

87. Band Heft 4  
ausgegeben am 8. 11. 1985

DMV

~~Journalbericht~~

der Deutschen Mathematiker-Vereinigung

Herausgegeben von K. Jacobs  
unter Mitwirkung von  
P. L. Butzer, U. Felgner.

# Jahresbericht

der Deutschen Mathematiker-Vereinigung

Der „Jahresbericht“ ist das offizielle Veröffentlichungsorgan der Deutschen Mathematiker-Vereinigung, für dessen inhaltliche Gestaltung im Auftrag des Präsidiums der jeweilige Herausgeber zuständig ist. Im „Jahresbericht“ sollen vornehmlich Überblicksartikel über Teilgebiete der reinen und angewandten Mathematik, Nachrufe sowie historische Artikel und Buchbesprechungen veröffentlicht werden.

## Manuskripte

Alle für die Schriftleitung des Jahresberichts bestimmten Sendungen (Briefe, Manuskripte, Ankündigung von neuerscheinenden Büchern) sind an Prof. Dr. K. Jacobs zu richten. Bücher, von denen eine Besprechung erfolgen soll, werden bei den Verlagen angefordert. Die Autoren werden gebeten, bei der Vorbereitung ihrer Manuskripte die „Hinweise für Autoren“ am Ende von Heft 86/2 zu beachten.

Grundsätzlich sollen nur solche Manuskripte eingereicht werden, die nicht gleichzeitig an anderer Stelle zur Veröffentlichung eingereicht oder bereits veröffentlicht worden sind. Mit der Annahme zur Veröffentlichung erwirbt der Verlag das Verlagsrecht zur Vervielfältigung und Verbreitung sowie das Recht der Übersetzung in andere Sprachen.

## Bezugsinformationen

Jährlich wird ein Band veröffentlicht, bestehend aus 4 Heften, die vierteljährlich erscheinen. Der Bezug ist nur bandweise möglich.

Der im voraus zahlbare Bezugspreis pro Band beträgt DM 94,- einschließlich Versand. Bestellungen nehmen jede Buchhandlung oder der Verlag entgegen.

Für Mitglieder der DMV ist der Bezug des Jahresberichts im Mitgliedsbeitrag enthalten.

Verlag:

B. G. Teubner, Industriestr. 15, Postfach 80 10 69

D-7000 Stuttgart 80, Tel. (07 11) 7 89 01-0

Verantwortlich für den Anzeigenteil: Walter Hirtz

Das Werk ist urheberrechtlich geschützt. Die dadurch begründeten Rechte, besonders die der Übersetzung, des Nachdrucks, der Bildentnahme, der Funksendung, der Wiedergabe auf photomechanischem oder ähnlichem Wege, der Speicherung und Auswertung in Datenverarbeitungsanlagen, bleiben auch bei Verwertung von Teilen

des Werkes, dem Verlag vorbehalten.

# Jahresbericht

der Deutschen Mathematiker-Vereinigung

Herausgegeben von K. Jacobs  
unter Mitwirkung von  
P. L. Butzer, U. Felgner,  
W.-D. Geyer, J. Stoer

87. Band



B. G. Teubner Stuttgart 1985

# Inhalt

## 1. Abteilung

V. Bangert: Geodätische Linien auf Riemannschen Mannigfaltigkeiten . . . . .	39
J.-P. Bourguignon: Analytical Problems Arising in Geometry: Examples from Yang-Mills Theory . . . . .	67
S. D. Chatterji: A Subsequence Principle in Probability Theory . . . . .	91
S. Koppelberg: Booleschwertige Logik . . . . .	19
F. Natterer: Numerik des Radonschen Problems . . . . .	108
E. Neher: Jacobis Tripelprodukt-Identität und $\eta$ -Identitäten in der Theorie affiner Lie-Algebren . . . . .	164
G. Schubring: Die Entwicklung des Mathematischen Seminars der Universität Bonn 1864–1929 . . . . .	139
K. Steffens: Faktoren in unendlichen Graphen . . . . .	127
R. Tijdeman: On the Fermat-Catalan Equation . . . . .	1

## 2. Abteilung

### Buchbesprechungen

Ablowitz, M. J.; Segur, H., Solitons and the Inverse Scattering Transform ( <i>B. Fuchssteiner</i> ) . . . . .	65
Ahlfors, L. V., Collected Papers ( <i>H. Grunsky</i> ) . . . . .	1
Albers, D. J.; Alexanderson, G. L. (ed.), Mathematical People, Profiles and Interviews ( <i>K. Jacobs</i> ) . . . . .	57
Alexits, G., Approximation Theory (Selected Papers) ( <i>P. L. Butzer</i> ) . . . . .	56
Amann, H., Gewöhnliche Differentialgleichungen ( <i>D. Flockerzi</i> ) . . . . .	24
Arnold, V. L., Singularity Theory-Selected Papers ( <i>G. Wassermann</i> ) . . . . .	31
Aubin, T., Nonlinear Analysis on Manifolds, Monge-Ampère Equations ( <i>J. P. Bourguignon</i> ) . . . . .	27
Aumann, G.; Haupt, O., Einführung in die reelle Analysis, Band III: Integralrechnung der Funktionen mehrerer Veränderlicher ( <i>H. Heyer</i> ) . . . . .	17
Baird, P., Harmonic Maps with Symmetry, Harmonic Morphisms and Deformation of Metrics ( <i>D. Ferus</i> ) . . . . .	22
Barth, W.; Peters, C.; Van de Ven, A., Compact Complex Surfaces ( <i>E. Viehweg</i> ) . . . . .	46
Bensoussan, A., Stochastic Control by Functional Analysis Methods ( <i>M. Jerschow</i> ) . . . . .	72
Biedenharn, L. C.; Louck, J. D., Angular Momentum in Quantum Physics-Theory and Application ( <i>H. Urbantke</i> ) . . . . .	37
Biedenharn, L. C.; Louck, J. D., The Racah-Wigner Algebra in Quantum Theory ( <i>H. Urbantke</i> ) . . . . .	37
Bosch, S.; Güntzer, U.; Remmert, R., Non-Archimedean Analysis ( <i>L. Gerritzen</i> ) . . . . .	43
Braun, M., Differential Equations and their Applications, An Introduction to Applied Mathematics ( <i>M. Wiegner</i> ) . . . . .	23
Browder, G. (ed.), The Mathematical Heritage of Henri Poincaré ( <i>K. Lamotke</i> ) . . . . .	39
Doob, J. L., Classical Potential Theory and its Probabilistic Counterpart ( <i>H. Bauer</i> ) . . . . .	49
Duren, P. L., Univalent Functions ( <i>Ch. Pommerenke</i> ) . . . . .	19
Ebbinghaus, H. D.; Hermes, H.; Hirzebruch, F.; Koecher, M.; Mainzer, K.; Prestel, A.; Remmert, R., Zahlen ( <i>W.-D. Geyer</i> ) . . . . .	14
Fahrmeir, L.; Hamerle, A. (Hrsg.), Multivariate statistische Verfahren ( <i>H. Witting</i> ) . . . . .	53
Fattorini, H. O., The Cauchy Problem ( <i>H. Grabmüller</i> ) . . . . .	34

Fenyő, S.; Stolle, H. W., Theorie und Praxis der linearen Integralgleichungen (Bände 3 und 4) ( <i>G. Hämmerlin</i> ) . . . . .	50
Field, M., Several Complex Variables and Complex Manifolds ( <i>G. Trautmann</i> ) . . . . .	21
Freed, D. S.; Uhlenbeck, K. K., Instantons and Four-Manifolds ( <i>N. Hitchin</i> ) . . . . .	69
Fuchssteiner, B.; Lusky, W., Convex Cones ( <i>K. Donner</i> ) . . . . .	33
Godbillon, C., Dynamical Systems on Surfaces ( <i>E. Zehnder</i> ) . . . . .	31
Grunsky, H., The General Stokes' Theorem ( <i>G. Nöbeling</i> ) . . . . .	61
Hanche-Olsen, H.; Størmer, E., Jordan Operator Algebras ( <i>H. Behncke</i> ) . . . . .	48
Hartigan, J. A., Bayes Theory ( <i>H. Heyer</i> ) . . . . .	73
Hecke, E., Lectures on Dirichlet Series, Modular Functions and Quadratic Forms ( <i>K.-B. Gundlach</i> ) . . . . .	15
Hector, G.; Hirsch, U., Introduction to the Geometry of Foliations, Part A and B ( <i>E. Vogt</i> ) . . . . .	64
Hua, L. K., Introduction to Number Theory ( <i>G. J. Rieger</i> ) . . . . .	12
Hua, L. K., Selected Papers ( <i>G. J. Rieger</i> ) . . . . .	13
John, F., Collected Papers ( <i>E. Heinz</i> ) . . . . .	55
Kaup, L.; Kaup, B., Holomorphic Functions of Several Variables: An Introduction to the Fundamental Theory ( <i>K. Wolfhardt</i> ) . . . . .	19
Kertész, A., Georg Cantor, 1845–1918, Schöpfer der Mengenlehre ( <i>U. Felgner</i> ) . . . . .	39
Khaleelulla, S. M., Counterexamples in Topological Vector Spaces ( <i>H. H. Schaefer</i> ) . . . . .	51
Klingenberg, W., Riemannian Geometry ( <i>K. Strambach</i> ) . . . . .	62
Koblitz, A. H., A Convergence of Lives. Sofia Kovalevskaia: Scientist, Writer, Revolutionary ( <i>N. Schappacher</i> ) . . . . .	7
Kraft, H., Geometrische Methoden in der Invariantentheorie ( <i>P. Slodowy</i> ) . . . . .	44
Krasnosel'skiĭ, M. A.; Zabreĭko, P. P., Geometrical Methods of Nonlinear Analysis ( <i>K. Deimling</i> ) . . . . .	37
Larson, L. C., Problem-Solving Through Problems ( <i>A. Engel</i> ) . . . . .	57
Lerman, M., Degrees of Unsolvability-Local and Global Theory ( <i>U. Felgner</i> ) . . . . .	41
Lidl, R.; Niederreiter, H., Finite Fields ( <i>W.-D. Geyer</i> ) . . . . .	60
Lidl, R.; Pilz, G., Angewandte abstrakte Algebra I, II ( <i>H. Lüneburg</i> ) . . . . .	59
Lidl, R.; Wiesenbauer, H., Ringtheorie und Anwendungen ( <i>H. Lüneburg</i> ) . . . . .	59
Littlewood, J. E., Collected Papers ( <i>R. C. Vaughan</i> ) . . . . .	2
Lothaire, M., Combinatorics on Words ( <i>D. Jungnickel</i> ) . . . . .	10
Magnus, W., Collected Papers ( <i>H. Zieschang</i> ) . . . . .	5
Meister, E., Randwertaufgaben der Funktionentheorie: Mit Anwendungen auf singuläre Integralgleichungen und Schwingungsprobleme der mathematischen Physik ( <i>D. Gaier</i> ) . . . . .	29
Métivier, M., Semimartingales. A Course on Stochastic Processes ( <i>M. Jerschow</i> ) . . . . .	71
Newman, D. J., A Problem Seminar ( <i>A. Engel</i> ) . . . . .	57
Novikov, S.; Manakov, S. V.; Pitaevskii, L. P.; Zakhorov, V. E., Theory of Solitons ( <i>B. Fuchssteiner</i> ) . . . . .	65
Petersen, K., Ergodic Theory ( <i>K. Jacobs</i> ) . . . . .	32

## IV Inhalt

Rényi, A., Tagebuch über die Informationstheorie ( <i>K. Jacobs</i> ) . . . . .	54
Schroeder, M. R., Number Theory in Science and Communication ( <i>W.-D. Geyer</i> ) . . . . .	13
Shiryayev, A. N., Probability ( <i>E. Eberlein</i> ) . . . . .	74
Skorohod, A. V., Random Linear Operators ( <i>G. Leha</i> ) . . . . .	51
Suzuki, M., Group Theory I ( <i>H. Bender</i> ) . . . . .	16
Szegö, G., Collected Papers I, II, III ( <i>R. P. Boas</i> ) . . . . .	6
Taniuti, T.; Nishihara, K., Nonlinear Waves ( <i>B. Fuchssteiner</i> ) . . . . .	65
Taylor, M., Classgroups of Group Rings ( <i>J. Ritter</i> ) . . . . .	47
Truhovič-Gjurič, D., Im Schatten Albert Einsteins. Das tragische Leben der Mileva Einstein-Marič ( <i>N. Schappacher</i> ) . . . . .	7
Washington, L. C., Introduction to Cyclotomic Fields ( <i>G. Tamme</i> ) . . . . .	41
Werner, J., Optimization Theory and Applications ( <i>J. Zowe</i> ) . . . . .	53

Das Werk ist urheberrechtlich geschützt. Die dadurch begründeten Rechte, besonders die der Übersetzung, des Nachdrucks, der Bildentnahme, der Funksendung, der Wiedergabe auf photomechanischem oder ähnlichem Wege, der Speicherung und Auswertung in Datenverarbeitungsanlagen, bleiben, auch bei Verwertung von Teilen des Werkes, dem Verlag vorbehalten.

Bei gewerblichen Zwecken dienender Vervielfältigung ist an die Verwertungsgesellschaft Wort, Abteilung Wissenschaft, Goethestraße 49, D-8000 München 2, gemäß § 54 UrhG eine Vergütung zu zahlen, deren Höhe mit der VG Wort zu vereinbaren ist.

Copying in the USA: Authorization to photocopy items for internal or personal use, or the internal or personal use of specific clients, is granted by B. G. Teubner, Stuttgart, for libraries and other users registered with the Copyright Clearance Center (CCC) Transactional Reporting Service, provided that the base fee of \$ 1.00 per copy, plus 0.20 per page is paid directly to CCC, 21 Congress Str., Salem, MA 01970. 0012-0456/83 \$ 01.00+.20.

© B. G. Teubner Stuttgart 1985 – Verlagsnummern 2900/1, 2900/2, 2900/3, 2900/4

Printed in Germany – ISSN 0012–0456

Satz: Elsner & Behrens GmbH, Oftersheim

Druck: Schwetzinger Verlagsdruckerei GmbH, Schwetzingen

# Jahresbericht

der Deutschen Mathematiker-Vereinigung

## Inhalt Band 87, Heft 4

### 1. Abteilung

G. Schubring: Die Entwicklung des Mathematischen Seminars der Universität Bonn 1864–1929 . . . . .	139
E. Neher: Jacobis Tripelprodukt-Identität und $\eta$ -Identitäten in der Theorie affiner Lie-Algebren . . . . .	164

### 2. Abteilung

John, F., Collected Papers ( <i>E. Heinz</i> ) . . . . .	55
Alexits, G., Approximation Theory (Selected Papers) ( <i>P. L. Butzer</i> ) . . . . .	56
Albers, D. J., Alexanderson, G. L. (editors), Mathematical People, Profiles and Interviews ( <i>K. Jacobs</i> ) . . . . .	57
Newman, D. J., A Problem Seminar – Larson, L. C., Problem-Solving Through Problems ( <i>A. Engel</i> ) . . . . .	57
Lidl, R., Wiesenbauer, J., Ringtheorie und Anwendungen ( <i>H. Lüneburg</i> ) . . . . .	59
Lidl, R., Pilz, G., Angewandte abstrakte Algebra I, II ( <i>H. Lüneburg</i> ) . . . . .	59
Lidl, R., Niederreiter, H., Finite Fields ( <i>W.-D. Geyer</i> ) . . . . .	60
Grunsky, H., The General Stokes' Theorem ( <i>G. Nöbeling</i> ) . . . . .	61
Klingenberg, W., Riemannian Geometry ( <i>K. Strambach</i> ) . . . . .	62
Hector, G., Hirsch, U., Introduction to the Geometry of Foliations, Part A – Hector, G., Hirsch, U., Introduction to the Geometry of Foliations, Part B ( <i>E. Vogt</i> ) . . . . .	64
Ablowitz, M. J., Segur, H., Solitons and the Inverse Scattering Transform – Novikov, S., Manakov, S. V., Pitaevskii, L. P., Zakharov, V. E., Theory of Solitons – Taniuti, T., Nishihara, K., Nonlinear Waves – Rajaraman, R., Solitons and Instantons: An Introduction to Solitons and Instantons in Quantum Field Theory – Rebbi,	

### **In den nächsten Heften erscheinende Arbeiten:**

- R. Gernert:** Drei Register über biographische Beiträge im Jahresbericht der DMV,  
Bd. 1 bis 83
- R. Göbel:** Wie weit sind Moduln vom Satz von Krull-Remak-Schmidt entfernt?
- H. Knörrer:** Integrierte Hamiltonsche Systeme und Algebraische Geometrie
- C. Müller:** Zum 100. Geburtstag von Hermann Weyl
- R. Schaback:** Numerische Approximation
- K. Strubecker:** Wilhelm Blaschkes mathematisches Werk

---

### **Anschriften der Herausgeber**

- Prof. Dr. K. Jacobs, Bismarckstr. 1<sup>1</sup>/<sub>2</sub>, 8520 Erlangen
- Prof. Dr. P. L. Butzer, Templergraben 55, 5100 Aachen
- Prof. Dr. U. Felgner, Auf der Morgenstelle 10, 7400 Tübingen
- Prof. Dr. W.-D. Geyer, Bismarckstr. 1<sup>1</sup>/<sub>2</sub>, 8520 Erlangen
- Prof. Dr. J. Stoer, Am Hubland, 8700 Würzburg

### **Bezugshinweis**

Früher erschienene Bände (ab Band 68) des „Jahresberichts der Deutschen Mathematiker-Vereinigung“ können durch den Buchhandel oder den Verlag bezogen werden.

Nachdruck der Bände 1 bis 40 liefert: Johnson Reprint Corp., 111 Fifth Avenue, New York, N.Y. 10003

Nachdruck der Bände 41 bis 67 liefert: Swets & Zeitlinger, Heereweg 347b, POB 810, NL-2160 SZ Lisse/Holland



## Die Entwicklung des Mathematischen Seminars der Universität Bonn 1864–1929

Gert Schubring, Bielefeld

*Otto Toeplitz zum Gedächtnis*

Die wissenschaftsgeschichtlichen Untersuchungen der letzten Jahre haben sich besonders auf den Komplex der Institutionalisierung der Wissenschaften konzentriert. Ein zentrales Ergebnis ist, daß die Institutionalisierung der Einzeldisziplinen nach der entscheidenden Wende zum 19. Jahrhundert und den Humboldt'schen Reformen ihre Kernform in der Etablierung des „Seminars“ hat. Es ist diejenige Form, in der sich erstmals gegenüber dem früheren dogmatischen Lehrbetrieb der Dozenten ohne Forschungskompetenz ein forschendes Lehren für Dozenten und ein forschendes Lernen für Studenten zu realisieren beginnt [25].

Bislang beschränken sich aber die universitätsgeschichtlichen Studien auf die Untersuchung der Durchsetzung dieser Kernform. Demgegenüber gibt es kaum längsschnittartige Studien darüber, wie sich aus der Kernform des Seminars heraus die wissenschaftlichen Institute und schließlich die Formen des heutigen „wissenschaftlichen Großbetriebs“ [17] entwickelt haben. Wilhelm Lorey, der Historiker der deutschen Universitätsmathematik, hat zwar die Entstehung der Mathematik-Seminare an den deutschen Hochschulen beschrieben und für einzelne Hochschulen auch deren weitere Entwicklung verfolgt. Die Seminare sind aber dort im wesentlichen als Zusammenfassungen einzeln wirkender Personen dargestellt. Die Entwicklung der Gesamteinstitution Seminar und der Faktoren, die diese Entwicklung beeinflussen, werden von ihm dagegen nicht untersucht<sup>1</sup>). Angesichts der heutigen Krise des Hochschulsystems, in der auch die Mathematik ihre institutionelle Form und ihren Umfang zu legitimieren hat, lohnt es sich, die Entwicklung dieser Form zu verfolgen und dabei zu untersuchen, mit welchen Aufgaben und Zielstellungen innerhalb des Hochschul- und Bildungssystems die enorme Ausweitung der Mathematik seit der Durchsetzung der ersten selbständigen Professuren für Mathematik verbunden gewesen ist. Der Schwerpunkt wird hier in der Analyse der Ausdifferenzierung der Mathematik innerhalb des Wissenschaftssystems und der Etablierung einer differenzierten wissenschaftlichen Personalstruktur liegen.

---

<sup>1</sup>) Als eine erste modernere sozialgeschichtliche Studie ist kürzlich eine Geschichte des mathematischen Seminars Leipzig, der spätesten deutschen Seminargründung, publiziert worden [7].

Es wird sich ergeben, daß die institutionelle Entwicklung der Mathematik auf das engste mit der Intensivierung der Studienorganisation und mit der Professionalisierung der Lehrerausbildung zusammenhängt. Diese Geschichte des Bonner Mathematischen Seminars ist daher Otto Toeplitz gewidmet, der sich wie wenige um die Verbesserung der Studienorganisation und der Lehrerausbildung bemüht hat [8; 13; 19]. Der zweite Grund der Widmung ist, daß Toeplitz die erste Geschichte des Seminars publiziert hat [24] und daß ein glücklicher Aktenfund jetzt die Möglichkeit bietet, seine Darstellung zu ergänzen<sup>2)</sup>.

Das Bonner Seminar hat im wesentlichen die gleichen Entwicklungsstufen durchlaufen wie die übrigen mathematischen Seminare in Alt-Preußen, so daß ich für deren Darstellung die an anderer Stelle entwickelten Kategorien benutzen kann<sup>3)</sup>. Zugleich liegen aber für Bonn zwei spezielle Situationen vor: Die Mathematik stand hier zunächst deutlich im Schatten der Naturwissenschaften, unter denen die beschreibenden Naturwissenschaften dominierten, und war eng mit diesen – insbesondere der Physik – verbunden. Nach ihrer selbständigen Etablierung wurde aber die Mathematik in Bonn auf lange Zeit zu einer besonders prominenten Verfechterin „reiner Mathematik“ und zur Gegnerin etwa der von Göttingen ausgehenden Bestrebungen für eine Anwendungsorientierung.

### Vorgeschichte der Seminargründung

An der 1818 gegründeten Universität Bonn waren statutenmäßig, wie in Berlin, zwei ordentliche Professuren für Mathematik vorgesehen, eine für reine und eine für angewandte Mathematik. Doch erst 1856 kam es zur Berufung eines auf mathematische Forschung spezialisierten Ordinarius: A. Beer. Von den bei der Gründung berufenen beiden Professoren konzentrierte sich K. D. von Münchow stark auf die Astronomie (und sein Nachfolger Argelander ausschließlich), während W. A. Diesterweg über geschichtliche und elementar-mathematische Fragen arbeitete. Diesterweg hatte offenbar keinen großen Lehrerfolg: die anfangs großen

---

<sup>2)</sup> Die Akten des Kurators der Universität Bonn über Gründung und weitere Entwicklung des Seminars, die noch von Toeplitz benutzt worden waren, sind als Kriegsfolge vernichtet worden. Die – bislang unbenutzte – Akte des ehemaligen preußischen Kultusministeriums über das Seminar befindet sich nicht mehr in dem Archivbestand, der den größten Teil der Akten dieses Ministeriums enthält, im Zentralen Staatsarchiv der DDR, Abteilung Merseburg, und galt daher als verschollen. Ich konnte diese Akte ausfindig machen in einem Teilbestand von Akten des preußischen Kultusministeriums, der nach dem Krieg auf nicht ganz durchsichtige Weise ins nordrhein-westfälische Kultusministerium gelangt ist und der sich heute im Hauptstaatsarchiv Düsseldorf befindet. Es handelt sich dabei um den ersten Band. Der sich anschließende zweite Band der Akten („Akten betreffend das mathematische Seminar bei der Universität Bonn, Bd. 2: 1929–“) ist zwar offensichtlich vom Ministerium noch vor 1945 an das Geheime Staats-Archiv abgegeben worden, da er in dessen Findbuch vermerkt ist, ist aber offenbar nach dem Krieg verlorengegangen.

<sup>3)</sup> Vgl. [20]. Die Analyse-Kategorien und Entwicklungsstufen waren dort aus einer vergleichenden Auswertung der Akten des Kultusministeriums und weiteren Materials über die Seminare in Berlin, Breslau, Bonn, Greifswald, Halle, Königsberg und Münster entwickelt worden.

Zuhörerzahlen gingen stark zurück<sup>4</sup>). J. Plücker, 1835 als dessen Nachfolger berufen, war von der Philosophischen Fakultät ausschließlich mit dem Argument vorgeschlagen worden, es sei ein guter Vortrag notwendig, um die Lehrerausbildung zu verbessern<sup>5</sup>). 1836 wurde Plücker zugleich die freigewordene Professur der Physik übertragen<sup>6</sup>). Plücker hat in der Folgezeit nicht nur Physik gelehrt – und keineswegs nur theoretische Physik, sondern vornehmlich experimentelle Physik –, sondern auch seine Forschung – zeitweise ausschließlich – auf die Physik konzentriert [11]. Auch die Übernahme der „Direktion des pharmazeutischen Studiums“ zeigt seine stark naturwissenschaftliche Orientierung.

Neben den Ordinarien lehrten ab 1829 zunächst ein, später zwei bis drei außerordentliche Professoren und gelegentlich auch Privatdozenten. Im ganzen sind in dieser Zeit die Lehrenden der Mathematik als Einzelpersonen anzusehen, die in ihrer Lehre wie in ihrer Forschung weitgehend ohne Beziehung zueinander waren<sup>7</sup>).

In Bonn bestand die gegenüber den übrigen preußischen Universitäten einmalige Situation, daß hier ein naturwissenschaftliches Seminar existierte<sup>8</sup>). Das Seminar, 1825 auf Drängen der Bonner Professoren G. Bischof (Chemie), C. G. Nees von Esenbeck (Naturgeschichte) und G. A. Goldfuß (Mineralogie) zur Verbesserung der Lehrerausbildung gegründet, war zugleich das einzige unter den preußischen Universitätsseminaren, das sich wirklich auf Lehrerausbildung konzentrierte und wo die Professoren zugleich Probeunterricht der Seminaristen im Bonner Gymnasium anleiteten – gegen steten Widerstand von dessen philologischem Direktor<sup>9</sup>). Das Seminar hatte eine starke Position in der Studienorganisation: Vom Ministerium seit 1831 als zentrales Seminar zur Ausbildung von Lehrern der Naturwissenschaften deklariert, besaß es seitdem ein Prüfungsprivileg: Der naturwissenschaftliche Teil der Gymnasiallehrerprüfung wurde für Bonn ersetzt durch ein Zeugnis der Seminar-Direktion über die Teilnahme am Seminar<sup>10</sup>). Die konzeptionelle Grundlage dieses Seminars war die im ersten Jahrhundertdrittel noch in Blüte befindliche „Naturgeschichte“, die als philosophisch orientierte Disziplin auf Experimente keinen großen Wert legte – das Seminar begnügte sich daher mit Vortrags-Übungen für die Studenten und benötigte keine größere apparative Ausstattung. Zugleich hatte mathematisches Wissen keine

<sup>4</sup>) Vgl. [20, S. 13]. Die schwache Position der Mathematik zu dieser Zeit zeigt sich z. B. darin, daß Diesterweg und Münchow Schwierigkeiten hatten, in der Fakultät die Ehrenpromotion Dirichlets durchzusetzen [22].

<sup>5</sup>) Schreiben der Philosophischen Fakultät vom 19. 7. 1835 an den stellvertretenden außerordentlichen Regierungsbevollmächtigten Hüllmann. In: Philosophische Fakultät, Beiakte Prof. A. Diesterweg, Universitätsarchiv Bonn.

<sup>6</sup>) Allerdings zunächst nur provisorisch, erst 1856 definitiv.

<sup>7</sup>) Eine Ausnahme bildete gegen Ende dieses Zeitraums August Beer, der – 1850 habilitiert – eng mit Plücker zusammenarbeitete.

<sup>8</sup>) Ein analoges, 1834 in Königsberg gegründetes naturwissenschaftliches/-geschichtliches Seminar konnte keine Studenten anziehen und mußte schon bald wieder geschlossen werden. Das in Halle 1839 gebildete Gesamtseminar für Mathematik und Naturwissenschaften war ebenfalls eine kümmerliche Form, da es ohne Etat-Mittel gegründet worden war, vgl. [20].

<sup>9</sup>) Vgl. [4].

<sup>10</sup>) Dieses „Privileg“ war eingeführt worden, um störende Einmischungen der Philologen in diesen Prüfungsteil zu verhindern, vgl. [21; S. 139].

fundamentale Bedeutung in dieser Wissens-Konzeption: Der „Vorschlag eines Studienplans“, Teil der Seminar-Statuten von 1825 und auf sechs Semester angelegt, sah erst für das fünfte und sechste Semester mathematische Vorlesungen vor [12, S. 628]. Plücker hat in seinem Gutachten vom 13. 9. 1864 selbst auf die fehlende Ausdifferenzierung eines mathematischen Studiums hingewiesen:

„Ein Studirender, dessen Fach neben Mathematik nicht zugleich sämtliche Naturwissenschaften sind, ist hier eine seltene Ausnahme. Leider aber zeigt die Erfahrung, daß erst nachdem die naturwissenschaftlichen Studien gewöhnlich in der Promotion einen Schlußstein gefunden, die in der Staatsprüfung geforderten mathematischen Studien mit Ernst aufgenommen werden; dann aber in der Regel zu spät, wie es der Ausfall der Prüfungen beweist.“<sup>11)</sup>

Andererseits ist Plücker als Physik-Professor selbst Leiter der physikalischen Abteilung des naturwissenschaftlichen Seminars gewesen<sup>12)</sup>, bis zu seinem Tode 1868; mehrfach ist er auch geschäftsführender Direktor des Seminars gewesen<sup>13)</sup>. Aus den Akten des Seminars sind keine Bemühungen Plückers ersichtlich, die Studienorganisation im Hinblick auf die Mathematik zu verändern. Da Plücker ferner 17 Jahre lang Direktor der wissenschaftlichen Prüfungskommission Bonn war, also der Behörde, die die Gymnasiallehrer-Prüfungen vornahm, und da er mithin das Studienverhalten hätte effektiv beeinflussen können, wird man schließen dürfen, daß Plücker auch gar nicht die Absicht hatte, ein rein-mathematisches Studium zu etablieren. Eine Ausdifferenzierung der Mathematik aus dem naturwissenschaftlichen Kontext und eine eigenständige Institutionalisierung der Mathematik erfolgte erst in einer neuen Phase, die durch das Zusammentreffen zweier Personen eingeleitet wurde: von R. Lipschitz und von W. H. Beseler, Universitätskurator seit 1861 und aktiv überzeugt vom hohen Wert der Mathematik.

### Die Gründung des Seminars

Rudolf Lipschitz (1832–1903) hatte von 1847 bis 1850 zunächst in Königsberg studiert und war dort Mitglied des mathematisch-physikalischen Seminars gewesen, das seit seiner Gründung 1834 durch C. G. J. Jacobi und F. Neumann das Muster für die Institutionalisierung forschender Lehre in Mathematik und theoretischer Physik war. Von 1857 bis 1862 war Lipschitz bereits als Privatdozent in Bonn tätig, konnte aber noch keinen Einfluß auf die Studienorganisation nehmen. Nach seiner Berufung 1862 zum außerordentlichen Professor in Breslau ergriff er die Initiative, dort ein mathematisch-physikalisches Seminar zu gründen. Die Initiative wurde von allen Seiten unterstützt, so daß das Seminar zum Wintersemester 1863/64 eröffnet werden konnte. Neben der physikalischen Abteilung bestanden zwei mathematische: eine für jüngere, eine für ältere Studenten, die von zwei Professoren alternierend geleitet wurden<sup>14)</sup>. Lipschitz wurde bereits im Frühjahr 1864 als ordentlicher Professor für reine Mathematik nach

<sup>11)</sup> Hier zitiert nach: [11; S. 35]. Original in: [1, Bl. 34–35].

<sup>12)</sup> Daneben bestanden weitere vier Abteilungen: für Chemie, Botanik, Zoologie und Mineralogie.

<sup>13)</sup> Vgl. [4] und [2].

<sup>14)</sup> Vgl. [3, Bl. 1–9 u. 23].

Bonn zurückberufen, als Nachfolger Beers. Er versuchte sofort, nun auch hier ein mathematisches Seminar zu gründen. Während der Kurator Beseler ihn dabei tatkräftig unterstützte, traf er auf starken Widerstand seines Kollegen Plücker. Der Jurist Beseler war in seltener Weise positiv für die Mathematik eingonnen:

werden“ dürfe, und bezeichnet sie „als die Basis des menschlichen Erkennens und Wissens in den natürlichen Dingen“ [1, Bl. 23 v. u. Bl. 20]. Beseler hat mehrfach, offenbar aus eigener Initiative, Plücker zur Gründung eines mathematischen Seminars gedrängt. Plücker erkannte zwar „die Notwendigkeit seminaristischer Übungen“ an, war aber nicht zu einer Mitarbeit bereit; da sein Kollege Beer aber bereits kränklich war, war ohne ihn nichts zu machen. Die Berufung des Analytikers Lipschitz erschwerte die Situation weiter, wie Beseler im Seminarsgründungsantrag vom 14. 9. 1864 dem Minister berichtete:

„Nach dem Tode des p. Beer forderte ich den p. Plücker auf, sich näher darüber zu äußern, wie er über die Errichtung eines Seminars denke; er erwiderte mir, daß er dazu bereit sein werde, wenn der Professor Clebsch in Gießen zum Nachfolger des p. Beer werde ernannt werden. Nach Berufung des Dr. Lipschitz zur Übernahme der Beer'schen Professur suchte er längere Zeit die Sache in den Hintergrund zu drängen, bis ich ihm erklärte, ich werde eventuell Ew. Excellenz vorschlagen, das Seminar vorläufig unter alleiniger Leitung des p. Lipschitz zu gründen.“<sup>15)</sup>

Erst daraufhin erklärte sich Plücker zur Teilnahme bereit und erarbeitete einen Statutenentwurf. Da Plücker sich aber weigerte, darüber mit Lipschitz gemeinsam zu beraten, konnte Beseler nur getrennt dessen Stellungnahme zu Plückers Entwurf einholen. Auf der Grundlage der Entwürfe und Stellungnah-

eine sechste Abteilung hinzugefügt werden. Denn sonst sei die Gefahr nicht gering,

„daß die Mathematik sich in Verbindung mit den beschreibenden Naturwissenschaften, mit Physik und Chemie nicht die unabhängige und souveräne Stellung werde erwerben und behaupten können, auf welche sie an sich und als die Basis des menschlichen Erkennens und Wissens in den natürlichen Dingen einen unbestreitbaren Anspruch hat“ [1, Bl. 20].

Zugleich wurde eine scharfe Trennung zwischen experimenteller und

theoretischer Physik gezogen: die – von Plücker geleitete – experimentelle Physik sollte im naturwissenschaftlichen Seminar verbleiben, die mathematische Physik dagegen in das mathematische Seminar einbezogen werden.

In organisatorischer Hinsicht waren für das Seminar zwei Besonderheiten vorgesehen:

– ähnlich, wie schon in Breslau praktiziert, sollte es zwei Stufen des Seminars geben: eine niedere und eine höhere, wobei die erste die Durchgangsstufe zur zweiten sein sollte. Begründet wurde diese besondere Betreuung für Anfänger wieder mit dem katastrophalen Mathematikunterricht im westlichen Preußen:

„Die Studirenden kommen schlecht geschult . . ., bestehen mit Mühe und notdürftig die vorgeschriebenen Examina, und treten in den Lehrerberuf, um diesen betäubenden Stand der Dinge zu verewigen“ [1, Bl. 19 v.].

– da sowohl Lipschitz wie Plücker Ordinarien waren, bot sich aber nicht die Form an wie anderswo bei einem Extraordinarius, diesem auf Dauer die untere Stufe zu übertragen. Aber auch eine alternierende Leitung der unteren und oberen Stufe war wegen der Spannungen zwischen den beiden Mathematikern nicht möglich. Hier äußerte sich in besonders krasser Weise das traditionelle Problem der Universitäten, daß Wissenschaftler von gleichem Status i. allg. nicht zur Kooperation fähig sind. Dieses Problem hatte schon Schleiermacher 1808 in seinem „Gelegentlichen Gedanken über Universitäten im deutschen Sinn“ als Grundproblem der Seminare als forschungsbezogener Institutionen angesprochen [18, S. 116f.]. Meist wurden diese Probleme überdeckt durch additive Verbindungen von Abteilungen, die jede nur von einem, für jeweils eine Disziplin zuständigen Ordinarius geleitet wurden. Hier handelte es sich aber um die – noch nicht in Teildisziplinen aufgespaltene – Mathematik, die überhaupt erst institutionalisiert werden sollte. Plücker hatte in seinem Statutenentwurf zwei völlig voneinander unabhängige Seminarabteilungen, beide mit unterer und oberer Stufe, vorgesehen. Beseler versuchte diese Spaltung zwar zu rationalisieren mit einer Pluralität zwischen Lipschitz’ „analytischer Richtung“ und Plückers „mathematisch-physikalischer Richtung“, mußte aber zugeben, daß letztlich nur persönliche Animositäten die Ursache waren:

„Abgesehen von der großen Schwierigkeit, die es schon überall haben würde, daß zwei akademische Docenten gemeinschaftlich Seminarübungen leiten, so würde diese Schwierigkeit geradezu zur Unmöglichkeit werden, wenn es sich um die Professoren Plücker und Lipschitz handelt, die in ihrer wissenschaftlichen Richtung auseinandergelien, und von denen der erste, ein zu Verstimmungen sehr aufgelegter Nerven-Mann, es nicht zu verschmerzen vermag, daß nicht nach seinem Wunsch statt des letzteren der Clebsch nach Bonn berufen ist. Es dürfte daher nichts anderes übrig bleiben, als beiden mit gleichen Rechten die Leitung selbständiger Abtheilungen des Seminars zu übertragen“ [1, Bl. 20a].

Lipschitz hatte das Kooperationsproblem noch verschärft: Da er die von Plücker vorgesehene völlige gegenseitige Abschottung beider Abteilungen nicht guthieß und in mehreren Leitungsfragen eine Kooperation beider Professoren vorzog, wollte er zugleich die Entscheidung von Streitfragen dem Kurator bzw. dem Ministerium übertragen<sup>16</sup>). Beseler hatte ferner den Dirigismus Plückers kritisiert, den er als „im Widerspruch“ mit „der ganzen Form und Freiheit des akademischen Unterrichts“ empfand: Plücker hatte vorgesehen – wohl um eine Vorzugswahl eines der beiden Professoren durch die Studenten zu verhindern –, daß Seminar-Mitglieder stets an beiden Abteilungen teilnehmen müßten. Beseler kommentierte diese Forderung, die zu einer zu hohen Belastung geführt hätte:

„Es ist nicht zu verkennen, daß der p. Plücker eine gefährliche Neigung offenbart, das mathematische Seminar nach Art des pharmazeutischen Studiums zu leiten und zu kontrollieren

was bei den Studirenden ohne weiteres auf hartnäckigen Widerstand stoßen würde“ [1, Bl. 21].

de [1, Bl. 34f.]. Meine Untersuchungen zur Realität des Mathematikunterrichts in mehreren preußischen Provinzen haben ergeben, daß im Rheinland einige Direktoren, besonders aber die regionale Schulbehörde, das Provinzialschulkollegium Koblenz, den Hauptfachcharakter der Mathematik zu beseitigen und die Mathematik gegenüber den Philologien zurückzusetzen versuchte<sup>18)</sup>. Dagegen läßt sich nicht begründen, daß die in Bonn ausgebildeten Mathematiklehrer schlechter gewesen seien als die an anderen Universitäten: Die vergleichende Auswertung der Lehrerprüfungen an den sieben preußischen Universitäten ergibt, daß in Bonn – relativ gesehen – nicht weniger Mathematiklehrer geprüft worden sind als an den meisten anderen Orten<sup>19)</sup>. Und eine ganze Reihe dieser Lehrer sind zu erfolgreichen Mathematiklehrern geworden. Ein reales Problem lag dagegen vor im Verhältnis von Mathematik- und von Naturwissenschaftslehrern: Bonn gehörte nicht nur zu den Hochschulen, in denen relativ früh und beständig Studien-Absolventen die Lehrbefähigung in den Naturwissenschaften für alle Klassenstufen erhielten, sondern hier bildeten zugleich die Mathematiklehrer i. allg. eine echte Teilmenge der Naturwissenschaftslehrer. Ein Vergleich für die fünf Jahre 1860 bis 1864 zeigt, daß nur ein Teil der Naturwissenschaftslehrer zugleich auch die Mathematik in allen Klassen lehren durfte, daß ein erheblicher Teil von ihnen dagegen in Mathematik geringer qualifiziert war, d. h. nur in den unteren oder in den unteren und mittleren Klassen lehren durfte:

Lehrbefähigung für alle Klassen in:	1860	1861	1862	1863	1864
Mathematik	3	5	5	0	3 <sup>20)</sup>
eine oder mehrere Naturwissenschaften	6	9	10	5	10

Quelle: [5]

Erst auf einen erneuten, diesmal direkten Vorstoß Lipschitz' hin war das Ministerium schließlich bereit, den Antrag für das Seminar positiv zu behandeln. Lipschitz hatte am 22. 3. 1865 dem Kurator Beseler über den guten Erfolg der von ihm im Wintersemester durchgeführten „mathematischen Übungen“ berichtet und den Kanzler aufgefordert, auf eine rasche Seminargründung beim Ministerium zu drängen, damit – wie Beseler am folgenden Tage in einem Schreiben an den Minister wiederholte – den Übungen „das amtliche Gepräge aufgedrückt werde“ [1, Bl. 25–26].

An dieser Stelle muß erörtert werden: Warum war die besondere institutionelle Form eines Seminars eigentlich notwendig? Lipschitz konnte ja auch ohne diese Form Übungen durchführen! In der Tat sind auch schon vor Lipschitz'

<sup>18)</sup> Vgl. [21, u. a. 163 ff.].

<sup>19)</sup> Vgl. [21], Tabellen 1 bis 7, insbesondere sind zu vergleichen Spalte 5 und Spalte 9.

<sup>20)</sup> Die Angabe Beselers und Plückers, nur ein Student – Emil Budde, sein Assistent im „physikalischen Kabinett“ – habe die Befähigung für Mathematik in allen Klassen erhalten, trifft also auf das Kalenderjahr 1864, den Berichtszeitraum der wiss. Prüfungskommission, nicht zu, könnte aber für das Studienjahr – Wintersemester 1863/64 und Sommersemester 1864 – richtig sein.



Berufung in Bonn vielfach Übungen für die Studenten angekündigt worden: Auch Plücker hat häufig neben seinen mathematischen Vorlesungen Übungen angekündigt. Auch Extraordinarien, z. B. Heine, haben Übungen abgehalten<sup>21</sup>).

Man muß dabei berücksichtigen, daß das Seminar an den preußischen Universitäten des 19. Jahrhunderts eine doppelte Funktion hatte: es war einerseits eine *Studienform*, das Studenten, insbesondere höherer Semester, engen Kontakt zu Wissenschaftlern sowie Anleitung ermöglichte und andererseits eine *organisatorische Form*: die Keimform für spätere institutionelle Ausweitungen der Mathematik. Für beide Funktionen bot das Seminar erhebliche Vorteile:

1. Das Seminar ermöglichte inhaltliche und materielle Anreize für ein wissenschaftliches Studium, d. h. über ein passives Aufnehmen von Vorlesungen hinaus regte es die Bereitschaft zu vertieftem Studium, zur Ausarbeitung von Vorträgen und kleineren Texten an. Ein ganz wichtiger materieller Anreiz waren nun die Seminarprämien, die in jedem Semester an Teilnehmer mit besonders guten Seminarleistungen vergeben werden konnten. Voraussetzung dafür war das Vorhandensein eines entsprechenden Seminaretats. Zentraler Teil des Errichtungsantrags von Beseler war daher, einen jährlichen Etat von 200 Talern vorzusehen, wovon 160 Taler für acht Prämien à 20 Taler verwendet werden sollten<sup>22</sup>). Da traditionell der Hauptteil der Studenten Jura oder Theologie studiert hatte, bedurfte es auch materieller Anreize, um Studenten in die Philosophische Fakultät und dort wiederum in das kleine Fach der Mathematik zu lenken.

2. Üblicherweise war ein Seminar mit dem Aufbau einer Handbibliothek verbunden, das den Studenten einen raschen und permanenten Zugang zur Fachliteratur, insbesondere der neueren, bot. Das Vorhandensein einer solchen Fachbibliothek war eine ganz entscheidende Voraussetzung für ein intensives Studium, die aber von den Universitätsbibliotheken in dieser Zeit nicht realisiert werden konnte. Die Bonner Universitätsbibliothek z. B. erlaubte die Ausleihe von Büchern nur den Professoren, Honoratioren und Beamten, nicht aber den Studenten. Die Benutzungszeit des Lesesaals war mit zehn Stunden wöchentlich zu kurz für intensive Studien [12, S. 637 ff.]. Der Antrag Beselers forderte 40 Taler jährlich für die Handbibliothek.

3. Schließlich bedeutete ein Seminar die *Verpflichtung* der Professoren zur regelmäßigen Durchführung von Übungen, was keineswegs eine Selbstverständlichkeit war. Denn die auch von einer Reihe von Professoren unterstützte Losung der „Freiheit des Studiums“ lief nicht nur auf eine gewisse Bequemlichkeit hinaus. Viele Professoren hielten lieber Übungen als Privatissima ab, wo man sich einzelne Studenten auswählte, ohne auf generelle Reglements zur Förderung einer – wenngleich kleinen, so doch kontinuierlichen – Studentenzahl verpflichtet zu sein.

<sup>21</sup>) In den Exmatrikeln vieler Bonner Mathematiklehrerstudenten (Universitätsarchiv Bonn) habe ich Belege dafür gefunden, daß sie tatsächlich an diesen Übungen teilgenommen haben.

<sup>22</sup>) Das war durchaus ein spürbarer Beitrag zur Studienfinanzierung: Der Vater von F. Neumann (ein Gutsverwalter) mußte mit einem Jahresgehalt von 100 Talern auskommen [16, S. 34]; das Standardgehalt von Extraordinarien in der ersten Jahrhunderthälfte waren 400 Taler.

Gerade an diesem Übergang von „privaten“ Ausbildungsformen zu öffentlich sanktionierten, aber auch kontrollierten Formen liegt der entscheidende institutionelle Schritt. Es ist daher nicht verwunderlich, daß an diesem Punkt viele Professoren gezögert haben. So hat sich auch W. Erben in seiner Geschichte der Universitätsseminare sehr zwiespältig zu ihnen geäußert, da sie stets einen mechanischen Betrieb „mit festen Regeln der Arbeitsordnung“ mit sich bringen und pries nostalgisch „die freiwillige Arbeitsgenossenschaft zwischen Lehrern und Hörern“ in den früheren gelehrten Gesellschaften [10, S. 1346 ff.]<sup>23</sup>).

Doch zurück zum Bonner Seminar: Nach Lipschitz' direktem Vorstoß unterstützte das Kultusministerium endlich den Plan und beantragte am 9. 6. 1865 beim Finanzminister, zur Dotierung eines mathematischen Seminars ab dem Haushalt 1866 dauernd 220 Taler – also 20 Taler mehr als beantragt – zu etatisieren. Zur Begründung wurde auf „die bisher mangelhafte Einrichtung des mathematischen Studiums in Bonn“ verwiesen. Das Finanzministerium lehnte den Antrag dagegen zwei Monate später ab, indem es im wesentlichen die Doppelfunktion Plückers in Mathematik und Physik benutzte, um zu unterstellen, daß das Bonner naturwissenschaftliche Seminar zugleich dem Studium der Mathematik diene. In einem erneuten Schreiben vom 31. 10. 1865 entwirrte das Kultusministerium die geschaffene Verwirrung und unterstützte dringend die selbständige Institutionalisierung der Mathematik, die es – ganz auf der Linie Beselers – als „wahres Fundament aller Naturwissenschaft“ bezeichnete [1, Bl. 27–29]. Nach mehrmonatigen Verzögerungen durch das Finanzministerium konnte das Kultusministerium endlich am 19. 5. 1866 der Universität mitteilen, daß das Seminar genehmigt sei, und am 29. 8., daß der Etat ab dem Wintersemester zur Verfügung stehe [1, Bl. 31–32]. Das mathematische Seminar nahm sofort zum Wintersemester 1866/67 seine Tätigkeit auf, die Übungen waren als getrennte Veranstaltungen

---

Plückers und Lipschitz' angekündigt und auch getrennt von den Studenten belegt worden.

### Beginn und Praxis der Seminartätigkeit

Auf ein Schreiben des Kurators hin, der darauf hinwies, daß Plücker und Lipschitz „nicht in einem persönlichen Verhältnis stehen, welches eine spontane Einigung über die gemeinschaftliche Geschäftsführung erwarten läßt“, erließ das Ministerium umgehend provisorische Statuten für das Seminar. Es hielt sich dabei weitgehend an Plückers Entwurf, milderte aber die Verpflichtung der Studenten, an beiden Abteilungen teilzunehmen, ab zu einer „in der Regel“-Bestimmung,

---

<sup>23</sup>) Die Gründe für den Widerstand Plückers sind allerdings wohl nicht an diesem Punkt zu suchen, da er ja bereits lange eine Abteilung des naturwissenschaftlichen Seminars leitete. Neben seiner Enttäuschung über die Nicht-Berufung von Clebsch und seiner Abneigung gegen den neuen Kollegen ist für ihn wohl tatsächlich die Furcht vor Überlastung ausschlaggebend gewesen, da er bereits stark durch die Betreuung des Physik- und Pharmazie-Studiums belastet war. Der Etat für das Bonner mathematische Seminar sah keine „Remuneration“ der Professoren für die Leitung des Seminars vor, wie es bislang bei vielen Seminaren üblich gewesen war, auch beim Bonner naturwissenschaftlichen Seminar; d. h. es war bereits impliziert, daß die Seminar-Leitung zu den Dienstaufgaben gehörte.

von der Ausnahmen möglich waren. Zugleich erläuterte das Ministerium den Etat: pro Semester standen 85 Taler für Prämien zur Verfügung und 50 Taler pro Jahr für die Handbibliothek. Plücker und Lipschitz haben das Seminar drei Semester lang gemeinsam geleitet. Nach dem Tode Plückers 1868 stellte Lipschitz sofort den Antrag, H. Kortum zum Mitdirektor des Seminars zu ernennen. Das Ministerium lehnte das aber ab, vielleicht weil er noch Privatdozent war. Erst nach Kortums Berufung zum Extra-Ordinarius ein Jahr später wurde er auch in die Seminar-Direktion berufen. Das Ministerium hat das von Plücker innegehabte Ordinariat für Mathematik nicht wieder besetzt, sondern in ein Extraordinariat umgewandelt. Diese Position hat Kortum bis zu seinem Tode 1904 behalten. In dieser neuen stellenmäßigen Konstellation ist die Seminarleitung von Lipschitz und Kortum offensichtlich kooperativ und ohne Reibungen wahrgenommen worden.

Die Seminarstatuten haben ursprünglich keine funktionsmäßige Differenzierung des wissenschaftlichen Personals vorgesehen. Beide Wissenschaftler sollten jeweils alle Lehr- und Verwaltungsaufgaben wahrnehmen, die einzige ursprünglich vorgesehene Differenzierung war ein Alternieren in der Funktion der Geschäftsführung und der des Bibliothekars. Selbstverständlich war aber, daß ein Ordinarius als Bibliothekar fungierte<sup>24</sup>). Assistententätigkeiten waren nicht vorgesehen, während im physikalischen oder chemischen Lehrbetrieb Assistenten zu dieser Zeit bereits fest etabliert waren<sup>25</sup>). Man kann aber davon ausgehen, daß talentierte Studenten sehr bald im Mathematik-Seminar zur Mitarbeit bei der Anleitung jüngerer Studenten herangezogen worden sind. Jedenfalls fällt auf, daß ab Beginn der Seminartätigkeit stets etwa drei Studenten mehrere Semester lang Prämien erhalten haben, z. B. Felix Klein für drei Semester. Diese Praxis, in der sich durchaus eine inoffizielle „Remuneration“ von Assistentenleistungen ausdrücken kann, ist bis zur Streichung der Prämien 1885 fortgesetzt worden. Unter diesen Studenten finden sich eine Reihe späterer bedeutender Mathematiker, z. B. Eugen Fuchs und Kurt Hensel<sup>26</sup>).

Das Verhältnis der Mathematik zum naturwissenschaftlichen Seminar änderte sich binnen kurzem grundlegend. Hatten zunächst eine Reihe von Studenten, u. a. F. Klein, an beiden Seminaren zugleich teilgenommen, so differenzierten sich nunmehr die Studenten nach Mathematikern und Naturwissenschaftlern: Mathematik war nun nicht mehr vorrangig Nebenfach von Naturwissen-

<sup>24</sup>) Vgl. [1, Bl. 23 u. 37]. Plücker hat die Bibliothekarsfunktion für den mathematischen Apparat so intensiv wahrgenommen, daß er ihn zwar selbst gar nicht benutzt, dafür aber einer öffentlichen Benutzung entzogen hat. Den mathematischen Apparat hatte die Universität aus Diesterwegs Nachlaß aufgekauft – er enthielt sowohl Bücher wie mathematische Instrumente und Modelle – und ihn Plückers Aufsicht unterstellt. Lipschitz hat sich sehr über diese Privatisierung geärgert, konnte diese Materialien aber erst nach Plückers Tod allgemein zugänglich machen [1, Bl. 1–16, 58–63].

<sup>25</sup>) Allerdings wurden die Assistenten nicht immer dafür besoldet. Plücker z. B. hatte die Besoldung des Assistenten im physikalischen Kabinett 1846 gegen die eines Mechanikers vertauschen wollen und wählte als Assistenten interessierte Studenten aus, die er zugleich an seinen Forschungen beteiligte (vgl. Plückers Beschreibung der Auswahl seiner Assistenten: W. Ernst, 70f. u. 80f.).

<sup>26</sup>) Außer im ersten Jahresbericht sind die Namen der Seminarteilnehmer nicht genannt, dagegen die der prämierten Studenten.

schaftlern, sondern es studierten jetzt zunehmend mehr Studenten originär die Mathematik. Ein Beleg dafür ist 1873 die Klage von Professoren der Naturwissenschaften gegenüber dem Kurator: sie sähen in dem Eifer der Mathematiker eine Schädigung der Frequenz ihrer Veranstaltungen [1, Bl. 88–89]. Schließlich behielt das mathematische Seminar ganz die Oberhand: die Lehrerausbildungsorientierung des naturwissenschaftlichen Seminars bot keine stabile institutionelle Basis in den naturwissenschaftlichen Disziplinen, in denen nunmehr experimentelle Forschungsinstitute und Laboratorien aufgebaut wurden. Neuberufene Pro-

sich weitgehend auf Naturgeschichte reduzierte. Das Seminar, schon geschwächt durch die Aufhebung des Prüfungsprivilegs Ende 1866, wurde schließlich 1887 aufgelöst<sup>27</sup>).

Die Seminarübungen sind sowohl in der Zeit Plücker/Lipschitz als auch in der Zeit Lipschitz/Kortum im wesentlichen in vier Abteilungen durchgeführt worden: in zwei jeweils parallelen unteren bzw. oberen Kursen. Die parallelen Kurse sind offenbar zumeist jeweils von den gleichen Studenten besucht worden. Allerdings hing die Abteilungsorganisation von der Anzahl der Seminarteilnehmer ab. Zwischen 1866 und 1870 nahmen stets zwischen 20 und 30 Studenten am Seminar teil. Offenbar sind hier im wesentlichen alle Interessierten ins Seminar aufgenommen worden. Den kurzzeitigen Rückgang an Teilnehmern infolge des Krieges 1870/71 nutzten jedoch Lipschitz und Kortum, um schärfere Selektionsmaßstäbe durchzusetzen: Im Jahresbericht 1871/72 formulierten sie das so:

„Für die Aufnahme zu beiden Abteilungen wurden bestimmte Anforderungen festgehalten, um nicht sowohl die Zahl, als die Tüchtigkeit der Mitglieder zu erhöhen“ [1, Bl. 81].

parallele Abteilungen eines Seminars, faktisch eines Oberseminars, mit nur 6 Teilnehmern<sup>28</sup>).

Interessant ist nun schließlich, die Praxis der Arbeitsformen im Seminar und der bearbeiteten Inhalte zu untersuchen. Lediglich im ersten Jahresbericht ist zu erkennen, daß den Studenten kleinere Übungsaufgaben gestellt worden sind. Ansonsten scheint die vorherrschende Form das Vortragsseminar gewesen zu sein, auch in den unteren Abteilungen. Einen nicht unbeträchtlichen Teil der Vorträge wird wohl der Lehrende selbst übernommen haben, wie sich aus manchen Formulierungen ergibt, – insbesondere in den Jahren 1887 bis 1899, wo

men<sup>29</sup>). Der erste Jahresbericht soll hier dokumentiert werden, da er die Arbeitsformen und Inhalte am genauesten schildert:

„Professor Plücker wählte im Wintersemester 1866/67 zum Gegenstande der Übungen, indem er die Bekanntschaft mit den Elementen der analytischen Geometrie voraussetzte, das Prinzip der Reciprozität, das er theils vortrug, theils mit den Mitgliedern besprach, theils als Thema für schriftliche Ausarbeitungen stellte. Der Hauptgesichtspunkt hierbei war der Parallelismus zwischen geometrischer und analytischer Behandlungsweise.

Im Sommersemester 1867 verteilte derselbe die Übungen auf zwei Stunden wöchentlich. In einer Stunde behandelte er für die Geübtern eines der wichtigern Kapitel der neuern analytischen Geometrie. Die Bedeutung der Anzahl der Constanten in den Gleichungen der algebraischen Curven und Oberflächen und zeigte an zahlreichen Beispielen, wie aus dieser Anzahl der Constanten geometrische Resultate unmittelbar sich ergeben. In der zweiten Stunde discutirte er die analytische Darstellung der geraden Linie im Raume, in den beiden Fällen, wo sie durch Punkte, welche auf derselben liegen oder durch Ebenen, welche nach denselben sich schneiden, bestimmt wird. Er betrachtete diese Discussion als erste Einleitung in eine neue Geometrie des Raumes, wobei als Element desselben die gerade Linie genommen wird.

Professor Lipschitz bildete zwei Cursus und richtete für jeden Cursus wöchentlich eine Stunde ein. Es wurde beabsichtigt, in dem niedern Cursus eine elementare Begründung der Convergenzsätze für die Potenzreihen zu entwickeln, und dadurch für die Teilnehmer, die eben die Universität betreten hatten, zwischen dem Gymnasialunterricht und dem Fachstudium eine Brücke zu schlagen. Allein die Kenntnisse, welche die Mehrzahl der Teilnehmer von

den Zusammenhang der angedeuteten analytischen Probleme mit den entsprechenden Problemen der Mechanik deutlich zu machen. In beiden Cursus ist die Teilnahme an den Seminarstunden eine lebhaft gewesene, und sind die für die schriftliche Behandlung gestellten Aufgaben durchgehends von der Mehrzahl der Teilnehmer mit Fleiß und Sorgfalt bearbeitet worden“ [1, Bl. 48–49 v.].

Lipschitz und Kortum haben auch Themen aus der synthetischen und projektiven Geometrie behandelt, Lipschitz aber vorrangig Themen aus der Theorie der Differentialgleichungen und der analytischen Mechanik. Kortum hat vorrangig Grundbegriffe der Analysis diskutiert: Konvergenz von Reihen, und schwerpunktmäßig die Determinantenlehre. Häufig sind Originalarbeiten gelesen worden: öfters von Gauß, aber auch von Kummer und anderen zeitgenössischen Mathematikern. Es folgt eine Übersicht typischer Themen bis 1889:

*Lipschitz, untere Abteilung:* Anfangsgründe der synthetischen Geometrie, projektive Beziehungen, Prinzip der reziproken radii vectores, quadratische Formen, Kettenbrüche, Interpolations- und Approximationsverfahren, rekurrente Reihen, Partialbruchzerlegung, Differenzen verschiedener Ordnungen, bestimmte Integrale und Gamma-Funktion.

–, *obere Abteilung:* Theorie komplexer Größen und Gauß' dritter Beweis des Fundamentaltheorems, Lehre der Quaternionen, Integration der isoperimetrischen Differentialgleichung, Systeme von Differentialgleichungen, krumme Oberflächen und kürzeste Linien, Hauptachsenproblem mit beliebig vielen Veränderlichen, Potential der Anziehung eines homogenen Ellipsoids, Bewegung einer elastischen Flüssigkeit, mathematische Theorie des Magnetismus, Lindemanns Transzendenz-Beweis für  $\pi$  (1887).

*Kortum, untere Abteilung:* Kegelschnitte, collineare Verwandtschaft zweier Ebenen, Pol und Polare am Kreis, Konvergenz und Divergenz unendlicher Reihen und Produkte, Lehre der Determinanten (besonders häufig), Produkt- und Partialbruchzerlegungen trigonometrischer Funktionen. Etwas aus diesem Rahmen fällt: „Zusammenhang zwischen der Lehre von den durch Linsensysteme entworfenen Bildern einerseits und der projectivischen Beziehung von Geraden, Ebenen und Räumen aufeinander andererseits, ein Zusammenhang, welcher namentlich durch die Arbeiten von Gauß und Helmholtz über Brechung des Lichts an Kugelflächen hervorgetreten ist“ (WS 1875/76).

–, *obere Abteilung:* Collineation und Affinität, allgemeine Gleichungen 2. Grades, invariante binäre Formen, Konvergenz der Abelschen Reihe, Kinematik, komplexe Funktionentheorie, elliptische Integrale, Theta-Funktionen, unendlich dünne Strahlenbüschel zweier Dimensionen nach Kummer, partielle Differentialgleichungen.

Im Proseminar hat Kortum vor allem Anfangsgründe der Determinantenlehre behandelt sowie die Jacobi-Transformation.

### Ansätze zur Ausdifferenzierung von Studienformen und Personalstruktur

Während in den Naturwissenschaften in der zweiten Hälfte des 19. Jahrhunderts eine relativ rasche Vermehrung von Stellen – und zugleich eine innere Differenzierung über den Ausbau von Assistentenstellen – für Wissenschaftler

erfolgte, vor allem aufgrund wachsender Forschungsbedürfnisse, ist eine Stellenvermehrung in der Mathematik wesentlich langsamer und später erfolgt. Ansatzpunkte solcher Veränderungen zeigten sich aber zuerst in den 1880er Jahren als Folge von Veränderungen im Bildungsbereich: es fand, insbesondere nach der Reichsgründung, eine starke Ausweitung der höheren Schulen statt: die Anzahl der Schüler wuchs beträchtlich, eine große Zahl neuer Schulen wurde gegründet, es bestand ein hoher Lehrbedarf. Zugleich stieg die Zahl der Lehrerstuden-ten. Diese steigende Zahl der Studenten und ihre veränderte soziale Zusammensetzung machten eine stärkere Betreuung der Studenten notwendig: Über das traditionelle Vortragsseminar hinaus mußten neue Studienformen entwickelt werden, in denen auch jüngere Studenten effektiv angeleitet werden konnten. Das erforderte aber nicht nur mehr Lehrpersonal, sondern auch zugleich eine Differenzierung in den Lehrfunktionen – im Vergleich zu einem Vortragsseminar, das noch relativ leicht von einem Lehrenden geleitet werden konnte.

Das auslösende Moment zur weiteren institutionellen Entwicklung vieler Seminare, auch der mathematischen, ist 1885 eine Sparaktion des preußischen Kultusministeriums gewesen: Angesichts enorm gestiegener Studentenzahlen, gerade auch in der Philosophischen Fakultät, sah man die Gefahr einer Überfüllung der Universität und strich daher überall die Seminarprämien, um nicht auch noch zum Lehrstudium anzureizen<sup>30</sup>). Da die gestrichenen Gelder aber prinzipiell den Seminaren weiterhin zugute kommen konnten, war es nun möglich, Anträge zu ihrer neuen Verwendung zu stellen. Für das Mathematische Seminar handelte es sich dabei um 750 Mark<sup>31</sup>). Zusammen mit Anträgen für sechs weitere Seminare übermittelte der neue Kurator J. O. Gandtner, ehemals selbst Mathematiklehrer, am 25. 3. 1885 dem Ministerium den Antrag des mathematischen Seminars, der die neuen Bedürfnisse differenzierterer und intensiverer Studienbetreuung verdeutlicht:

„Es werden beantragt vom Mathematischen Seminar die Erhöhung des Bibliotheksfonds um 250,— Mark, die Annahme eines Bücherwirts gegen 200,— Mark jährliche Remuneration sowie die Abhaltung und Leitung von Übungen durch einen älteren Seminaristen gegen 300,— Mark jährliche Remuneration. . . .

Die Funktionen der Senioren und Bücherwarte sollen nicht bloß darin bestehen, die Seminardirektoren in der geschäftlichen Leitung des Seminars zu unterstützen und die Seminarbibliotheken in Ordnung zu halten. Ihre Hauptaufgabe wird vielmehr die sein, die jüngeren Mitglieder des Seminars bei der Behandlung seminaristischer Aufgaben mit Rat zu unterstützen, sie auf die einschlägige Literatur aufmerksam zu machen und ihnen bei der Benutzung derselben an die Hand zu gehen. Zu diesem Zweck ist es erforderlich, daß sie sich täglich mindestens vier Stunden im Seminar aufhalten. Es erscheint billig, sie hierfür zu remunerieren. . . .

<sup>30</sup>) Mit den periodischen Überfüllungskrisen im deutschen Bildungssystem hat sich intensiv ein von der DFG gefördertes empirisches Projekt beschäftigt, das auch erstmals in umfassender Weise die Frequenzen der einzelnen deutschen Universitäten, Fakultäten und – soweit datenmäßig zugänglich – auch von Fachstudien ab ca. 1800 bis 1942 ermittelt und ausgewertet hat. Vgl. [23].

<sup>31</sup>) 1875 war die preußische Währung von Taler auf Mark umgestellt worden. 1 Taler entsprach 3 Mark. 1873 hatte das Kultusministerium, ohne daß dafür ein Antrag des Seminars ersichtlich ist, dessen Etat um 80 Taler auf 300 Taler erhöht, und zwar zugunsten der Prämien [1, Bl. 83]. Allerdings hat die Seminar-Direktion ab etwa 1871 die Politik verfolgt, den Prämien-Etat nicht voll auszuschöpfen und die Überschüsse für die Bibliothek zu verwenden.

Endlich will ich nicht unterlassen, besonders hervorzuheben, daß ich aus den von den betreffenden Seminardirektoren entwickelten Gründen ganz besonderen Wert auf die Schaffung einer Assistentenstelle im philolog. Seminar und auf die Leitung von Übungen durch einen älteren Seminaristen im mathem. Seminar lege.“ [1, Bl. 121 ff.].

Das Ministerium lehnte Anträge auf Assistenten ab und bewilligte ausnahmsweise den entsprechenden Antrag des philologischen Seminars, genehmigte aber für die Mathematik die Anstellung eines Bücherwirts, zusammen mit der Erhöhung des Bibliotheksfonds auf 400 Mark. Über die Tätigkeit der Bücherwarte liegen keine Berichte vor, und da deren Besoldung aus dem allgemeinen Titel „Insgemein“ des Universitätsetats erfolgte, der heute nicht mehr aufschlüsselbar ist, läßt sich über die Praxis und die Personen dieser ersten offiziell anerkannten Hilfsassistenten leider nichts aussagen.

In Bonn hat auch kein direkter Zwang vorgelegen, die geschlossene Institution Seminar für alle Studenten zu öffnen, wie es ausgehend von Münster an anderen Hochschulen der Fall war: In Münster war nach 1891 eine Benutzungsg Gebühr eingeführt worden, um den schmalen Bibliotheksetat aufzubessern, so daß man an vielen Benutzern interessiert war [20, S. 30]. So betonten 1910 die Bonner Mathematiker, der anderswo erfolgreich betretene Weg, durch Beiträge der Seminar-Benutzer den Fonds zu erhöhen, sei in Bonn wohl nicht gangbar, da schon die bisher erhobenen Schlüsselgelder (1 bis 2 Mark pro Semester) von den Studenten als sehr drückend empfunden würden. Immerhin wurden auch diese Gelder für die Bibliothek benutzt: für Ersatzbeschaffungen [1, Bl. 165 ff.]. Offenbar war die Notlage in Bonn nicht so groß, da das Seminar öfters Zuschüsse aus dem Titel „Insgemein“ der Universität erhielt.

Ansätze für eine reale Differenzierung der Studienformen und eine Öffnung des Seminarbetriebes sind erst nach 1904 festzustellen, also dem Jahr, in dem eine vollständige personelle Neubesetzung in der Bonner Mathematik stattfand. Lipschitz hatte zwar 1892 ein zweites Extraordinariat für Mathematik erreichen können, dessen Inhaber aber – seit 1896 L. Heffter – nicht an der Seminar-Leitung beteiligt. Nach Lipschitz' Tod 1903 stellte dessen Nachfolger E. Study im April 1904 sofort, zusammen mit Kortum, den Antrag, Heffter zum Mitdirektor des Seminars zu ernennen, um „die Einrichtungen des . . . Seminars zu erweitern und vielseitiger zu gestalten“ [1, Bl. 140]. Nach Heffters Wegberufung und Kortums Tod 1904 wurden die beiden Extraordinarien G. Kowalewski und F. London zu Mitdirektoren neben Study. Obwohl die Anzahl der Seminarteilnehmer nun auf über 30 stieg<sup>32</sup>), wurde bis 1907 der alte Seminarstil beibehalten: „Die Mitglieder hielten Vorträge über verschiedenartige Gegenstände“ ist eine typische Formulierung<sup>33</sup>). Der entscheidende Schritt zur Öffnung

<sup>32</sup>) Vgl. die Graphik mit den Frequenzen der Seminarteilnehmer und der Mathematikstudenten in Bonn [20, S. 25]. Die Zahlen über die Seminarteilnehmer beruhen auf einer von der Bonner Quästur erstellten Statistik für die Jahre 1900 bis 1910 [1, Bl. 177]. Die Angaben der Seminardirektion für den gleichen Zeitraum in den Universitätschroniken liegen um einiges tiefer; offenbar ist dort das Proseminar bzw. die untere Abteilung nicht mitgezählt worden.

<sup>33</sup>) Die jährlich publizierten Chroniken sind u. a. im Archiv der Universität Bonn zugänglich.



der Seminarform und der Übergang zu intensiverer Betreuung erfolgte 1908: Im Seminarbericht in der Chronik 1909 heißt es:

„Das Seminar gliedert sich in drei Stufen.

*Unterstufe:* Übungen im Anschluß an die Anfängervorlesungen.

*Mittelstufe:* Vorträge der Teilnehmer über leichtere Aufgaben.

*Oberstufe:* Referate der Mitglieder über neuere Arbeiten.“

Diese neue Form ist im folgenden weiterpraktiziert worden, wie die Seminarberichte bestätigen. So heißt es in der Chronik 1914: „Für die Unterstufe wurden Übungen im Anschluß an die Vorlesungen veranstaltet“. Eine wesentliche Ursache dieser Veränderungen der Studienformen dürfte in dem starken Anstieg der Anzahl der Mathematikstudenten liegen: Von ca. 50 im Jahre 1898 auf 110 (1904) und 200 (1910) bis über 250 bei Kriegsausbruch<sup>34</sup>). Allerdings hatte die Veränderung der Seminarform noch nicht unmittelbar eine offizielle Differenzierung der Personalstruktur zur Folge: Die Korrektur der Übungen machte zwar einen Assistenten notwendig, aber – wie so viele Neuerungen im Universitätsbetrieb – wurde er zunächst privat finanziert, bevor er in „öffentlichen“ Status übergang: „Bis zum Jahre 1917 hat der verstorbene Geheimrat Professor Dr. London einen Assistenten aus eigenen Mitteln bezahlt“, berichtete 1922 der Kurator [1, Bl 244 v.]. Diese enge Verbindung Londons mit dem Übungsseminar war übrigens nur dadurch möglich, daß er sich durch Study auf die Anfängervorlesungen beschränken ließ [14, S. 46].

Insgesamt ist in dieser Phase die schließliche Veränderung des Seminars angelegt. Sie wird bestehen in der Trennung der Studienform von der organisatorischen Untereinheit der Fakultät: Das Seminar wird zu einer normalen, jedem Studenten zugängliche Veranstaltung neben den Vorlesungen; die organisatorische Form dagegen entwickelt sich schließlich zum mathematischen Institut, in dem mehrere Wissenschaftler arbeitsteilig an der Ausbildung beteiligt sind.

### Inhaltliche Differenzierung der Mathematik

Die Mathematik an den preußischen Universitäten hatte sich im Laufe des 19. Jahrhunderts zunehmend auf die sog. reine Mathematik hin eingeeignet, trotz der nominellen Erwähnung der angewandten Mathematik in Universitäts-Statuten. Eine Differenzierung in der Disziplin Mathematik wurde erst 1898 eingeleitet durch eine Veränderung in den Zielen der Lehrerausbildung in Mathematik an den Universitäten: Auf Initiative von F. Klein hin wurde neben der bisherigen Lehrbefähigung für Mathematik eine zweite für angewandte Mathematik eingeführt, mit den Teilgebieten: darstellende Geometrie, Geodäsie und Technische Mechanik. Diese Studienziel-Differenzierung ist der Ausgangspunkt für die Institutionalisierung der angewandten Mathematik geworden. So ist in Göttingen mit C. Runge 1904 erstmals ein Ordinarius für angewandte Mathematik

---

<sup>34</sup>) Diese Zahlen beruhen auf einer Schätzung von mir, da die Statistik zu dieser Zeit noch nicht die Fächer trennte, vgl. [20]. Auch die Quästur erklärte 1910, sie könne nicht die Mathematik- von den Naturwissenschaftsstudenten unterscheiden.

berufen worden. Andere Universitäten folgten mit einigem Abstand. Bonn dagegen hat sich sehr lange gegenüber der angewandten Mathematik reserviert verhalten und sich als Opposition gegenüber der „Göttinger“ Richtung verstanden.

Man hat in Bonn nicht versucht, aus den neuen Lehraufträgen die Fächer...

nach neuen Stellen abzuleiten, sondern man hat lediglich zusätzliche Lehraufträge vergeben. Ein Antrag der Seminar-Direktoren Kortum, Study und Heffter vom Juli 1904 macht die Haltung deutlich: Nur zur darstellenden Geometrie gebe es bislang an der Universität Veranstaltungen, durch Heffter. Es sollten daher auch in den beiden anderen Fächern der angewandten Mathematik Lehrveranstaltungen angeboten werden, aber ein „nicht zu umfangreicher Unterricht“; eine stärkere Vertretung sei den „Bedürfnissen der künftigen Lehrer“ nicht „angemessen“. Sie beantragten daher, zwei Dozenten der Landwirtschaftlichen Akademie Poppelsdorf entsprechende besoldete Lehraufträge zu erteilen [1, Bl. 150 ff.].

Lorey hatte einen ersten Entwurf seines Buchs über das Mathematikstudium 1912/13 mehreren Mathematikern zugesandt, u. a. auch F. London in Bonn. London reagierte auf die dort offenbar gemachte Aussage einer mangelnden Vertretung der angewandten Mathematik in Bonn mit der „Richtigstellung“, daß er selbst in mehrsemestrigen Kursen, auf Grund besonderen Lehrauftrags, darstellende Geometrie lehre und daß für den Unterricht in technischer Mechanik seit mehreren Jahren gesorgt sei durch einen Lehrauftrag – der zugleich höhere Geodäsie umfasse – an den Professor für höhere Mathematik der Akademie Poppelsdorf, und daß dem Direktor des dortigen Geodätischen Instituts seit 1907 ein Lehrauftrag für niedere Geodäsie und Ausgleichsrechnung erteilt sei: „Daher ist bei uns der Unterricht in der angewandten Mathematik . . . in wünschenswerter Vollständigkeit eingerichtet“<sup>35</sup>).

Wie das Ministerium die Haltung der Bonner Mathematiker beurteilte, läßt sich daraus ablesen, daß es bis 1918 keinen Bonner, sondern einen Externen – einen Schuldirektor aus Köln – zum Prüfer für angewandte Mathematik bestimmt hat. Nur ganz wenige Studenten haben sich angesichts von so anregenden Bedingungen während der ersten zwanzig Jahre in Bonn in angewandter Mathematik prüfen lassen. Eine „Denkschrift“ der Philosophischen Fakultät „über Entwicklung und jetzigen Stand des Unterrichts in der angewandten Mathematik an der Universität Bonn“ von 1928, die diese Fakten schildert, kennzeichnet „die Bonner Fachmathematiker“ bis zu Beginn der 1920er Jahre mit „ihrer vorwiegenden Einstellung auf die reine Mathematik“. Sie hätten sich insbesondere „abwartend“ verhalten, als die Lehrer-Prüfungsordnung vom 5. 7. 1921 die angewandte Mathematik erheblich ausgebaut hatte: Eine Erweiterung, die in Bonn als „vom Göttinger Standpunkt diktierte Anforderungen“ scharf kritisiert wurde [1, Bl. 294 ff.]

auch in Bonn in der zweiten Hälfte der 1920er Jahre zu einer Öffnung zu den Anwendungen hin. Ansatzpunkt war der Zeichensaal, der 1901 als erste Reaktion auf die neue Prüfungsordnung eingerichtet worden war, um Übungen in darstellender Geometrie zu ermöglichen. Durch mehrfache Sonderzuweisungen war eine Modellsammlung aufgebaut worden, und 1912 konnte man in einen günstiger gelegenen Raum umziehen [6]. Andererseits bestand kein fester Etat. Erst mit der „Denkschrift“ vom 30. 6. 1928 wurde eine gemeinsame Anstrengung der Fakultät unternommen, um die Verhältnisse zu verbessern: zur Einrichtung eines „Mathematischen Praktikums“, auf 30 Teilnehmer berechnet, wurde eine hohe einmalige Zuweisung zur Erstausrüstung beantragt sowie ein kleiner Etat zur Instandhaltung der Instrumente und Weiterführung der Bücherei [1, Bl. 292 ff.]<sup>36</sup>). Beide Anträge wurden genehmigt. Schon zuvor hatte H. Beck, der den Aufbau der angewandten Mathematik betrieb, die Zuteilung von Assistentenmitteln erreichen können<sup>37</sup>).

### Differenzierung der Personalstruktur: Einstellung von Assistenten

Die Personalstruktur am Mathematischen Seminar schien sich nach 1917 zunächst eher nach oben hin zu vereinheitlichen als sich zu differenzieren: Das Extraordinariat Londons wurde 1917 bei der Berufung von H. Hahn in ein etatmäßiges Ordinariat umgewandelt, und der Geometer H. Beck, 1917 als außerordentlicher Professor berufen, erhielt 1921 ein persönliches Ordinariat<sup>38</sup>), so daß drei faktisch gleichberechtigte Professoren lehrten, und daneben nur ein bis zwei Privatdozenten. Andererseits muß es eine größere Anzahl von, vermutlich unbesoldeten, Hilfskräften gegeben haben – zusätzlich zu dem seit 1885 besoldeten Bücherwart – und ausgehend von der Seminarbibliothek als institutioneller Basis. Denn die 1915 dem Ministerium eingereichte Benutzungsordnung der Bibliothek sah eine werktägliche Öffnungszeit „von 8 Uhr morgens bis 8 Uhr abends“ vor, also 72 Stunden in der Woche [1, Bl. 233]. 1919 wird dagegen für „den Bücherwart des Seminars, Frl. Elise Schwarz“, eine Semester-Arbeitszeit von 100 Stunden, also ca. 4 Stunden pro Woche veranschlagt.

Eine grundsätzliche Veränderung dieser Situation, in der die notwendige Assistententätigkeit nicht als öffentliche Aufgabe anerkannt war, ergab sich wiederum durch Veränderungen in der Lehrerausbildung, und zwar durch eine weitere notwendige Intensivierung des Studiums aufgrund ständig steigender Stu-

<sup>36</sup>) Es war sogar überlegt worden, der so ausgebauten Einrichtung den Namen „Seminar für angewandte Mathematik“ zu geben (ibid.).

<sup>37</sup>) Eine spezialisierte Professur für angewandte Mathematik ist in Bonn aber erst 1958 besetzt worden.

<sup>38</sup>) [14, S. 45]. Allerdings auf S. 46: 1919. Bei den persönlichen Ordinariaten handelte

dentenzahlen<sup>39</sup>). Der erste Antrag des mathematischen Seminars vom 4. Juli 1918 auf Einstellung eines Assistenten erklärt selbst diesen Zusammenhang:

„Die Ordnung der Prüfung für das Lehramt an höheren Schulen vom 28. Juli 1917 fordert in § 5, Abs. 2 zum Nachweise eines ordnungsmäßigen Berufsstudiums, „*daß der Kandidat in seinen Hauptfächern an wissenschaftlichen Übungen (Seminaren oder ähnlichen Einrichtungen) mit Erfolg teilgenommen hat*“.

Nach § 6, Abs. 2 f sind der Meldung zur Prüfung beizufügen „*die Bescheinigungen der Leiter der wissenschaftlichen Übungen (Seminare) über die Beteiligung des Kandidaten an den Übungen, und die für diese Übungen angefertigten schriftlichen Arbeiten*“.

Wir haben nun die Überzeugung gewonnen, daß unter diesen Umständen der bei uns wie wohl auch an anderen Universitäten üblich gewordene Seminarbetrieb erhebliche Änderungen wird erfahren müssen. Da namentlich die neue Prüfungsordnung auch für die Mittel-

stufe Bekanntschaft mit den Elementen der analytischen Geometrie des Raumes fordert, so wird den bisher schon bestehenden drei Seminarkursen für Anfänger ein vierter angegliedert werden müssen, so daß dann in jedem Semester zwei solcher Anfängerkurse stattfinden.

. . . Die Hauptbelastung besteht dabei in der Korrektur der regelmäßig und zahlreich eingehenden schriftlichen Arbeiten, die bei dem erfreulichen Eifer mancher Studierenden gar nicht selten recht umfangreich ausfallen.

Im laufenden Sommersemester hat eine ganze Anzahl von Studierenden von den

das mathematische Seminar“ zu stellen. Das Ministerium notierte sich zwar: „Dieser Antrag kann abgewendet werden“, doch im Mai 1922 sah es gute Chancen, beim Finanzministerium durchzukommen, und forderte die Universität auf, einen neuen ausführlichen Antrag für eine planmäßige Assistentenstelle einzureichen [1, Bl. 238 ff.]. Interessant ist die Formulierung des Ministeriums, daß der Assistent „dem Mathematischen Seminar“ zugeordnet werden soll; d. h. daß das Seminar hier bereits als *die*, die ganze Mathematik umgreifende, institutionelle Form angesehen wird – faktisch also als Institut. Der Antrag vom 18. 6. 1922 schilderte die Notwendigkeiten des Lehrbetriebs in der Weise, wie wir sie auch heute kennen, wie sie für Bonn insgesamt aber noch neu war:

„Es liegt in der Art des mathematischen Unterrichts begründet, daß ein erfolgreicher Unterricht durch reine Vortragstätigkeit nicht mehr erteilt werden kann; das Hauptgewicht muß auf Übungen gelegt werden, die den dargebotenen Stoff verarbeiten und wie in keinem anderen Fache die Gewähr geben müssen, daß der schwierige Lehrgegenstand von den Studierenden auch verstanden worden ist. Ganz besonders gilt dies von dem mathematischen Rechnen, der analytischen und der darstellenden Geometrie. Bei der Belastung der Dozenten ist die Abhaltung solcher Übungen ohne erfahrene Assistenten, die schon eine gewisse Lehrpraxis besitzen, ganz unmöglich.“

Dazu wurde eine Statistik der Zahl der Übungsteilnehmer zwischen 1918 und 1922 beigelegt: zwischen 100 und 290. Der Antrag unterstreicht die Funktion der Nachwuchsförderung der Stelle, die nicht als Gegensatz zu ihrer Nicht-Befristung gesehen wird:

„Auch ist nur durch die Errichtung planmäßiger Assistentenstellen die Möglichkeit gegeben, Privatdozenten für die mathematische Wissenschaft zu gewinnen, an denen es seit einem Jahrzehnt gänzlich fehlt.“ [1, Bl. 243 ff.].

Diesem Antrag war nun endlich Erfolg beschieden, allerdings erst nach einer zusätzlichen direkten Intervention Studys und lediglich in Form eines „außerplanmäßigen Assistenten“ [1, Bl. 246 f.]. Die Stelle war zwar „dem mathematischen Seminar“ bewilligt, doch bei der konkreten Zuordnung zeigten sich sofort Spannungen im Lehrkörper. Das Ministerium forderte nämlich in seinem Bewilligungsschreiben vom Oktober 1922, daß von den neuen Mitteln die zuvor für 1922 bewilligten Hilfskraftmittel abgezogen werden mußten. Der Kurator widersprach dieser Forderung: diese Mittel seien für die Übungen Becks in darstellender Geometrie eingesetzt worden, der neue Assistent solle aber „vorwiegend“ von Study „in Anspruch genommen werden“. Bei der „Verschiedenheit“ der Fächer Becks und Studys und ihrem „außerordentlich gespannten Verhältnis“ sei eine Teilung des Assistenten in seinen Funktionen nicht realisierbar. Zugleich mußten aber beide Funktionen wahrgenommen werden:

„So willkommen die Anstellung eines Assistenten sein mag, der in erster Linie dem Professor Dr. Study zur Verfügung steht, so würde doch die Entziehung der Assistenzkräfte für den Unterricht in der darstellenden Geometrie bei der Eigenart dieser Lehrfächer die Fortsetzung der Vorlesungen des Professors Beck ganz unmöglich machen.“ [1, Bl. 248 v.].

Der Kurator schlug daher eine faktische Stellenteilung vor durch Vorabzug der Beckschen Hilfskraftmittel vom Gehalt der Assistentenstelle. was

auch genehmigt wurde. Der ab 1. 1. 1923 eingestellte apl. Assistent, der Privat-

dozent E. A. Weiß<sup>40</sup>), erhielt daher einen Abzug von 1,5% von seinem Gehalt [1, Bl 254].

Eine instruktive Beschreibung der Assistententätigkeiten gab Beck in einem Antrag vom Juli 1926 für zusätzliche Hilfskraftmittel:

„... unser Assistent, Dr. Weiß, der schon die Funktionentheorie bei Prof. Hausdorff zu korrigieren hat, und durch die Erledigung der laufenden Geschäfte des mathematischen Seminars und des Zeichensaals für darstellende Geometrie bei der Riesenzahl von Studierenden nicht weniger als durch seine Taetigkeit in den Oberseminaren bei der Vorbereitung der Vortragsthemata so völlig in Anspruch genommen ist, daß ihm Zeit zu eigener Arbeit im Semester kaum bleibt“ [1, Bl. 259 v.]<sup>41</sup>).

Da die Bibliothek hier nicht erwähnt ist wie bei Assistenten an anderen Seminaren, kann man davon ausgehen, daß auch weiterhin dafür ein eigener  
Büchereyunterstützungsmittelbestanden. Hatte die Bewilligung des ersten Assisten

Es ist Toeplitz gelungen, Studienformen zu entwickeln, die auch unter den Bedingungen des Massenstudiums eine effektive Anleitung der Studierenden und Kontakt mit den Lehrenden sicherten<sup>43</sup>). Toeplitz war in vielfacher Hinsicht „ein echter ‚Göttinger‘“ wie ihn Behnke charakterisiert hat [8a, S. 112]. Er hat moderne Arbeitsmittel in den Studienbetrieb eingeführt: Im September 1929 erreichte er die Anschaffung eines „Rotafixervielfältigungsapparats“, mit dem nicht nur die Übungsaufgaben in technisch wesentlich einfacherer Weise reproduzierbar waren, sondern zugleich schon erste Formen von Skripten ausgegeben werden konnten. Mit ausdrücklichem Hinweis auf Erprobungen in Göttingen schreibt Toeplitz:

„Wir können zu unseren Vorlesungen dann längere Formelserien den Studenten in Abzügen in die Hand geben, die wir jetzt zeitraubenderweise an die Tafel schreiben müssen und die in den hinteren Reihen der überfüllten Auditorien nicht mehr ordentlich gelesen werden können, so daß die Hörer dauernd sinnentstellende Fehler in ihren Nachschriften haben und durch die Unklarheiten des Abschreibens im Zuhören behindert sind“ [1, Bl. 321].

Auch noch in weiterer Weise wurde der Seminarbetrieb professionalisiert: Es hatte bislang keine Sekretärin für die Mathematik gegeben. In der Berufungsvereinbarung vom 19. 10. 1927 hat Toeplitz erstmals die „Anstellung einer Schreibhilfe“ erreicht [1, Bl. 277]. Faktisch waren damit die Grundzüge eines modernen Institutsbetriebs hergestellt worden<sup>44</sup>).

Toeplitz brachte aber nicht nur in wissenschaftsorganisatorischer Hinsicht „Göttinger“ Geist nach Bonn, sondern vor allem auch durch inhaltliche Innovationen. Dazu zählt die Öffnung zu den Anwendungen hin, die sich in der „Denkschrift“ vom Sommer 1928 und der nachfolgenden Institutionalisierung eines Etats für die angewandte Mathematik dokumentiert (vgl. oben), insbesondere aber die Etablierung von Didaktik der Mathematik und Geschichte der Mathema-

Toeplitz hat daher eine dritte Abteilung des Bonner Seminars eingerichtet: für Historie und Didaktik der Mathematik. In seiner Berufsvereinbarung hat er ihr bereits einen eigenen Etat von 300 RM jährlich zur Literaturbeschaffung gesichert, sowie einen „besoldeten Lehrauftrag für Mathematik unter besonderer Berücksichtigung ihrer Geschichte und Didaktik“. Diesen Lehrauftrag ließ er dem bisher in Halle tätigen Privatdozenten E. Bessel-Hagen übertragen. Eine längere Wirksamkeit in Bonn war Toeplitz versagt, da er bereits Ostern 1933 vom NS-Staat seines Amtes enthoben wurde.

Eine wesentliche Ausweitung über den Stand vom Ende der 1920er Jahre hinaus ist in Bonn erst ab der zweiten Hälfte der 1950er Jahre erfolgt. Die Entwicklung der Mathematik in Bonn erweist sich damit als die einer typisch geisteswissenschaftlichen Disziplin, mit der Lehrerbildung als institutioneller Basis. Behnke hat in einem Bericht über seine Zusammenarbeit mit Toeplitz in der Lehrerbildung hervorgehoben, daß dies ein echtes und nicht nur vordergründiges Ziel war:

„Auf den Gedanken, daß ein erheblicher Teil unserer uns enger verbundenen Studenten in der Industrie Beschäftigung suchen sollte oder an die Hochschulen des In- und Auslandes gehen würde, kam damals noch keiner von uns beiden.“ [8, S. 53]

Allerdings ist die Entwicklung in Bonn lange Zeit „konservativ“ erfolgt und nicht offen gegenüber neuen Anforderungen aus dem Bereich der Anwendungen – wie es das Beispiel Studys 1904 zeigt, der die Lehrerbildung vorschob, um einen Ausbau der angewandten Mathematik abzulehnen. Obwohl Bonn lange

---

Zeit mehr Mathematik-Studenten hatte als Göttingen – so der Bonner Kurator 1922 –, ist in Bonn nur ein minimaler Ausbau der Wissenschaftlerstellen erfolgt, während in Göttingen eine ganz enorme Ausweitung stattfand.

## Literatur

### a) Quellen:

- [1] Hauptstaatsarchiv Düsseldorf, Bestand NW 5: Preußisches Kultusministerium: Nr. 558, Acta betreffend den mathematischen Apparat der Universität zu Bonn. Vol. I, Aug. 1835 bis Sept. 1929
- [2] Ebd. Nr. 483, Acta betreffend das naturwissenschaftliche Seminarium der Universität zu Bonn. Vol III, Januar 1859 bis April 1888
- [3] Zentrales Staatsarchiv der DDR. Abteilung Merseburg. Bestand: Akten des ehemaligen

Preußischen Kultusministeriums, Bon. 36 V. 1. Sekt. 4. Tit. V. No. 56. Die Errichtung



- [8] B e h n k e , H.: Otto Toeplitz 1881–1940. In: Bonner Gelehrte. Beiträge zur Geschichte der Wissenschaften in Bonn. Mathematik und Naturwissenschaften. Bonn: Bouvier 1970, 49–53
- [8a] B e h n k e , H.: Semesterberichte. Ein Leben an deutschen Universitäten im Wandel der Zeit. Göttingen: Vandenhoeck und Ruprecht 1978
- [9] B o c k , K. D.: Strukturgeschichte der Assistentur. Düsseldorf: Bertelsmann 1972
- [10] E r b e n , W.: Die Entstehung der Universitäts-Seminare. Internationale Monatsschrift für Wissenschaft, Kunst und Technik 7 (1913) 1249–1263 und 1335–1347
- [11] E r n s t , W.: Julius Plücker. Eine zusammenfassende Darstellung seines Lebens und Wirkens als Mathematiker und Physiker auf Grund unveröffentlichter Briefe und Urkunden. Bonn: Scheur 1933
- [12] K o c h , J. F. W.: Die preußischen Universitäten. Berlin: Mittler, Bd. 2, 1840
- [13] K ö t h e , G.: In Memory of Otto Toeplitz. In: I. Gohberg (ed.): Toeplitz Centennial. Basel: Birkhäuser 1982, 545–556
- [14] K r u l l , W.: Eduard Study 1862–1930. In: Bonner Gelehrte . . . Bonn: Bouvier 1970, 25–48
- [15] L o r e y , W.: Das Studium der Mathematik an den deutschen Universitäten seit Anfang des 19. Jahrhunderts. Leipzig/Berlin: Teubner 1916
- [16] O l e s k o , K. M.: The emergence of Theoretical Physics in Germany: Franz Neumann and the Königsberg School of Physics, 1830–1890. Ph.D. thesis Cornell University 1980
- [17] R i e s e , R.: Die Hochschule auf dem Wege zum wissenschaftlichen Großbetrieb. Die Universität Heidelberg und das badische Hochschulwesen 1860–1914. Stuttgart: Klett 1977
- [18] S c h l e i e r m a c h e r , F. D.: Pädagogische Schriften, Bd. 2. Düsseldorf/München: Küpper 1957
- [19] S c h u b r i n g , G.: Das genetische Prinzip in der Mathematik-Didaktik. Stuttgart: Klett 1978
- [20] S c h u b r i n g , G.: Seminar-Institut-Fakultät. Die Entwicklung der Ausbildungsformen und ihrer Institutionen in der Mathematik. In: Diskussionsbeiträge zur Ausbildungsforschung und Studienreform. Universität Bielefeld, IZHD, Heft 1/1983, 1–44
- [21] S c h u b r i n g , G.: Die Entstehung des Mathematiklehrerberufs im 19. Jahrhundert. Studien und Materialien zum Prozeß der Professionalisierung in Preußen (1810–1870). Weinheim: Beltz 1983
- [22] S c h u b r i n g , G.: Die Promotion von P. G. Lejeune Dirichlet. Biographische Mitteilungen zum Werdegang Dirichlets. In: NTM-Schriften. Gesch. Naturwiss., Technik, Med. 21 (1984) 1, 45–65
- [23] T i t z e , H.: Die zyklische Überproduktion von Akademikern im 19. und 20. Jahrhundert. In: Geschichte und Gesellschaft 10 (1984) 92–121
- [24] T o e p l i t z , O.; L o n d o n , F.: Das mathematische Seminar an der Universität Bonn. In: F. v. Bezold: Geschichte der Rheinischen Friedrich-Wilhelms-Universität Bonn, Bd. 2. Bonn: Marcus und Webers 1933, 324–334
- [25] T u r n e r , R. S.: The prussian universities and the research imperative, 1806–1848. Ph. thesis Princeton 1973

Gert Schubring  
 Institut für Didaktik der Mathematik  
 Universität Bielefeld  
 4800 Bielefeld 1

(Eingegangen 23. 8. 1984)

## Jacobis Tripelprodukt-Identität und $\eta$ -Identitäten in der Theorie affiner Lie-Algebren\*)

Erhard Neher, Münster

Der vorliegende Artikel beschreibt die historische Entwicklung von Eulers Pentagonal-Zahlen-Satz über die Jacobische Tripelprodukt-Identität zur Nenner-Formel für affine Lie-Algebren und erläutert die daraus abgeleiteten Macdonald-schen  $\eta$ -Identitäten. Damit soll dem Leser eine Einführung in die Theorie affiner Lie-Algebren gegeben werden.

Eine genaue Inhaltsangabe findet der Leser jeweils zu Beginn der einzelnen Paragraphen.

### § 1    Eulers Pentagonal-Zahlen-Satz und Jacobis Tripelprodukt-Identität

Wir erläutern zwei klassische Ergebnisse der additiven Zahlentheorie: Eulers Penta-

gonal-Zahlen-Satz und seine Rekursions-Formel für die Partitionsfunktion  $p(n)$ . Nach einem Exkurs über weitere Formeln für  $p(n)$  beschreiben wir, wie der Eulersche Satz aus der Jacobischen Tripelprodukt-Identität folgt, und geben als weiteres Korollar dieser Identität eine

Die Werte werden jedoch schnell sehr groß ([2] Table 14.1):

n	15	20	25	30	40	50	100
p(n)	176	627	1958	5604	37 338	204 226	190 569 292

und wachsen ins Astronomische, z. B.

$$p(200) = 3\,972\,999\,029\,388.$$

Diese Zahl wurde 1918 von MacMahon berechnet (Tabelle am Ende von [20]). Tatsächlich gilt für die Größenordnung von p(n) die Asymptotik

$$(1.1) \quad p(n) \sim \frac{1}{4n\sqrt{3}} \exp\left(\pi \sqrt{\frac{2n}{3}}\right),$$

eine Formel, die in der eben erwähnten Arbeit [20] von Hardy und Ramanujan bewiesen wurde. Bis dahin war aber ein weiter Weg, den wir hier teilweise verfolgen wollen. Der erste mit allgemeinen Resultaten über Partitionen war Euler. In seiner berühmten „Introductio in analysin infinitorum“ ([13]) zeigt er den

**Satz 1.1.** Für  $|q| < 1$  gilt

$$(1.2) \quad \prod_{n > 1} (1 - q^n)^{-1} = \sum_{n > 0} p(n)q^n,$$

wobei  $p(0) = 1$  gesetzt wird.

*Euler'sche Partitionen* Satz 1.1.1. In [13] S. 117. 120

oder [3] Theorem 14.2. An dieser Stelle sei nur eine *Beweisskizze* angegeben: Jeder der Faktoren läßt sich in eine geometrische Reihe verwandeln

$$(1 - q^n)^{-1} = \sum_{k > 0} q^{nk}.$$

Man macht sich nun klar, daß für das Produkt der ersten m Faktoren gilt

**Satz 1.2** ([57] (3.14)). a) Ist  $u(n)$  die Anzahl der Partitionen von  $n$  in ungerade Summanden, so gilt

$$(1.3) \quad \prod_{n > 1} (1 - q^{2n-1})^{-1} = \sum_{n > 0} u(n)q^n$$

b) Ist  $v(n)$  die Anzahl der Partitionen von  $n$  in verschiedene Summanden, so gilt

$$(1.4) \quad \prod_{n > 1} (1 + q^n) = \sum_{n > 0} v(n)q^n.$$

Wegen

$$(1 + q)(1 + q^2) \dots = \frac{1 - q^2}{1 - q} \cdot \frac{1 - q^4}{1 - q^2} \cdot \frac{1 - q^6}{1 - q^3} \dots = \frac{1}{1 - q} \cdot \frac{1}{1 - q^3} \dots$$

folgt nun sofort das überraschende

**Korollar 1.3.** Es gilt  $u(n) = v(n)$ .

Nachdem wir Reihen-Entwicklungen für  $\prod_{n > 1} (1 - q^n)^{-1}$  und  $\prod_{n > 1} (1 + q^n)$  kennen, betrachten wir nun  $\prod_{n > 1} (1 - q^n)$ . Man berechnet elementar

$$(1.5) \quad \prod_{n > 1} (1 - q^n) = 1 - q - q^2 + q^5 + q^7 - q^{12} - q^{15} + q^{22} + q^{26} - \dots$$

An diesem Entwicklungs-Beginn läßt sich das allgemeine Bildungsgesetz der Reihen nicht ohne weiteres ablesen, und Euler, der sich dafür interessierte, hat wohl mehr Terme berechnet, bis er in einem vom 10. November 1742 datierten Brief an N. Bernoulli das folgende Resultat angab:

**Satz 1.4** (siehe z. B. [3] Satz 14.3). Für  $|q| < 1$  gilt

$$(1.6) \quad \prod_{n > 1} (1 - q^n) = 1 + \sum_{n > 1} (-1)^n (q^{(3n^2-n)/2} + q^{(3n^2+n)/2})$$

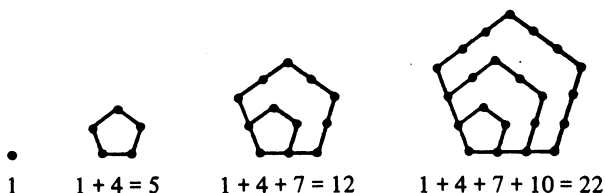
Auf die Beweise dieses Satzes werden wir weiter unten eingehen. Hier soll zunächst einmal das Ergebnis betrachtet und interpretiert werden. Wir haben es offenbar mit folgenden beiden Reihen zu tun

$$\sum_{n > 1} (-1)^n q^{\omega(n)} \quad \text{und} \quad \sum_{n > 1} (-1)^n q^{\omega(-n)},$$

wobei wir die Abkürzung

$$\omega(n) = \frac{1}{2}(3n^2 - n)$$

verwendeten. Es ist nun bemerkenswert, daß die Folge der Zahlen  $(\omega(n); n \geq 1) = (1, 5, 12, 22, 35, \dots)$  bereits den alten Griechen bekannt war ([12] Seite 1). Nach Pythagoras erhält man nämlich die Zahlen  $\omega(n)$ , indem man regelmäßige Fünfecke, deren Kantenlänge jeweils um eine Längeneinheit zunimmt, untereinanderlegt und die Längen der sichtbaren Seiten zählt:



Wegen dieses Konstruktionsprinzips nennt man die Zahlen  $\omega(n)$  und  $\omega(-n)$  *Pentagonal-Zahlen*, und diese Bezeichnung gab dann auch Satz 1.4 den Namen *Pentagonal-Zahlen-Satz*.

Eulers Interesse am Pentagonal-Zahlen-Satz läßt sich vielleicht so erklären: Er kannte bereits (1.2), also

$$\left[ \prod_{n > 1} (1 - q^n) \right]^{-1} = \sum_{n > 0} p(n)q^n,$$

und ihm war klar, daß eine Reihen-Entwicklung

$$\prod_{n > 1} (1 - q^n) = \sum_{n > 0} r(n)q^n$$

wegen  $1 = \left( \sum_{n > 1} p(n)q^n \right) \left( \sum_{n > 0} r(n)q^n \right)$

durch Koeffizienten-Vergleich Aussagen über die Partitionsfunktion nach sich ziehen könnte. Tatsächlich erhielt er auf die eben beschriebene Weise eine Rekursions-Formel für  $p(n)$ :

**Korollar 1.5** (siehe z. B. [3] Satz 14.4). *Definiert man  $p(n) = 0$  für  $n < 0$ , so gilt*

$$(1.7) \quad p(n) = p(n - 1) + p(n - 2) - p(n - 5) - p(n - 7) + \dots = \sum_{k > 1} (-1)^k \{ p(n - \omega(k)) + p(n - \omega(-k)) \}.$$

Diese Formel war für lange Zeit die beste Möglichkeit,  $p(n)$  für große  $n$  zu berechnen. Noch 1918 wurde sie von MacMahon benutzt, um den oben angegebenen Wert von  $p(200)$  zu bestimmen. Er wollte damit eine neue und bessere Formel für  $p(n)$  bestätigen, die in jenem Jahr von Hardy und Ramanujan mit Hilfe der Methode der Farey-dissection bewiesen wurde ([20]):

$$(1.8) \quad p(n) = \frac{1}{2\pi\sqrt{2}} \sum_{k=1}^{\alpha\sqrt{n}} A_k(n) \sqrt{k} \frac{d}{dn} \left\{ \lambda_n^{-1} \exp \left( \frac{1}{k} C \lambda_n \right) \right\} + O(n^{-1/4}),$$

wobei  $\alpha$  eine beliebige von  $n$  unabhängige positive Zahl,  $\lambda_n = \sqrt{n - \frac{1}{24}}$ ,

$C = \pi \sqrt{\frac{2}{3}}$  und

$$(1.9) \quad A_k(n) = \sum \omega_{h,k} \exp \left( -2\pi i \frac{nh}{k} \right)$$

gilt; in (1.9) ist  $\omega_{h,k}$  eine wohlbestimmte 24. Einheitswurzel, deren Auftauchen durch die Theorie der Modulfunktionen „erklärt“ wird (vgl. [52] § 1). Zur Formel (1.8) ist zu bemerken, daß der Haupt-Term der Summe der Summand für  $k = 1$  ist, welcher dieselbe Asymptotik wie  $p(n)$  hat – siehe (1.1). Die Bedeutung dieser Formel liegt darin, daß sie nicht nur das asymptotische Verhalten von  $p(n)$

beschreibt, sondern  $p(n)$  genau bestimmt, sofern  $O(n^{-1/4}) < \frac{1}{2}$ , d. h. sofern  $n$  genügend groß ist (leider war die Konstante in  $O(n^{-1/4})$  nicht bekannt). Durch eine Verfeinerung der Farey-dissection bewies Rademacher im Jahr 1937, daß sich durch eine ähnlich gebaute Formel  $p(n)$  sogar genau darstellen läßt ([55]):

$$(1.10) \quad p(n) = \frac{1}{\pi\sqrt{2}} \sum_{k \geq 1} A_k(n) \sqrt{k} \frac{d}{dn} \left\{ \lambda_n^{-1} \sinh \left( \frac{1}{k} C \lambda_n \right) \right\},$$

wobei  $A_k(n)$ ,  $\lambda_n$  und  $C$  die oben definierten Werte annehmen. (Ein Beweis dieser Formel findet sich z. B. auch in [4] Chapter 5.) Eine genaue Untersuchung der  $A_k(n)$  ermöglichte es dann Lehmer, mit dieser Formel  $p(14.031)$  zu bestimmen und damit die von Ramanujan geäußerte Vermutung

$$p(14.031) \equiv 0 \pmod{11^4}$$

zu bestätigen ([33]). Formeln vom Typ (1.10) für allgemeinere Partitionenprobleme wurden später von Petersson im Rahmen der Theorie von Modulfunktionen bewiesen ([53]). Andere Entwicklungen der Theorie der Partitionen finden sich z. B. in [2].

Nach diesem Exkurs über  $p(n)$  wollen wir zum Eulerschen Pentagonal-Zahlen-Satz zurückkehren und einige Anmerkungen zu den existierenden Beweisen machen. Wie gesagt, Euler hat diesen Satz 1742 in einem Brief an N. Bernoulli angegeben. Einen Beweis dafür – eine trickreiche Induktion – hat er erst später gefunden. Er ist z. B. in [56] § 98 nachzulesen. Ein bemerkenswerter kombinatorischer Beweis, welcher die graphische Darstellung von Partitionen durch Gitterpunkte benutzt, wurde 1881 von Franklin gefunden ([15], dargestellt z. B. in [3] 14.5). Einen weiteren Beweis hat 1951 Shanks angegeben ([58], dargestellt in [3] 14.4). Der „richtige“ Beweis jedoch verläuft wohl so, daß man (1.6) als Spezialfall einer viel allgemeineren Formel auffaßt, welche 1829 von Jacobi in seiner berühmten „Fundamenta nova theoriae functionum ellipticarum“ bewiesen wurde ([22] S. 234). Es ist dies die sogenannte *Jacobische Tripelprodukt-Identität*, welche im folgenden Satz ausgedrückt ist:

**Satz 1.6.** Für komplexe Zahlen  $q, z$  mit  $|q| < 1$  und  $z \neq 0$  gilt

$$(1.11) \quad \prod_{n \geq 1} (1 - q^{2n})(1 + q^{2n-1}z)(1 + q^{2n-1}z^{-1}) = \sum_{n \in \mathbb{Z}} q^{n^2} z^n$$

Wir skizzieren den sehr schönen Beweis, der in [56] 78 wiedergegeben ist: Man bemerkt zunächst, daß die rechte Seite von (1.11) die bekannte Theta-Funktion  $\vartheta_3(z; q)$  ist. Ihre Nullstellen, die sich wegen der Gültigkeit der Theta-Transformationsformel leicht berechnen lassen, sind  $-q^{2n-1}$ ,  $n \in \mathbb{Z}$ . Genau dieselben Nullstellen hat nach Konstruktion die in  $\mathbb{C}^*$  holomorphe Funktion

$$F(z) = \prod_{n \geq 1} (1 + q^{2n-1}z)(1 + q^{2n-1}z^{-1}).$$

Mit  $z = \exp(2\pi iv)$  und  $f(v) := F(z)$  folgt deshalb, daß der Quotient  $\vartheta_3(v; q)/f(v)$  eine ganze Funktion (in  $v$ ) ist. Nun stellt man aber außerdem fest, daß der Quotient elliptisch und daher eine Konstante ist, d. h. unabhängig von  $v$ . Man kann also  $\vartheta_3$  auf folgende Weise darstellen:

$$\vartheta_3(z; q) := \sum_{n \in \mathbf{Z}} q^{n^2} z^n = T(q) \prod_{n > 1} (1 + q^{2n-1}z)(1 + q^{2n-1}z^{-1}).$$

Es ist nun nur noch für

$$G(q) = T(q) / \prod_{n > 1} (1 - q^{2n})$$

die Gleichung  $G(q) \equiv 1$  zu beweisen. Wegen  $G(0) = 1$  folgt dies, indem man zeigt, daß  $G(q) = G(q^4) = G(q^{16}) = \dots = G(q^r)$ ,  $r = 4^k$ , gilt.  $\square$

Einen weiteren Beweis für Satz 1.6 sowie Verallgemeinerungen findet der Leser in [2] Chap. 2. Auf eine ganz andere Beweismethode gehen wir weiter unten ein. Zuerst wollen wir jedoch angeben, wie man aus der Jacobischen Tripelprodukt-Identität den Eulerschen Pentagonal-Zahlen-Satz erhält, denn dies war ja unsere Motivation für diese Identität: Für eine natürliche Zahl  $m$  substituieren wir dazu in (1.11)  $q^{1/2(m+1)}$  für  $q$  und  $-q^{1/2(1-m)}$  für  $z$  und erhalten unmittelbar das

**Korollar 1.7** (siehe auch [2] Chapter 2). Für  $|q| < 1$  und  $m \in \mathbf{N}$  gilt

$$(1.12) \quad \prod_{n > 1} (1 - q^{n(m+1)})(1 - q^{n(m+1)-m})(1 - q^{n(m+1)-1}) = \sum_{n \in \mathbf{Z}} (-1)^n q^{n(n(m+1)-m+1)/2}$$

Für  $m = 2$  geht (1.12) in die Formel (1.6) des Eulerschen Pentagonal-Zahlen-Satzes über, und für  $m = 1$  folgt

$$(1.13) \quad \frac{\varphi(q)^2}{\varphi(q^2)} = \sum_{n \in \mathbf{Z}} (-1)^n q^{n^2}$$

mit

$$(1.14) \quad \varphi(q) = \prod_{n > 1} (1 - q^n)$$

Die Identität (1.13) wird Gauß zugeschrieben ([2] Corollary 2.10).

Wir kommen nun zur zweiten Beweismethode für Satz 1.6. Dazu bemerken wir, daß die Voraussetzung  $|q| < 1$  nur dazu dient, die Konvergenz des unendlichen Produktes bzw. der unendlichen Reihe zu garantieren. Die wesentliche Aussage ist jedoch die rein algebraische Identität (1.11) – hat man einmal diese bewiesen, so kann man sich danach leicht überlegen, in welchen Bereichen die linke und die rechte Seite konvergieren. Dies führt einen dazu, (1.11) als Identität im formalen Potenzreihenring in der Unbestimmten  $q$  über dem Ring  $\mathbf{Z}[q, z^{-1}]$  aufzufassen. In diesem Rahmen wird (1.11) in [56] 100 bewiesen. (Es sei ganz kurz an die Definition eines unendlichen Produktes im Potenzreihenring  $\mathbf{R}[[q]]$  über dem Ring  $\mathbf{R}$  erinnert: in  $\mathbf{R}[[q]]$  kann ein unendliches Produkt  $\prod_{i > 1} P_i$  von Potenzreihen  $P_i$  nur gebildet werden, falls

$$P_i = 1 + a_{n_i}^{(i)} q^{n_i} + \text{höhere Terme}$$

und  $n_i \rightarrow \infty$  für  $i \rightarrow \infty$ . In diesem Fall gilt  $\prod_{i > 1} P_i = P$ , wenn für jedes  $n \in \mathbb{N}$  die Kongruenz  $\prod_{i > 1} P_i \equiv P \pmod{q^n}$  erfüllt ist.)

Für die weitere Entwicklung ist nun eine zu (1.11) äquivalente Formel günstiger. Setzt man nämlich dort  $q = \sqrt{uv}$ ,  $z = -\sqrt{\frac{u}{v}}$ , so folgt

**Satz 1.8** ([56] 100). *Im formalen Potenzreihenring  $\mathbb{Z}[[u, v]]$  gilt*

$$(1.15) \quad \prod_{n > 1} (1 - u^n v^n)(1 - u^{n-1} v^n)(1 - u^n v^{n-1}) = \sum_{n \in \mathbb{Z}} (-1)^n u^{n(n+1)/2} v^{n(n-1)/2}.$$

Wir wollen noch eine weitere Folgerung aus der Jacobischen Tripelprodukt-Identität ziehen – eine Identität für die Dedekindsche  $\eta$ -Funktion

$$(1.16) \quad \eta(q) := q^{1/24} \varphi(q) = q^{1/24} \prod_{n > 1} (1 - q^n).$$

Diese Identität wird Jacobi zugeschrieben (siehe [54] (2.20)).

**Korollar 1.9.** *Es gelten die Identitäten*

$$(1.17) \quad \varphi(q)^3 = \sum_{n > 0} (-1)^n (2n + 1) q^{n(n+1)/2},$$

$$(1.18) \quad \eta(q)^3 = \sum_{\substack{n \in \mathbb{Z} \\ n \equiv 1(4)}} n q^{n^2/8}.$$

Im Hinblick auf spätere Verallgemeinerungen geben wir einen *Beweis*, der von (1.15) ausgeht, d. h., wir sehen (1.17) bzw. (1.18) als Identität in  $\mathbb{Z}[[q]]$  bzw.  $\mathbb{Z}[[q^{1/24}]]$  an.

1. **Schritt:** Wir dividieren (1.15) durch  $1 - v$  und erhalten

$$\begin{aligned} & \prod_{n > 1} (1 - u^n v^n)(1 - u^n v^{n+1})(1 - u^n v^{n-1}) \\ &= 1 + \sum_{n > 1} (-1)^n u^{n(n+1)/2} v^{n(n-1)/2} A(v) \end{aligned}$$

mit  $A(v) = \frac{1}{1-v} (1 - v^{2n+1}) = \sum_{k=0}^{2n} v^k.$

2. **Schritt:** In dieser Identität spezialisieren wir  $u \rightarrow q$ ,  $v \rightarrow 1$  und erhalten unmittelbar (1.17). (Man beachte, daß diese Spezialisierung in (1.15) nicht möglich ist, sondern erst nachdem wir durch  $1 - v$  dividiert haben.)

3. **Schritt:** Um von  $\varphi(q)^3$  zu  $\eta(q)^3$  zu kommen, multiplizieren wir (1.17) mit  $q^{1/8}$ . Dies ergibt

$$\begin{aligned} \eta(q)^3 &= \sum_{n > 0} (-1)^n (2n + 1) q^{(2n+1)^2/8} \\ &= \sum_{n > 1, n \equiv 1(4)} n q^{n^2/8} - \sum_{n > 1, n \equiv 3(4)} n q^{n^2/8} = \sum_{n \in \mathbb{Z}, n \equiv 1(4)} n q^{n^2/8} \quad \square \end{aligned}$$



### § 2 Interpretation der Jacobischen Tripelprodukt-Identität im Rahmen von affinen Lie-Algebren

Wir zeigen, wie sich die Jacobische Tripelprodukt-Identität mit Hilfe der einfachsten affinen Lie-Algebra interpretieren läßt. Wir exemplifizieren dabei eine allgemeine Theorie, die in unterschiedlicher Allgemeinheit und mit oder ohne Beweis in [25], [34], [40] und [50] dargestellt wird – siehe auch [61].

Bekanntlich versteht man unter einer *Lie-Algebra* einen Vektorraum  $V$  über einem Körper  $K$  zusammen mit einem Produkt, also einer bilinearen Abbildung

$$[.,.] : V \times V \rightarrow V : (x, y) \rightarrow [xy] =: (\text{ad } x)(y),$$

welche die beiden Identitäten

(2.1)  $[xy] = -[yx]$  (Antikommutativität)

(2.2)  $[[xy]z] + [[yz]x] + [[zx]y] = 0$  (Jacobi-Identität)

für alle  $x, y, z \in V$  erfüllt. Bei uns wird immer  $K = \mathbf{C}$  gelten.

In diesem Paragraphen starten wir mit

$$g := \mathfrak{sl}(2, \mathbf{C}) := \left\{ \begin{pmatrix} a & b \\ c & -a \end{pmatrix}; a, b, c \in \mathbf{C} \right\}.$$

Dieser 3-dimensionale  $\mathbf{C}$ -Vektorraum ist zusammen mit dem üblichen Kommutator-Produkt  $[xy] = xy - yx$  eine Lie-Algebra. Man überlegt sich leicht, daß  $\mathfrak{sl}(2, \mathbf{C})$  im folgenden Sinne *einfach* ist: Ist  $I \subset g$  ein Teilraum mit  $[Ig] \subset I$ , so folgt  $I = 0$  oder  $I = g$ . Eine Tabelle aller einfachen endlich-dimensionalen Lie-Algebren über  $\mathbf{C}$  werden wir im nächsten Paragraphen angeben. In der Theorie einfacher endlich-dimensionaler Lie-Algebren über  $\mathbf{C}$  (siehe z. B. [6], [21] oder [23]) zeigt man die Existenz von „ausgezeichneten“ Zerlegungen, den sogenannten Wurzelraum-Zerlegungen. Um eine solche Zerlegung für  $\mathfrak{sl}(2, \mathbf{C})$  zu konstruieren, definieren wir

$$h_1 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}, \quad e_+ = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad e_- = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Man verifiziert dann die Relationen

$$[h_1 e_+] = 2e_+, \quad [h_1 e_-] = -2e_-, \quad [e_+, e_-] = h_1.$$

(Die Basis  $(h_1, e_+, e_-)$  ist ein Beispiel für eine sogenannte Chevalley-Basis.) Wir setzen

$$h = \mathbf{C}h_1, \quad g_+ = \mathbf{C}e_+, \quad g_- = \mathbf{C}e_-.$$

Eine *Wurzelraum-Zerlegung* ist dann

$$g = h \oplus g_+ \oplus g_-.$$

Sie ist in unserem Beispiel durch folgende, offensichtlich gültige Eigenschaften charakterisiert:

(2.3) Für jedes  $h \in h$  ist die Linksmultiplikation  $\text{ad } h$  ein halbeinfacher Endomorphismus von  $g$ .

(2.4) Die Teilräume  $g_e$  sind die gemeinsamen Eigenräume der  $h \in h$ .

Ausgehend von  $g = \mathfrak{sl}(2, \mathbf{C})$  konstruieren wir nun eine weitere Lie-Algebra. Dazu beachten wir zunächst, daß die  $2 \times 2$ -Matrizen mit Spur Null auch dann eine komplexe Lie-Algebra bilden, wenn die Koeffizienten der Matrizen nicht in  $\mathbf{C}$ , sondern in einer assoziativen Algebra über  $\mathbf{C}$  liegen. Wir wählen hier die Algebra der komplexen Laurent-Polynome  $\mathbf{C}[t, t^{-1}]$  in der Variablen  $t$ , betrachten also

$$\mathfrak{sl}(2, \mathbf{C}[t, t^{-1}]) = \mathbf{C}[t, t^{-1}] \otimes g.$$

Im zweiten Schritt addieren wir zu  $\mathfrak{sl}(2, \mathbf{C}[t, t^{-1}])$  eine Dimension

$$\hat{g} := (\mathbf{C}[t, t^{-1}] \otimes g) \oplus \mathbf{C}z$$

und definieren auf  $\hat{g}$  eine Lie-Algebra durch

$$(2.5) \quad [t^m \otimes x, t^n \otimes y] = (t^{m+n} \otimes [xy]) \oplus m\delta_{m,-n} \text{ Spur}(xy)z$$

für  $x, y \in g$  und

$$(2.6) \quad [z, \hat{g}] = [\hat{g}, z] = 0.$$

( $\hat{g}$  ist ein Beispiel einer sogenannten zentralen Erweiterung von  $\mathbf{C}[t, t^{-1}] \otimes g$ ; die Bedingung (2.6) besagt, daß  $z$  „zentral“ ist. Tatsächlich ist  $\mathbf{C}z$  das Zentrum von  $\hat{g}$ .) Im dritten Schritt addieren wir nochmals eine Dimension zu  $\hat{g}$ , bilden also

$$\tilde{g} := (\mathbf{C}[t, t^{-1}] \otimes g) \oplus \mathbf{C}z \oplus \mathbf{C}d.$$

Dieser  $\mathbf{C}$ -Vektorraum wird durch (2.5), (2.6) und die folgenden beiden Definitionen (2.7) und (2.8) zu einer Lie-Algebra:

$$(2.7) \quad [d, t^m \otimes x] = mt^m \otimes x = -[t^m \otimes x, d] \quad \text{für } x \in g,$$

$$(2.8) \quad [dz] = 0 = [zd].$$

(Auf  $t^m \otimes x$  operiert also  $d$  wie der Differentialoperator  $t \frac{d}{dt}$ .) Man nennt  $\tilde{g}$  die affine Lie-Algebra (vom Typ 1) zu  $g = \mathfrak{sl}(2, \mathbf{C})$ .

Analog zum endlich-dimensionalen Fall werden wir jetzt  $\tilde{g}$  bezüglich einer geeigneten Familie halbeinfacher Endomorphismen zerlegen. Wir identifizieren  $g$  mit  $1 \otimes g$  und setzen

$$\tilde{h} := h \oplus \mathbf{C}z \oplus \mathbf{C}d.$$

Mit (2.3), (2.5)–(2.8) folgt sofort:  $\{\text{ad } \tilde{h}; \tilde{h} \in \tilde{h}\}$  ist eine Familie halbeinfacher Endomorphismen, welche paarweise kommutieren. Zur Beschreibung der simultanen Eigenraum-Zerlegung definieren wir für  $\alpha \in \tilde{h}^*$

$$\tilde{g}_\alpha := \{\tilde{x} \in \tilde{g}; [\tilde{h}, \tilde{x}] = \alpha(\tilde{h})\tilde{x} \text{ für alle } \tilde{h} \in \tilde{h}\}$$

und nennen  $\tilde{g}_\alpha$  einen Wurzelraum und  $\alpha$  eine Wurzel, falls  $\tilde{g}_\alpha \neq 0$ . Weiter seien  $\alpha_i \in \tilde{h}^*$  definiert durch

$$\begin{aligned} \alpha_0(h_1) &= -2, & \alpha_0(z) &= 0, & \alpha_0(d) &= 1, \\ \alpha_1(h_1) &= 2, & \alpha_1(z) &= 0, & \alpha_1(d) &= 0. \end{aligned}$$

Dann folgt leicht

**Lemma 2.1.** *Die Wurzelräume von  $\tilde{g}$  sind*

$$\begin{aligned} t^n \otimes g_\epsilon &= \tilde{g}_{n\alpha_0 + (n+\epsilon)\alpha_1}, & \epsilon &= \pm 1, n \in \mathbf{Z}, \\ t^n \otimes h &= \tilde{g}_{n(\alpha_0 + \alpha_1)}, & n &\in \mathbf{Z} - \{0\}. \end{aligned}$$

*Insbesondere gilt*

$$\tilde{g} = \tilde{h} \oplus \sum_{\alpha \in \tilde{R}} \tilde{g}_\alpha$$

mit  $\tilde{R} = \{n\alpha_0 + (n + \epsilon)\alpha_1; n \in \mathbf{Z}, \epsilon = \pm 1\} \cup \{n(\alpha_0 + \alpha_1); n \in \mathbf{Z} \setminus \{0\}\}$ .

Man nennt  $\tilde{R}$  das *Wurzelsystem von  $\tilde{g}$  bezüglich  $\tilde{h}$* . Es läßt folgende Struktur erkennen:

Jede Wurzel  $\alpha \in \tilde{R}$  ist eine ganzzahlige Linearkombination der beiden  
(2.9) Wurzeln  $\alpha_0$  und  $\alpha_1$ , wobei entweder alle Koeffizienten nicht-negativ oder alle nicht-positiv sind.

D. h., definieren wir die *positiven Wurzeln* als

$$(2.10) \quad \tilde{R}_+ = \{n(\alpha_0 + \alpha_1), (n - 1)\alpha_0 + n\alpha_1, n\alpha_0 + (n - 1)\alpha_1; n \in \mathbf{N}\},$$

so gilt  $\tilde{R} = \tilde{R}_+ \dot{\cup} -\tilde{R}_+$ .

Wir betrachten nun den formalen Potenzreihenring  $\mathbf{Z}[[u, v]]$  und führen die Abkürzung

$$e^{-(r\alpha_0 + s\alpha_1)} = u^r v^s \quad (r, s \in \mathbf{N})$$

ein. Dann erhält man unmittelbar aus (2.10) folgende Gleichung in  $\mathbf{Z}[[u, v]]$ :

$$(2.11) \quad \prod_{\alpha \in \tilde{R}} (1 - e^{-\alpha}) = \prod_{n \geq 1} (1 - u^n v^n)(1 - u^{n-1} v^n)(1 - u^n v^{n-1}).$$

Damit haben wir die Produktseite der Jacobischen Tripelprodukt-Identität in der Form (1.15) im Rahmen affiner Lie-Algebren beschrieben!! Es ist klar, daß man jetzt versucht, auch die in (1.15) vorkommende Summe mit affinen Lie-Algebren zu beschreiben. Dies geht so: Wir definieren

$$h_0 = -h_1 + z \in \tilde{g}.$$

Dann gilt  $\alpha_i(h_i) = 2$  für  $i = 0, 1$ , und wir können deshalb Spiegelungen  $r_i$  auf  $\tilde{h}^*$  definieren (d. h.  $r_i \in GL(\tilde{h}^*)$  mit  $r_i^2 = Id$ ), nämlich

$$r_i(\mu) := \mu - \mu(h_i)\alpha_i, \quad i = 0, 1.$$

Die von den beiden Spiegelungen  $r_0, r_1$  erzeugte Gruppe  $\tilde{W}$  in  $GL(\tilde{h}^*)$  heißt die Weyl-Gruppe von  $(\tilde{g}, \tilde{h})$ . Es gilt

$$\tilde{W} = \{(r_0 r_1)^n; n \in \mathbf{Z}\} \cup \{r_0 (r_0 r_1)^n; n \in \mathbf{Z}\} \cong \mathbf{Z}_2 \ltimes \mathbf{Z}.$$

( $\tilde{W}$  ist also zur unendlichen Dieder-Gruppe isomorph – siehe [5] Ch. IV, § 1.2.) Außerdem definieren wir  $\rho \in \tilde{h}^*$  durch

$$\rho(h_i) = 1, \quad \rho(d) = 0.$$

Man beweist dann durch Induktion für  $n \in \mathbf{N} \cup \{0\}$

$$\begin{aligned}(\mathbf{r}_0 \mathbf{r}_1)^n \rho &= \rho - n(2n+1)\alpha_0 - n(2n-1)\alpha_1, \\ \mathbf{r}_0(\mathbf{r}_0 \mathbf{r}_1)^n \rho &= \rho - (n-1)(2n-1)\alpha_0 - n(2n-1)\alpha_1, \\ (\mathbf{r}_0 \mathbf{r}_1)^{-n} \rho &= \rho - n(2n-1)\alpha_0 - n(2n+1)\alpha_1, \\ \mathbf{r}_0(\mathbf{r}_0 \mathbf{r}_1)^{-n} \rho &= \rho - n(2n-1)\alpha_0 - (n-1)(2n-1)\alpha_1.\end{aligned}$$

Diese Formeln ergeben folgende Gleichung in  $\mathbf{Z}[[u, v]]$ :

$$(2.12) \quad \sum_{w \in \bar{W}} (\det w) e(w\rho - \rho) = \sum_{n \in \mathbf{Z}} (-1)^n u^{n(n+1)/2} v^{n(n-1)/2}.$$

Damit ist auch die Summen-Seite von (1.15) mit affinen Lie-Algebren beschrieben! Die Jacobische Tripelprodukt-Identität nimmt also in der Sprache affiner Lie-Algebren folgende Gestalt an:

**Satz 2.2.** *Mit den oben definierten Bezeichnungen gilt in  $\mathbf{Z}[[e(-\alpha_0), e(-\alpha_1)]]$*

$$(2.13) \quad \prod_{\alpha \in \mathbf{R}_+} (1 - e(-\alpha)) = \sum_{w \in \bar{W}} (\det w) e(w\rho - \rho).$$

Führt man sich noch einmal vor Augen, daß wir in § 1 diese Identität mit Hilfe elliptischer Funktionen und Theta-Reihen bewiesen haben, so ist dieser Satz wirklich ein überraschendes Ergebnis. Aber nicht nur dies, er hat auch weitreichende Folgen: Für jeden, der die Theorie halbeinfacher endlich-dimensionaler Lie-Algebren über  $\mathbf{C}$  kennt, ist klar, daß sich die in diesem Paragraphen für  $\mathfrak{g} = \mathfrak{sl}(2, \mathbf{C})$  beschriebene Theorie für jedes halbeinfache  $\mathfrak{g}$  mit  $\dim_{\mathbf{C}} \mathfrak{g} < \infty$  entwickeln läßt. Auf diese Weise wird man zu einer natürlichen Verallgemeinerung der Jacobischen Tripelprodukt-Identität geführt! Wie diese aussieht, beschreiben wir im nächsten Paragraphen.

### § 3 Die Weylsche Nenner-Formel für affine Lie-Algebren vom Typ 1 und Macdonalds $\eta$ -Identitäten

Wir verallgemeinern die in § 2 dargestellte Theorie, indem wir statt mit  $\mathfrak{sl}(2, \mathbf{C})$  mit einer einfachen endlich-dimensionalen Lie-Algebra über  $\mathbf{C}$  beginnen. Die Identität (2.13), also die Jacobische Tripelprodukt-Identität, erweist sich dann als Spezialfall einer Formel, die analog zur Weylschen Nenner-Formel aus der Darstellungstheorie endlich-dimensionaler Lie-Algebren gebildet ist. Aus dieser Identität leiten sich die Macdonaldschen  $\eta$ -Identitäten ab, die am Ende des Paragraphen durch einige Beispiele illustriert werden.

Für die im folgenden nicht erläuterten Begriffe aus der Theorie der Lie-Algebren verweisen wir auf [6], [21] und [23].

Im folgenden sei

- $\mathfrak{g}$  eine einfache endlich-dimensionale Lie-Algebra über  $\mathbf{C}$ ,
- $\mathfrak{h}$  eine Cartan-Unteralgebra von  $\mathfrak{g}$ ,
- $R$  das Wurzelsystem zu  $(\mathfrak{g}, \mathfrak{h})$ ,
- $\mathfrak{g}_\alpha$  der Wurzelraum zu  $\alpha \in R$ ,
- $(\alpha_1, \dots, \alpha_\ell)$  eine Basis von  $R$ ,

$R_+$  die Menge der positiven Wurzeln von  $R$  bezüglich  $(\alpha_1, \dots, \alpha_\ell)$ ,  
 $\theta$  die größte Wurzel von  $R$  bezüglich  $(\alpha_1, \dots, \alpha_\ell)$ ,  
 $(\cdot, \cdot)$  eine invariante symmetrische nichtausgeartete Bilinearform mit  
 $(\theta, \theta) = 2$  (also ein geeignetes Vielfaches der Killing-Form),  
 $W$  die Weyl-Gruppe von  $(g, h)$ .

Wie in § 2 bilden wir

$$\tilde{g} := (\mathbf{C}[t, t^{-1}] \otimes g) \oplus \mathbf{C}z \oplus \mathbf{C}d$$

und definieren auf  $\tilde{g}$  ein antikommutatives Produkt durch (3.1)–(3.3) (man beachte, daß wir nur die in (2.5) vorkommende Spur zu verallgemeinern haben, wozu wir  $(\cdot, \cdot)$  verwenden):

$$(3.1) \quad [t^m \otimes x, t^n \otimes y] = (t^{m+n} \otimes [xy]) \otimes m\delta_{m,-n}(x, y)z \quad \text{für } x, y \in g,$$

$$(3.2) \quad [z, \tilde{g}] = 0,$$

$$(3.3) \quad [d, t^m \otimes x] = mt^m \otimes x.$$

Mit diesem Produkt wird  $\tilde{g}$  zu einer Lie-Algebra über  $\mathbf{C}$ , sie heißt die *affine Lie-Algebra (vom Typ 1)* zu  $g$ .

**(Wir werden im folgenden nur solche affine Lie-Algebren betrachten. Fs**

gibt jedoch auch noch Typ 2 und Typ 3, falls  $g$  einen Diagramm-Automorphismus der Ordnung 2 bzw. 3 besitzt. Für Details sei auf [40] Seite 133 verwiesen. Diese 3 Typen bilden zusammen die Klasse der affinen oder Euklidischen Lie-Algebren. Eine Verallgemeinerung davon ist die Klasse der Kac-Moody-Lie-Algebren, welche zu verallgemeinerten Cartan-Matrizen definiert werden.)

Wie in § 2 definieren wir

$$\begin{aligned} \tilde{h} &:= h \oplus \mathbf{C}z \oplus \mathbf{C}d, \\ \tilde{g}_\alpha &= \{\tilde{x} \in \tilde{g}; [\tilde{h}, \tilde{x}] = \alpha(\tilde{h})\tilde{x} \text{ für alle } \tilde{h} \in \tilde{h}\}, \quad \alpha \in \tilde{h}^*, \\ \tilde{R} &= \{\alpha \in \tilde{h}^*; g_\alpha \neq 0\} \quad (\text{„Wurzeln“}). \end{aligned}$$

Man beachte, daß im allgemeinen Fall  $\dim h = \ell$  gilt.

Zur Beschreibung der Wurzelräume setzen wir jedes  $\alpha \in R \subset h^*$  durch  $\alpha(z) = 0 = \alpha(d)$  zu einer Linearform auf  $h$  fort. Außerdem sei  $\alpha_0 \in h^*$  durch

$$\alpha_0|_h = -\theta, \quad \alpha_0(z) = 0, \quad \alpha_0(d) = 1$$

definiert. Dann gilt folgende Verallgemeinerung von Lemma 2.1:

**Lemma 3.1.**  $\tilde{g}$  hat genau folgende Wurzelräume

$$\begin{aligned} t^n \otimes g_\alpha &= \tilde{g}_{n\alpha_0 + n\theta + \alpha}, \quad n \in \mathbf{Z}, \alpha \in R, \\ t^n \otimes h &= \tilde{g}_{n\alpha_0 + n\theta}, \quad n \in \mathbf{Z} \setminus \{0\}. \end{aligned}$$

Inbesondere folgt

$$\tilde{g} = \tilde{h} \oplus \sum_{\alpha \in \tilde{R}} \tilde{g}_\alpha.$$

An diesem Lemma liest man ab, daß im allgemeinen – ganz im Gegensatz zum Beispiel aus § 2 – die Wurzelräume  $\tilde{g}_\alpha$  nicht notwendig eindimensional sind.

(Dies wird zu einer Änderung der Produkt-Seite der Identität (2.13) führen!)  
 Wir benötigen daher zusätzlich den Begriff

$$m(\alpha) := \dim \tilde{g}_\alpha \quad \text{für } \alpha \in \tilde{R}. \quad (,Multiplizität von \alpha“.)$$

Die Struktur von  $\tilde{R}$  ist genauso wie in § 2:

**Korollar 3.2.** *Es gilt  $\tilde{R} = \tilde{R}_+ \dot{\cup} (-\tilde{R}_+)$  mit*

$$\tilde{R}_+ = \{n(\alpha_0 + \theta), n(\alpha_0 + \theta) - \alpha, (n - 1)(\alpha_0 + \theta) + \alpha; n \in \mathbb{N}, \alpha \in R_+\}.$$

Jedes  $\alpha \in \tilde{R}_+$  ist eine Linearkombination von  $(\alpha_0, \alpha_1, \dots, \alpha_\ell)$  mit nicht-negativen ganzen Koeffizienten.

Um die rechte Seite von (2.13) hinschreiben zu können, brauchen wir noch die Weyl-Gruppe  $\tilde{W}$  und die Linearform  $\rho$ . Zunächst definieren wir das zu  $R$  duale Wurzelsystem  $\{H_\alpha; \alpha \in R\}$  durch  $\beta(H_\alpha) = 2(\beta, \alpha)/(\alpha, \alpha)$  für alle  $\beta \in R$ , speziell ist dann  $(h_1, \dots, h_\ell)$  mit  $h_i = H_{\alpha_i}$  eine Basis des zu  $R$  dualen Wurzelsystems. Weiter sei  $h_0 := z - H_\theta$ . Wie in § 2 gilt wieder  $\alpha_i(h_i) = 2$  für  $0 \leq i \leq \ell$ , so daß durch

$$r_i(\mu) := \mu - \mu(h_i)\alpha_i, \quad 0 \leq i \leq \ell, \quad \mu \in \tilde{h}^*$$

Spiegelungen von  $\tilde{h}^*$  definiert werden. Die von  $\{r_0, \dots, r_\ell\}$  erzeugte Gruppe  $\tilde{W}$  heißt die Weyl-Gruppe zu  $(g, h)$ . Sie kann mit der affinen Weyl-Gruppe im Sinn von [5] VI 2.1 identifiziert werden (siehe [50] § 3), insbesondere gilt

$$\tilde{W} \cong W \ltimes T,$$

wobei  $T$  ein  $\ell$ -dimensionales Gitter ist. Schließlich definieren wir  $\rho \in \tilde{h}^*$  durch

$$\rho(h_i) = 1 \quad \text{für } 0 \leq i \leq \ell, \quad \rho(d) = 0.$$

Die Verallgemeinerung von Satz 2.2 lautet nun:

**Satz 3.3.** *Im formalen Potenzreihenring  $\mathbb{Z}[[e(-\alpha_0), \dots, e(-\alpha_\ell)]]$  gilt*

$$(3.4) \quad \prod_{\alpha \in \tilde{R}_+} (1 - e(-\alpha))^{m(\alpha)} = \sum_{w \in \tilde{W}} (\det w)e(w\rho - \rho).$$

Wie in § 2 haben wir dabei die Abkürzung  $e(\alpha + \beta) = e(\alpha)e(\beta)$  verwendet. Wir weisen extra darauf hin, daß im allgemeinen Fall die Faktoren  $(1 - e(-\alpha))$  zur Potenz  $m(\alpha)$  genommen werden müssen. Im Beispiel von § 2 gilt immer  $m(\alpha) = 1$ . Die Identität (3.4) ist das Analogon der von Weyl stammenden Nennerformel aus der Darstellungstheorie endlich-dimensionaler Lie-Algebren. Sie wird daher auch als *Nenner-Formel* bezeichnet.

In der hier behandelten Allgemeinheit wurde (3.4) 1972 von Macdonald ([49] (0.3)) bewiesen – allerdings nicht in der oben beschriebenen Form. Denn Macdonald arbeitet innerhalb der Theorie affiner Wurzelsysteme (im Sinne von [5]) und ohne unendlich-dimensionale Lie-Algebren. Die Produkt-Seite von (3.4) besteht bei Macdonald aus 2 Faktoren – einem „natürlichen“ und einem „mysteriösen“. Erst Kac stellte 1974 die Formel in den wohl richtigen Rahmen der Theorie affiner Lie-Algebren ([24], siehe auch [25]). Dabei zeigte sich, daß der „natürliche“ Faktor bei Macdonald von den Wurzeln  $n\alpha_0 + n\theta + \alpha$ ,  $n \in \mathbb{Z}$ ,  $\alpha \in R$  (den sogenannten „reellen“ Wurzeln) herkommt und der „mysteriöse“

Faktor von den sogenannten „imaginären“ Wurzeln  $n\alpha_0 + n\theta$ ,  $n \in \mathbb{Z} \setminus \{0\}$ . Kac bewies (3.4) nicht nur für affine Lie-Algebren, sondern für die wesentlich allgemeineren Kac-Moody-Lie-Algebren zu symmetrisierbaren verallgemeinerten Cartan-Matrizen. Ein weiterer Beweis von (3.4) für affine Lie-Algebren stammt von Garland und Lepowsky (1975/76; [17], [19]). Er verläuft im Rahmen von Homologie-Theorie.

Erinnern wir uns zurück an § 1. Dort hatten wir aus der Jacobischen-Tripelprodukt-Identität eine Identität für  $\eta^3$  abgeleitet. Mit genau denselben Schritten läßt sich nun aus (3.4) eine Identität für  $\eta^{\dim \mathfrak{g}}$  ableiten. Zur Formulierung benötigen wir:

$$\mathfrak{g} := \frac{1}{2} (\|\theta + \rho\|^2 - \|\rho\|^2),$$

$M :=$  das von  $2g\alpha/\|\alpha\|^2$ ,  $\alpha \in R$  aufgespannte Gitter (=  $gQ(R^\vee)$ .)

**Satz 3.4** (Macdonald [49]). *In  $\mathbb{Z}[[q^{1/24}]]$  gilt*

$$(3.5) \quad \eta^{\dim \mathfrak{g}} = \sum_{\lambda \in M} \left( \prod_{\substack{\alpha \in R \\ \alpha > 0}} \frac{(\lambda + \rho, \alpha)}{(\rho, \alpha)} \right) q^{\frac{1}{2g} \|\lambda + \rho\|^2}.$$

Dies sind die sogenannten Macdonaldschen  $\eta$ -Identitäten. Für  $g = \mathfrak{sl}(2, \mathbb{C})$  gilt  $\dim \mathfrak{g} = 3$ , und (3.5) geht in (1.18) über.

Welche Zahlen für  $\dim \mathfrak{g}$  vorkommen, kann der Leser der folgenden Tabelle entnehmen (wir verwenden Standard-Bezeichnungen):

$g$	$\mathfrak{sl}(\ell + 1, \mathbb{C})$ $\ell \geq 1$	$\mathfrak{so}(2\ell + 1, \mathbb{C})$ $\ell \geq 2$	$\mathfrak{sp}(\ell, \mathbb{C})$ $\ell \geq 3$	$\mathfrak{so}(2\ell, \mathbb{C})$ $\ell \geq 4$	$E_6$	$E_7$	$E_8$	$F_4$	$G_2$
$\dim \mathfrak{g}$	$\ell(\ell + 2)$	$2\ell^2 + \ell$		$2\ell^2 - \ell$	78	133	248	52	14

Zur Illustration reproduzieren wir hier (3.5) für einige Beispiele (nach [49] Appendix):

**Beispiel 3.5.**  $g = \mathfrak{sl}(\ell + 1, \mathbb{C})$ ,  $\ell \equiv 0(2)$ : Hier erhält man

$$(3.6) \quad \eta(q)^{\ell^2 + 2\ell} = \left( \prod_{i=0}^{\ell-1} (\ell - i)! \right)^{-1} \sum_{v = (v_0, \dots, v_\ell) \in M} \left( \prod_{i < j} (v_i - v_j) \right) q^{\frac{1}{2\ell} \|v\|^2},$$

wobei für  $v$  gilt:  $v_i \in \mathbb{Z}$ ,  $v_i \equiv i \pmod{\ell + 1}$  und  $\sum v_i = 0$ .

Zwei Spezialfälle von (3.6) sind besonders interessant:

$\ell = 2$ : Hier erhält man eine Formel für  $\eta^8$ , wofür mit anderen Methoden Hecke folgende Formel bewiesen hat

$$\eta^8 = \sum_{\substack{m_1, m_2 \in \mathbb{Z} \\ m_1 - m_2 \equiv 1(3)}} \left( \frac{1}{3} m_1^3 + \frac{1}{2} m_1 m_2 (m_1 - m_2) + \frac{1}{2} m_2^3 \right) q^{\frac{1}{3} (m_1^2 + m_1 m_2 + m_2^2)}.$$

$\ell = 4$ : Hier erhält man eine neue Formel für

$$\eta(q)^{24} = \Delta(q) = \sum_{n > 1} \tau(n)q^n,$$

wobei  $\tau(n)$  die Ramanujan-Zahlen sind.

**Beispiel 3.6.** Für  $g = E_8$  spezialisiert sich (3.5) zu der Formel

$$\eta(q)^{248} = \text{const} \sum_{\substack{u \in \mathbb{Z}, \\ v \in \mathbb{Z}^8}} \prod_{i < j} (v_i - v_j) \prod_{i < j < k} (u + v_i + v_j + v_k) q^{\frac{1}{60}(\|v\|^2 - u^2)}$$

mit der Summationsbedingung  $u \equiv 8 \pmod{30}$ ,  $v_i \equiv i \pmod{30}$ , ( $1 \leq i \leq 8$ ),  $v_0 = 0$ .

$$3u + \sum_{i=1}^8 v_i = 0.$$

Einem Nicht-Spezialisten mag vielleicht die Bedeutung der Macdonaldschen  $\eta$ -Identität gering erscheinen. Dem ist aber nicht so! Tatsächlich waren bisher Formeln für  $\eta^n$  nur für kleine  $n$  bekannt. Sie wurden mit Hilfe der Theorie elliptischer Funktionen oder im Rahmen der Theorie von Modulformen abgeleitet. Bei dieser Vorgehensweise benützt man, daß  $\eta^n$  eine ganze Spitzenform zu vollen Modulgruppe vom Gewicht  $n/2$  ist. Der  $\mathbb{C}$ -Vektorraum dieser Funktionen hat nach [54] Korollar 1.12 die Dimension  $\left\lfloor \frac{n}{24} \right\rfloor + 1$ . Dies deutet an, daß es mit wachsendem  $n$  immer komplizierter wird, eine Darstellung von  $\eta^n$  durch Theta-Reihen zu finden.

Abschließend bemerken wir, daß sich der Reihenanfang für  $\eta^n$  natürlich immer „ad hoc“ unter Verwendung von (1.16) und (1.5) ausrechnen läßt. Man erhält

$$\eta(q)^n = q^{n/24} \left\{ 1 - nq + \frac{1}{2} n(n-3)q^2 - \frac{1}{3!} n(n-1)(n-8)q^3 \right. \\ \left. + \frac{1}{4!} n(n-1)(n-3)(n-14)q^4 \right. \\ \left. - \frac{1}{5!} n(n-3)(n^3 - 27n^2 + 134n - 48)q^5 + \dots \right\}.$$

#### § 4 Weitere Resultate und Entwicklungen in der Theorie affiner Lie-Algebren

Die bisher beschriebenen Ergebnisse bilden nur einen kleinen Ausschnitt aus der derzeitigen Theorie der affinen Lie-Algebren oder allgemeiner: der Kac-Moody-Lie-Algebren. Auch gibt es eine Fülle von zum Teil sehr überraschenden Anwendungen in anderen Gebieten der Mathematik. Um dem an diesen Resultaten interessierten Leser eine Starthilfe zu geben, zählen wir hier stichwortartig verschiedene Entwicklungslinien und Anwendungen auf und geben Literaturhinweise (die Liste erhebt nicht den Anspruch auf Vollständigkeit):

a) andere Spezialisierungen der Denner-Formel: [27] § 3, [32], [36], [37] IV, [38], [49]



- b) Charakter-Formel: [14], [24], [30], [31], [42], [43], [45]
- c) Roger-Ramanujan-Identitäten: [47], [48]
- d) andere Realisierungen von  $\tilde{g}$ : [30], [41], [46]
- e) Anwendungen auf Solitonen-Gleichungen: [8], [9], [10]
- f) Zusammenhänge mit dem Fischer-Griess-Monster („Mondschein“): [7], [16], [28], [29], [39], [59]
- g) Gruppen zu Kac-Moody-Lie-Algebren: [18], [51]
- h) Anwendungen in der Darstellungstheorie von Graphen: [27]
- i) Anwendungen in der Theorie der Hilbertschen Modulflächen: [44]

Verschiedene Aspekte der Theorie affiner Lie-Algebren werden in folgenden Übersichts-Artikeln behandelt: [11], [26], [35], [40], [50], [60].

### Literatur

- [1] Andrews, G.: Number Theory. Philadelphia, London, Toronto 1971: W. B. Saunders
- [2] Andrews, G.: The Theory of Partitions. Reading, Mass. 1976: Addison-Wesley
- [3] Apostol, T.: Introduction to Analytic Number Theory. New York – Heidelberg – Berlin 1976: Springer
- [4] Apostol, T.: Modular Functions and Dirichlet Series in Number Theory. New York – Heidelberg – Berlin 1976: Springer
- [5] Bourbaki, N.: Groupes et algèbres de Lie, Chap. 4, 5 et 6. Paris 1968: Hermann
- [6] Bourbaki, N.: Groupes et algèbres de Lie, Chap. 7 et 8. Paris 1975: Hermann
- [7] Conway, J.; Norton, S.: Monstrous Moonshine. Bull. London Math. Soc. **11** (1979) 308–339
- [8] Date, E.; Jimbo, M.; Kashiwara, M.; Miwa, T.: Transformation groups for Soliton Equation. RIMS-Preprint 394, February 1982
- [9] Date, E.; Jimbo, M.; Kashiwara, M.; Miwa, T.: Transformation groups for Soliton Equations – Euclidean Lie algebras and Reduction of the KP Hierarchy. Publications of the Research Institute for Mathematical Sciences Kyoto University Vol **18** (1982) 1077–1110
- [10] Date, E.; Kashiwara, M.; Miwa, T.: Vertex Operators and  $\tau$ -Functions. Proc. of the Japan Acad. **57** (1981) 387–392
- [11] Demazure, M.: Identités de Macdonald. Séminaire Bourbaki 28e année, 1975/76, n° 483
- [12] Dickson, L. E.: History of the Theory of Numbers, Vol II. New York 1952: Chelsea
- [13] Euler, L.: Introductio in Analysin infinitorum, Kap. 16, 253–275, Lausanne 1748; nachgedruckt in Opera Omnia (1), Band 8. Dt. Übers.: Springer 1983
- [14] Feingold, A.; Lepowsky, J.: The Weyl-Kac Character Formula and Power Series Identities. Adv. in Math. **29** (1978) 271–309
- [15] Franklin, F.: Sur le développement du produit infini  $(1-x)(1-x^2)(1-x^3)\dots$ . C. R. Acad. Sci. Paris **92** (1881) 448–450
- [16] Frenkel, I. B.; Lepowsky, J.; Meurmann, A.: An  $E_8$ -approach to  $F_1$ . Preprint 1983
- [17] Garland, H.: Dedekind's  $\eta$ -function and the cohomology of infinite-dimensional Lie algebras. Proc. Nat. Acad. Sci. USA **72** (1975) 2493–2495
- [18] Garland, H.: The arithmetic theory of loop groups. Publ. IHES **52** (1980) 5–136
- [19] Garland, H.; Lepowsky, J.: Lie algebra homology and the Macdonald-Kac formulas. Invent. Math. **34** (1976) 37–76
- [20] Hardy, G. H.; Ramanujan, S.: Asymptotic formulae in combinatory analysis. Proc. London math. Soc. **17** (1918) 75–115
- [21] Humphreys, J.: Introduction to Lie Algebras and Representation Theory. Graduate Texts in Mathematics 9. New York – Heidelberg – Berlin 1972: Springer

- [22] Jacobi, C. G. J.: *Fundamenta Nova Theoriae Functionum Ellipticarum*; nachgedruckt in *Gesammelte Werke*, Band 1, 49–239
- [23] Jacobson, N.: *Lie algebras*. New York 1979: Dover
- [24] Kac, V. G.: Infinite-dimensional Lie algebras and Dedekind's  $\eta$ -function. *Funkt. analiz. i ego prilozh.* **8** (1974), No. 1, 77–78; engl. Übers.: *Funct. Anal. Appl.* **8** (1974) 68–70
- [25] Kac, V.: Infinite-dimensional algebras, Dedekind's  $\eta$ -function, classical Möbius function and the very strange formula. *Adv. in Math.* **30** (1978) 85–136
- [26] Kac, V. G.: Highest Weight Representations of Infinite-dimensional Lie Algebras, Proc. of the ICM 1978, Helsinki, 299–304
- [27] Kac, V. G.: Infinite Root Systems, Representations of Graphs and Invariant Theory. *Inventiones math.* **56** (1980) 57–92
- [28] Kac, V. G.: A remark on the Conway-Norton conjecture about the „Monster“ simple group. *Proc. Nat. Acad. Sci. USA* **77** (1980) 5048–5049
- [29] Kac, V. G.: An elucidation of “Infinite-dimensional algebras . . . and the very strange formula”  $E_6^{(1)}$  and the cube root of the modular invariant  $j$ . *Adv. in Math.* **35** (1980) 264–273
- [30] Kac, V.; Kazhdan, D.; Lepowsky, J.; Wilson, R.: Realization of the basic representation of the Euclidean Lie algebras. *Adv. in Math.* **42** (1981) 83–112
- [31] Kac, V.; Peterson, D.: Affine Lie algebras and Hecke modular forms. *Bull. Amer. Math. Soc.* **3** (1980) 1057–1061
- [32] Kostant, B.: On Macdonald's  $\eta$ -function formula, the Laplacian and Generalized Exponents. *Advances in Math.* **20** (1976) 179–212
- [33] Lehmer, D. H.: An application of Schäfli's modular equation to a conjecture of Ramanujan. *Bull. Amer. Math. Soc.* **44** (1938) 84–90
- [34] Lepowsky, J.: *Lectures on Kac-Moody-Algebras*. Lecture Notes. Université Paris VI, Frühjahr 1978
- [35] Lepowsky, J.: Lie algebras and Combinatorics. Proc. of the ICM 1978, Helsinki, 579–584
- [36] Lepowsky, J.: Macdonald-type identities. *Adv. in Math.* **27** (1978) 230–234
- [37] Lepowsky, J.: Generalized Verma modules, loop space cohomology and Macdonald-type identities. *Ann. Sci. Ecole Norm. Sup.* **12** (1979) 169–234
- [38] Lepowsky, J.: Application of the Numerator Formula to  $k$ -Rowed Plane Partitions. *Adv. in Math.* **35** (1980) 179–194
- [39] Lepowsky, J.: Euclidean Lie algebras and the modular function  $j$ . (Santa Cruz Conference on Finite Groups) *Proc. Symp. Pure Math.* **37** (1980) 567–570
- [40] Lepowsky, J.: *Affine Lie algebras and combinatorial identities in Lie Algebras and Related Topics*. Lecture Notes in Math. 933. Berlin – Heidelberg – New York 1982: Springer
- [41] Lepowsky, J.: Some constructions of the affine Lie algebra  $A_1^{(1)}$ . Preprint 1983
- [42] Lepowsky, J.; Milne, S.: Lie algebras and classical partition identities. *Proc. Nat. Acad. Sci. USA* **75** (1978) 578–579
- [43] Lepowsky, J.; Milne, S.: Lie algebraic approaches to classical partition identities. *Adv. in Math.* **29** (1978) 15–59
- [44] Lepowsky, J.; Moody, R.: Hyperbolic Lie algebras and Quasiregular cusps on Hilbert Modular Surfaces. *Math. Ann.* **245** (1979) 63–88
- [45] Lepowsky, J.; Primc, M.: Standard modules for type 1 affine Lie algebras. Preprint 1983
- [46] Lepowsky, J.; Wilson, R.: Construction of the Affine Lie Algebra  $A_1^{(1)}$ . *Comm. math. Phys.* **62** (1978) 43–53
- [47] Lepowsky, J.; Wilson, R.: A Lie-theoretic Interpretation and Proof of the Rogers-Ramanujan Identities. *Adv. in Math.* **45** (1982) 21–72
- [48] Lepowsky, J.; Wilson, R.: The structure of standard modules, I: Universal algebras and the Rogers-Ramanujan Identities. Preprint 1983
- [49] Macdonald, I. G.: Affine Root systems and Dedekind's  $\eta$ -Function. *Inventiones math.* **15** (1972) 91–143
- [50] Macdonald, I. G.: Affine Lie algebras and modular forms. *Seminaire Bourbaki* 33e année 1980/81, n° 577
- [51] Peterson, D.; Kac, V. G.: Infinite flag varieties and conjugacy theorems. Preprint 1983 (dedicated to I. M. Gelfand on his 70th birthday)

- [52] P e t e r s s o n , H.: Konstruktion der Modulformen und der zu gewissen Grenzkreisgruppen gehörigen automorphen Formen von positiver reeller Dimension und die vollständige Bestimmung ihrer Fourierkoeffizienten. Sitzb. Heidelberger Akad. d. Wissenschaften 1950, 415–494
- [53] P e t e r s s o n , H.: Über Modulfunktionen und Partitionenprobleme. Abh. der dt. Akad. d. Wiss. zu Berlin 1954
- [54] P e t e r s s o n , H.: Modulfunktionen und quadratische Formen. Ergebnisse der Mathematik und ihrer Grenzgebiete 100. Berlin – Heidelberg – New York 1982: Springer
- [55] R a d e m a c h e r , H.: On the partition function  $p(n)$ . Proc. London Math. Soc. 43 (1937) 241–254
- [56] R a d e m a c h e r , H.: Topics in Analytic Number Theory. Die Grundlehren der mathematischen Wissenschaften in Einzeldarstellungen Band 169. New York – Heidelberg – Berlin 1973: Springer
- [57] S c h a r l a u , W.; O p o l k a , H.: Von Fermat bis Minkowski. Eine Vorlesung über Zahlentheorie und ihre Entwicklung. Berlin – Heidelberg – New York 1980: Springer
- [58] S h a n k s , D.: A short proof of an identity of Euler. Proc. Amer. Math. Soc. 2 (1951) 747–749
- [59] T i t s , J.: Le Monstre. Séminaire Bourbaki, 36e année 1983/84, n<sup>o</sup> 620, Novembre 1983
- [60] V e r d i e r , J.-L.: Les représentation des algèbres de Lie affines, Application a quelques problèmes de physique. Séminaire Bourbaki, 34e année, 1981/82, n<sup>o</sup> 596

**Nachtrag bei der Korrektur.** Nach Einreichen der Arbeit lernte ich das folgende Buch kennen:

- [61] K a c , V. G.: Infinite dimensional Lie algebras. An Introduction. Boston – Basel – Stuttgart 1983: Birkhäuser

Erhard Neher  
Math. Institut  
Einsteinstr. 62/IV  
4400 Münster

gegenwärtige Anschrift:  
Dept. of Math.  
University of Ottawa  
Ottawa, Ontario K1N 9B4  
Kanada

(Eingegangen: 20. 5. 1984)



## Buchbesprechungen

John, F., *Collected Papers* (Ed.: Moser, J., 2 vols.) Basel – Boston – Stuttgart: Birkhäuser 1985, vol. 1: 648 p., hardcover, DM 258,—, vol. 2: 760 p., hardcover, DM 298,—

F. John hat durch seine grundlegenden Beiträge zu den verschiedenartigsten Gebieten der Analysis die mathematische Forschung entscheidend beeinflusst. Ausgangspunkt seiner Arbeiten sind konkrete Probleme der Geometrie und der Mathematischen Physik. Davon ausgehend, entwickelte er allgemeine Begriffe, wie z. B. die Quasi-Isometrie, die heute in der Analysis eine zentrale Rolle spielen. Obwohl viele seiner Ergebnisse schon seit langem zum klassischen Bestand der Mathematik gehören, sind seine Arbeiten außerhalb des engeren Kreises der Fachspezialisten nicht hinreichend gut bekannt. Die Publikation der gesammelten Abhandlungen von F. John im Birkhäuser-Verlag ist daher sehr zu begrüßen. Die Arbeiten sind vom Inhalt her

---

auf 10 Sachgruppen verteilt worden. Jede Gruppe ist chronologisch geordnet und mit Ausnahme des letzten Teiles (Miscellaneous) mit Kommentaren versehen. Diese Kommentare, die von einer Reihe von international bekannten Mathematikern verfaßt worden sind, orientieren den Leser über die Bedeutung der Resultate von John und die weitere Forschung auf den entsprechenden Gebieten, die sich daran angeschlossen hat.

Teil I (Random Transfer) enthält zwei der ersten Arbeiten Johns aus seiner Göttinger Zeit. Sie sind in deutscher Sprache abgefaßt und beschäftigen sich mit dem verallgemeinerten Radonschen Problem, eine Funktion im  $\mathbb{R}^n$  durch ihre Integrale über eine a priori vorgegebene Hyperflächenschar zu bestimmen. Damit im Zusammenhang stehen Johns Untersuchungen über partielle Differentialgleichungen (Teil II), die das Kernstück des ersten Bandes bilden. Zu erwähnen sind insbesondere die globalen Verschärfungen des Holmgrenschen Satzes und die Konstruktion der Grundlösung bei linearen elliptischen Differentialgleichungen mit analytischen Koeffizienten auf der Grundlage des Theorems von Cauchy-Kowalewski. Den Abschluß des ersten Bandes bilden Johns neuere Untersuchungen über die Nichtexistenz globaler Lösungen nichtlinearer hyperbolischer Gleichungen (blow up theorems). Der zweite Band beschäftigt sich zum großen Teil mit Problemen der Mathematischen Physik. Hier sind insbesondere Johns Beiträge zur Elastizitätstheorie zu nennen, die den Anstoß zu seinen grundlegenden Untersuchungen über quasi-isometrische Abbildungen sowie über Funktionen von beschränkter mittlerer Schwankung gegeben haben. Die letztere Funktionenklasse (class BMO) spielt heute eine fundamentale Rolle in zahlreichen Gebieten der Analysis, so zum Beispiel in der Theorie der elliptischen Differentialgleichungen.

Die Anfänge von Johns mathematischem Schaffen waren von Richard Courant geprägt. Als einer seiner ältesten Schüler hat John wesentlich dazu beigetragen, die Beziehung zwischen Mathematik und Physik zu fördern. Seine Arbeiten legen davon Zeugnis ab. Sie sind in einer klaren, verständlichen Sprache abgefaßt, gut motiviert und behandeln tiefliegende mathematische Probleme mit Methoden, die ein Minimum an begrifflichem Aufwand erfordern. Die Lektüre der gesammelten Abhandlungen von F. John ist jedem Mathematiker zu empfehlen, der sich mit den analytischen Methoden der Theorie der partiellen Differentialgleichungen vertraut machen will.

Alexits, G., *Approximation Theory (Selected Papers)*, Budapest: Akadémiai Kiadó 1983, 298 p., DM 59,—

Bekanntlich hat Ungarn ausgezeichnete Analytiker hervorgebracht. So wurden 1980 in Budapest der hundertste Geburtstag von Friedrich Biesz und Leopold Fejér gefeiert. Der

Alfred Haars fällt in das Jahr 1985. Zu dieser berühmten Schule gehört auch Georg Alexits (1899–1978) aus Budapest, der 1924 in Graz promovierte und sich 1943 in Kolozsvár (= Cluj) habilitierte. Vor dem Krieg bekleidete er die Stelle eines Gymnasiallehrers in Budapest, nach Kriegsende war er im Kultusministerium tätig und reorganisierte die Ungarische Akademie der Wissenschaften. Im Jahre 1948 wurde er zum Direktor des Mathematischen Instituts der Technischen Universität in Budapest berufen, ein Amt, das er bis 1967 innehatte.

Das mathematische Werk Alexits' umfaßt 88 wissenschaftliche Publikationen und vier Monographien, von denen das Buch „Konvergenzprobleme der Orthogonalreihen“ (Budapest 1960, 307 Seiten), das sowohl ins Englische als auch ins Russische übersetzt wurde, sicherlich das bekannteste ist. Seine Arbeiten überdecken ein weites Spektrum: Er begann seine mathematischen Forschungen mit der Theorie der reellen Funktionen (in Anschluß an H. Hahn!), der Mengenlehre und Kurventheorie. Nach 1940 beschäftigte er sich hauptsächlich mit der Fourier-Analyse, der Theorie der allgemeinen Orthogonalreihen und der Approximationstheorie.

Alexits hatte eine Reihe ausgezeichnete Schüler: die direkten sind K. Tandori und D. Králik, in einem weiteren Sinne auch J. Balázs, L. Csernyák, G. Freud, I. Joó, L. Leindler, F. Móricz, J. Németh, L. G. Pál, F. Schipp, J. Szabados, I. Szalay.

Die vorliegende Auswahl von 34 Veröffentlichungen Alexits', herausgegeben von K. Tandori, unter Mitwirkung von D. Králik, L. Leindler, F. Schipp und J. Szabados, hätte nicht besser getroffen werden können. Es handelt sich um Alexits' Arbeiten über Fourier-Reihen, Approximationstheorie – unter besonderer Berücksichtigung seines Spezialgebietes, der starken Approximation –, über multiplikative Funktionensysteme sowie über Konvergenz und Summierbarkeit von Reihen „nicht-orthogonaler“ Funktionensysteme; nicht berücksichtigt sind seine frühen mengen- und kurventheoretischen Publikationen sowie diejenigen über Orthogonalreihen, die bereits 1960 in seine oben erwähnte Monographie integriert worden sind. Durch eine anschauliche Schilderung erhält der Leser zu Beginn des Buches einen Einblick in das Leben und Wirken Alexits'; die Auswirkungen seines Schaffens auf die weitere Forschung und eine vollständige Liste seines Opus beschließen den Band. Ein wenig informierter Leser, der auf Seite 287 erfährt, Alexits verdanke seine erste internationale Anerkennung dem Hinweis Herrn R. DeVore's, Alexits habe den ersten Saturationssatz in der Approximationstheorie bewiesen (Springer Lecture Notes, Nr. 293, 1972, S. 59), könnte der irrtümlichen Meinung erliegen, Alexits sei erst seit 1972 bekannt. Tatsächlich aber war der Name Alexits der mathematischen Öffentlichkeit seit Erscheinen seines Buches über Orthogonalreihen und den älteren Kollegen wahrscheinlich seit den dreißiger Jahren ein Begriff: Der Rezensent hatte die Ehre, Alexits persönlich auf seiner ersten Oberwolfacher Tagung über Approximationstheorie im Jahre 1963 (an der J. L. B. Cooper, J. Favard, G. Freud, J. Korevaar, G. G. Lorentz, P. Malliavin, I. J. Schoenberg, G. Sunouchi u. a. teilnahmen) begrüßen zu können. Bei dieser Gelegenheit lernte er nicht nur seine großen mathematischen, sondern auch seine menschlichen Qualitäten und Fähigkeiten kennen und schätzen.

Es sollte erwähnt werden, daß in Acta Math. Acad. Sci. Hungar. 20 (1969), Seiten 253–461, 33 (1979), Seiten 1–234, zahlreiche Arbeiten Alexits' zum 70. bzw. 80. Geburtstag

Albers, D. J., Alexanderson, G. L. (editors), **Mathematical People, Profiles and Interviews**, Boston – Basel – Stuttgart: Birkhäuser 1985, xvi + 372 p., hardcover, DM 79,–  
Manchmal degenerieren mathematische Bücher zu Skripten, die man zwischen Buch-

deckel geklemmt hat. Im Kontrast dazu werden dann und wann ausgesprochen schöne Bücher produziert. „Mathematical People“ ist ein solches, obendrein stimmt der Preis. Birkhäuser/Boston setzt mit diesem Band die 1981 mit Davis-Hersh, „The Mathematical Experience“ angespannene Linie fort. Auch jenes Buch enthielt schon Interviews mit Mathematikern; hier wird diese wegen ihrer Unmittelbarkeit höchst schätzenswerte Dokumentationsform in den Vordergrund gerückt. Der Leser kommt auf diese Weise sozusagen ins Gespräch mit für die Mathematik bedeutenden Menschen unserer Zeit: G. Birkhoff (\* 1911), S. S. Chern (\* 1911), J. H. Conway (\* 1937), H. S. M. Coxeter (\* 1907), P. Diaconis (\* 1945), P. Erdős (\* 1913), M. Gardner (\* 1914), R. L. Graham (\* 1935), P. R. Halmos (\* 1916), P. I. Hilton (\* 1923), J. Kemeny (\* 1926), M. Kline (\* 1908), D. Knuth (\* 1938), B. Mandelbrot (\* 1924), H. O. Pollak (\* 1927), G. Pólya (\* 1887), M. Rees (\* 1902), C. Reid (\* 1918), H. Robbins (\* 1915), R. Smullyan (\* 1912), O. Taussky-Todd (\* 1906), A. W. Tucker (\* 1905), S. Lefschetz (1884–1972), S. Ulam (1902–1984).

Was man auf diesen Seiten erfährt, reicht vom netten Klatsch (z. B. warum Coxeter H. S. M. und nicht H. M. S. heißt) bis zu höchst eindrucksvollen Aussagen (z. B. von David Blackwell: Ich bin nicht am Forschen interessiert, sondern am Verstehen). Man nimmt teil an der Birkhoffschen Vater-Sohn-Beziehung, an Olga Taussky-Todds Migrantenschicksal, an Constance Reids biographischen Forschungen in zwei Kontinenten, an Raymond Smullyans aus der Logik hervorgegangener Weisheit, an Paul Erdős' Weltbürgertum – ein kollegiales Lesevergnügen fast ohne Ende. Das Bildmaterial ist hervorragend. Zwei Anregungen: 1) Man sollte das Unternehmen ausweiten und dabei auch andere Kontinente besuchen; das muß nicht gleich eine ganze Buchserie ergeben, aber analoge Bände, z. B. a) über sowjetische Kollegen, b) über Mathematikerinnen, wären willkommen. 2) Es wäre schön, wenn dies Buch eine Welle mathematik-historischer Dokumentationen auslösen würde: von vielbefahrenen Kollegen besprochene Tonbänder, privat zusammengebundene gesammelte Abhandlungen, Photos. Sammelpunkt: Oberwolfach.

Erlangen

K. Jacobs

Newman, D. J., **A Problem Seminar** (Problem Books in Mathematics), Berlin – Heidelberg – New York: Springer-Verlag 1982, vii + 113 p., soft cover, DM 35,–

Larson, L. C., **Problem-Solving Through Problems** (Problem Books in Mathematics), Berlin – Heidelberg – New York – Tokyo: Springer-Verlag 1983, xi + 332 p., cloth, DM 88,–

Seit 1981 bringt der Springer-Verlag eine neue Reihe heraus mit dem Titel „Problem Books in Mathematics“. Die Thematik ist umfassend: Kommentierte Sammlungen ungelöster Probleme, Sammlungen interessanter gelöster Probleme, und Problemfolgen, die in ein Gebiet einführen (Funktionalanalysis, Populationstheorie). Außerhalb dieser Reihe erscheint seit 1925: Polya-Szegő: Aufgaben und Lehrsätze aus der Analysis I + II, ein Klassiker des Jahrhunderts, der weltweit einen großen Einfluß ausgeübt hat und noch immer ausübt, besonders nachdem er 1976 ins Englische übersetzt wurde (fast ohne Änderung!).

Uns liegen zwei Problembücher aus der Reihe vor: D. J. Newman, A Problem Seminar

Problemsammlungen sind sehr repetitiv. Manche enthalten kein einziges Problem, das mir neu ist. Sind 5%–10% der Probleme neu, so betrachte ich die Sammlung als einen sehr guten Kauf. Bei Newman war mir die Hälfte der Probleme neu! Auch bei gut bekannten Problemen wird der Leser durch überraschende Lösungen entschädigt.

Das Buch besteht aus drei Teilen. Der erste Teil enthält die Formulierungen der Probleme. Der zweite Teil besteht aus kurzen Hinweisen, die die Hauptidee verraten und das Problem zu einer (immer noch schweren) Routineaufgabe machen. Im dritten Teil findet man die (fast) vollständigen Lösungen. Diese Dreiteilung ist nicht neu, aber eine ausgezeichnete Idee.

Newman enthält keine Heuristik. Auch Polya-Szegö enthält keine Heuristik, sie ist jedoch implizit vorhanden. Die Probleme sind nach Themen geordnet und die Lösung eines Problems hilft bei der Lösung des nächsten Problems. In Newmans Buch ist bei den ersten 58 Problemen kein roter Faden erkennbar und auch nicht beabsichtigt. Die übrigen 51 Probleme sind thematisch geordnet: Estimation Theory, Generating Functions, Limits of Integrals, Expectations, Prime Factors, Category Arguments, Convexity. Die drei letzten Themen enthalten allerdings nur 1, 2, 2 Aufgaben. Jede Problemsequenz wird durch einen viel zu knappen Text eingeleitet, der das Leitmotiv der Probleme beschreibt. Diesen Text hätte man wesentlich ausdehnen und durch Beispiele erläutern sollen.

Isolierte Probleme sind nicht viel wert. Von einem Problem sollte man Verallgemeinerungen und Querverbindungen zu anderen Problemen betrachten. Dies geschieht bei Newman nicht. Er war offenbar bestrebt, das Buch kurz und erschwinglich zu halten, so daß es in einem Problemlöseseminar für höhere Semester (fast) vollständig behandelt werden kann. Für diesen Zweck möchten wir das Buch wärmstens empfehlen.

Während Newman nicht an Wettkämpfer denkt, ist das Buch von L. C. Larson auch als Vorbereitungsbuch für Wettbewerbe, speziell den Putnam-Wettbewerb, gedacht. Es enthält über 700 Probleme, von denen ein Drittel gelöst sind. Für die nicht gelösten Probleme gibt er die Quelle an, wo man die Lösung findet. Die Probleme sind dem Putnam-Wettbewerb, nationalen Olympiaden für Schüler, der Internationale Mathematik-Olympiade (IMO), und den Problemteilen des American Mathematical Monthly und anderer Zeitschriften entnommen.

Es handelt sich nicht nur um eine Problemsammlung. Der Autor versucht grundlegende Problemlösestrategien zu isolieren. Zu jeder dieser Strategien gibt er zahlreiche Beispiele, die sie illustrieren und einüben sollen, sowie nicht gelöste Probleme, die mit derselben Strategie zu lösen sind. Da ein Problem mit verschiedenen Strategien gelöst werden kann, erscheint es oft in mehreren Kapiteln. Querverweise, vorwärts und rückwärts, sind vorbildlich.

Die in Wettbewerben vorkommenden Themen werden ausreichend behandelt mit zwei Ausnahmen: Elementargeometrie ist ganz schwach vertreten. Elementare Wahrscheinlichkeitstheorie fehlt ganz, obwohl der Putnam-Wettbewerb und verstärkt auch nationale Schülerolympiaden diese Disziplin berücksichtigen. Es sei allerdings vermerkt, daß die Probleme 5.1.5, 5.1.10 und 5.1.14 Spuren von Wahrscheinlichkeitstheorie enthalten. Das Buch enthält eine enorme Fülle nützlicher Techniken und ist als Quelle anspruchsvoller Probleme für untere Semester geeignet.

Larson stützt sich durchweg auf amerikanische Quellen. Daher fehlen ganz die z. T. geistreichen Probleme sowjetischer Olympiaden und auch die gehaltvollen Probleme des ungarischen Kürschak-Wettbewerbs der letzten Jahrzehnte. Leider sind die sowjetischen Probleme der letzten Jahre weniger geistreich, mehr spitzfindig und daher weniger interessant. Diese geistige Verarmung ist unvermeidliche Folge der Massenproduktion von Problemen, um die Vielzahl der dortigen Wettbewerbe zu versorgen.

In der Reihe fehlt nur noch eine Problemsammlung mit elementaren Problemen (ohne Analysis), die als „Trainingsbibel“ für Schülerwettbewerbe und speziell für die IMO geeignet wäre. Sie sollte die Elementargeometrie (einschließlich der Raumgeometrie) angemessen berücksichtigen und noch mehr Heuristik enthalten als bei Larson.



Problemlöseseminare werden sich auch bei uns etablieren, wenn genügend Problemliteratur vorhanden ist. Newman und Larson sind ein guter Anfang.

Frankfurt

A. Engel

**Lidl, R., Wiesenbauer, J., Ringtheorie und Anwendungen** (Studientexte Mathematik), Wiesbaden: Akademische Verlagsgesellschaft 1980, xiii + 320 S., geb., DM 56,—

Dieses Buch zerfällt in drei Kapitel: 1. Allgemeine Ringtheorie, 2. Endliche Körper und Anwendungen, 3. Genetische Algebren.

Kapitel 1 enthält, sieht man von § 1.3.5 ab, wo etwas über endliche Ringe ausgesagt wird, nur Standardsätze der Ringtheorie, die ohne jeden Schwung und Begeisterung vorgetragen werden. Es ist weit entfernt von den meisterlichen Darstellungen „Commutative Rings“ eines I. Kaplansky und „Non-Commutative Rings“ eines I. N. Herstein, die ich stattdessen als Lektüre empfehle. Wer sich über endliche Ringe unterrichten will, der wende sich besser an das Buch „Finite Rings with Identity“ von B. R. McDonald.

Kapitel 2 behandelt die Struktur endlicher Körper. Es wird in ihm auch viel über das Rechnen in endlichen Körpern geredet. Wenn man selbst jedoch schon viele Programme zur Arithmetik in endlichen Körpern und ihren Polynomringen geschrieben hat, so stellt man fest, daß dieses Kapitel leider keine Hilfe beim Implementieren von Rechenverfahren liefert. Es empfiehlt sich daher, gleich zu E. R. Berlekamps Buch „Algebraic Coding Theory“ zu greifen, wo auch sehr viel mehr über Anwendungen gesagt wird.

Kapitel 3 handelt von genetischen Algebren. Hier wird einiges an Modellbildung geleistet. Modellbildung alleine ist aber noch keine Anwendung. Ich stelle mir jedenfalls unter Anwendung von Mathematik in außermathematischen Bereichen vor, daß man anhand eines mathematischen Modelles Voraussagen über die Zukunft des betrachteten Systems macht. Davon findet sich in diesem Kapitel nichts.

Das Buch wimmelt von Druckfehlern. Es fehlen Zeichen und sogar ganze Zeilen. Amüsant ist der Unkörper auf S. 4. Die Tafeln des Anhangs II sind durcheinandergeraten.

Zusammenfassend läßt sich sagen, daß die Kapitel 1 und 2 dank besserer Texte überflüssig sind. Aus Kapitel 3 ließe sich etwas machen. Alles in allem aber ist es ein Buch, das man nicht haben muß und das ich auch meinen Studenten nicht empfehlen werde.

Kaiserslautern

H. Lüneburg

**Lidl, R., Pilz, G., Angewandte abstrakte Algebra I, II**, Mannheim – Wien – Zürich: Bibliographisches Institut 1982, Band I: 249 S., Kart., DM 39,—, Band II: 242 S., Kart., DM 39,—

Dieses Werk handelt von Halbgruppen, Automaten, Gruppen, Ringen, Moduln, Algebren, Darstellungstheorie von Gruppen, Körpern, Kodierungstheorie, Fastringen, genetischen Algebren, universellen Algebren, Verbänden und einigen Anwendungen. Es ist nichts anderes als eine Kompilation von Dingen, die nirgends in die Tiefe geht und die man anderswo weit besser aufgeschrie-

Lidl, R., Niederreiter, H., *Finite Fields* (Encyclopedia of Mathematics and its Applications. Vol. 20). London – Amsterdam: Addison-Wesley 1983. xx + 755 pp., hardcover. \$ 75.95

Der vorliegende Band von Rotas roter Enzyklopädie ist die erste Monographie, die ausschließlich der Theorie der endlichen Körper gewidmet ist. Sie ist nicht für Spezialisten in Algebra geschrieben und ist nicht von enzyklopädischer Kürze, sondern ein breit angelegtes, sorgfältig ausgearbeitetes Lehrbuch auch für Anwender in der Informatik. Diesem Zweck dienen auch über 600 Übungsaufgaben, die in der Regel nicht neuen Stoff bieten, sondern den Text illustrieren, variieren und ergänzen. An Vorkenntnissen wird vom Leser nur Grundwissen in linearer Algebra verlangt.

Kapitel 1 (Algebraic Foundations) stellt die benötigten Hilfsmittel aus der Algebra zusammen, Grundkenntnisse über Gruppen, Ringe, Körper, Polynome. Kapitel 2 (Structure of Finite Fields) enthält neben dem Satz von Wedderburn über endliche Schiefkörper die in den meisten Algebra-Büchern zu findenden Sätze über die Klassifizierung endlicher Körper, Spuren, Normen, Kreisteilungspolynome und die Darstellung von Elementen endlicher Körper (der hierher gehörende Zech- oder Jacobi-Logarithmus findet sich in den Übungen). Kapitel 3 (Polynomials over Finite Fields) befaßt sich u. a. mit primitiven Polynomen, mit der Zahl irreduzibler

Polynome gegebenen Grades, mit Konstruktion irreduzibler Polynome und mit speziellen Polynomen (Ores Theorie der additiven Polynome, Binome und Trinome). Kapitel 4 (Factorization of Polynomials) enthält die Algorithmen von Berlekamp für Faktorisierung und Nullstellensuche sowie Variationen von Zassenhaus und anderen. Kapitel 5 (Exponential Sums) greift zusammen mit dem folgenden Kapitel den mathematisch harten Kern der Theorie endlicher Körper an. Detailliert werden Gaußsche Summen (mit Anwendungen wie quadratisches Reziprozitätsgesetz) und Jacobi-Summen behandelt, die Davenport-Hasse-Relation wird allerdings nur im Spezialfall bewiesen. Die Weilschen und Kloostermanschen Summen werden elementar behandelt, die zentralen tieferen Ergebnisse (über den Absolutbetrag der Eigenwerte des Frobenius) ohne Beweis mitgeteilt und angewendet. Kapitel 6 (Equations over Finite Fields) behandelt die elementaren Sätze aus der algebraischen Geometrie über endlichen Körpern wie die Sätze von König-Rados, Chevalley-Waring über Lösungszahlen, die Abzählung von Punkten

auf Quadriken und diagonalisierbaren Hyperflächen  $\sum_{i=1}^n a_i \cdot x_i^{k(i)} = b$ , und schließlich die ele-

mentare Behandlung der Thue-Gleichungen  $y^m = g(x)$  und der analogen Artin-Schreier-Gleichungen nach der Methode von Stepanov-Schmidt. Kapitel 7 (Permutation Polynomials) untersucht, wann Polynomfunktionen Permutationen sind, beschreibt spezielle Typen wie die Dickson-Chebyshev-Polynome und stellt (ohne vollständige Beweise) den von Davenport-Lewis vermu-

Beweis zitiert; Axs Verschärfung des Satzes von Chevalley-Warning fehlt, da hier etwas zahlen-theoretische Vorkenntnisse benötigt werden; die gesamte tiefere Behandlung der algebraisch-geometrischen Methoden (Weil, Deligne, . . .) zur Untersuchung von Gleichungen über endlichen Körpern fehlt – hier muß man speziellere Literatur zu Rate ziehen (z. B. den von Freitag-Kiehl erstellten Ergebnisbericht, der hoffentlich bald beim Springer-Verlag erscheint). Zum Ausgleich bieten die Autoren aber auch dem Spezialisten etwas: Ein 160 Seiten langes Literaturverzeichnis mit fast 3000 Titeln von Arbeiten, die endliche Körper berühren, und insgesamt knapp 100 Seiten Anhänge zu den einzelnen Kapiteln, in denen ein historischer und nach Möglichkeit auch systematischer Überblick der zugehörigen Literatur gegeben wird. Bei solch einer umfassenden Literaturübersicht steht zwangsläufig Wichtiges neben Belanglosem, die Autoren haben sich gehütet, hier Wertmaßstäbe anzusetzen und überlassen dies dem Leser. Die durch die Arbeiten von Ihara und Manin angeregte, auch für die Codierungstheorie interessante, aktuelle Frage der Verschärfung der Weilschen Abschätzung für die Anzahl der rationalen Punkte auf Kurven über endlichen Körpern wird z. B. nur in einem kurzen Satz (S. 332) gestreift.

Den Autoren ist zu danken für ein sorgfältig geschriebenes, in viele Aspekte der Theorie der endlichen Körper gründlich einführendes Lehrbuch (das erste seiner Art), und für die darin enthaltene Fundgrube an Literatur und Anregungen für Weiterarbeit. Es ist ein Standardwerk über endliche Körper entstanden.

Erlangen

W.-D. Geyer

Grunsky, H., *The General Stokes' Theorem* (Surveys and Reference Works in Mathematics, No. 9), Boston – London – Melbourne: Pitman Publishing Ltd 1983, 128 pp., £19.95

Aus dem Vorwort: "Just as ordinary calculus begins with the analytic definition of ordinary or partial derivatives and develops its formal rules on this basis, so I start with an analytic definition of the central concept of the theory – the differential of a differential form – postponing the calculus of forms to a point where its usefulness to the analytic theory can be made apparent. Such an analytic definition is not new . . . but . . . it has never been exploited to give a systematic and relatively complete presentation of Stokes' theorem, though it is a great help towards a lucid treatment . . . In principle, the process of generalization is unlimited. I have tried to adopt a middle course which avoids some unwanted restrictions. . . ."

Der Stokesche Satz wird hierin sozusagen für ein orientiertes, plattes Stück  $D(k)$  der

**Klingenberg, W., Riemannian Geometry**, (de Gruyter Studies in Mathematics, vol. 1), Berlin – New York: de Gruyter 1982, x + 396 S., DM 98,—

Das vorliegende Werk ist aus der mehr als 25jährigen überaus intensiven und erfolgreichen Beschäftigung des Autors mit der Riemannschen Geometrie erwachsen; es vollendet auf makelloser Weise das in den Lecture Notes: „Riemannsche Geometrie im Großen“ (veröffentlicht 1967 zusammen mit D. Gromoll und W. Meyer) vorgestellte Konzept eines Lehrbuchs moderner Differentialgeometrie, konzentriert in einer Monographie den heutigen Stand der Kenntnisse über den gegenseitigen Einfluß der topologischen und differentialgeometrischen Verhältnisse auf einer Mannigfaltigkeit und ist eine Fundgrube von Anregungen für die zukünftige Forschung.

Das Buch hat drei etwa gleich lange Kapitel: 1. Grundlagen. 2. Krümmung und Topologie. 3. Struktur des geodätischen Flusses. Da der Verfasser bestrebt ist, seine Ideen einer möglichst breiten Leserschaft zugänglich zu machen, werden im ersten Kapitel die Grundkonzepte ausführlich vorgestellt. Der Begriff einer differenzierbaren Mannigfaltigkeit erfaßt hier auch unendlichdimensionale Mannigfaltigkeiten, die über separablen Hilberträumen modellierbar sind; dies wird etwa durch die wachsende Bedeutung der Kurvenmannigfaltigkeiten nahegelegt und ist mit Ausnahme von Tensorprodukten nicht schwieriger zu handhaben als der übliche Zugang. Einige Stichwörter der Anfangsbetrachtungen: Tangential- und Kotangentialbündel, Immersion, Submersion, induzierte Bündel und Schnitte (auch entlang einer Abbildung), Differentialformen, Tensorfelder, kovariante Derivation, Krümmungs- und Torsionstensor, lineare Zusammenhänge, Exponentialabbildung und Geodätische. Nachdem Liesche Gruppen als wichtige Beispiele behandelt worden sind, werden Riemannsche Mannigfaltigkeiten eingeführt, die Existenz der Levi-Civita-Ableitung gezeigt und das Vorhandensein isometrischer Trivialisierungen für jedes mit Riemannscher Metrik versehene Vektorbündel bewiesen. Die Konsequenzen des Gaußschen Lemmas werden behandelt und die total geodätischen Untermannigfaltigkeiten durchs Verschwinden der zweiten Fundamentalabbildung charakterisiert; außerdem wird die Schnittkrümmung eingeführt. Am Schluß des ersten Kapitels werden Jacobi-Felder untersucht und in Räumen konstanter Krümmung bestimmt. Dadurch ist der erste Schritt zum Studium der globalen Geometrie auf Mannigfaltigkeiten getan.

Im 2. Kapitel hat sich der Verfasser auf endlichdimensionale Mannigfaltigkeiten beschränkt, da deren lokale Kompaktheit gebraucht wird. Zunächst wird bewiesen, daß eine Riemannsche Mannigfaltigkeit genau dann topologisch vollständig ist, wenn sie geodätisch vollständig ist. Anschließend wird eine ziemlich vollständige Übersicht der symmetrischen Räume vom Standpunkt der Riemannschen Geometrie gegeben. Ab drittem Abschnitt studiert der Autor auf einer endlichdimensionalen Mannigfaltigkeit  $M$  Kurvenmannigfaltigkeiten, die sich als äußerst wichtiges Beweismittel erweisen; hier profitiert er von der Tatsache, daß er im ersten Kapitel auch unendlichdimensionale Mannigfaltigkeiten zugelassen hat. Zunächst wird auf  $M$  die Riemannsche Hilbertmannigfaltigkeit  $H$  betrachtet, stetigen Kurven mit fast überall existierender

Schnirelmann und Morse-Theorie angehören, benutzt neue, die Morse-Theorie meidende Techniken, durch die die volle Schlagkraft der Lusternik-Schnirelmann-Theorie sichtbar wird.

Der Vergleich zwischen der Nullität und dem Index eines Paares von Geodätischen gleicher Länge gibt eine Abschätzung für das Vorkommen des ersten konjugierten Punktes auf einer Geodätischen mit einer nach beiden Seiten hin beschränkten Schnittkrümmung. Es folgt der Satz von Bonnet-Myers über den Durchmesser einer Mannigfaltigkeit mit nach unten be-

einen einfachen Beweis des Satzes v. Mangold-Hadamard-Cartan für Mannigfaltigkeiten nicht-positiver Krümmung sowie des Satzes von Synge. Auch eine untere Schranke für den Injektivitätsradius der Exponentialabbildung auf einer kompakten einfach zusammenhängenden Mannigfaltigkeit wird abgeleitet; diese Abschätzung hat viele Anwendungen, so etwa eine Homotopieversion des Sphärensatzes und einen elementaren Beweis der Fundamentalschätzung des Injektivitätsradius auf  $1/4$ -gedrückten Mannigfaltigkeiten. Es folgt ein vereinfachter Beweis des Alexandrov-Topogonovschen Satzes (dem der Rauchsche Vergleichssatz vorangestellt wird); damit hat man ein wichtiges Hilfsmittel zum Beweis des Sphärensatzes, der einen Höhepunkt bildet. In dem ihm gewidmeten Abschnitt werden auch andere Charakterisierungen der Sphäre gegeben und ein auf Berger zurückgehender Starrheitssatz bewiesen, der besagt, daß eine  $1/4$ -gedrückte einfach zusammenhängende Mannigfaltigkeit mit minimalem Durchmesser isometrisch zu einem symmetrischen Raum des Ranges 1 ist. Mit dem Studium der Geometrie auf nichtkompakten vollständigen endlichdimensionalen Mannigfaltigkeiten nichtnegativer Krümmung wird der Teil des Buches abgeschlossen, welcher das in traditionellen Kursen über Riemannsche Geometrie behandelte Material enthält.

Das letzte Kapitel behandelt ein Thema, welches üblicherweise nicht in Monographien über Differentialgeometrie erörtert wird; nach Auffassung des Verfassers sollte es jedoch nicht den Spezialisten der Ergodentheorie oder der Hamiltonschen Systeme überlassen bleiben, sondern näher an der Riemannschen Geometrie verankert werden, was auch geschichtlich motiviert

Der Verlag ist zu beglückwünschen, daß er seine neue Reihe „Studies in Mathematics“ mit einer solch vorzüglichen Abhandlung eröffnet. Möge es ihm gelingen, die durch den ersten Band gesteckten Maßstäbe und geweckten Erwartungen auch in Zukunft zu erfüllen.

Erlangen

K. Strambach

Hector, G., Hirsch, U., *Introduction to the Geometry of Foliations, Part A* (Aspects of Mathematics, Vol. E1), Braunschweig – Wiesbaden: Vieweg 1981, xi + 234 S., br., DM 34,—

Hector, G., Hirsch, U., *Introduction to the Geometry of Foliations, Part B* (Aspects of Mathematics, Vol. E3); Braunschweig – Wiesbaden: Vieweg 1983, x + 298 S., br., DM 52,—

Monographien über Blätterungen sind außerordentlich selten, und sieht man sich nach Lehrbüchern über Blätterungen um, so gibt es seit Reeb's these von 1952 (und diese kann man eigentlich auch nicht als Lehrbuch ansehen) erst 1979 das in portugiesischer Sprache geschriebene sehr attraktive Büchlein von C. Camacho und A. Lins Neto: „Teoria geométrica des folheações“ (englische Übersetzung beim Birkhäuser Verlag im Erscheinen). Diese Lücke wird nun, was die geometrische Theorie der Blätterungen betrifft, von dem zweibändigen Buch von G. Hector und U. Hirsch gründlich ausgefüllt.

Der Inhalt der beiden Bände läßt sich in drei Teile trennen. Das erste Kapitel behandelt 1-dimensionale Blätterungen auf kompakten Flächen. Diese Einschränkung auf den kleinst-dimensionalen nicht trivialen Fall hat den Vorteil, in sehr anschaulicher Weise die später in größerer Allgemeinheit behandelten Begriffe zu erläutern und zu motivieren. Außerdem ist hier der Bezug der Blätterungstheorie zur qualitativen Theorie von Differentialgleichungen besonders deutlich. Dieses erste Kapitel ist recht lang und bietet genügend Stoff für eine einsemestrige Vorlesung, entweder als Ergänzung zu einer Vorlesung über gewöhnliche Differentialgleichungen oder als Einführung in die Blätterungstheorie. Behandelt werden in diesem Kapitel folgende Fragen: Existenz von Blätterungen, ihre Beziehung zu Vektorfeldern, Reeb-Komponenten, Holonomie, Turbulisierung, topologische Dynamik, Denjoy-Theorie, strukturelle Stabilität und die Klassifikation strukturell stabiler Blätterungen. Dies sind alles Begriffe, die später im zweiten Band für allgemeine Kodimension-Eins-Blätterungen wieder aufgegriffen werden. Ein besonderer Verdienst der Autoren ist es, daß sie auch den  $C^0$ -Fall mitbehandeln, der in der Literatur nur spärlich oder gar nicht behandelt ist.

Im zweiten Teil des Buches, in den Kapiteln II und III werden die grundlegenden Begriffe der Blätterungstheorie vorgestellt. Hier sind die Autoren außerordentlich gründlich. Dies hat den Nachteil, daß sich ein Leser, der sich schnell über die Grundlagen der Blätterungstheorie informieren will, durch einen vielfältigen Begriffsapparat durcharbeiten muß. Es hat

Autoren über die bekannten Ergebnisse hinaus und schaffen Neues. So läßt sich zum Beispiel aus den Ergebnissen des Kapitel VII leicht der Satz von Novikov über die Existenz kompakter Blätter auch für den  $C^0$ -Fall beweisen. Es würde hier zu weit führen, die behandelten Themen aufzulisten. Dazu schaue man sich am besten das Inhaltsverzeichnis an. Erwähnen möchte ich nur, daß die Autoren von Anfang an für Beweise und Begriffe sich geschickt zu Nutze machen, daß jede Kodimension-1-Blätterung eine transversale 1-dimensionale Blätterung besitzt (auch im  $C^0$ -Fall!). Dies macht viele Beweise durchsichtiger.

Insgesamt hat man am Ende des zweiten Bandes das Gefühl, eine ganze Menge über Kodimension-1-Blätterungen gelernt zu haben. Die Darstellung ist trotz aller Sorgfalt an keiner Stelle langwierig oder umständlich, an manchen Stellen ist man sogar gespannt, wie es weiter geht und zu welchen Ergebnissen man geführt wird. Für jeden, der über die Grundkenntnisse hinaus sehen will, mit welchen Fragen man sich in der Theorie der Kodimension-1-Blätterungen befaßt und welche Wege man zu ihrer Untersuchung gefunden hat, ist dieser Band zu empfehlen.

Bleibt zu hoffen, daß der dritte Band über Blätterungen auf 3-Mannigfaltigkeiten vielleicht doch noch geschrieben wird.

Berlin

E. Vogt

(AS) Ablowitz, M. J., Segur, H., *Solitons and the Inverse Scattering Transform* (SIAM Studies in Applied Mathematics, No. 4), Philadelphia: SIAM 1981, x + 425 p., \$ 54.50

(NMPZ) Novikov, S., Manakov, S. V., Pitaevskii, L. P., Zakharov, V. E., *Theory of Solitons* (Contemporary Soviet Mathematics Series), New York: Plenum Publ. 1984, 272 p., \$ 49.50

(TN) Taniuti, T., Nishihara, K., *Nonlinear Waves* (Monographs & Studies, No. 15), Boston – London – Melbourne: Pitman Publ. Ltd. 1983, 320 p., \$ 65.50

(R) Rajaraman, R., *Solitons and Instantons: An Introduction to Solitons and Instantons in Quantum Field Theory*, Amsterdam – New York – Oxford: North-Holland Publ. Comp. 1982, vii + 409 p., \$ 87.25

(RS) Rebbi, C., Soliani, G. (ed.), *Solitons and Particles*, Singapore: World Scientific Publishers 1984, xiii + 819 p., hardbound, \$ 75.00, paperback, \$ 33.00

Angeregt durch die Entdeckung der erstaunlichen Rekurrenzeigenschaften der Korteweg-de Vries-Gleichung (Zabusky und Kruskal 1965) wurde in den letzten zwanzig Jahren ein faszinierendes Gebiet der Mathematischen Physik erschlossen, dessen Fortschritte und Entwicklungen sich nun in der Lehrbuch- bzw. Monographien-Literatur niederzuschlagen beginnen. Aus solchen Veröffentlichungen habe ich fünf Titel zur Besprechung ausgewählt; die meisten von hervorragenden Fachleuten geschrieben, deren Beiträge das Gebiet entscheidend vorangebracht haben. Die augenfällige Gemeinsamkeit aller fünf Titel besteht darin, daß der Begriff des „Solitons“ eine zentrale Rolle einnimmt. Trotz dieser thematischen Nähe dokumentieren die Bücher aber doch die ungeheure Spannweite des Gebietes durch unterschiedlichste Zeilsetzun-

---

gen und Inhalte (von Methoden und Betrachtungsweisen ganz zu schweigen). Die wirkliche Vielfalt ist aber noch größer; wenn man bedenkt, daß auch diese fünf Bücher zusammengenommen nur ein kleines Segment der „Solitontheorie“ abdecken.

Die Monographien (AS) und (NMPZ) wurden ausgewählt, weil sie in der zukünftigen Lehrbuchliteratur sicher zu den Klassikern des Faches zählen werden. (TN) finde ich besonders interessant wegen der reizvollen Querverbindungen zur nichtlinearen Wellentheorie (einschließlich ihres physikalischen Hintergrundes), und (R) wurde in diese Sammlung aufgenommen, weil der Inhalt (trotz gleich klingenden Titels) mit den anderen Büchern wenig oder fast gar

nichts gemeinsam hat. Außerdem deutet dieser Band an, in welchem Ausmaß der Solitonbegriff heute große Teilgebiete der Theoretischen Physik durchweht, wodurch Vielfalt, Vitalität und

---

Neuerscheinung hinzugefügt.

Hauptanliegen von *Ablowitz-Segur* (AS) ist eine möglichst vollständige Beschreibung der Inversen Streutheorie (IST) zur Lösung gewisser nichtlinearer Evolutionsgleichungen. Aber das Buch bietet viel mehr! Es behandelt, wenn auch manchmal sehr kurz, einen großen Teil der wichtigsten Entdeckungen und Methoden aus dem blühenden Gebiet vollständig integrierbarer Flüsse auf unendlich dimensional Mannigfaltigkeiten.

In Kapitel 1, welches mehr oder weniger das Kernstück des Buches darstellt, wird ein kurzer lesenswerter Einblick in die Geschichte des Gebietes gewährt und dann eine knappe, aber trotzdem präzise, und detaillierte Einführung in die Inverse Streumethode gegeben. Selbst wer das Material weitgehend kennt (zum Beispiel durch die inzwischen berühmte AKNS-Arbeit von Ablowitz-Kaup-Newell-Segur aus 1974) wird diese konzentrierte Lektüre von etwa 80 Seiten mit Vergnügen und Gewinn zum erneuten Studium nutzen können.

Kapitel 2 ist der Inversen Streutransformation im Zusammenhang mit Eigenwertaufgaben höherer Ordnung, mit diskreten Problemen und mit periodischen Randbedingungen gewidmet.

Für den Anfänger ist Kapitel 3 die Fundgrube, in welcher ihm eine ziemlich vollständige Darstellung der nichtlinearen Strukturen der durch IST linearisierten Systeme präsentiert



Im Gegensatz zu Kapitel 1, welches mehr durch die Eleganz der Darstellung als durch inhaltliche Originalität beeindruckt, begeben sich die Autoren in Kapitel 2 (Periodische Lösungen) auf anspruchsvolleres mathematisches Terrain. Da die übliche Auswertung im Unendlichen

Das Buch besteht im wesentlichen aus drei Hauptteilen.

Im ersten Teil (Kapitel 1 und 2) werden nichtlineare hyperbolische Gleichungen behandelt. Dissipativität und Dispersion werden ausgiebig diskutiert. Besonderer Wert wird auf Schockwellen gelegt. Die Solitärwelle wird als Balancephänomen zwischen Dispersion und der auf die Nichtlinearität zurückgehenden Aufsteilungseffekte interpretiert. (Solche Diskussionen fehlen in (NMPZ) und (AS) entweder ganz oder treten zumindest deutlich in den Hintergrund). An vielen Beispielen (Hydrodynamik, Gasdynamik etc.) werden die eingeführten Begriffe und Methoden dann verdeutlicht. Die beiden Kapitel sind vorzüglich geeignet, die Grundlagen des heutigen Apparats zur Lösung spezieller nichtlinearer Systeme vor physikalischem Hintergrund zu beleuchten.

Im zweiten Teil (Kapitel 3) werden asymptotische Methoden vorgestellt, um allgemeine nichtlineare Phänomene auf die behandelbaren speziellen nichtlinearen Gleichungen zurückzuführen. Ein sicher verdienstvolles Kapitel, welches mir selbst allerdings wegen der innewohnenden geringen Systematik wenig gegeben hat.

Im letzten, und umfangreichsten Teil, wird dann die inverse Streutheorie behandelt. Die Miura-Transformation zwischen Korteweg-de Vries-Gleichung und deren modifizierter Form wird als Einstieg zum Lax-Paar benutzt. Danach wird ein kurzer Einblick (ohne allzu viele Details) in die Inverse Streumethode zur Lösung der KdV gegeben, und der übliche Weg zur Herleitung von Erhaltungssätzen, Hamiltonstruktur und vollständiger Integrierbarkeit (bei periodischen Lösungen) wird besprochen. Als zweites Beispiel für die beschriebenen Methoden wird die nichtlineare Schrödinger-Gleichung explizit und mit fast allen Details behandelt, und für die Sinus-Gordon-Gleichung wird – exemplarisch – der Zusammenhang zwischen inverser Streutheorie und Existenz von Bäcklund-Transformationen aufgezeigt (was in vielen Büchern leider ausgelassen ist). Den Abschluß des Buchs bildet eine Beschreibung von Hirotas bilinearer Methode, an Beispielen natürlich, was aber dem Ziel des Buches entspricht und was an dieser Stelle wohl auch nicht anders möglich ist. Sehr hilfreich für den Leser ist, daß er von Zeit zu Zeit auf Übungsaufgaben stößt, die es ihm gestatten sein Verständnis zu überprüfen.

Insgesamt gesehen: Ein schönes Buch; zwar nicht so sehr für den Spezialisten geeignet, aber umso mehr für denjenigen, der sich für die Korteweg-de Vries-Gleichung (und ihr Umfeld) mehr am Rand interessiert, und der die zugehörige Theorie – wenigstens beispielhaft – in einen größeren Rahmen eingebettet sehen möchte.

Das Buch von *Rajaraman* fällt aus dem Rahmen der bisher besprochenen Bände. Um es gleich zu sagen: Die meisten Mathematiker werden es nach der Lektüre der ersten 50 Seiten sicher unbefriedigt zur Seite legen (wenn sie überhaupt soweit kommen). Was schade wäre, denn das Buch gewährt einem viele Einblicke in ein sich im Umbruch befindendes vitales Teilgebiet der Quantenfeldtheorie. Doch einen Stoßseufzer kann ich nicht unterdrücken: Bei dieser Lektüre wird einem schmerzhaft bewußt, wie weit sich Mathematiker und Physiker voneinander entfernt haben, bezüglich Stil, Betrachtungsweise, Argumentation, ja des gesamten Denkens. Nostalgisch habe ich beim Lesen des Textes an die großen Mathematiker und Physiker in der ersten Hälfte unseres Jahrhunderts gedacht, deren Bücher häufig Mathematiker wie Physiker gleichsam faszinierten und ihnen gemeinsam unendlich viel gegeben haben.

Natürlich will *Rajaraman* auch gar keinen mathematischen Text schreiben „No claim is made of mathematical rigour“ und elementar soll es auch sein „This is by design, an elementary level text.“ Aber etwas soll der Leser doch wissen: „The reader needs to be well versed in the standard results of perturbation quantum field theory, gauge theory, renormalisation as a prerequisite“. Und auch das reicht noch nicht, denn häufig werden im Vorübergehen Argumente gebracht, die der Leser eigentlich nur goutieren kann, wenn er diese oder jene Theorie doch noch etwas genauer kennen würde. Ich will gar nicht einmal behaupten, daß es ein sehr komplizierter Text ist, aber der Autor macht es dem Leser manchmal sehr schwer, den einfachen, und zum Teil sehr schönen, Gedankengängen zu folgen. Aber genug gelästert, was steht drin?

Um dies zu sagen, muß ich zuerst einmal eine babylonische Sprachverwirrung in bezug auf den Begriff „Soliton“ aufklären. Was nämlich für manchen Physiker ein Soliton ist, ist es für den Mathematiker noch längst nicht. Mathematiker würden ein Soliton als die Lösung eines unendlich dimensionalen Flusses auf gewissen endlich-dimensionalen invarianten Mannigfaltigkeiten bezeichnen. Physiker sehen das anders. Für sie ist eine Solitonenlösung eine solche mit lokalisierbarer integrierbarer Energiedichte, die für  $t \rightarrow \pm\infty$  in Energiedichtepakete zerfällt, welche sich ohne Formänderung mit charakteristischen Geschwindigkeiten bewegen. Und zwar müssen die für  $+\infty$  auftretenden charakteristischen Geschwindigkeiten mit denen für  $-\infty$  übereinstimmen (Rekurrenzphänomen). Beide Definitionen stimmen zum Beispiel bei der KdV für Lösungen, die im Unendlichen hinreichend schnell verschwinden, überein. Bei komplizierteren Systemen (z. B. mehrkomponentigen) braucht dies aber nicht mehr so zu sein. Doch die Physiker sind sich keineswegs einig darüber, was Solitonen sind, denn häufig werden auch Lösungen, deren Energiedichte Solitärwellencharakter haben, schon als Solitone bezeichnet. Rajaraman weist auf diesen Mißbrauch der Bezeichnungsweise frühzeitig hin, um den Mißbrauch danach kräftig mitzutreiben. Außer bei der eindimensionalen Sinus-Gordon-Gleichung, die für die Ziele des Buches gar nicht allzu interessant ist, kommen kaum Gleichungen mit Solitonenlösungen vor, sondern nur Energiedichten mit Solitärwellenverhalten, und darunter hauptsächlich auch nur die statischen (aber diese in höheren Dimensionen). Was soll also das Ganze? Nun wenn der Soliton-Fan sich nach den ersten 100 Seiten noch nicht abgewandt hat, so erklärt der Autor es ihm: Weil nämlich statische analytische Lösungen von Systemen in  $(n + 1)$  Dimensionen bei Einführung einer imaginären Koordinatenachse in dynamische Lösungen für Systeme in  $n$  Raumdimensionen und einer Zeitdimension übergehen (Instantonen, oder fast solche). Davon handelt dann das Buch, und für die so gewonnenen expliziten klassischen Lösungen dynamische Systeme wird dann (semiklassische) Quantenfeldtheorie durch Einführung von Fluktuationen um die Energieminima getrieben.

Sicher keine ganz abgeschlossene Theorie, aber eine Theorie, deren gedankliche Vitalität anziehend wirken kann. Insgesamt ein interessantes Buch, auch für den Mathematiker, aber da wohl nur für den Spezialisten.

Doch möchte ich diese Besprechung nicht schließen, ohne auf eine verdienstvolle Publikation von *Rebbi-Soliani* hinzuweisen. Hier handelt es sich nicht um eine zusammenhängende Monographie, sondern um eine Sammlung der wichtigsten Originalarbeiten des Gebietes. Natürlich läßt sich über die Frage, welche Arbeiten für eine solche Sammlung ausgewählt werden müssen, immer streiten, aber im Großen und Ganzen stimmt die Auswahl hier und gibt einen weiten Überblick über das gesamte Fachgebiet. Dem wurde dann eine kenntnisreiche Einleitung, in der die wichtigsten Begriffe erklärt werden, vorangestellt. Ein gelungener Band, der beim Einstieg in das Gebiet unentbehrlich sein wird. Aber auch dem Fachmann wird er als Nachschlagewerk unersetzlich sein.

Paderborn

B. Fuchssteiner

Freed, D. S., Uhlenbeck, K. K., *Instantons and Four-Manifolds* (Mathematical Sciences Research Institute Publications, Vol. 1), Berlin – Heidelberg – New York – Tokyo: Springer-Verlag 1984, 43 fig., x + 232 p., hard cover, DM 48,-

The theorem of Simon Donaldson, that the positive definite intersection form of a smooth, compact, simply connected 4-manifold must be diagonalizable over the integers, and its corollary that there are different differentiable structures on Euclidean 4-space, took the mathematical world by surprise in 1982.

When the results became known, they provoked seminars in various corners of the world, devoted to understanding the proof and the techniques involved. The situation was analogous to Yau's proof of the Calabi conjecture in 1976, where seminars in Palaiseau resulted in the Société Mathématique de France publication "Preuve de la conjecture de Calabi" (Asterisque 58, 1978).

The book under review, "Instantons and Four-manifolds", derives from seminars given at the Mathematical Sciences Research Institute in Berkeley, but is more than a collection of individual contributions, focussing on different aspects of the problem: it gives instead a unified presentation of Donaldson's proof, with some modifications, extensions and background material. Also, its origins in California rather than Paris lend it an informal air which helps the reader.

The reader is, nevertheless, faced with some hard analysis. The ad hoc methods of Donaldson are sometimes set in the context of the mainstream of mathematics, as applications of such-and-such a technique or special cases of something else, but the essential estimates which make everything work have to be established and this takes a toll on the less analytical reader. The fact that there are 50 carefully annotated constants  $c_n$ , 8 or so  $\lambda_n$ 's and a handful of  $M$ 's and  $K$ 's are evidence enough of the complexity and interrelationships of the methods involved.

Of the modifications to the original proof, most are relatively minor, although one aspect is much more satisfactory. Donaldson got around the problem that the moduli space of instantons is not in general a manifold by perturbing the actual equations. Freed and Uhlenbeck show instead that a perturbation of the metric will in fact give a smooth moduli space. Also, in proving decay estimates in the Collar theorem (one of the most technically difficult parts of the proof) the authors' methods yield a new and simpler proof of the Removable Singularities theorem of Uhlenbeck. These aspects lead the optimistic reader to hope that this is not the final version of the theory, and that in time, a more economical rearrangement of the estimates into manoeuvrable blocks may lead to a wider understanding and wider use of the techniques.

Those techniques are not, however, static and Donaldson is at this moment carrying through further applications of gauge theory to the topology of 4-manifolds. It is here that one notices a somewhat different attitude in the book: it focusses on a single theorem and its implications in conjunction with Freedman's work on topological 4-manifolds. Indeed, moving out of the basic framework of positive definite intersection forms, vanishing first Betti number, and gauge group  $SU(2)$  leads to "real trouble" according to the authors. The extension of the methods they give is restricted to the work of Fintushel and Stern which leads to part of Donaldson's theorem, but using a simpler moduli space which avoids some of the difficult analysis. It is in fact likely that using more analysis rather than less, and in different circumstances, we may learn more about smooth manifolds and the way in which the flexibility of a differentiable manifold which seems so implicit in its definition is constrained by the rigidity of the fields which are allowed to exist upon it.

It is here that one senses a difference in the circumstances surrounding Yau's theorem and Donaldson's. When Yau proved the Calabi conjecture, a whole range of problems in algebraic geometry which were waiting to be solved could be attacked. Donaldson's use of gauge theory came out of the blue and it is still too soon to visualise the whole range of results it may give rise to. In any case, this book is an excellent place to start.

Métivier, M., *Semimartingales. A Course on Stochastic Processes* (Studies in Math., vol. 2), Berlin – New York: Walter de Gruyter 1982, xii + 287 p., cloth, DM 88,—

Die berühmten Artikel von P.-A. Meyer über die Zerlegung von Supermartingalen 1962/63 haben einen mächtigen Impuls für die weitere Entwicklung der im wesentlichen von J. L. Doob gegründeten Martingalthorie gegeben. Heutzutage ist diese einer der wichtigsten und sich am intensivsten entwickelnden Bestandteile der Wahrscheinlichkeitstheorie. Darum ist jedes gute Buch, welches die moderne Forschung auf diesem Gebiet zusammenfaßt, sehr willkommen. Zu solchen Büchern gehört auch die Monographie „Semimartingales“ von M. Métivier. Insbesondere ergänzt sie die fundamentalen zwei Bände „Probabilités et potentiel“ von C. Dellacherie und P.-A. Meyer (Hermann 1975/80) im Bereich unendlich-dimensionaler Semimartingale im Geiste des Buches „Stochastic integration“ von M. Métivier und J. Pellaumail (Academic Press 1980).

Das besprochene Buch besteht aus zwei Teilen. Teil I (Kapitel 1–4) enthält die notwendigen Grundlagen aus der Martingalthorie. Teil II (Kapitel 4–8) ist der stochastischen Integration bezüglich Semimartingale und ihren Anwendungen – in erster Linie auf stochasti-

– Meßbarkeit und Regularität stochastischer Prozesse; Wiener- und Poisson-Prozesse als Beispiele; wohl-meßbare und vorhersagbare Mengen; Stopzeiten; zulässige Maße; der Satz vom vorhersagbaren Schnitt (Kapitel 1).

– Martingale und Quasimartingale mit Werten in Banachräumen; Ungleichungen und Konvergenz von Quasimartingalen; reguläre Modifikationen; Konvergenz vektorwertiger Quasimartingale und die Radon-Nykodim-Eigenschaft; Anwendungen auf die Robbins-Monro- und Kiefer-Wolfowitz-Verfahren (Kapitel 2)

**Bensoussan, A., Stochastic Control by Functional Analysis Methods** (Studies in Math. and its Appl., vol. 11), Amsterdam – New York: North-Holland Publ. Comp. 1982, xvi + 410 p., Dfl. 125.00

Das Buch befaßt sich mit einigen Hauptergebnissen der stochastischen Kontrolltheorie. Es wird dabei der mit der Technik partieller Differentialgleichungen verbundene analytische Zugang benützt, zum Unterschied von den wahrscheinlichkeitstheoretischen Methoden, denen stochastische Integration und exzessive Charakterisation der Verlustfunktion zugrunde liegen.

Kapitel I enthält die notwendigen Grundlagen aus der Theorie stochastischer Integration bzgl. eines Wiener'schen Prozesses. Es werden die Konstruktion des Integrals beschrieben und seine wichtigsten Eigenschaften aufgelistet. Einige klassische Existenz- und Eindeutigkeitsätze für stochastische Differentialgleichungen sowie der Girsanow-Satz und dessen Folgerungen werden kurz dargelegt.

Kapitel II beinhaltet die notwendigen Ergebnisse der Theorie partieller Differentialgleichungen. Hier werden Eigenschaften von Sobolew-Räumen und Räumen Hölderscher Funktionen beschrieben. Mit Hilfe der Variationstechnik wird die Frage der Existenz und Eindeutigkeit von Lösungen des Dirichlet-Problems für elliptische Gleichungen behandelt. Mit der Galerkin-Methode wird die Existenz und Eindeutigkeit der Lösungen parabolischer Gleichungen be-

wiesen und die Regularität in Termen „gewichteter“ Sobolew-Räume untersucht. Auch das Cauchy-Problem wird behandelt.

Kapitel III ist dem Martingalproblem gewidmet. Die notwendigen Ergebnisse und Begriffe der Martingaltheorie (im stetigen Fall) werden aufgelistet: die Orthogonalität, quadratische Variation, eine Skizze der Konstruktion des Integrals bzgl. Martingale, die Darstellung eines Martingals als stochastisches Integral bzgl. eines Wiener'schen Prozesses. Es wird das Martingalproblem im Geiste von D. Stroock-S. R. S. Varadhan und – im Markowschen Fall – in Termen des Generators formuliert. Der Zusammenhang mit stochastischen Differentialgleichungen wird angedeutet. Einige partielle Existenz- und Eindeutigkeitsresultate für das Martingalproblem werden angegeben.

Kapitel IV betrachtet das Kontrollproblem für eine stochastische Differentialgleichung mit dem Kontrollprozeß nur in der Drift im Falle vollständiger Information. Dieses Problem wird zuerst rein analytisch in Termen partieller Differentialgleichungen formuliert, und in dieser

werden mit Hilfe von Variationsungleichungen gelöst, für welche Existenz- und Eindeutigkeitsätze bewiesen werden. Es wird auch die Problemstellung in Termen Markowscher Halbgruppen besprochen. Darüber hinaus werden die Approximationslösungen des Stopproblems durch die Diskretisierung der Zeit betrachtet.

Kapitel VIII ist dem impulsiven Kontrollproblem – einer Verallgemeinerung des Stopproblems – gewidmet. Es werden kontrollierbare Prozesse folgender Form betrachtet: ein Diffusionsterm plus unabhängige Sprünge zu sukzessiven Stopzeiten. Das Problem besteht in einer optimalen Wahl der Stoptzeit- und entsprechenden Störungsfolgen. Dieses Problem wird auf die

Lösung einiger Variationsungleichungen zurückgeführt.

Jedes Kapitel ist mit einem kurzen Kommentar und aktuellen Referenzen versehen.

Die Darlegung ist zu einem großen Teil sehr technisch. Dies macht das Buch für Leser, welche mit den analytischen Problemstellungen weniger vertraut sind, nicht leicht lesbar.

Es gibt Schreibfehler, doch sind sie meistens leicht zu erkennen, sowie ein paar unübliche Ausdrücke, wie z. B. „denumerable“ statt „separable“ in bezug auf metrische Räume.

**Shiryayev, A. N., Probability** (Graduate Texts in Mathematics, Vol. 95), Berlin – Heidelberg – New York – Tokyo: Springer-Verlag 1984, 66 fig., xi + 577 p., cloth, DM 148,—  
 Der vorliegende Text ist die Übersetzung eines 1979 in russischer Sprache erschienenen Buches. Es ist aus einer dreisemestrigen Vorlesung über Wahrscheinlichkeitstheorie hervorgegangen. Demgemäß besteht das Buch aus drei Teilen.

Im ersten Teil wird elementare Wahrscheinlichkeitstheorie behandelt, wobei mit dem Wort elementar ausgedrückt werden soll, daß keine spezifisch maßtheoretischen Kenntnisse vorausgesetzt werden. Die Themenauswahl kann als besonders geglückt bezeichnet werden. Bewundernswert ist das Geschick, mit dem der Autor auch in diesem Abschnitt an tiefere Resultate heranführt. Als Beispiel sei hier etwa der Satz von McMillan genannt. Neben Folgen unabhängiger Zufallsvariablen werden Martingale und Markovketten mit endlich vielen Zuständen behandelt. Grundlegende Fragestellungen der mathematischen Statistik werden angeschnitten.

Auf diese Einführung in die Wahrscheinlichkeitstheorie folgt ein maßtheoretischer Teil. Zu diesem zweiten Abschnitt gehören, was die Zuordnung im Vorlesungszyklus anbetrifft, die anschließenden Kapitel über schwache Konvergenz von Wahrscheinlichkeitsmaßen und den zentralen Grenzwertsatz, sowie über Konvergenz mit Wahrscheinlichkeit 1 und die Gesetze der großen Zahlen.

Im dritten Teil des Buches werden zunächst stochastische Prozesse und dann die Ergodentheorie und die  $L^2$ -Theorie behandelt. Darauf folgt ein umfangreiches Kapitel über Martingale mit diskreter Zeit. Im letzten Kapitel werden Markovketten mit abzählbarem Zustandsraum diskutiert.

d. h. Ergodentheorie und  $L^2$ -Theorie, behandelt. Darauf folgt ein umfangreiches Kapitel über Martingale mit diskreter Zeit. Im letzten Kapitel werden Markovketten mit abzählbarem Zustandsraum diskutiert.

Das klar gegliederte Buch kann als Vorlage für einen Teil eines mehrsemestrigen Kurses über Wahrscheinlichkeitstheorie empfohlen werden. Einen solchen Kurs mit einer elementaren Vorlesung im obigen Sinne zu beginnen, mag zwar unökonomisch erscheinen, hat sich aber didaktisch bewährt. Auf keinem anderen Weg läßt sich so gut motivieren und der enge Bezug zu Anwendungen herstellen. Im fortgeschrittenen Teil einer solchen Vorlesungsreihe besteht eine gewisse Freiheit in der Wahl der Themen. Mancher Dozent wird sich etwa in der zweiten Hälfte des dritten Semesters an Invarianzprinzipien und stochastische Prozesse mit stetiger Zeit heranarbeiten. Diese sind im vorliegenden Text ausgespart. Dafür verdienen die Kapitel über  $L^2$ -Theorie und über Martingale besonders erwähnt zu werden. Schätzer für Spektraldichten und Kalman-Bucy-Filter findet man im ersteren. Das Kapitel über Martingale enthält außer den üblichen Konvergenzsätzen eine Reihe interessanter Resultate über Konvergenzmengen.



# Teubner Studienbücher zur Statistik

## Grundkurs Stochastik

Eine integrierte Einführung in Wahrscheinlichkeitstheorie und Mathematische Statistik

Von Dr. rer. nat. K. Behnen, Prof. an der Universität Hamburg  
und Dr. rer. nat. G. Neuhaus, Prof. an der Universität Hamburg  
376 Seiten mit 33 Bildern, 253 Aufgaben und zahlreichen Beispielen. Kart. DM 36,—

### Optimale Wareneingangskontrolle

Das Minimax-Regret-Prinzip für Stichprobenpläne beim Ziehen ohne Zurücklegen  
Von Dr. rer. nat. habil. E.v. Collani, Priv.-Doz. an der Universität Würzburg  
150 Seiten mit 3 Bildern und 18 Tabellen. Kart. DM 29,80

### Prinzipien der Stochastik

Von Dr. rer. nat. H. Dinges, Prof. an der Universität Frankfurt  
und Dr. rer. nat. H. Rost, Prof. an der Universität Heidelberg  
294 Seiten mit 34 Bildern, 98 Aufgaben und zahlreichen Beispielen. Kart. DM 34,—

### Maß- und Integrationstheorie

Eine Einführung

Von Dr. rer. nat. K. Floret, Prof. an der Universität Oldenburg  
360 Seiten mit 302 Übungen. Kart. DM 32,—

### Stochastische Methoden des Operations Research

Von Dr. phil. J. Kohlas, Prof. an der Universität Freiburg i. Ue./Schweiz  
192 Seiten mit 107 Beispielen. Kart. DM 25,80

### Einführung in die Statistik

Von Dr. rer. nat. J. Lehn, Prof. an der Technischen Hochschule Darmstadt  
und Dr. rer. nat. H. Wegmann, Prof. an der Technischen Hochschule Darmstadt  
220 Seiten mit zahlreichen Bildern und Beispielen. Kart. DM 24,80

### Spieltheorie

Eine Einführung in die mathematische Theorie strategischer Spiele

Von Dr. rer. nat. B. Rauhut, Prof. an der Technischen Hochschule Aachen, Dr. rer. nat.  
N. Schmitz, Prof. an der Universität Münster und Dr. rer. nat. E.-W. Zachow, Hamburg  
400 Seiten mit 35 Bildern, 50 Aufgaben und zahlreichen Beispielen. Kart. DM 32,—

### Informationstheorie

Eine Einführung

Von Dr. phil. F. Topsøe, Universität Kopenhagen  
88 Seiten mit 22 Bildern und 21 Tabellen. Kart. DM 16,80

### Statistische Qualitätskontrolle

Eine Einführung

Von Dr. rer. nat. W. Uhlmann, Prof. an der Universität Würzburg  
2. Aufl. 292 Seiten mit 35 Bildern, 10 Tabellen und 93 Aufgaben. Kart. DM 38,—

### Vorlesungen zur Mathematischen Statistik

Von Dr. rer. nat. habil. W. Winkler, Prof. an der Technischen Universität Dresden  
276 Seiten mit 6 Bildern. Kart. DM 26,80

Preisänderungen vorbehalten



**B. G. Teubner Stuttgart**

---

new

Proceedings of the Workshop

# The Road-Vehicle-System and Related Mathematics

March 18–22, 1985 Lambrecht

Edited by Prof. Dr. H. NEUNZERT, University of Kaiserslautern, W.-Germany

1985. 284 pages. 16,2 x 23,5 cm. ISBN 3-519-02616-3. Paper DM 52,—

## Contents

### NUMERICAL PROBLEMS IN TREATING VEHICLES AS DETERMINISTIC MECHANICAL SYSTEMS

W. Kortüm; C. Führer: Numerical Problems in Modelling and Simulation of Vehicles as Mechanical Multibody Systems / C. Führer: On the Description of Constrained Mechanical Systems by Differential/Algebraic Equations / W. Hauschild: Approximate Methods in the Analysis of Nonlinear Vehicle System Dynamics / P. Rentrop: Numerische Probleme in der Fahrzeugdynamik / J. Wick: Modellierung eines Karosserie-Achse-Rad-Systems

### OSCILLATIONS OF MECHANICAL SYSTEMS

K. Kelkel: Greensche Funktion und Impedanz bei Schwingungsproblemen / U. Kirchgraber; F. Meyer; G. Schweitzer: Stability of Two-Parameter Families of Linear Periodic Systems / T. Kulig; D. Lambrecht: Resonant Excitation of Turbine Generator Shafts / A. Répaci: Piston-Slap in Alternative Engines: A Mathematical Model / W. Splettstößer: Some Aspects on the Reconstruction of Sampled Signal Functions

### SYSTEM IDENTIFICATION

M. Hazewinkel: Parametrization Problems for Spaces of Linear Dynamical Input-Output Systems / A. K. Louis: An Identification Problem for Linear Dynamical Systems / H. G. Natke: Survey of the Parameter Identification of Elasto-Mechanical Systems / H. Schmidt: Some Examples and Problems of Application of Nonparametric Correlation and Spectral Analysis / E. Walter; Y. Lecourtier; A. Raksanyi: Practical Methods for Knowing whether Parametric Models are Identifiable and/or Distinguishable / E. Walter; L. Pronzato: A General-Purpose Global Optimizer and its Application to Modelling / W. Wedig: Parameter Estimation and Process Identification / J. C. Willems: From Time Series to Linear System

### RELIABILITY AND DURABILITY OF SYSTEM COMPONENTS

J. Grasman: Estimates of Large Failure Times from the Theory of Stochastically Perturbed Dynamical Systems with and without Feedback / W. Krüger: Simulation Stochastischer Prozesse für den Lebensdauernachweis beim Pkw / J. D. Petersen: Evaluating Durability of Passenger Car Components: Measurement – Calculation – Simulation / R. Viertl: Reliability Estimation Using Bayesian and Classical Nonparametric Accelerated Life Testing Models



**B. G. Teubner Stuttgart**

---

# Mathematische Methoden in der Technik

Herausgegeben von

Prof. Dr. rer. nat. Jürgen Lehn, Technische Hochschule Darmstadt

Prof. Dr. rer. nat. Helmut Neunzert, Universität Kaiserslautern

o. Univ.-Prof. Dr. rer. nat. Hansjörg Wacker, Universität Linz

Die Texte dieser Reihe sollen die Anwender der Mathematik — insbesondere die Ingenieure und Naturwissenschaftler in den Forschungs- und Entwicklungsabteilungen und die Wirtschaftswissenschaftler in den Planungsabteilungen der Industrie — über die für sie relevanten Methoden und Modelle der modernen Mathematik informieren. Es ist nicht beabsichtigt, geschlossene Theorien vollständig darzustellen. Ziel ist vielmehr die Aufbereitung mathematischer Forschungsergebnisse und darauf aufbauender Methoden in einer für den Anwender geeigneten Form: Erläuterung der Begriffe und Ergebnisse mit möglichst elementaren Mitteln; Beweise mathematischer Sätze, die bei der Herleitung und Begründung von Methoden benötigt werden, nur dann, wenn sie zum Verständnis unbedingt notwendig sind; ausführliche Literaturhinweise; typische und praxisnahe Anwendungsbeispiele; Hinweise auf verschiedene Anwendungsbereiche; übersichtliche Gliederung, die ein „Springen in den Text“ erleichtert. Die Texte sollen Brücken schlagen von der mathematischen Forschung an den Hochschulen zur mathematischen Arbeit in der Wirtschaft und durch geeignete Interpretationen den Transfer mathematischer Forschungsergebnisse in die Praxis erleichtern. Es soll auch versucht werden, den in der Hochschulforschung Tätigen die Wahrnehmung und Würdigung mathematischer Leistungen der Praxis zu ermöglichen.

**Band 1**

## Numerische Lösung von partiellen Differentialgleichungen der Technik

**Differenzenverfahren, Finite Elemente und die Behandlung  
großer Gleichungssysteme**

Von Prof. Dr. rer. nat. Willi Törnig, Technische Hochschule Darmstadt

Dr. rer. nat. Michael Gieser, Daimler-Benz AG, Stuttgart

Dr. rer. nat. Bernhard Kaspar, Fernmeldetechnisches Zentralamt der Deutschen Bundespost, Darmstadt

# Mathematische Methoden in der Technik (Fortsetzung)

Band 2

## Geostatistik

Eine Einführung mit Anwendungen

Von Prof. Dipl.-Ing. Dr. R. Dutter, Technische Universität Wien  
1985. 159 Seiten. 16,2 × 23,5 cm. ISBN 3-519-02614-7. Kart. DM 32,—

Aus dem Inhalt

Erschließung von Lagerstätten / Statistische Grundbegriffe, Stamm-und-Blatt-Darstellung, Kenngrößen einer Verteilung, theoretische Verteilungen / Regionalisierte Variable, Momente, statistische Annahmen / Das Variogramm, Eigenschaften, Berechnung, Modelle / Varianzen und Regularisierung / Schätzung von Ressourcen, Krige-Schätzer, Punkt-Krigen, Block-Krigen, Universelles Krigen / Simulation von Lagerstätten, bedingte-unbedingte Simulation / Fallstudien

Band 3

## Eigenwertberechnung in den Ingenieurwissenschaften

Mit einer Einführung in die Numerik linearer Gleichungssysteme

Von Prof. Dr. rer. nat. P. Spellucci, Technische Hochschule Darmstadt  
und Prof. Dr. rer. nat. W. Törnig, Technische Hochschule Darmstadt  
1985. 196 Seiten. 16,2 × 23,5 cm. ISBN 3-519-02615-5. Kart. DM 36,—

Aus dem Inhalt

Direkte Lösung linearer Gleichungssysteme / Überbestimmte Systeme / Iterationsverfahren, Konstruktion und Konvergenz / Matrix-Eigenwertprobleme, Definition und grundlegende Eigenschaften / Eigenwertschranken / Vektoriteration und inverse Iteration / Transformation auf Hessenberg- und Tridiagonalform / Berechnung der Eigenwerte und Eigenvektoren von Bandmatrizen und Hessenbergmatrizen / QR- bzw. QL-Verfahren / Simultane Vektoriteration / Lanczos-Verfahren



B. G. Teubner Stuttgart