, i.e. games where the two players have different options (think of chess, where each player has his own colour) and impartial games, i.e. games where each player has the same options (think of NIM).

Since the authors fear that no friend of a reader of *Winning Ways* wants to play with this reader anymore, they have included a number of one-person games (solitaire, puzzles, life). More about them later.

In a narrative way (holding its middle between an intuitive way and a more formal mathematical way) the authors develop for the two-person games a way to attach a certain value

$v$  to any possible situation during the game and in particular to the starting position. This value  $v$  to one player, say the left player (for the right player this value is  $-v$ ) expresses the advantage that the left player has in a particular situation. Suppose that in a given situation one can make moves leading to situations with value  $a_1, a_2, \dots$  (for this left player), while the possible moves for the right player lead to situation with values  $b_1, b_2, \dots$  (again for the left player). A good way to describe this situation is

$$\{a_1, a_2, \dots \mid b_1, b_2, \dots\}.$$

Once you know how to attach a value to this expression, you can determine the value of any situation with a back tracking procedure. The reader should realize that this value not only expresses for which player this game is advantageous to play, but also by how much. This knowledge is needed, when you play more games at once with your opponent (you have to decide in which game you want to make your move and what that move will be).

Attaching a value to  $\{a_1, a_2, \dots \mid b_1, b_2, \dots\}$  is not as easy as you might have wished. Indeed  $\{2 \mid 3\} = 2\frac{1}{2}$  (as you would have hoped), but  $\{\frac{1}{2} \mid 2\frac{1}{2}\} = 1$ . To  $\{0 \mid 0\}$  the value  $*$  is attached and to  $\{0 \mid *\}$  the value  $\uparrow$ , with the bizarre property that  $\uparrow$  is positive, but less than any positive number. More of these new notions of values are introduced and the authors show how to manipulate with them.

The authors introduce these new concepts in a natural way, but that does not mean that one can quickly browse through the pages. Especially in volume I the reader needs a pen and a piece of paper to verify the statements or to develop a certain intuition for the problems.

Luckily the reader can read and appreciate most of the one-person games in volume II, without having the knowledge of how to attach a value to a given game situation. To give an idea of the intellectual interest of the authors in their games, I will discuss part of their treatment of solitaire.

First of all they give a solution to the standard version of solitaire, that you will never forget. Secondly they discuss certain packages of moves that you can „glue“ together to solve the variant of solitaire, in which not the central position is empty at the beginning and filled at the end, but any of the other positions.

In a third version the hole is in any of the possible positions and you require which peg is the last to move. It turns out that this last peg can only finish in a certain subset of the positions. To determine which positions these are, a bit of theory is introduced.

A fourth variant is playing solitaire backwards in time, a fifth variant allows moves forwards and backwards in time, etc.

It is impossible to describe the sense of humour that is omnipresent in Winning Ways. What to think of a variant of tic-tac-toe, attributed to E. Pericoloso Sporgersi? And who will ever forget the little paragraph on page 597 describing the etiquette of Sylver Coinage.

To conclude, I sincerely recommend Winning Ways to anyone who likes to play (and win) two-person games.

The much wider group of puzzle fanatics, I can truly recommend volume II, which discusses many of the puzzles that you know, in an unforgettable way.

Eindhoven

H. C. A. van Tilborg

**Gani, J. (Ed.), The Making of Statisticians, Berlin – Heidelberg – New York: Springer-Verlag 1982, VIII + 263 S., Cloth, DM 49,-**

Autobiographische Zeugnisse bedeutender Forscher sind wissenschaftsgeschichtliche Urkunden von außerordentlichem Wert: unter der polierten Struktur der Publikationen kommt

der Nährgrund, der Schwung der Ideen zum Vorschein. Der vorliegende Band vereint 16 solche Urkunden, deren Entstehung man der Initiative von Joe Gani verdankt. Es äußern sich die Stochastiker Bruno de Finetti, Eugene Lukacs, Gheorghe Mihoc, M. S. Bartlett, Mark Kac, Z. W. Birnbaum, R. C. Bose, Wassily Hoeffding, E. J. G. Pitman, R. L. Anderson, D. J. Finney, Tosio Kitagawa, L. H. C. Tippett, Herman Wold, B. Benjamin, Henry Oliver Lancaster auf jeweils 1 bis 2 Dutzend Druckseiten. Der Charakter der Selbstdarstellungen variiert von überwiegend biographischen Angaben bis zu kleinen fachwissenschaftlich-historischen Essays. Beispielsweise kann der Beitrag von de Finetti als flotte Einführung in die Ideenwelt der subjektiven Wahrscheinlichkeiten dienen. Jedem Beitrag ist ein Photo und eine Kurzbiographie vorangestellt und eine meist selektive Bibliographie beigegeben. Neben Lebenswegen im wohlumhegten Raum eines Landes mit traditionsbewußter Wissenschaftspflege finden sich weiträumige Lebenswanderungen, vor allem bei den Kollegen osteuropäischer Herkunft. Oft verläuft der fruchtbarste Teil der Karriere in den USA.

In der hier versammelten, kleinen, illustren Gesellschaft fehlt naturgemäß mancher bedeutende Name. Insbesondere ist der Ostblock nur mit einem Beitrag (G. Mihoc) vertreten. Gani gelungenes Unternehmen wird man im weiteren Rahmen sehen, in dem Paul Lévy's Selbstzeugnisse „*Quelques aspects de la pensée d'un mathématicien*“ (Paris 1970), Joan Fisher Box' Buch über ihren Vater Ronald Alymer Fisher und Constance Reids Buch „*Neyman – from life*“ weitere prominente Lichtpunkte sind; auch einige Publikationen in den *Uspekhi* (Russian Mathematical Surveys) sind hier zu erwähnen. In dieser Landschaft von Biographien bedeutender Stochastiker wird hoffentlich auch einmal ein Selbstzeugnis von Joe Gani erscheinen. – Dem Verlag und dem Herausgeber ist zu einem schönen Werk, das alle Mathematiker interessieren dürfte, zu gratulieren.

Erlangen

K. Jacobs

**Roberts, F. S., Measurement Theory** (Encyclopedia of Mathematics and its applications 7), Reading, Massachusetts: Addison-Wesley Publ. Comp. 1979, XXII + 420 S., £ 14,70

Dieser 7. Band der „roten Rota-Enzyklopädie“ setzt die Ansätze früherer Monographien (u. a. von Pfanzagl 1959, Krantz-Supes et al. 1971, Raiffa 1968, Keeney-Raiffa 1976, Fishburn

Die in diesem Buch präsentierten Theorien gehören nicht zum innermathematisch Schwierigsten; zahlreiche Übungen erleichtern die Aneignung. Als vielseitiges Lehr-, Einführungs- und Überblicksbuch sei der gewichtige Band einschlägig interessierten Mathematikern warm empfohlen.

Erlangen

K. Jacobs

Heyer, H., *Theory of Statistical Experiments*, Berlin – Heidelberg – New York: Springer-Verlag 1982, X + 289 S., DM 48,-

Das Buch mit dem ungewöhnlichen Titel (eine erweiterte Version des Springer-Hochschultexts) ist zu mehr als der Hälfte eine Darstellung klassischer Kapitel der Mathematischen Statistik (z. B. erschöpfende Sigma-Algebren, Vollständigkeit, Tests bei monotonen Likelihood-Quotienten, exponentielle Familien, erwartungstreue Schätzung). Daran schließen sich vier Kapitel über die Theorie des „Vergleichs von Experimenten“ an, in denen außer den Grundlagen

vor allem Resultate von Torgersen wiedergegeben werden (hier erstmalig in der Lehrbuch-Literatur). Der entscheidungstheoretische Ansatz der Statistik, auf den sich der Verfasser im Vorwort beruft, wird schon in Kapitel I vorgestellt, und zwar zunächst in der verwandten spieltheoretischen Situation. An diesem Ansatz hält der Verfasser nicht fest. So bezeichnet er im Kapitel VI die Suche nach erwartungstreuen Schätzern mit minimaler Varianz als „obvious aim of an optimal decision process“. Dieses Prinzip der erwartungstreuen Schätzung läßt sich jedoch mit der Entscheidungstheorie nicht vereinbaren.

Die eigenwillige Terminologie des Buches weicht vielfach vom Gebräuchlichen ab: so heißt der von LeCam eingeführte Begriff „epsilon-deficient“ hier „Blackwell more informative at level epsilon“. Zuweilen werden feinste begriffliche Unterscheidungen vorgenommen, z. B. zwischen „exponential experiment“ und „exponential family“ (§ 14). Bei der erklärenden Prosa



## Allgemeine Algebra und Anwendungen

Von Prof. Dr. phil. D. W. DORNINGER, Technische Universität Wien, und Prof. Dr. phil. W. B. MÜLLER, Universität für Bildungswissenschaften Klagenfurt

1984. 324 Seiten mit zahlreichen Abbildungen, Beispielen und Übungen.  
16,2×22,9 cm. ISBN 3-519-02030-0. Geb. DM 42,—

*Aus dem Inhalt:* Operationen und Relationen (mit Beispielen aus der Verkehrsplanung und Soziologie) / Verbände und Boolesche Algebren (mit Anwendungen in der Quantenmechanik, Schaltalgebra und Aussagenlogik) / Halbgruppen (Automaten, Formale Sprachen, Beispiele aus der Biologie) / Gruppen (Anwendungen in der Zähltheorie, kristallographische Gruppen, ein Beispiel aus der Ethnologie, Elemente der Darstellungstheorie) / Ringe und Körper (Konstruktion mit Zirkel und Lineal, Statistische Versuchsplanung) / Fehlerkorrigierende Codes und Kryptographie

Proceedings of the Conference

## Mathematics in Industry

October 24–28, 1983 Oberwolfach

Edited by Prof. Dr. rer. nat. H. NEUNZERT, Universität Kaiserslautern

1984. 287 pages. 16,2×23,5 cm. ISBN 3-519-02610-4. Paper DM 52,—

### Contents

#### ORGANIZED COOPERATION BETWEEN UNIVERSITY AND INDUSTRY

R. S. Anderssen and F. R. de Hoog: A Framework for Studying the Application of Mathematics in Industry / A. B. Tayler: Oxford Study Groups with Industry; 1967–1983 / H. Wacker: Hydro Energy Optimization / J. Spanier: Applied Mathematics Education at the Claremont Colleges / H. Neunzert: Mathematics in the University and Mathematics in Industry – Complement or Contrast? / K. Hoffmann: On Establishing Contacts with Industry / M. Schulz-Reese: A Report of the „Kaiserslauterer Modellversuch“: Continuing Mathematical Education / H.-E. Gross and U. Knauer: University Education as Preparation for Professional Praxis / A. M. Kempf: Mathematical Modelling in the French Grandes Ecoles. The Particular Case of the E.S.I.E.A.

#### INDIVIDUAL PROJECTS AT THE UNIVERSITIES

C. Cercignani: Mathematics and Fluidynamics / M. Primicerio: Sorption of Swelling Solvents by Glassy Polymers / M. Shinbrot: Icebreaking by Hovercraft / B. Rihtarsic, F. Krmelj and I. Kuscer: Oscillations in Pipelines of Hydroelectric Power Plants / A. K. Louis: The Limited Angle Problem in Computerized Tomography / H. Frank: Computer Aided Design in Piping of Chemical Plants / W. Krüger: The Trippstadt-Problem / B. Aulbach: Trouble with Linearization

#### PROBLEMS POSED BY INDUSTRY

J. Bukovics: Oscillations of a Gasbody with Absorbant Walls (A Problem Occuring in Structural Acoustics of Passenger Cars) / P. Causemann: Requirements for a Calculating Program Regarding a Two-Mass Vibration System to Optimize Damping Force Characteristics for Vehicle Shock Absorbers / A. Gamst: Geometric Design of Mobile Radio Telephone Systems / U. Pallaske: Large Systems of Stiff Ordinary Differential Equations. Numerical Treatment by Systems Reduction / R. Zobel: Validation of a Vehicle Crash Model



**B. G. Teubner Stuttgart**

---

# MikroComputer-Praxis

## DISKETTEN

Die Buch- und Diskettenreihe für Schule, Ausbildung, Beruf, Freizeit, Hobby

Neben den bisher lieferbaren Kombinationen Buch/Diskette bieten wir neue Disketten **einzel** an.



**Neu!**  
Einzeldisketten

Erbs  
**33 Spiele mit PASCAL**  
und wie man sie (auch in BASIC)  
programmiert

**Diskette I** (einzel):   
Für Apple II; UCSD-PASCAL  
DM 46,- ISBN 3-519-09203-4

Hainer  
**Numerik mit**  
**BASIC-Tischrechnern**  
**Diskette III** (einzel):

Für C 64/VC1541; CBM-Floppy 2031,  
4040  
DM 48,- ISBN 3-519-09212-3

Menzel  
**BASIC in 100 Beispielen**  
**Buch mit Diskette I:**

Für Apple II; DOS 3.3  
DM 62,- ISBN 3-519-12505-6

**Buch mit Diskette II:**  
Für CBM-Floppy 8050, 8250  
DM 62,- ISBN 3-519-02519-1

**Diskette III** (einzel):   
Für C 64/VC1541; CBM-Floppy 2031,  
4040  
DM 42,- ISBN 3-519-09200-X

Die Disketten (5 1/4 Zoll) enthalten die Programme der zugehörigen gleichnamigen Bücher und ersparen dem Benutzer das manuelle Eingeben. Einzeldisketten = unverbindlich empfohlene Preise.

Menzel  
**Dateiverarbeitung mit**  
**BASIC**

**Buch mit Diskette I:**  
Für Apple II; DOS 3.3 bzw. CP/M  
DM 62,- ISBN 3-519-02514-0

Mittelbach  
**Simulationen in BASIC**  
**Diskette I** (einzel):

Für Apple II; DOS 3.3  
DM 46,- ISBN 3-519-09204-2

Nievergelt/Ventura  
**Die Gestaltung inter-**  
**aktiver Programme**  
**Buch mit Diskette I:**  
Für Apple II; UCSD-PASCAL  
DM 59,80 ISBN 3-519-02510-8

Ottmann/Schrapp/  
Widmayer  
**PASCAL in 100 Beispielen**  
**Buch mit Diskette I:**  
Für Apple II; UCSD-PASCAL  
DM 72,- ISBN 3-519-02516-7

## Die Bücher der Reihe MikroComputer-Praxis

Duenbostl/Oudin  
**BASIC-Physikprogramme**  
DM 23,80

Erbs   
**33 Spiele mit PASCAL**  
DM 32,-

Erbs/Stolz 2. Aufl.  
**Einführung in die Pro-**  
**grammierung mit PASCAL**  
DM 24,80

Haase/Stucky/Wegner 2. Aufl.  
**Datenverarbeitung heute**  
DM 23,80

Hainer  
**Numerik**

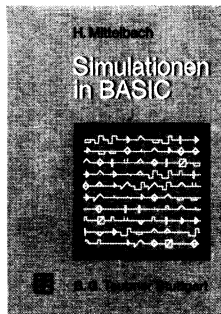
Klingen/Liedtke  
**Programmieren mit ELAN**  
DM 23,80

Lehmann  
**Lineare Algebra mit dem**  
**Computer**  
DM 23,80

Löthe/Hoppe   
**LOGO in Beispielen**  
ca. DM 25,-

Löthe/Quehl  
**Systematisches Arbeiten**  
**mit BASIC**  
DM 19,80

Menzel 4. Aufl.  
**BASIC in 100 Beispielen**



Menzel  
**Dateiverarbeitung**  
**mit BASIC**  
DM 28,80

Mittelbach   
**Simulationen in BASIC**  
DM 23,80

Nievergelt/Ventura  
**Die Gestaltung inter-**  
**aktiver Programme**  
DM 23,80

Ottmann/Schrapp/  
Widmayer

---

# Grundwissen Mathematik

Herausgeber: G. Hämmerlin, K. Lamotke, F. Hirzebruch,  
R. Remmert, M. Koecher, W. Walter

Band 5

R. Remmert

## Funktionentheorie I

1984. 65 Abbildungen. XIII, 324 Seiten. DM 44,-. ISBN 3-540-12782-8

**Inhaltsübersicht:** Historische Einführung. – Zeittafel. – **Elemente der Funktionentheorie:** Komplexe Zahlen und stetige Funktionen. – Komplexe Differentialrechnung. Holomorphie und Winkeltreue. – Biholomorphe Abbildungen. Konvergenzbegriffe der Funktionentheorie. Potenzreihen. Elementar-transzendente Funktionen. – **Cauchysche Funktionentheorie:** Komplexe Integralrechnung. Integralsatz, Integralformel und Potenzreihenentwicklung. – **Cauchy-Weierstrass-Riemannsche Funktionentheorie:** Fundamentalsätze über holomorphe Funktionen. Miscellanea. Isolierte Singularitäten. – Meromorphe Funktionen. Konvergente Reihen meromorpher Funktionen. Laurentreihen und Fourierreihen. Residuenkalkül. Bestimmte Integrale und Residuenkalkül. – Kurzbiographien von Abel, Cauchy, Eisenstein, Euler, Riemann und Weierstrass. – Literatur. – Symbolverzeichnis. – Namenverzeichnis. – Sachverzeichnis. – Porträts berühmter Mathematiker.

In lebendiger und anschaulicher Art und Weise, gut motiviert durch Beispiele und Übungsaufgaben, wird der Stoff der Funktionentheorie bis zum Residuenkalkül entwickelt. Darüber hinaus ist vieles an historischer Motivierung und Erläuterung, an Notizen zur Person und Originalzitate von Klassikern eingestreut, ohne daß das Buch dabei zu einer Geschichte der Funktionentheorie wird. Kenner werden Neues oder lang Vergessenes entdecken, z.B. Eisenstein's Zugang zu den Kreisfunktionen.

Dieses Buch wird viele Studierende auf ihrem Weg in dieses klassische Gebiet der Mathematik begleiten, das bis heute wohl das fruchtbarste Beispiel des innigen Zusammenhangs zwischen Analysis und Algebra darstellt. Bei Prüfungsvorbereitungen hat man schnell die wesentlichen Resultate zur Verfügung und erhält eine Fülle von interessanten Anregungen. Auch der Lehrer und der Mathematiker in der Wirtschaft und Industrie wird dieses Buch mit großem Gewinn lesen und immer wieder gerne hierauf zurückgreifen.



7231/51



Springer-Verlag  
Berlin  
Heidelberg  
New York  
Tokyo

Tiergartenstr. 17, D-6900 Heidelberg 1,  
175 Fifth Ave., New York, NY 10010, USA,  
37-3, Hongo 3-chome, Bunkyo-ku, Tokyo 113, Japan

---