

88. Band Heft 2
ausgegeben am 18. 4. 1986

DMV

Jahresbericht

der Deutschen Mathematiker-Vereinigung

Herausgegeben von K. Jacobs
unter Mitwirkung von
P. L. Butzer, U. Felgner,
W.-D. Geyer, J. Stoer



B. G. Teubner Stuttgart 1986

Jahresbericht

der Deutschen Mathematiker-Vereinigung

Der „Jahresbericht“ ist das offizielle Veröffentlichungsorgan der Deutschen Mathematiker-Vereinigung, für dessen inhaltliche Gestaltung im Auftrag des Präsidiums der jeweilige Herausgeber zuständig ist. Im „Jahresbericht“ sollen vornehmlich Überblicksartikel über Teilgebiete der reinen und angewandten Mathematik, Nachrufe sowie historische Artikel und Buchbesprechungen veröffentlicht werden.

Manuskripte

Alle für die Schriftleitung des Jahresberichts bestimmten Sendungen (Briefe, Manuskripte, Ankündigung von neuerscheinenden Büchern) sind an Prof. Dr. K. Jacobs zu richten. Bücher, von denen eine Besprechung erfolgen soll, werden bei den Verlagen angefordert. Die Autoren werden gebeten, bei der Vorbereitung ihrer Manuskripte die „Hinweise für Autoren“ am Ende dieses Heftes zu beachten.

Grundsätzlich sollen nur solche Manuskripte eingereicht werden, die nicht gleichzeitig an anderer Stelle zur Veröffentlichung eingereicht oder bereits veröffentlicht worden sind. Mit der Annahme zur Veröffentlichung erwirbt der Verlag das Verlagsrecht zur Vervielfältigung und Verbreitung sowie das Recht der Übersetzung in andere Sprachen.

Bezugsinformationen

Jährlich wird ein Band veröffentlicht, bestehend aus 4 Heften, die vierteljährlich erscheinen. Der Bezug ist nur bandweise möglich.

Der im voraus zahlbare Bezugspreis pro Band beträgt DM 94,- einschließlich Versand. Bestellungen nehmen jede Buchhandlung oder der Verlag entgegen.

Für Mitglieder der DMV ist der Bezug des Jahresberichts im Mitgliedsbeitrag enthalten.

Verlag:

B. G. Teubner, Industriestr. 15, Postfach 80 10 69

D-7000 Stuttgart 80, Tel. (07 11) 7 89 01-0

Verantwortlich für den Anzeigenteil: Walter Hirtz

Das Werk ist urheberrechtlich geschützt. Die dadurch begründeten Rechte, besonders die der Übersetzung, des Nachdrucks, der Bildentnahme, des Druckabdrucks, des Wiedrucks auf photographischem Wege, der

Jahresbericht

der Deutschen Mathematiker-Vereinigung

Inhalt Band 88, Heft 2

1. Abteilung

R. Schaback: Numerische Approximation	51
H. Knörrer: Integrale Hamiltonsche Systeme und Algebraische Geometrie	82

2. Abteilung

Borel, A., Collected Papers (<i>J. Schwermer</i>)	15
Fuks, D. B., Rokhlin, V. A., Beginner's Course in Topology (<i>Th. Bröcker</i>)	17
Arnold, V. I., Geometrical Methods in the Theory of Ordinary Differential Equations (<i>R. Böhme</i>)	18
Iooss, G., Joseph, D. D., Elementary Stability and Bifurcation Theory (<i>D. Flockerzi</i>)	19
Chang, K. W., Howes, F. A., Nonlinear Singular Perturbation Phenomena: Theory and Applications (<i>H. J. Reinhardt</i>)	19
Goering, H., Felgenhauer, A., Lube, G., Roos, H.-G., Tobiska, L., Singularly Perturbed Differential Equations (<i>H. J. Reinhardt</i>)	20
Attouch, H., Variational Convergence for Functions and Operators (<i>K. Deimling</i>)	22
Guillemin, V., Sternberg, S., Symplectic techniques in physics (<i>M. Min-Oo</i>)	23
Hofbauer, J., Sigmund, K., Evolutionstheorie und dynamische Systeme, Mathematische Aspekte der Selektion (<i>K. Jacobs</i>)	24
Smith, J. M., Evolution and the Theory of Games (<i>K. Jacobs</i>)	24

In den nächsten Heften erscheinende Arbeiten:

W. Dickmaier, P. L. Nessel, E. von Wichlowitz: Quantitative Estimates of the Uniform

Boundedness Principle

M. Eiermann, R. S. Varga, W. Niethammer: Iterationsverfahren für nichtsymmetrische Gleichungssysteme und Approximationsmethoden im Komplexen

F. W. Gehring: Uniform Domains and the Ubiquitous Quasidisk

H. Grunsky: Ludwig Bieberbach zum Gedächtnis

W. K. Haymann: Schlichte Funktionen nach de Branges

M. Kneser: Max Deuring 9. 12. 1907 – 20. 12. 1984

C. Müller: Zum 100. Geburtstag von Hermann Weyl

K. Strubecker: Wilhelm Blaschkes mathematisches Werk

E. Zehnder: Periodische Lösungen von Hamiltonschen Systemen

Anschriften der Herausgeber

Prof. Dr. K. Jacobs, Bismarckstr. 11/2, 8520 Erlangen

Prof. Dr. P. L. Butzer, Templergraben 55, 5100 Aachen

Prof. Dr. U. Felgner, Auf der Morgenstelle 10, 7400 Tübingen

Prof. Dr. W.-D. Geyer, Bismarckstr. 11/2, 8520 Erlangen

Numerische Approximation

R. Schaback, Göttingen

1.0 Einführung

1.1 Methodisches

Dieser Beitrag soll einen nicht allzu detaillierten und für Nichtspezialisten leicht verständlichen Überblick über die Entwicklung und den aktuellen Stand im Arbeitsgebiet „Numerische Approximation“ geben. Deshalb wurden Teilbereiche ausgegrenzt, deren Behandlung zu weit führen würde, für die andere Übersichtsarbeiten vorliegen oder die in Lehrbüchern hinreichend abgehandelt sind. Von den älteren Ergebnissen wurden nur die für die Entwicklung des Gebietes wichtigsten angegeben. Die Literaturhinweise sind nicht auf Vollständigkeit angelegt; es genügt, wenn sie umfassend genug sind, dem Leser den Einstieg in das Gebiet zu erleichtern und teilweise die Historie des Gebiets zu verdeutlichen.

Leichte Verständlichkeit ist dabei wichtiger als Vollständigkeit; Hinweise auf offene Probleme erscheinen fruchtbarer als detaillierte Schilderungen von bekannten Resultaten.

Diverse Anregungen und Hinweise bei der Schlußredaktion dieses Artikels gaben Prof. Dr. L. Cromme und Dr. I. Diener. Die Schreibarbeiten am Literaturverzeichnis wurden von Frau I. Kerl-Layouni durchgeführt und die Plots wurden von Herrn K. Könnecke für die Veröffentlichung hergerichtet. Die Schlußredaktion des Literaturverzeichnisses besorgten Frau G. Hansen-Schmidt und Herr J. Perske. Ihnen allen möchte ich hiermit danken.

1.2 Historisches

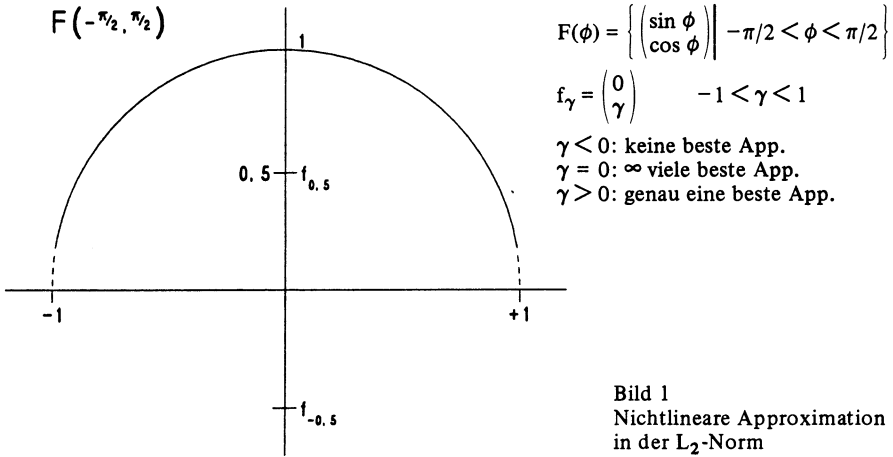
Das Gebiet „Numerische Approximation“ geht auf Carl Friedrich Gauß zurück, der in seiner „Theoria motus corporum coelestium . . .“ [65] im Jahre

Die lineare Ausgleichsrechnung nach der Methode der kleinsten Quadrate stammt in ihren Anfängen von Gauß selbst.

Seit Gauß' Zeiten werden also numerische Approximationsverfahren verwendet, aber erst in den letzten fünfzig Jahren wurden mathematische Untersuchungen über das Verhalten solcher Verfahren angestellt. Selbst das Gauß-Newton-Verfahren kann keineswegs als vollständig erforscht bezeichnet werden, wie dieser Beitrag noch zeigen wird.

Derzeitige Approximationen sind in der Regel durch die folgenden Gleichungen

tion“. Dieser Name leitet sich vom Fall $X = C(T)$ mit nicht-endlichem T her. Ist V ein linearer Raum, so heißt das Approximationsproblem linear. Im Prinzip besteht also ein Approximationsproblem darin, zu f einen Punkt kürzesten Abstandes auf $F(A)$ zu bestimmen. Ferner ist ein Approximationsproblem ein Optimierungsproblem mit einer speziellen Struktur. Die Situation für die L_2 -Norm veranschaulicht Bild 1.



Wie bei fast jedem mathematischen Problem stellen sich die Fragen nach Existenz, Eindeutigkeit und Charakterisierung der Lösung sowie nach ihrer stetigen Abhängigkeit von den Daten des Problems, hier vornehmlich von den Daten f und der Familie F .

2.3 Approximationsfamilien

Approximiert wird häufig mit folgenden Mengen V :

$V = P_{k-1}$ Raum der Polynome vom Grad $< k$ mit reellen Koeffizienten

$V = R_m^q(T)$ Raum der rationalen Funktionen mit Zählergrad höchstens q und Nennergrad höchstens m und positivem Nenner im Definitionsbereich T .

Die Parametrisierungen dieser Mengen sind einfach.

Für die häufig vorkommenden Exponentialsummen gibt es mehrere Darstellungsformen; die einfachsten sind

$$(1) \quad V = E_0^n := \left\{ \sum_{j=1}^n a_j \exp(z_j x) \mid a_j, z_j \text{ reell} \right\}$$

$$(2) \quad V = E_+^n := \left\{ \sum_{j=1}^n a_j \exp(z_j x) \mid a_j \geq 0, z_j \text{ reell} \right\}.$$

Die größte Exponentialsummenfamilie ist die Menge $E_{\mathbb{C}}^n$ aus allen reellen Lösungen von linearen Differentialgleichungen n -ter Ordnung mit konstanten reellen Koef-

fizienten. Diese enthält Sinus- und Cosinusfunktionen mit beliebig hohen Frequenzen; da das zu den unten genauer beschriebenen approximationstheoretischen Komplikationen führt und man aus später deutlich werdenden Gründen nicht mit E_0^n arbeiten kann, betrachtet man die Teilmenge E_R^n der Funktionen aus E_C^n , die eine lineare Differentialgleichung lösen, deren charakteristisches Polynom rein reelle Wurzeln hat.

Bei allen Exponentialsummenfamilien gilt $k = 2n$ und die Parametrisierungen sind nicht immer naheliegend. Wir werden die Exponentialsummen später noch gründlicher als Modellfall behandeln.

Die typische Struktur der Exponentialsummen, aus Linearkombinationen von Funktionen der Form $\gamma(t, x)$ mit endlich vielen festen t zu bestehen (hier: $\gamma(t, x) = \exp(tx)$), führt auf die sogenannten Gamma-Polynome (Hobby und Rice [80], de Boor [11], Braess [16], [19], [24], [25]).

Weitere Familien, die wir hier aber aus Platzgründen nicht näher behandeln, sind aus der Klasse der „Spline-Funktionen“, den verallgemeinerten Polygonzügen. Spline-Funktionen wurden zuerst approximationstheoretisch untersucht von Schumaker [150], [151] und Braess [15]. Numerische Methoden wurden zuerst von Esch und Eastman behandelt [61].

Rationale Spline-Funktionen finden sich zuerst in [135]; die Approximation mit solchen Funktionen wurde u. a. von Werner und Braess untersucht ([170], [26], [137] und Übersichten in [172], [173] und [174]).

2.4 Kritische Punkte

Aus der Veranschaulichung des Approximationsproblems (vgl. Bild 1) ergibt sich sofort, daß man keineswegs immer mit Existenz und Eindeutigkeit rechnen kann.

Wie bei simplen Minimierungsaufgaben für reelle Funktionen kann es lokale und globale Minima, Maxima und Sattelpunkte geben; diese sind dort charakterisiert durch das Verschwinden der ersten Ableitung. In der Approximation heißen solche Stellen „kritische Punkte“; diese sind definiert als Stellen \tilde{a} bzw. $F(\tilde{a})$, in denen die Null die beste Approximation an die Fehlerfunktion bezüglich des Tangentialraums ist, d. h.

$$(3) \quad \|f - F(\tilde{a})\| = \inf_{b \in Y} \|f - F(\tilde{a}) - F'(\tilde{a}; b)\|$$

wobei mit $F'(a; b)$ die Fréchet-Ableitung von F an der Stelle a in Richtung b bezeichnet sei (vgl. Bild 2).

2.5 Linearisierung

Aus der obigen Definition kritischer Punkte ergibt sich auch die der Linearisierung eines Approximationsproblems; an der Stelle \tilde{a} ist

$$\text{Minimiere } \|f - F(\tilde{a}) - F'(\tilde{a}; b)\| \text{ über } b \in Y$$

das in \tilde{a} linearisierte Problem. Es entspricht der Lösung des Approximationsproblems bezüglich der Daten f im affin-linearen Tangentialraum $F(\tilde{a}) + F'(\tilde{a}; \cdot)$ bzw. bezüglich des Fehlers $f - F(\tilde{a})$ im Raum $F'(\tilde{a}; \cdot)$.

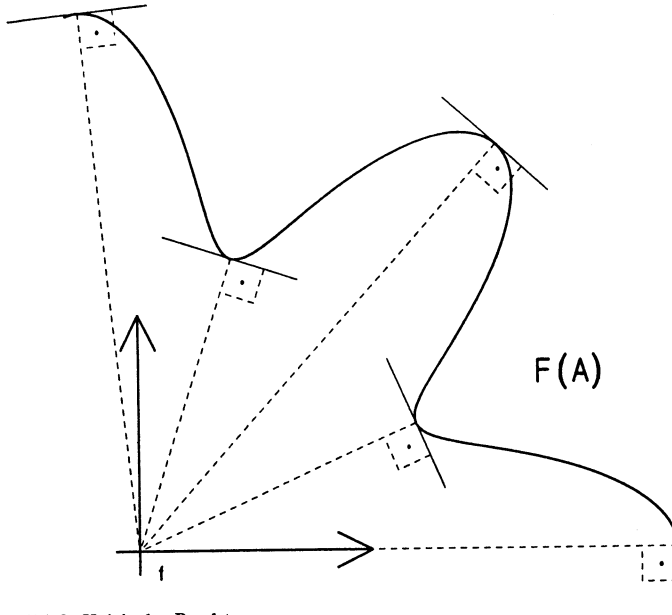


Bild 2 Kritische Punkte

2.6 Fehlerabschätzungen

Da man in der Praxis nie die Optimallösung a^* kennt, sondern bestenfalls eine Näherung \tilde{a} , ist man an Fehlerabschätzungen interessiert; diese können die Parameter selbst, die reproduzierten Daten oder die Gesamtfehler betreffen und haben daher in absteigendem Schwierigkeitsgrad die Form

$$(4) \quad \|a^* - \tilde{a}\| < \epsilon_1$$

$$(5) \quad \|F(a^*) - F(\tilde{a})\| < \epsilon_2$$

$$(6) \quad \|f - F(\tilde{a})\| - \|f - F(a^*)\| < \epsilon_3.$$

Die Herleitung solcher Abschätzungen ist im nichtlinearen Fall ein noch weitgehend brachliegendes Feld. Ansätze im linearen Fall sind in [37], [134], [140], [141] zu finden.

2.7 Eingrenzungen

In diesem Beitrag müssen wir uns aus Platzgründen einschränken und einige wichtige Teile des Problemkreises ignorieren:

- die Approximation in Vektorräumen über \mathbf{C} („komplexe Approximation“),
- die Dichtheitsfragen (Sätze vom Weierstraß-Typ: wann liegt $F(A)$ dicht in X ?) und
- die asymptotischen Probleme.

Letztere betrachten den Grenzübergang $k \rightarrow \infty$, wenn A von k abhängig gemacht wird; typische Fälle sind quantitative Weierstraß-Sätze: wie gut lassen sich

$C^n[0, 1]$ -Funktionen durch Polynome vom Grade $\leq k$ approximieren und wie verhält sich der Approximationsfehler für $k \rightarrow \infty$?

3.0 Beispiele

3.1 Beispiel 1: Tangensberechnung

Wenn man in elektronischen Rechenanlagen eine einfache Formel für die Berechnung von $\tan x$ haben will, so kann man wegen der üblichen Eigenschaften von Tangens und Cotangens zuerst das zu betrachtende Intervall auf $[0, \pi/4]$ einschränken und dort einen Ansatz der Form

$$T(x) = x * R(x^2)$$

mit einer rationalen Funktion R machen. Nach [175] liefert

$$R(z) = -2,870651444020758 / (-2,874394202928046 + z)$$

einen maximalen relativen Fehler von 0,0013.

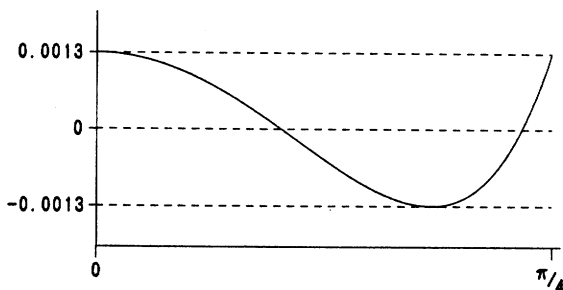


Bild 3 Fehlerfunktion der Tangensapproximation

Ähnliche Approximationen finden sich in den heutigen Digitalrechnern für alle gängigen Funktionen. Typisch ist dabei die Intervallreduktion durch Funktionalgleichungen und nachfolgende rationale Approximation. Da man eine möglichst kleine gleichmäßige Schranke haben will, wird in der Supremumsnorm approximiert (Tschebyscheff-Approximation).

3.2 Beispiel 2: Parametrische Methoden

Bei Randwertaufgaben für partielle Differentialgleichungen, deren Lösungen einem Maximumprinzip genügen, kann man einen parametrischen Ansatz mit Funktionen machen, die die Differentialgleichung im Innern des Gebiets lösen. Dann bestimmt man die Parameter so, daß die vorgegebenen Randwerte durch die Randwerte des Ansatzes in der Supremumsnorm möglichst gut approximiert werden. Erreicht man einen kleinen Randfehler ϵ , so ist dieser nach dem Maximumprinzip auch eine Fehlerschranke im ganzen Gebiet.

Man erreicht so eine Reduktion eines analytischen Problems auf ein Approximationsproblem, und zwar gleichzeitig unter Rückgang der Problemdimension um 1.

Um später einige typische Dinge erläutern zu können, entnehmen wir dem Buch von Collatz und Krabs [39] das folgende Beispiel:

Für $(x, y) \in B := [0, 1] \times [0, 1]$ und $t > 0$ sei eine Lösung $u(x, y, t)$ der Wärmeleitungsgleichung

$$u_{xx} + u_{yy} = u_t$$

gesucht, die Anfangswerte und Randwerte

$$u(x, y, 0) = x(1-x)y(1-y) \quad ((x, y) \in B)$$

$$u(x, y, t) = 0 \quad ((x, y) \in \partial B, t > 0)$$

annimmt. Der Lösungsansatz verwendet zweckmäßigerweise als Funktionen der Ortskoordinaten

$$S_{mn}(x, y) = \sin(m\pi x) \sin(n\pi y)$$

und setzt

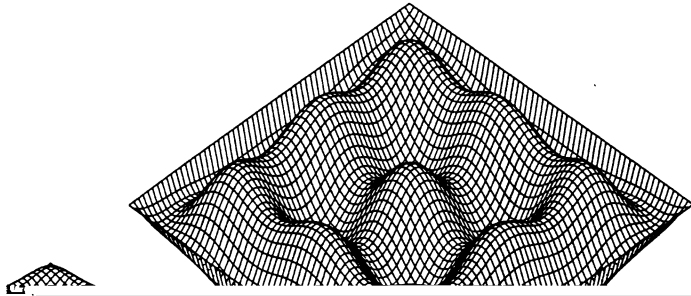
$$u_{mn}(x, y, t) = S_{mn}(x, y) \exp(-t\pi^2(m^2 + n^2)).$$

Mit Ausnutzung der Symmetrie kann man den vierdimensionalen Ansatz

$$a_1 S_{11} + a_2 (S_{13} + S_{31}) + a_3 S_{33} + a_4 (S_{15} + S_{51})$$

machen und erhält den Maximalfehler 0,0003 im gesamten Gebiet $B \times [0, \infty)$ mit

$$a_1 = 0,066581 \quad a_2 = 0,002503 \quad a_3 = 0,000086 \quad a_4 = 0,000559.$$



3.3 Beispiel 3: Inverse Probleme

Ein Problem heißt „invers“, wenn es die Umkehrung eines Standardproblems ist und die Bestimmung gewisser beim Standardproblem bekannter Daten erfordert. Typisch ist die Bestimmung unbekannter Koeffizienten von Differentialgleichungen aus beobachteten Lösungen. Das „Standardproblem“ ist das Lösen der Differentialgleichung bei bekannten Koeffizienten; das inverse Problem versucht, bei bekannter Lösung die Koeffizienten zu bestimmen. Normalerweise ist das inverse Problem in seiner Grundform mathematisch gar nicht lösbar; erst durch parametrische Ansätze und Approximationsverfahren kann man dem Problem zu Leibe rücken.

Ein typisches Beispiel dieser Art tritt in der Seismik auf: es werden künstlich hergestellte Wellenphänomene beobachtet, um auf die Materialeigenschaften im Inneren der Erde zurückschließen zu können. Sind etwa $r(z)$ die Gesteinsdichte und $m(z)$ die Elastizität in der Tiefe z , so gilt (vgl. Bamberger, Chavent und Lailly [3]) die hyperbolische Gleichung

$$r(z)y_{tt} - (m(z)y_z)_z = 0 \quad (z > 0, t > 0),$$

wobei m und r unbekannt sind und nur Beobachtungen für $z = 0$, d. h. an der Erdoberfläche vorliegen.

Besonders unangenehm sind die fehlenden Glätteeigenschaften: die Anfangsdaten stammen von Explosionen her und die Gesteinseigenschaften ändern sich sprunghaft wegen der geologischen Schichtung. Außerdem können r und m nicht beide aus den Daten bestimmt werden, wie man aus den Transformationseigenschaften der Gleichung erkennt.

Man macht daher für r und m geeignete parametrisierte Ansätze aus stückweise konstanten Funktionen und versucht, die Lösungen der Wellengleichung durch Variation der Parameter an die Beobachtungsdaten anzugleichen.

Die mathematische Begründung eines solchen Vorgehens kann im Einzelfall sehr kompliziert sein (vgl. [3]) und die Erarbeitung weitergehender analytischer Grundfragen beinhalten. Man erhält aber in vielen Fällen wieder ein numerisches Approximationsproblem. Daraus erwachsen stets neuartige Approximationsaufgaben, die das Gebiet weiter vorantreiben.

4.0 Lineare Approximation in L_2

4.1 Theoretische Grundlagen

Im Falle der euklidischen Norm ist klar (vgl. Bild 2), daß der optimale Distanzvektor senkrecht auf dem Raum V stehen muß:

$$f - F(a^*) \perp F(A) = V.$$

Da F hier linear ist, kann man $F(a) = Ca$ mit einer $N \times k$ -Matrix C schreiben und erhält die Gaußschen Normalgleichungen

$$(7) \quad C^T C a^* = C^T f.$$

Deren eindeutige Auflösung ist genau dann möglich, wenn kein Rangverlust auftritt (d. h. $\text{Rang}(C) = k$). Im allgemeinen Fall schreibt man heutzutage einfach

$$a^* = C^\dagger f$$

mit der Pseudoinversen C^\dagger von C . Dies entspricht der Auswahl derjenigen Lösung von (7), die minimale Norm hat und dadurch eindeutig bestimmt ist.

4.2 Numerik der Normalgleichungen

Der klassische Ansatz von Gauß zur Lösung des linearen Ausgleichsproblems mit einer $N \times k$ -Matrix C und $F(a) = Ca$ besteht darin, die Normalgleichungen direkt aufzulösen.

Leider tritt häufig der Fall ein, daß die Bildung der Normalmatrix zu Rundungsfehlern führt, die das Ergebnis stark verfälschen können (vgl. [155], S. 176). Deshalb greift man heute zu anderen Methoden.

4.3 Orthogonalisierungsverfahren

Da die euklidische Norm unter Orthogonaltransformationen invariant ist, kann man das Problem mit Orthogonalmatrizen Q so transformieren, daß C in eine Matrix übergeht, deren erste k Zeilen eine obere Dreiecksmatrix R bilden und deren untere $N-k$ Zeilen verschwinden:

$$\|f - Ca\|^2 = \|Qf - QCa\|^2 = \|g - Ra\|^2 + \|h - 0\|^2.$$

Dabei ist Qf in zwei Anteile g und h der Länge k bzw. $N-k$ zerlegt worden. Jetzt löst man (wenn $\text{Rang}(C) = \text{Rang}(R) = k$ gilt) das System

$$Ra = g$$

auf und hat die Norm von h als Approximationsfehler.

Diese Lösungsmethode wird mit Orthogonaltransformationen nach Householder realisiert (Businger und Golub [31]) und hat deutliche Stabilitätsvorteile.

4.4 Fehlerabschätzungen

Liegt kein Rangverlust vor, so ist die Fehlerabschätzung beim linearen Ausgleichsproblem nicht besonders schwierig (vgl. Sautter [134] sowie [141]).

Alle benötigten Daten lassen sich numerisch gewinnen.

Bei Rangverlust kann man bestenfalls eine Abschätzung vom Typ (5) erreichen. Eine Fehlerabschätzung der normminimalen Lösung erfordert eine Störungstheorie der Pseudoinversen. Näheres hierzu neben etlichen Literaturhinweisen findet man in [134] und bei Deuffhard-Sautter [59].

5.0 Lineare Tschebyscheff-Approximation

5.1 Alternation

Im Falle der linearen L_2 -Approximation hat man durch die Orthogonalität ein einfaches Kriterium für beste Approximationen. Gleichzeitig ist die Eindeutig-

keit aus einer einfachen Rangvoraussetzung zu erschließen. Bei der Tschebyscheff-Approximation liegen die Dinge nicht so einfach. Es tritt die „Alternation“ an die Stelle der Orthogonalität [158]:

Satz. Jedes $f \in C[a, b]$ besitzt genau eine beste Approximation p^* aus dem Polynomraum P_{k-1} . Ferner gibt es $k + 1$ Punkte

$$t_0 < t_1 < \dots < t_k \in [a, b]$$

mit der „Alternationseigenschaft“

$$(f - p^*)(t_j) = s(-1)^j \|f - p^*\|_\infty,$$

wobei $s = +1$ oder -1 gilt.

Man bezeichnet dann die Menge

$$S := \{t_1, \dots, t_k\}$$

als Alternante. In Bild 3 und Bild 4 kann man die Alternation deutlich erkennen; die Höhenlinien zu Bild 4 enthält Bild 5, das zusätzlich noch die ungefähre Lage der Alternationspunkte zeigt.

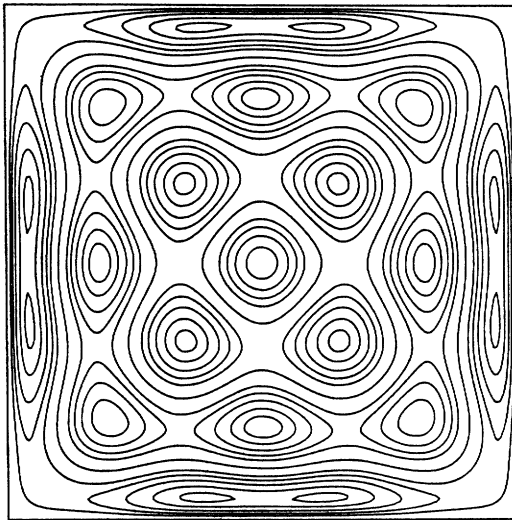


Bild 5
Höhenlinien zur Fehlerfunktion von Bild 4

Allgemeinere Funktionenräume $F(A)$ hat Kirchner [87] im Jahre 1903 behandelt. Die Alternationseigenschaft gilt auch dann:

Satz. Im Falle $\dim(V) = k$ gibt es zu jeder besten Approximation v^* zu $f \in X \setminus V$ eine Punktmenge $S \subset T$ mit höchstens $k + 1$ Elementen und eine Vorzeichenverteilung $s : S \rightarrow \{-1, 1\}$ mit

$$(f - v^*)(t) = s(t) \|f - v^*\|_\infty \quad (t \in S).$$

Für unser Beispiel 2 würde man 5 solcher Punkte erwarten; es gibt aber sogar 21 davon, wie Bild 5 zeigt. Bei Berücksichtigung der Symmetrie sieht man aber, daß im Prinzip nur fünf wesentlich verschiedene Punkte vorliegen.

5.2 Eindeutigkeit

Statt der Rangvoraussetzung im L_2 -Fall ist zur Eindeutigkeit hier eine Bedingung nötig, die schwieriger zu prüfen ist und nach Haar [71] notwendig und hinreichend für Eindeutigkeit ist:

Satz. $V \subset C[a, b]$ sei k -dimensional. Dann sind die folgenden Aussagen äquivalent:

- 1) Jedes $f \in C[a, b]$ hat genau eine beste Approximation bezüglich V .
- 2) Jedes v aus $V \setminus \{0\}$ hat höchstens $k - 1$ Nullstellen in $[a, b]$, wobei Nullstellen ohne Zeichenwechsel doppelt zählen.

Man bezeichnet 2) als Haarsche Bedingung. Diese ist leider nach einem Satz von Mairhuber [101] für mehrdimensionale Grundgebiete nie erfüllt:

Satz. Erfüllt $V \subset C(T)$ mit $\dim(V) = k > 1$ die Haarsche Bedingung, so ist T homöomorph zu einer Teilmenge des Einheitskreisrandes.

Dieser Effekt ist für mehrdimensionale Aufgaben, wie sie etwa bei inversen Problemen und bei parametrischen Verfahren zur Lösung von partiellen Differentialgleichungen auftreten, sehr hinderlich, denn die Nichteindeutigkeit hat unangenehme Konsequenzen für die Numerik. Insbesondere ist bei dem obigen Beispiel nicht klar, ob die Lösung eindeutig ist.

5.3 H-Mengen

Abhilfe schafft in begrenztem Umfang das Konzept der H-Mengen nach Collatz [37]:

Satz. Ist $v \in V = F(A) \subset C(T)$ ein Element, das mit Vorzeichen $s_j = -1$ oder $+1$ gemäß

$$(f - v)(t_j) = s_j \|f - v\|_\infty \quad (1 \leq j \leq m)$$

im m paarweise verschiedenen Punkten t_j aus T alterniert, und gibt es kein $w \in V$ mit

$$\operatorname{sgn}(w(t_j)) = s_j \quad (1 \leq j \leq m),$$

so ist v eindeutig beste Approximation an f .

Eine Menge H von m Punkten mit der obigen Eigenschaft nennt man dann H-Menge bezüglich V und T . Es läßt sich relativ leicht bestätigen, daß in unserem Beispiel eine H-Menge vorliegt.

Der Nutzen der Collatzschen H-Mengen liegt darin, daß sie für spezielle f anwendbar sind, während die häufig nicht erfüllte Haarsche Bedingung die Eindeutigkeit für alle f sichert.

5.4 Starke Eindeutigkeit und Fehlerabschätzungen

Im Fall der Haarschen Bedingung ist beweisbar, daß für alle Kandidaten \tilde{v} für eine beste Approximation v^* die auf de la Vallée-Poussin [94] zurückgehende

Abschätzung

$$(8) \quad \|f - v^*\| \geq \min_j (f - \tilde{v})(t_j) s_j \quad (1 \leq j \leq m)$$

gilt, die eine Abschätzung (6) erlaubt. Dabei haben wir die obigen Bezeichnungen der Alternante verwendet.

Darüber hinaus gibt es (vgl. z. B. [35]) eine Konstante $c > 0$ mit

$$(9) \quad c \|\tilde{v} - v^*\| \leq \|f - \tilde{v}\| - \|f - v^*\|$$

und diese Eigenschaft von v^* , f und F heißt starke Eindeutigkeit. Sie impliziert eine Fehlerabschätzung vom Typ (5) und erlaubt auch (4), wenn kein Rangverlust vorliegt. Während in (8) nur numerisch zugängliche Größen auftreten, hat man in (9) die Konstante c zu bestimmen. Unter Verwendung Collatzscher H -Mengen und einer Idee von Blatt und Klotz [9] wird in [140] dargestellt, wie man dies praktisch durchführen kann.

5.5 Remez-Algorithmus

Die numerische Lösung des linearen Tschebyscheff-Approximationsproblems kann bei erfüllter Haarscher Bedingung durch das Verfahren von Remez ([127], [128]) erfolgen. Dabei wird für $\dim(V) = k$ eine Folge von $(k + 1)$ -punktigen Teilmengen („Referenzen“) von T erzeugt. Auf solchen kann das eingeschränkte Approximationsproblem durch Interpolation gelöst werden. Der Übergang von einer Referenz S zur folgenden geschieht durch Punktaustausch: man untersucht die bezüglich S gebildete Approximierende $F(a)$ auf Extrema bezüglich T . Gilt

$$\|f - F(a)\|_S = \|f - F(a)\|_T$$

so ist man fertig. Andernfalls tausche man den Extrempunkt $t^* \in T \setminus S$ von $f - F(a)$ auf T gegen einen Punkt aus S so aus, daß die Vorzeichenverteilung nicht gestört wird (das führen wir hier nicht genauer aus). Dann gilt (vgl. z. B. [35], [167]):

Satz. *Der Algorithmus von Remez konvergiert linear und die Folge der Referenzen konvergiert gegen eine Alternante.*

Die klassischen Arbeiten zu diesem Problemkreis sind nach Remez die von Stiefel ([153], [154]). Unter Zusatzvoraussetzungen an f und F folgt nach Veidinger sogar quadratische Konvergenz ([159], vgl. auch [106]).

Der Remez-Algorithmus wurde bei nicht erfüllter Haarscher Bedingung von diversen Autoren verallgemeinert (vgl. Bittner [8], Töpfer [157], Schäfer [145], Laurent [92], Carasso [32], Carasso und Laurent [33] und Watson [162], [164]). Dabei tritt im allgemeinen eine Rekursion auf, die es erzwingt, diverse „innere“ Approximationsprobleme vollständig zu lösen. Leider aber zeigt die Erfahrung, daß im kontinuierlichen Fall die Suche nach Extrema der Fehlerfunktion den größten Aufwand beim Remez-Algorithmus darstellt. Denn dieses ist ein globales Optimierungsproblem und man muß es gegen Ende des Verfahrens so gründlich lösen, daß mit Sicherheit kein Extremum übersehen worden ist.

Deshalb ist bei mehrdimensionalen kontinuierlichen Problemen die Anwendung des verallgemeinerten Remez-Algorithmus problematisch.

5.6 Lineare und semi-infinite Optimierung

Das lineare Tschebyscheff-Approximationsproblem bei nicht erfüllter Haarscher Bedingung ist wegen seiner potentiellen Uneindeutigkeit numerisch nicht einfach zu lösen. Der direkte Zugang schreibt nach Kelley [86] das Problem als lineare Optimierungsaufgabe:

Minimiere η unter den Nebenbedingungen

$$(10) \quad -\eta \leq (f - F(a))(t) \leq \eta \quad (t \in T)$$

bei variablem $a \in A$. Im diskreten Falle hat (10) nur endlich viele Nebenbedingungen und ist durch das Simplexverfahren der linearen Optimierung in endlich vielen Schritten auflösbar (vgl. z. B. [38] und [6] sowie [143] zur effizienten Behandlung des Verfahrens).

Da das Simplexverfahren im allgemeinen und bei Tschebyscheff-Approximationsaufgaben im besonderen unter Stabilitätsproblemen leidet, wurden von Bartels und Golub [7] und Cromme ([48], [51]) Stabilisierungsversuche unternommen. Eine vergleichende Untersuchung bezüglich Stabilität und Rechenzeit steht hierzu noch aus.

Im kontinuierlichen Fall liegt ein semi-infinites Problem vor; hierzu enthalten die Monographien von Glashoff und Gustavson [68] sowie von Hettich und Zencke [79] viel Material. Auch hier gilt das oben über den Aufwand bei der globalen Suche nach Extrema der Fehlerfunktion Gesagte.

Deshalb scheinen Zweiphasen-Verfahren günstiger: man löst erst ein diskretes Problem, stellt dessen Alternationseigenschaften fest und startet dann ein Newton-Verfahren. Dieser Verfahrenstyp wurde von Hettich genauer untersucht ([77], [78], [79]). Das Newton-Verfahren wird im folgenden Abschnitt behandelt.

5.7 Newton-Verfahren

Hier formuliert man die Alternationseigenschaft als nichtlineares Gleichungssystem für die Koeffizienten und die Alternationspunkte. Dabei ist die Vorzeichenverteilung und die Punktezahl fest vorzugeben. Dann kann man das Newton-Verfahren auf dieses Gleichungssystem anwenden und profitiert von dessen guten Konvergenzeigenschaften, wenn man hinreichend glatte Daten f und F hat.

Dieses Vorgehen wurde von Murnaghan und Wrench [112], Cheney und Goldstein [34] und Wetterling [177] untersucht und danach von diversen Autoren ausgebaut. Eine Übersicht findet sich bei Hettich und Zencke [79] und wird deshalb hier nicht gegeben.

5.8 Andere Methoden

In neuerer Zeit sind auch andere direkte Verfahren zur Lösung des linearen Tschebyscheff-Approximationsproblems angegeben worden. Die direkten Abstiegsverfahren auf Basis des Kolmogoroffschen Kriteriums entsprechen der Methode des steilsten Abstiegs in der Optimierung; sie wurden u. a. von Krabs [88], Gutknecht [69] und Schultz [149] behandelt und von Gutknecht auf den nichtlinearen Fall erweitert [70].

Eine weitere Methode geht auf Pólya [121] zurück; hier wird die beste Tschebyscheff-Approximation als Limes einer Folge bester L_p -Approximationen für p gegen Unendlich berechnet. Neuere Literatur hierzu ist [63] und [85]. Besonders wegen der vielfältigen Anwendungen auf parametrische und inverse Probleme bei Differentialgleichungen ist die Erarbeitung von sehr effizienten und stabilen Lösungsmethoden für das diskrete und das kontinuierliche lineare Tschebyscheff-Approximationsproblem dringlich. Es ist durchaus denkbar, daß dann eine ernstzunehmende Konkurrenz für die Methode der finiten Elemente entstünde. Leider sind bislang alle Ansätze noch nicht effizient und stabil genug; außerdem fehlt es an allgemeinen numerischen Testergebnissen, die eine Bewertung der Verfahrensklassen ermöglichen.

6.0 Nichtlineare Approximation: Theorie

6.1 Existenzfragen

In der Regel begnügt man sich in der numerischen Approximation mit einer axiomatischen Voraussetzung, die die Existenz einer besten Approximation sichert. Entweder man setzt unrealistischerweise einfach $F(A)$ als abgeschlossen voraus oder man fordert Kompaktheit der Niveaumenge

$$(11) \quad M(\tilde{a}) := \{a \in A \mid \|f - F(a)\| \leq \|f - F(\tilde{a})\|\}.$$

Dann setzt man für eine gegebene Startapproximation \tilde{a}_0 voraus und definiert die Menge

6.2 Eindeutigkeit

Die obige Erweiterung einer Funktionenfamilie zwecks Erzielung von Existenzsätzen führt im Falle der Tschebyscheff-Approximation mit Exponentialsummen leider zur Uneindeutigkeit bester Approximationen (Braess [12], [13], [14]). Die ursprüngliche Familie E_0^n hat Eindeutigkeit [130] und keine Existenz, während der Abschluß $E_{\mathbb{R}}^n$ Existenz, aber keine Eindeutigkeit bester Approxima-

Die Familie der rationalen Funktionen hat im Falle der Tschebyscheff-Approximation auf Intervallen noch Eindeutigkeit.

Im Falle der L_2 -Norm ist die Uneindeutigkeit schon bei den rationalen Funktionen vorhanden (vgl. Spieß [152], Lamprecht [91] und Braess [22], [23]). So entsteht das Problem, alle (evtl. nur lokal) besten Approximationen zu berechnen oder zumindest deren Anzahl abzuschätzen („Anzahlproblem“). Darauf werden wir unten noch genauer eingehen.

6.3 Charakterisierung

Die Mengen E_0^n , E_+^n und $E_{\mathbb{R}}^n$ erlauben Charakterisierungen bester oder lokal bester Approximationen (vgl. Braess [12], [13], [14], Werner [169] und Kammler [82]) durch Alternationsaussagen inklusive Vorzeichenbedingungen. Ähnliche Charakterisierungen lassen sich im Tschebyscheff-Fall auch allgemein geben (vgl. Meinardus-Schwedt [108], Brosowski-Wegmann [29] und Braess [20] für eine Übersicht).

Alternationskriterien für Eindeutigkeit und starke Eindeutigkeit finden sich in [138].

Für die Menge $E_{\mathbb{C}}^n$ ist aber beispielsweise keine befriedigende Charakterisierungsaussage für beste Approximationen bekannt.

6.4 Anzahlprobleme

In der Regel (vgl. Bild 2) liegen viele lokal beste Approximationen vor. Keineswegs ist klar, welche davon globale Optima darstellen und wieviele Optima es überhaupt gibt. Dennoch will der Anwender die global beste Approximation geliefert bekommen. Deshalb ist es für die Theorie zunächst von Wichtigkeit, wieviele lokal beste Approximationen es geben kann.

Hier steht die Forschung (abgesehen von der Tschebyscheff-Approximation mit Exponentialsummen und verwandten Familien, die von Braess weitgehend untersucht worden sind ([16], [17], [18], [19], [21], [23], [24], [25]) noch in den Kinderschuhen.

Im genannten Falle weiß man, daß es zu jedem f nur endlich viele lokal beste Approximationen geben kann, und zwar höchstens $n!$ im Falle $E_{\mathbb{R}}^n$. Diese lassen sich charakterisieren durch Alternationsbedingungen und sukzessive berechnen. Die Abschätzung der Anzahl durch $n!$ nach oben wurde ergänzt durch eine mit n exponentiell wachsende Abschätzung nach unten für spezielle f (Verfürth [160]). Wesentlich schlimmer noch ist die Situation bei der L_2 -Approximation. Hier wurde für die rationale Approximation von Wolfe ([178], vgl. auch [1]) bewie-

sen, daß die Anzahl der lokal besten Approximationen nicht nur von F , sondern auch von f abhängt und prinzipiell nicht a priori beschränkt werden kann.

Die Ergebnisse von Wolfe wurden von Diener [60] auf allgemeinere Funktionenklassen erweitert; sie scheinen den typischen Normalfall bei nichtlinearer L_2 -Approximation darzustellen. Ob es eine Funktion f gibt, die sogar unendlich viele lokal beste Approximationen hat, ist bis heute unklar. Von Braess [22] und Diener [60] stammen hinreichende Kriterien für die Endlichkeit der Anzahl lokal bester Approximationen.

Beim Anzahlproblem ist eine engere Zusammenarbeit zwischen reiner und angewandter Mathematik nötig; die bisher aus der Topologie bekannten Methoden (z. B. Morse-Theorie, Ljusternik-Schnirelmann-Theorie) erlauben keine für die Praxis ausreichende Klärung der offenen Probleme.

6.5 Parametrisierungsfragen

Die rationalen Funktionen und $E_{\mathbb{R}}^n$ enthalten implizite Nebenbedingungen, die sich sehr unangenehm auswirken. Als typisches Beispiel kann man die Parametrisierung von $E_{\mathbb{R}}^2$ durch

$$F(a, b, c, d)(x) := v(x)$$

mit
$$v''(x) - 2av'(x) + bv(x) = 0$$

$$v(0) = c, \quad v'(0) = d$$

betrachten, für die man die Menge der „verbotenen“ Parameter a und b aus Bild 6 entnimmt.

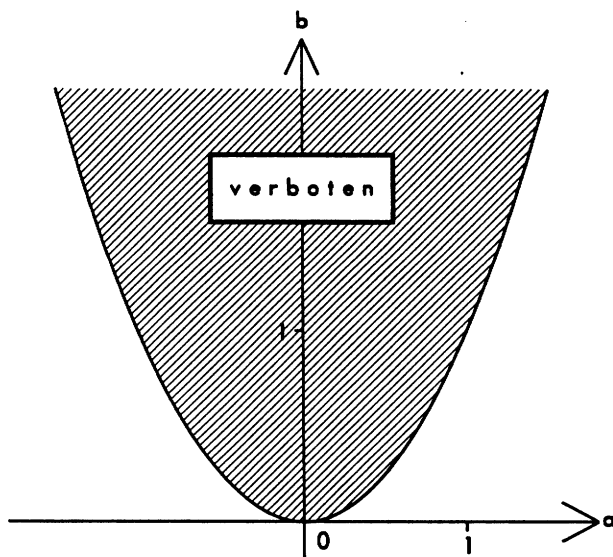


Bild 6 Parameterbereich für $E_{\mathbb{R}}^2$

Man hat also eine nichtkonvexe zulässige Menge und die eigentlich interessierende Approximationsfamilie hat einen Rand. Dieser tritt auch tatsächlich bei Approximationsaufgaben in Erscheinung, denn etwa die Funktion $f(x) = \cos x$ hat in $[-1, 1]$ nach Braess [12] genau zwei global beste Approximationen in $E_{\mathbb{R}}^2$, die beide am Rand liegen.

Von Zencke ([179], [180]) ist die Numerik der Approximation mit Exponentialsummen über die Nebenbedingungen in der obigen Form behandelt worden.

Ein anderer Zugang besteht darin, die Wurzeln des charakteristischen Polynoms selbst als Parameter zu nehmen (Cromme [52], [53], [54]).

Dann hat man nach Vieta die Parametrisierung

$$F(a, b, c, d) := v(x)$$

$$\text{mit } v''(x) - (a + b)v'(x) + av(x) = 0 \quad v(0) = c, v'(0) = d$$

aber diese Parametrisierung wird für $a = b$ singulär und ist unabhängig von Vertauschungen von a und b . Deshalb führt man die explizite Nebenbedingung

$$a \leq b$$

ein und hat „nur“ noch den „Randeffekt“ für $a = b$. Man kann aber (vgl. [52]) durch geeignetes Umparametrisieren in der Nähe des Randes noch eine numerisch stabile und mit etwas unkonventionellen Methoden auch analytisch exakt beschreibbare stetige Annäherung an den Rand unter Vermeidung von Singularitäten erreichen.

Die allgemeine Situation ist viel komplizierter als hier angedeutet werden kann. Die Approximationsfamilien können nicht nur Ränder, sondern auch Spitzen mit degenerierenden Tangentialkegeln haben. Wie man solche Effekte in voller Allgemeinheit numerisch behandeln kann, ist weitgehend unklar. Insbesondere ist der Effekt der unten dargestellten allgemeinen Regularisierungsmethoden bei Vorliegen von Rändern oder Spitzen untersuchenswert. Auch hier liegt ein Problembereich vor, der aus der reinen Mathematik heraus vorangetrieben werden sollte.

Als Modellobjekt bietet sich im \mathbb{R}^n die Menge der Koeffizientenvektoren aller Polynome vom Grade $\leq n - 1$ mit nur reellen Wurzeln an. Diese hat Ränder und

7.0 Nichtlineare Approximation: Numerik

7.1 Globale numerische Verfahren

Wegen der oben geschilderten Uneindeutigkeit lokal bester Approximationen ist man in der nichtlinearen Approximation daran interessiert, Verfahren zu haben, die es erlauben, die globale Lösung des Problems auch bei Mehrdeutigkeit der Lösung zu berechnen. Dies trifft sowohl für das Approximationsproblem als Ganzes als auch für die Extremabestimmung innerhalb eines Approximationsverfahrens zu (vgl. die Bestimmung der Extrema in Bild 4).

Auch hier ist man weit davon entfernt, befriedigende allgemeine Ergebnisse zu haben. Daher soll exemplarisch ein praktisch in Spezialfällen brauchbares Verfahren skizziert werden.

Dazu kann man eine glatte Funktion $h(x)$ auf dem \mathbf{R}^k betrachten und nach Methoden zur Bestimmung aller kritischen Punkte von h , d. h. aller Nullstellen von $\text{grad } h$ fragen.

Nach Branin [27] definiert man zu einem nicht verschwindenden Vektor c die Menge

$$B(c) := \{x \in \mathbf{R}^k \mid (\text{grad } h)(x) \text{ parallel zu } c\}$$

und stellt fest, daß diese „Branin-Trajektorie“ im allgemeinen lokal eindimensional sein muß, wenn man von Ausartungen und Verzweigungen absieht. Sie läßt sich durch Differentialgleichungen beschreiben und deshalb als Kurve auch numerisch verfolgen.

Durch Branin-Trajektorien lassen sich die kritischen Punkte von h einfach beschreiben:

Satz. *Wenn b und c zwei linear unabhängige Vektoren sind, so ist der Durchschnitt von $B(b)$ und $B(c)$ gerade die Menge der kritischen Punkte von h .*

Deshalb scheint das globale Problem lösbar zu sein durch „Abfahren“ zweier Kurvensysteme. Leider aber können die Kurvensysteme manchmal in viele Komponenten zerfallen und es ist klar, daß man keine allgemeinen Zusatzstrategien entwickeln kann, die es erlauben, dennoch alle kritischen Punkte zu erreichen.

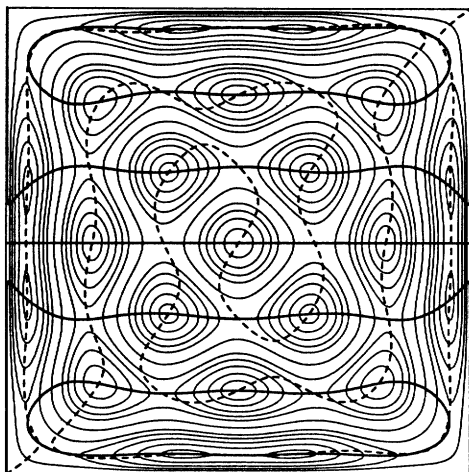
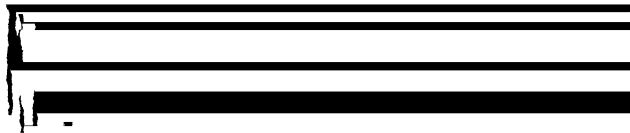
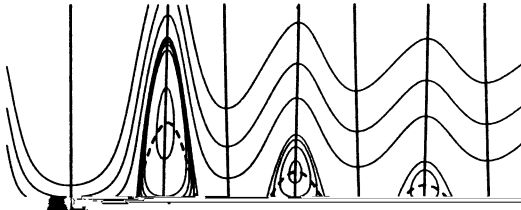


Bild 7
Branin-Trajektorien
zu Bild 4

Bild 8 zeigt die Branin-Trajektorien zu einem einfachen Approximationsproblem in zwei Veränderlichen, das unendlich viele lokal beste Approximationen hat. Man sieht in beiden Bildern, daß es eine Trajektorie gibt, die alle kritischen Punkte auffädelt (diese ist gestrichelt), aber es gibt eine andere, die in unendlich viele Komponenten zerfällt (die dickeren Linien, die die dünn gezeichneten Höhenlinien schneiden) und die je nur einen Teil der kritischen Punkte enthalten.



mit einer „Krümmungsschranke“ $K \geq 0$ immer so einrichten, daß man die Niveaumenge (vgl. (11)) des Startwerts nicht verläßt, d. h.

$$\|f - F(a + tb^*(a))\| < \|f - F(a)\|,$$

sofern der Punkt a nicht schon kritisch ist.

Eine weitere Modifikation ist die Regularisierung in der Umgebung von Punkten \tilde{a} mit Rangverlust, d. h.

$$\text{Rang}(F'(\tilde{a}; \cdot)) < k = \dim A.$$

Dabei ersetzt man das linearisierte Problem durch ein verwandtes und nimmt dessen Lösung als Inkrement für den nächsten Schritt.

Hier sind mehrere Möglichkeiten praktiziert worden:

7.3.1 Levenberg-Marquardt-Regularisierung

Diese Regularisierung ist im L_2 -Fall schon lange üblich (vgl. Levenberg [96], Morrison [111], Marquardt [102], Osborne [116], [117]) und nimmt im allgemeinen Fall [142] die Form

$$\left\| \begin{pmatrix} f - F(a) - F'(a; b) \\ \mu b \end{pmatrix} \right\| \rightarrow \text{Min über } b \in \mathbb{R}^k$$

mit einem Parameter $\mu > 0$ an. Es bestehen allerdings große Differenzen bezüglich der geeigneten Steuerung des Parameters μ im Verlauf des Iterationsprozesses. Im normunabhängigen Fall schlagen wir

$$\mu^2 = c\tilde{K}\|f - F(a)\|$$

mit einer geeigneten Konstanten c und einer Schätzung \tilde{K} der Krümmungskonstanten K aus (12) vor. Für die L_2 -Norm gibt es u. a. neuere Steuerungsregeln von Osborne [116], Meyer-Roth [109], Brown-Dennis [30], Hebden [75], Moré [110] und Häußler [72]).

7.3.2 Nebenbedingungen

Die nach meinen Erfahrungen recht effiziente Steuerung nach Hebden und Moré im L_2 -Fall verwendet eine Nebenbedingung an das Inkrement b :

$$\|f - F(a) - F'(a; b)\| \rightarrow \text{Min!}$$

unter der Nebenbedingung

$$\|b\| \leq D(a),$$

und dieses Vorgehen ist auch im allgemeinen Fall möglich. Wieder ist die Frage nach einer guten Steuerung von $D(a)$ wichtig; für die Supremumsnorm findet sich dies bei Madsen [100] sowie Hettich und Zencke [79], während für den allgemeinen Fall [136] bisher nur die konstante Schranke theoretisch untersucht wurde.

7.3.3 Projektion

Diese Regularisierungsform geht im L_2 -Fall auf Deuffhard zurück [55] und ist in [142] allgemeiner ausgeführt. Man ersetzt das linearisierte Problem durch

$$\|f - F(a) - F'(a; P(a)b)\| \rightarrow \text{Min!}$$

$$b \in Y$$

mit einem geeigneten Projektor $P(a)$ auf Y , der auf die Eigenräume zu den „größeren“ charakteristischen Zahlen von $F'(a; \cdot)$ projiziert. Hier ist wieder eine Steuerungsstrategie nötig, die klärt, wie der Projektor zu wählen ist. Genaueres findet sich im L_2 -Fall bei Deufhard und Co-Autoren ([55], [56], [58], [59]) sowie allgemein in [142].

7.4 Globale Konvergenz gegen kritische Punkte

Für die obigen Regularisierungsstrategien ist in [136], [118] und [142] gezeigt, daß das allgemeine (normunabhängige) Gauß-Newton-Verfahren unter der Voraussetzung der Kompaktheit der Niveaumenge des Startwerts eine Folge erzeugt, deren Häufungspunkte kritisch sind.

Es ist unter diesen schwachen Voraussetzungen nur die Konvergenz der Linearisierungsgewinne gegen Null bewiesen; für die Konvergenz der Parameter oder der Daten braucht man vermutlich Zusatzvoraussetzungen.

7.5 Lokale quadratische Konvergenz

Hier gilt allgemein [142]:

Satz. *Wenn man für den optimalen Linearisierungsgewinn und die optimalen Inkremente die a-priori-Abschätzung*

$$(15) \quad \|b^*(a)\| \leq C\epsilon(a, b^*(a))$$

mit einer positiven Konstanten C hat, so sind die vom Gauß-Newton-Verfahren erzeugten Parameter bei Start nahe bei einem kritischen Punkt lokal quadratisch gegen diesen konvergent.

Dieses Ergebnis enthält die unten noch zu schildernden Spezialfälle für die L_2 -Norm und die Supremumsnorm, denn in allen bisher bekannten lokal quadratisch konvergenten Fällen ist (15) erfüllt.

7.6 Lokal lineare Konvergenz

Die lineare Konvergenz des Gauß-Newton-Verfahrens ist nach einem Beispiel aus [142] nicht ohne Zusatzvoraussetzungen beweisbar. Solche finden sich in diversen Arbeiten im Falle spezieller Normen (für L_2 bei Deuflhard [55], McKeown [105], Ruhe [132] und in der Supremumsnorm bei Madsen [100]). In der allgemeinen Situation enthält [142] einige Resultate, die im wesentlichen als Voraussetzungen Abschätzungen von $\epsilon(\tilde{a}, \cdot)$ nach unten in Umgebungen kritischer Punkte \tilde{a} verwenden. Ein weiteres typisches Ergebnis dieser Art ist der folgende aus den Ergebnissen von [142] herleitbare

Satz. *Wenn das Gauß-Newton-Verfahren mit der Nebenbedingung (14) durchgeführt wird, und wenn mit einer beliebig großen Konstanten R um einen kritischen Punkt \tilde{a} die Abschätzung*

$$\|a - \tilde{a}\|^2 \leq \epsilon(\tilde{a}, a - \tilde{a})R$$

gilt, so ist das Verfahren lokal linear konvergent

7.7 Offene Fragen

Das Gauß-Newton-Verfahren läßt sich noch wesentlich in seiner Effizienz steigern, wenn man die linearen Teilprobleme nicht immer mit einer Neuberechnung von $F'(a; \cdot)$ verbindet, sondern „Update-Formeln“ verwendet. Dann erschwert sich aber die Steuerung erheblich. Für das allgemeine Gauß-Newton-Verfahren stehen Untersuchungen in dieser Richtung noch aus.

Auch die Konvergenzproblematik ist noch keineswegs als endgültig geklärt anzusehen, da praktisch handhabbare a-priori-Kriterien für lineare Konvergenz (abgesehen von Spezialfällen) fehlen.

8.0 Nichtlineare L_2 -Approximation

Hier wollen wir nur die für die Praxis wichtigsten Entwicklungslinien skizzieren, die von der speziellen L_2 -Struktur Gebrauch machen und nicht unter die obigen allgemeinen Überlegungen fallen.

8.1 Deuffhards Verfahren

In einer Reihe von Arbeiten ([55], [56], [57], [58], [59]) hat Deuffhard ein besonders in Hinsicht auf numerische Stabilität und Effizienz hervorzuhebendes Verfahren entwickelt. Es benutzt die Regularisierung mit Projektionen und verwendet eine sehr wirkungsvolle Schrittweitensteuerung, die auf den Verlauf des Verfahrens und insbesondere auf den Rang von $F'(a; \cdot)$ Rücksicht nimmt. Das Verfahren selbst und die zugehörigen Konvergenzresultate sind invariant formuliert gegenüber affin-linearen Transformationen. Dadurch wird numerische Stabilität gewonnen, was sich bei schlecht konditionierten Problemen sehr positiv auswirkt.

aber relativ starke Voraussetzungen, die insbesondere immer für lokal lineare Konvergenz im Parameterraum hinreichend sind. Wenn eine solche Konvergenz überhaupt eintritt, sind die Deuffhardschen Voraussetzungen nicht abzuschwächen [142]; dagegen sind Fälle ohne lineare Konvergenz im Parameterraum bislang nicht erfaßt.

Eine Bewertung des praktischen Konvergenzverhaltens dieser Verfahren steht noch aus; eigene Experimente lassen keine wesentliche Überlegenheit gegenüber Varianten des Gauß-Newton-Verfahrens erkennen. Neben dem Verfahren von Deuffhard ist die Hybrid-Methode von Powell [122] in bezug auf numerische Qualität besonders ausgezeichnet. Letztere ist eine Mixtur aus Gauß-Newton-Verfahren mit Levenberg-Marquardt-Regularisierung und dem Gradientenverfahren; sie verwendet Updateformeln für J und ist sehr geschickt in der Steuerung der verschiedenen Problemparameter.

Ganz allgemein kann man sagen, daß die Steuerung von Schrittweiten, Regularisierungsparametern und Updateformeln bei allen Verfahrenstypen das Hauptproblem darstellt. Häufig wird nur für eine Grundversion eines Verfahrens (ohne Steuerung) die Konvergenz unter einschneidenden Voraussetzungen bewiesen. In der Praxis werden die Verfahren mit trickreichen Steuerungen verwendet, aber dann ist in der Regel die Theorie nicht mehr anwendbar.

Bei vergleichenden Untersuchungen werden manchmal die Steuerungen der Konkurrenzverfahren nicht angegeben oder nicht in ausgereifter Form verwendet, so daß ein irreführendes Bild entsteht. Typische Beispiele dieser Art sind [109] und [161]; die dort behandelten numerischen Probleme werden von gut gesteuerten Verfahren vom Levenberg-Marquardt- oder vom Deuffhard-Typ effizient und problemlos gelöst, und zwar deutlich besser als mit den dort vorgeschlagenen neuen Verfahren.

Wie im Falle der linearen Tschebyscheff-Approximation wäre deshalb eine umfassende und gründliche numerische Vergleichsuntersuchung der vorhandenen Verfahren zu begrüßen.

9.0 Nichtlineare Tschebyscheff-Approximation

Dieser Problemkreis ist sehr ausführlich in Hettich-Zencke [79] dargestellt; wir beschränken uns hier auf die wichtigsten Gliederungsaspekte.

9.1 Remez-Algorithmus

Der Algorithmus von Remez ist bei im wesentlichen gleicher Arbeitsweise (Austausch von Extrema gegen alte Referenzpunkte) von diversen Autoren für nichtlineare Probleme erweitert worden (für rationale Approximation u. a. von Werner [165], [166], Ralston [125], Werner, Stoer und Bommas [176] sowie im allgemeinen Fall von Barrar und Loeb [5]).

Konvergenzresultate sind im wesentlichen nur für spezielle Funktionenfamilien bzw. den Fall der gleichmäßigen starken Eindeutigkeit sämtlicher linearisierter Probleme bekannt.

9.2 Gauß-Newton-Verfahren

Das Gauß-Newton-Verfahren im Fall der Supremumsnorm untersuchten diverse Autoren, u. a. Osborne und Watson [119], Osborne [115], McBride und Rigler [103], Madsen [100], Cromme [47], [48], [49], [50], Geiger [66]).

Die lokal quadratische Konvergenz unter der Voraussetzung der starken Eindeutigkeit wurde von Cromme bewiesen [47].

Wir führen dies nicht weiter aus, da die Ergebnisse sich in den allgemeinen Fall einordnen lassen [142]. Die Regularisierungsmethoden für Fälle ohne starke Eindeutigkeit beschränken sich im wesentlichen auf Nebenbedingungen an das Inkrement ([100], [66], [79]). Der Effekt der anderen Regularisierungsmethoden aus [142] ist untersuchenswert.

9.3 Newton-Verfahren

Dieser Verfahrenstyp geht im nichtlinearen Fall auf Wetterling [177] zurück (vgl. auch Meinardus-Schwedt [108]) und wurde von Hettich [76] ausgebaut. Eine gründliche Darstellung findet sich bei Hettich und Zencke [79].

9.4 Abstiegsverfahren

Hier wird versucht, aus der lokalen Charakterisierungsaussage (dem Kolmogoroffschen Kriterium) eine Verbesserung in Richtung des steilsten Abstiegs zu gewinnen. Dieser Ansatz geht auf Zuhovickii et al. zurück ([182]) und wurde u. a. von Krabs [89], Opfer [114] und Gutknecht [70] verfolgt. Wie im L_2 -Fall zeigt sich, daß man mit Regularisierungen und Schrittweitensteuerungen arbeiten muß, um gute Konvergenzergebnisse zu erhalten.

Leider fehlt auch hier eine vergleichende Untersuchung.

10.0 Literatur

- [1] Akhlaghi, M.; Wolfe, J. M.: Functions with Many Best L_2 -Approximations. *J. Approx. Theory* 33 (1981) 111–118
- [2] Anderson, D. H.; Osborne, M. R.: Discrete Nonlinear Approximation Problems in Polyhedral Norms. *Numer. Math.* 28 (1977) 143–156
- [3] Bamberger, A.; Chavent, G.; Lailly, P.: About the Stability of the Inverse Problem in 1-D Wave Equations – Application to the Interpretation of Seismic Profiles. *Appl. Math. Optim.* 5 (1979) 1–47
- [4] Bard, Y.: *Nonlinear Parameter Estimation*. New York: Academic Press 1974
- [5] Barrar, R. B.; Loeb, H. L.: On the Remez Algorithm for Nonlinear Families. *Numer. Math.* 15 (1970) 382–391
- [6] Barrodale, I.; Young, A.: Algorithms for Best L_1 and L_∞ Linear Approximations on a Discrete Set. *Numer. Math.* 8 (1966) 295–306
- [7] Bartels, R. H.; Golub, G. H.: Stable Numerical Methods for Obtaining the Chebyshev Solution to an Overdetermined System of Equations. *Commun. ACM* 11 (1968) 401–406
- [8] Bittner, L.: Das Austauschverfahren der linearen Tschebyscheff-Approximation bei nicht erfüllter Haarscher Bedingung. *Z. Angew. Math. Mech.* 41 (1961) 238–256
- [9] Blatt, H. P.; Klotz, V.: Zur Anzahl der Interpolationspunkte polynomialer Tschebyscheff-Approximationen im Einheitskreis. In [43] (1978) 61–77
- [10] Blumenfeld, M.; Eichner, L.; Hainthaler, B.: Ausgleichsmethoden für Exponentialsummen. Freie Universität Berlin. Preprint No. 73/78 (1978)
- [11] Boor, C. de.: On the Approximation by Gamma-Polynomials. In [148] (1969) 157–183
- [12] Braess, D.: Approximation mit Exponentialsummen. *Computing* 2 (1967) 309–321
- [13] Braess, D.: Über die Vorzeichenstruktur der Exponentialsummen. *J. Approx. Theory* 3 (1970) 101–113

- [14] Braess, D.: Die Konstruktion der Tschebyscheff-Approximierenden bei der Approximation mit Exponentialsummen. *J. Approx. Theory* 3 (1970) 261–273
- [15] Braess, D.: Chebyshev Approximation by Spline Functions with Free Knots. *Numer. Math.* 17 (1971) 357–366
- [16] Braess, D.: Chebyshev Approximation by Gamma-Polynomials I. *J. Approx. Theory* 9 (1973) 20–43
- [17] Braess, D.: Kritische Punkte bei der nichtlinearen Tschebyscheff-Approximation. *Math. Z.* 132 (1973) 327–341
- [18] Braess, D.: Global Analysis and Chebyshev Approximation by Exponentials. In [98] (1973) 277–282
- [19] Braess, D.: Chebyshev Approximation by Gamma-Polynomials II. *J. Approx. Theory* 11 (1974) 16–37
- [20] Braess, D.: Geometrical Characterisations for Nonlinear Uniform Approximation. *J. Approx. Theory* 11 (1974) 260–274
- [21] Braess, D.: On the Number of Best Approximations in Certain Nonlinear Families of Functions. *Aequationes Math.* 12 (1975) 184–199
- [22] Braess, D.: On Rational L_2 -Approximation. *J. Approx. Theory* 18 (1976) 136–151
-
- [23] Braess, D.: Über das Anzahlproblem bei der rationalen L_2 -Approximation. In [42] (1976) 109–121
- [24] Braess, D.: Chebyshev Approximation by Gamma-Polynomials III. *J. Approx. Theory* 24 (1978) 119–145
- [25] Braess, D.: Global Analysis in Nonlinear Approximation and its Application to Exponential Approximation. In [181] (1981) 23–63
- [26] Braess, D.; Werner, H.: Tschebyscheff-Approximation mit einer Klasse rationaler Splinefunktionen II. *J. Approx. Theory* 10 (1974) 379–399
- [27] Branin, F. H. Jr.: Widely Convergent Method for Finding Multiple Solutions of Simultaneous Nonlinear Equations, *IBM J. Res. Develop.* 16 (1972) 504–522
- [28] Brosowski, B.: Nicht-Lineare Tschebyscheff-Approximation. Mannheim: Bibliographisches Institut 1968
- [29] Brosowski, B.; Wegmann, R.: Charakterisierung bester Approximationen in normierten Räumen. *J. Approx. Theory* 3 (1970) 369–397
- [30] Brown, K. M.; Dennis, J. E.: Derivative-Free Analogues of the Levenberg-Marquardt and Gauß Algorithms for Nonlinear Least-Squares Approximations. *Numer. Math.* 18 (1972) 289–297
- [31] Businger, P.; Golub, G. H.: Linear Least Squares Solutions by Householder Transformations. *Numer. Math.* 7 (1965) 269–276
- [32] Carasso, C.: Étude de l'algorithme de Rémès en l'absence de conditions de Haar. *Numer. Math.* 20 (1972) 165–178
- [33] Carasso, C.; Laurent, P. J.: Un algorithme général pour l'approximation au sens de Tschebyscheff de fonctions bornées sur un ensemble quelconque. In [144] (1976) 99–121
- [34] Cheney, E. W.; Goldstein, A. A.: Newton's Method for Convex Programming and Tschebyscheff Approximation. *Numer. Math.* 1 (1959) 253–268
- [35] Cheney, E. W.: Introduction to Approximation Theory. Maidenhead: McGraw-Hill 1966
- [36] Cheney, E. W. (Ed.): Approximation Theory III. New York: Academic Press 1980
- [37] Collatz, L.: Approximation von Funktionen bei einer und bei mehreren unabhängigen Veränderlichen. *Z. Angew. Math. Mech.* 36 (1956) 198–211
- [38] Collatz, L.; Wetterling, W.: Optimierungsaufgaben. Berlin: Springer 1971, 2. Aufl.
- [39] Collatz, L.; Krabs, W.: Approximationstheorie. Stuttgart: Teubner 1973
- [40] Collatz, L.; Meinardus, G.; Werner, H. (Hrsg.): Numerische Methoden der Approximationstheorie. Band 1. Basel – Stuttgart: Birkhäuser 1972. = ISNM 16
- [41] Collatz, L.; Meinardus, G.; Werner, H. (Hrsg.): Numerische Methoden der Approximationstheorie. Band 2. Basel – Stuttgart: Birkhäuser 1975. = ISNM 26
- [42] Collatz, L.; Meinardus, G.; Werner, H. (Hrsg.): Numerische Methoden der Approximationstheorie. Band 3. Basel – Stuttgart: Birkhäuser 1976. = ISNM 30
- [43] Collatz, L.; Meinardus, G.; Werner, H. (Hrsg.): Numerische Methoden der Approximationstheorie. Band 4. Basel – Stuttgart: Birkhäuser 1978. = ISNM 42

- [44] Collatz, L.; Meinardus, G.; Werner, H. (Hrsg.): Numerische Methoden der Approximationstheorie. Band 5. Basel – Stuttgart: Birkhäuser 1980. = ISNM 52
- [45] Collatz, L.; Meinardus, G.; Werner, H. (Hrsg.): Numerische Methoden der Approximationstheorie. Band 6. Basel – Stuttgart: Birkhäuser 1976. = ISNM 59
- [46] Collatz, L.; Meinardus, G.; Werner, H. (Hrsg.): Numerische Methoden der Approximationstheorie. Band 7. Basel – Stuttgart: Birkhäuser 1983. = ISNM 67
- [47] Cromme, L. J.: Eine Klasse von Verfahren zur Ermittlung bester nichtlinearer Tschebyscheff-Approximationen. *Numer. Math.* **25** (1976) 447–459
- [48] Cromme, L. J.: Bemerkungen zur numerischen Behandlung nichtlinearer Aufgaben der Tschebyscheff-Approximation. In [42] (1976) 175–186
- [49] Cromme, L. J.: Zur Tschebyscheff-Approximation bei Ungleichungsnebenbedingungen im Funktionenraum. In [144] (1976) 144–153
- [50] Cromme, L. J.: Numerische Methoden zur Behandlung einiger Problemklassen der nichtlinearen Tschebyscheff-Approximation mit Nebenbedingungen. *Numer. Math.* **28** (1977) 101–117
- [51] Cromme, L. J.: LINDIT – A FORTRAN Routine for the Calculation of Discrete Linear Maximum Norm Approximations. SFB 72 – Nr. 133. Institut für Angewandte Mathematik der Universität Bonn 1977
- [52] Cromme, L. J.: Approximation auf Mannigfaltigkeiten mit Spitzen – Theorie und Numerische Methoden. Habilitationsschrift, Göttingen 1979
- [53] Cromme, L. J.: Regular C_1 -Parametrizations for Exponential Sums and Splines. *J. Approx. Theory* **35** (1982) 30–44
- [54] Cromme, L. J.: A Unified Approach to Differential Characterizations of Local Best Approximations to Exponential Sums and Splines. *J. Approx. Theory* **36** (1982) 294–303
- [55] Deuffhard, P.: A Modified Newton Method for the Solution of Ill-Conditioned Systems of Nonlinear Equations with Application to Multiple Shooting. *Numer. Math.* **22** (1974) 289–314
- [56] Deuffhard, P.: A relaxation Strategy for the Modified Newton Method. In: Optimization and Optimal Control, by R. Bulirsch; W. Oettli; J. Stoer (Eds.). Berlin: Springer Lecture Notes in Math. **477** (1975) 59–73
- [57] Deuffhard, P.; Heindl, G.: Affine Invariant Convergence Theorems for Newton's Method with Extensions to Related Methods. *SIAM J. Numer. Anal.* **16** (1979) 1–10
- [58] Deuffhard, P.; Apostoiescu, V.: A Study of the Gauß-Newton Algorithm for the Solution of Nonlinear Least Squares Problems. In [64] (1980) 129–150
- [59] Deuffhard, P.; Sautter, W.: On Rank-Deficient Pseudoinverses. *Linear Algebra Appl.* **29** (1980) 91–111
- [60] Diener, I.: On Nonuniqueness in Nonlinear L_2 -Approximation, erscheint in *J. Approx. Th.*
- [61] Esch, R. E.; Eastman, W. L.: Computational Methods for Best Spline Function Approximation. *J. Approx. Theory* **2** (1969) 85–96
- [62] Fletcher, R.: An Algorithm for Solving Linearly Constrained Optimization Problems. *Math. Programming* **2** (1972) 133–165
- [63] Fletcher, R.; Grant, J. A.; Hebden, M. D.: Linear Minimax Approximation as the Limit of Best L_p -Approximations. *SIAM J. Numer. Anal.* **11** (1974) 123–136
- [64] Frehse, J.; Pallaschke, D.; Trottenberg, U. (Eds.): *Special Topics of Applied Mathematics*. Amsterdam: North Holland 1980
- [65] Gauß, C. F.: *Theoria motus corporum coelestium in sectionibus conicis solem ambientium*, 1809. Werke Band 7 (1906) 240–254
- [66] Geiger, C.: Zur Konvergenz eines Abstiegsverfahrens für nichtlineare gleichmäßige Approximationsaufgaben. Institut für Angewandte Mathematik, Universität Hamburg, Preprint 77/14, 1977
- [67] Gill, P. E.; Murray, W.: Algorithms for the Solution of the Nonlinear Least-Squares Problem. *SIAM J. Numer. Anal.* **15** (1978) 977–992
- [68] Glashoff, K.; Gustafson, S. A.: *Einführung in die lineare Optimierung*. Darmstadt: Wissenschaftliche Buchgesellschaft 1978
- [69] Gutknecht, M.: Ein Abstiegsverfahren für gleichmäßige Approximation mit Anwendungen. Dissertation, ETH Zürich, 1973

- [70] Gutknecht, M.: Ein Abstiegsverfahren für nicht-diskrete Tschebyscheff-Approximationsprobleme. In [43] (1978) 154–171
- [71] Haar, A.: Die Minkowskische Geometrie und die Annäherung an stetige Funktionen. *Math. Ann.* **78** (1918) 294–311
- [72] Häußler, W. M.: A Local Convergence Analysis for the Gauß-Newton and Levenberg-Marquardt Algorithms. *Computing* **31** (1983) 231–244
- [73] Hald, J.; Madsen, K.: A 2-Stage Algorithm for Minimax Optimization. *Tekniske Højskole Lvngebv. Danmark. Report No. NI-78-11.* 1978
-
- [74] Handscomb, D. C. (Ed.): *Multivariate Approximation.* New York: Academic Press 1978
- [75] Hebdon, M. D.: An Algorithm for Minimization Using Exact Second Derivatives. Atomic Energy Research Establishment Report TP 515, Harwell, England: 1973
- [76] Hettich, R.: A Newton Method for Nonlinear Chebyshev Approximation. In [144] (1976) 222–236
- [77] Hettich, R.: *Semi-Infinite Programming.* Berlin: Springer 1979. = *Lecture Notes in Control and Information Science* **15**
- [78] Hettich, R.: Numerical Methods for Nonlinear Chebyshev Approximation. In [107] (1979) 139–156
- [79] Hettich, R.; Zencke, P.: *Numerische Methoden der Approximation und semiinfiniten Optimierung.* Stuttgart: Teubner 1982
- [80] Hobby, C. R.; Rice, J. R.: Approximation from a Curve of Functions. *Arch. Rational Mech. Anal.* **27** (1967) 91–106
- [81] Kammler, D. W.: Existence of Best Approximations by Sums of Exponentials. *J. Approx. Theory* **9** (1973) 78–90
- [82] Kammler, D. W.: Characterization of Best Approximations by Sums of Exponentials. *J. Approx. Theory* **9** (1973) 173–191
- [83] Kammler, D. W.: Chebyshev Approximation of Completely Monotonic Functions by Sums of Exponentials. *SIAM J. Numer. Anal.* **13** (1976) 761–774
- [84] Kammler, E. W.; McGlinn, R. J.: A Bibliography for Approximation with Exponential Sums. *J. Comput. Appl. Math.* **4** (1978) 167–173
- [85] Karlovitz, L.: Remarks on the Construction of Schauder Bases and on the Pólya Algorithm. In [74] (1978) 209–217
- [86] Kelley, J. E., Jr.: An Application of Linear Programming to Curve Fitting. *SIAM J. Appl. Math.* **6** (1958) 15–22
- [87] Kirchberger, P.: Über Tschebyscheffsche Annäherungsmethoden. *Math. Ann.* **57** (1903) 509–540
- [88] Krabs, W.: Ein Pseudo-Gradientenverfahren zur Lösung des diskreten linearen Tschebyscheff-Approximationsproblems. *Computing* **4** (1969) 216–224
- [89] Krabs, W.: Ein Verfahren zur Lösung gewisser nichtlinearer diskreter Approximationsprobleme. *Z. Angew. Math. Mech.* **50** (1970) 359–368
- [90] Krabs, W.: *Optimierung und Approximation.* Stuttgart: Teubner 1975
- [91] Lamprecht, G.: Mehrdeutigkeit bei der Approximation in der L_∞ -Norm mit Hilfe

- [101] Mairhuber, J. C.: On Haar's Theorem Concerning Chebyshev Approximation Problems having Unique Solutions. *Proc. AMS* 7 (1956) 609–615
- [102] Marquardt, D. W.: An Algorithm for Least-Squares-Estimation of Nonlinear Parameters. *SIAM J. Appl. Math.* 11 (1963) 431–441
- [103] McBride, W. E.; Rigler, A. K.: A Modification of the Osborne and Watson Algorithm for Nonlinear Minimax Approximation. *Computer J.* 19 (1974) 79–81
- [104] McGlinn, R. J.: Approximation by Exponential Sums on Discrete and Continuous Domains. *J. Approx. Theory* 25 (1979) 65–88
- [105] McKewon, J. J.: On Algorithms for Sums of Squares Problems. In: *Towards Global Optimization*, by L. C. W. Dixon (Ed.). New York: Elsevier 1975. 229–257
-
- [106] Meinardus, G.: *Approximation von Funktionen und ihre numerische Behandlung*. Berlin: Springer 1964
- [107] Meinardus, G. (Hrsg.): *Approximation in Theorie und Praxis*. Mannheim: Bibliographisches Institut 1979
- [108] Meinardus, G.; Schwedt, D.: Nicht-lineare Approximationen. *Arch. Rational Mech. Anal.* 17 (1964) 297–326
- [109] Meyer, R. R.; Roth, P. M.: Modified Damped Least Squares: An Algorithm for Nonlinear Estimation. *J. Inst. Math. Appl.* 9 (1972) 218–233
- [110] Moré, J. J.: The Levenberg-Marquardt Algorithm: Implementation and Theory. In [163] (1978) 105–116
- [111] Morrison, D. D.: Methods for Nonlinear Least-Squares Problems and Convergence Proofs. *Proc. Jet Propulsion Laboratory = JPL, Pasadena, Cal., Seminar* (1960) 1–9
- [112] Murnaghan, F. D.; Wrench, J. W.: The Determination of the Chebyshev Approximating Polynomial for a Differentiable Function. *Math. Comp.* 13 (1959) 185–193
- [113] Nazareth, L.: Some Recent Approaches to Solving Large Residual Nonlinear Least Squares Problems. *SIAM Rev.* 22 (1980) 1–11
- [114] Opper, G.: An Algorithm for the Construction of Best Approximations Based on Kolmogorov's Criterion. *J. Approx. Theory* 23 (1978) 299–317
- [115] Osborne, M. R.: An Algorithm for Discrete, Nonlinear Best Approximation Problems. In [40] (1972) 117–126
- [116] Osborne, M. R.: Some Aspects of Nonlinear Least Squares Calculations. In [97] (1972) 171–189
- [117] Osborne, M. R.: Nonlinear Least Squares – the Levenberg Algorithm Revisited. *J. Austral. Math. Soc.* 19 Ser. B. (1976) 343–357
- [118] Osborne, M. R.: An Algorithmic Approach to Nonlinear Approximation Problems. In [36] (1980) 705–710
- [119] Osborne, M. R.; Watson, G. A.: An Algorithm for Minimax Approximation in the Nonlinear Case. *Computer J.* 12 (1969) 63–68
- [120] Osborne, M. R.; Watson, G. A.: Nonlinear Approximation Problems in Vector Norms. In [163] (1978) 117–132
- [121] Pólya, G.: Sur une algorithmes toujours convergent pour obtenir les polynomes de meilleure approximation de Tchebycheff pour une fonction continue quelconque. *C. R. Acad. Sci. Paris* 157 (1913) 840–843
- [122] Powell, M. J. D.: A Hybrid Method for Nonlinear Equations. In [124] (1970) 87–114
- [123] Powell, M. J. D.: *Approximation Theory and Methods*. Cambridge University Press 1981
- [124] Rabinowitz, P. (Ed.): *Numerical Methods for Nonlinear Algebraic Equations*. London: Gordon & Breach 1970
- [125] Ralston, A.: Rational Chebyshev Approximation by Rémès Algorithms. *Numer. Math.* 7 (1965) 322–330
- [126] Reemtsen, R.: On the Convergence of a Class of Nonlinear Approximation Methods. *J. Approx. Theory* 36 (1982) 237–256
- [127] Remez, E.: Sur un procédé convergent d'approximations successives pour déterminer les polynomes d'approximation. *C. R. Acad. Sci. Paris* 198 (1934) 2063–2065
- [128] Remez, E.: Sur le calcul effectif des polynomes d'approximation de Tchebycheff. *C. R. Acad. Sci. Paris* 199 (1934) 337–340
- [129] Rice, J. R.: *The Approximation of Functions I*. Reading, Mass.: Addison-Wesley 1964

- [130] Rice, J. R.: *The Approximation of Functions*. Vol. II, Reading, Mass.: Addison-Wesley 1969
- [131] Robitzsch, H., Schaback, R.: Die numerische Berechnung von Startnäherungen bei der Exponentialapproximation. In [43] (1978) 260–280
- [132] Ruhe, A.: Accelerated Gauß-Newton Algorithms for Nonlinear Least Squares Problems. *Bit* 19 (1979) 356–367
- [133] Sahnay, B. N. (Ed.): *Polynomial and Spline Approximation*. Dordrecht: Reidel 1979
- [134] Sautter, W.: A-posteriori-Fehlerabschätzungen für die Pseudoinverse und die Lösung minimaler Länge. *Computing* 14 (1975) 37–44
- [135] Schaback, R.: Spezielle rationale Splinefunktionen. *J. Approx. Theory* 7 (1973) 281–292
- [136] Schaback, R.: Globale Konvergenz von Verfahren zur nichtlinearen Approximation. In [144] (1976) 352–363
- [137] Schaback, R.: Calculation of Best Approximations by Rational Splines. In [99] (1976) 533–539
- [138] Schaback, R.: On Alternation Numbers in Nonlinear Chebyshev Approximation. *J. Approx. Theory* 23 (1978) 379–391
- [139] Schaback, R.: Suboptimal Exponential Approximations. *SIAM J. Numer. Anal.* 16 (1979) 1007–1018
- [140] Schaback, R.: Bemerkungen zur Fehlerabschätzung bei linearer Tschebyscheff-Approximation. In [44] (1980) 255–276
- [141] Schaback, R.: Numerical Error Evaluation in Linear Approximation – The Least-Squares Case. In [36] (1980) 791–798
- [142] Schaback, R.: Convergence Analysis of the General Gauß-Newton Method. *Numer. Math.* 46 (1985) 281–309
- [143] Schaback, R.; Braess, D.: Eine Lösungsmethode für die lineare Tschebyscheff-Approximation bei nicht erfüllter Haarscher Bedingung. *Computing* 6 (1970) 289–294
- [144] Schaback, R.; Scherer, K. (Eds.): *Approximation Theory*. Berlin: Springer 1976. = *Lecture Notes in Mathematics* 556
- [145] Schäfer, E.: Ein Konstruktionsverfahren bei allgemeiner linearer Approximation. *Numer. Math.* 18 (1971) 113–126
- [146] Schmidt, E.: Zur Kompaktheit bei Exponentialsummen. *J. Approx. Theory* 3 (1970) 445–454
- [147] Schmidt, E.: Stetigkeitsaussagen bei der Tschebyscheff-Approximation mit positiven Exponentialsummen. *J. Approx. Theory* 4 (1971) 13–20
- [148] Schoenberg, I. J. (Ed.): *Approximations with Special Emphasis on Spline Functions*. New York: Academic Press 1969
- [149] Schultz, R.: Ein Abstiegsverfahren für Approximationsaufgaben in normierten Räumen. *Dissertation Hamburg* 1977
- [150] Schumaker, L. L.: Uniform Approximation by Tchebycheffian Spline Functions. *J. Math. Mech.* 18 (1968) 369–378
- [151] Schumaker, L. L.: Uniform Approximation by Chebyshev Spline Functions II. Free Knots. *SIAM J. Numer. Anal.* 5 (1968) 647–656
- [152] Spieß, J.: Eindeutigkeitsätze bei der nichtlinearen Approximation in strikt-konvexen Räumen. *Dissertation Hamburg* 1969
- [153] Stiefel, E.: Über diskrete und lineare Tschebyscheff-Approximationen. *Numer. Math.* 1 (1959) 1–28
- [154] Stiefel, E.: Note on Jordan Elimination, Linear Programming and Tschebyscheff-Approximation. *Numer. Math.* 2 (1960) 1–17
- [155] Stoer, J.: *Einführung in die Numerische Mathematik I*. Springer 1972, 2. Aufl. 1979. = *Heidelberger Taschenbücher* 105
- [156] Talbot, A. (Ed.): *Approximation Theory*. New York: Academic Press 1970
- [157] Töpfer, H. J.: Tschebyscheff-Approximation und Austauschverfahren bei nicht erfüllter Haarscher Bedingung. In: *Funktionalanalysis, Approximationstheorie, Numerische Mathematik*, by L. Collatz, G. Meinardus, H. Unger (Hrsg.) Basel – Stuttgart: Birkhäuser 1967. = *ISNM* 7, 71–89
- [158] Tschebyscheff, P. L.: Sur les questions de minima qui se rattachent à la représentation approximative des fonctions. *Oeuvres* Bd. I, St. Petersburg 1899, 273–378

- [159] Veidinger, L.: On the Numerical Determination of the Best Approximations in the Chebyshev Sense. *Numer. Math.* **2** (1960) 99–105
- [160] Verfürth, R.: On the Number of Local Best Approximations by Exponential Sums. *J. Approx. Theory* **34** (1982) 306–323
- [161] Villiers, N. de; Glasser, D.: A Continuation Method for Nonlinear Regression. *SIAM J. Numer. Anal.* **18** (1981) 1139–1154
- [162] Watson, G. A.: A Multiple Exchange Algorithm for Multivariate Chebyshev Approximation. *SIAM J. Num. Anal.* **12** (1975) 46–52
- [163] Watson, G. A. (Ed.): *Numerical Analysis*. Berlin: Springer 1978. = *Lecture Notes in Math.* **630**
- [164] Watson, G. A.: *Approximation Theory and Numerical Methods*. Chichester: Wiley 1980
- [165] Werner, H.: Tschebyscheff-Approximation im Bereich der rationalen Funktionen bei Vorliegen einer guten Ausgangsnäherung. *Arch. Rational Mech. Anal.* **10** (1962) 205–219
- [166] Werner, H.: Die konstruktive Ermittlung der Tschebyscheff-Approximierenden im Bereich der rationalen Funktionen. *Arch. Rational Mech. Anal.* **11** (1962) 368–384
- [167] Werner, H.: *Vorlesung über Approximationstheorie*. Berlin: Springer 1966. = *Lecture Notes in Math.* **14**
- [168] Werner, H.: Der Existenzsatz für das Tschebyscheffsche Approximationsproblem mit Exponentialsummen. In: *Funktionalanalytische Methoden der Numerischen Mathematik*, by L. Collatz; H. Unger (Hrsg.) Basel – Stuttgart: Birkhäuser 1969. = *ISNM* **12**, 133–143
- [169] Werner, H.: Tschebyscheff-Approximation with Sums of Exponentials. In [156] (1970) 109–136
- [170] Werner, H.: Tschebyscheff-Approximation mit einer Klasse rationaler Spline-Funktionen. *J. Approx. Theory* **10** (1974) 74–92
- [171] Werner, H.: Approximation by Regular Splines with Free Knots. In [99] (1976) 567–573
- [172] Werner, H.: Neuere Entwicklungen auf dem Gebiet der nichtlinearen Splinefunktionen. *Z. Angew. Math. Mech.* **58** (1978) T86–T95
- [173] Werner, H.: An Introduction to Non-Linear Splines. In [133] (1979) 247–306
- [174] Werner, H.: The Development of Nonlinear Splines and Their Applications. In [36] (1980) 125–150
- [175] Werner, H.; Glowatzki, E.; Raymann, G.: Approximationen für die Tangens-Funktion. Deutsches Rechenzentrum Darmstadt Programm-Information PI-14-5, Mai 1966
- [176] Werner, H.; Stoer, J.; Bommás, W.: Rational Chebyshev Approximation. *Numer. Math.* **10** (1967) 289–306
- [177] Wetterling, W.: Anwendung des Newtonschen Iterationsverfahrens bei der Tschebyscheff-Approximation, insbesondere mit nichtlinear auftretenden Parametern. *MTW Teil I: 61–63, Teil II: 112–115*, Enschede: 1963
- [178] Wolfe, Jerry M.: On the Unicity of Nonlinear Approximation in Smooth Spaces. *J. Approx. Theory* **12** (1974) 165–181
- [179] Zencke, Peter: Zur Parametrisierung reeller Exponentialsummen durch lineare Differentialgleichungen mit Parameterrestriktionen. In [43] (1978) 320–344
- [180] Zencke, Peter: *Theorie und Numerik der Tschebyscheff-Approximation mit reell-erweiterten Exponentialsummen*. Dissertation Bonn 1980
- [181] Ziegler, Z. (Ed.): *Approximation Theory and Applications*. New York: Academic Press 1981
- [182] Zuhovickii, I.; Poljak, R. A.; Primak, M. E.: An Algorithm for the Solution of the Problem of Convex Chebyshev Approximation. *Soviet Math. Dokl.* **4** (1963) 901–904

Prof. Dr. R. Schaback
 Institut für Numerische
 und Angewandte Mathematik
 der Universität
 Lotzestraße 16–18
 3400 Göttingen

(Eingegangen: 10. 12. 1984)

Integrable Hamiltonsche Systeme und Algebraische Geometrie

Horst Knörrer, Bonn

Integrable Hamiltonsche Systeme sind spezielle gewöhnliche Differentialgleichungen, nämlich solche, die durch Anwendung der „Hamilton-Jacobi-Methode“ der Trennung der Variablen (siehe § 1 unten oder [A 9] § 47) explizit gelöst werden können. Bei dieser Hamilton-Jacobi-Methode müssen neben elementaren algebraischen Operationen und der Berechnung von Umkehrfunktionen auch Quadraturen (d. h. Bestimmung von unbestimmten Integralen) durchgeführt werden. Schon bei ganz einfachen Beispielen integrierbarer Hamiltonscher Systeme treten dabei elliptische und hyperelliptische Integrale und ihre Umkehrfunktionen auf; dies deutet auf eine enge Beziehung zwischen integrierbaren Hamiltonschen Systemen und Fragen der Algebraischen Geometrie (insbesondere im Zusammenhang mit Abelschen Varietäten) hin. In der Tat waren die im Zusammenhang mit Fragestellungen aus der Mechanik auftretenden Umkehrprobleme für elliptische und hyperelliptische Integrale eine der Motivationen für die Entwicklung der Theorie der elliptischen und hyperelliptischen Funktionen in der ersten Hälfte des vorigen Jahrhunderts – dies spiegelt sich auch darin wider, daß der Name Carl Gustav Jacobi in beiden Gebieten an vielen wichtigen Stellen auftritt.

In den letzten zehn bis fünfzehn Jahren ist das Interesse an diesen Zusammenhängen zwischen integrierbaren Hamiltonschen Systemen und algebraischer Geometrie wieder besonders lebendig geworden – vor allem, weil einige partielle Differentialgleichungen wie die Korteweg-de Vries-Gleichung, die Sine-Gordon-Gleichung oder die nichtlineare Schrödinger-Gleichung in gewissem Sinne als unendlich-dimensionale Analoga von integrierbaren Hamiltonschen Systemen aufgefaßt werden können. Dies hat dann natürlich auch dazu geführt, daß die endlich-dimensionalen Probleme von einem etwas anderen („moderneren“) Standpunkt aus wieder betrachtet wurden. Bei der Untersuchung integrierbarer Hamiltonscher Systeme und ihren Beziehungen zur algebraischen Geometrie gibt es relativ wenig allgemeine Sätze und Resultate; vielmehr handelt es sich um eine Fülle von Beispielen, die überraschende und interessante Verbindungen untereinander und zu anderen Gebieten der Mathematik aufweisen. In diesem Artikel möchte ich versuchen, davon einen Eindruck zu geben.

Zunächst möchte ich an einem ganz elementaren Beispiel – dem Kugelpendel – die grundlegenden Begriffe erläutern und modellhaft die Beziehung dieses Problems zur algebraischen Geometrie darstellen. Danach wird ein Überblick über

weitere interessante „endlich-dimensionale“ integrable Hamiltonsche Systeme gegeben und dann (in § 3) etwas präziser auf das Toda-Gitter und die Methode der Lax-Paare eingegangen. Die Frage nach dem Auffinden von integrablen Hamiltonschen Systemen wird in § 4 diskutiert. Die Entwicklungen im Zusammenhang mit speziellen partiellen Differentialgleichungen – insbesondere der Korteweg-de Vries-Gleichung und der sogenannten KP-Gleichung bis hin zur Lösung des Schottky-Problems werden in § 5 und § 6 skizziert.

1 Das Kugelpendel

Wir betrachten ein Pendel mit einer starren Achse, die so an einem festen Punkt aufgehängt ist, daß sich das Pendel in allen Richtungen frei bewegen kann. Die einzige Kraft, die auf das Pendel wirkt, sei die Gravitation. Die Untersuchung dieser Situation führt zu folgendem mathematischen Problem: Man beschreibe die Bewegung eines Massenpunktes (etwa der Masse 1) auf der 2-Sphäre

$$S^2 := \{x \in \mathbb{R}^3 / x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 = 1\}$$

unter dem Einfluß des Potentials $P(x) = x_3$. Nach den Newtonschen Gesetzen kann dieses Problem durch eine gewöhnliche Differentialgleichung (ein Vektorfeld) auf dem Tangentialraum der Sphäre

$$M := TS^2 = \{(x, v) \in S^2 \times \mathbb{R}^3 / \langle x, v \rangle = 0\}^1)$$

beschrieben werden. Explizit ist dieses Vektorfeld gegeben durch

$$\begin{aligned} \dot{x}_1 &= v_1 & \dot{v}_1 &= -\lambda(x, v)x_1^2 & \text{mit } \lambda(x, v) &:= \langle v, v \rangle - x_3 \\ X: \dot{x}_2 &= v_2 & \dot{v}_2 &= -\lambda(x, v)x_2 \\ \dot{x}_3 &= v_3 & \dot{v}_3 &= -\lambda(x, v)x_3 - 1 \end{aligned}$$

Einer der naheliegenden Ansätze bei der Untersuchung eines derartigen Problems ist die Suche nach Erhaltungsgrößen- oder wie man auch sagt, Integralen. Das sind Funktionen auf dem Phasenraum M , die konstant sind auf den Lösungskurven der Differentialgleichung. In unserem Fall sind die Gesamtenergie

$$E: M \rightarrow \mathbb{R}$$

$$(x, v) \rightarrow \frac{1}{2} \langle v, v \rangle + x_3$$

und der Drehimpuls um die x_3 -Achse

$$I: M \rightarrow \mathbb{R}$$

$$(x, v) \rightarrow x_1 v_2 - x_2 v_1$$

solche Integrale. Die Existenz dieser zwei „unabhängigen“ Integrale garantiert schon, daß die Differentialgleichung lösbar ist – es ist ein integrables Hamiltonsches System.

¹⁾ $\langle \cdot, \cdot \rangle$ bezeichne das übliche Skalarprodukt in \mathbb{R}^n .

²⁾ $\dot{\cdot}$ bedeute hier und im folgenden die Ableitung nach der Zeit t .

Der Begriff eines integrablen Hamiltonschen Systems wird allgemein in der Sprache der symplektischen Geometrie formuliert. Sei also (M^{2n}, ω) eine symplektische Mannigfaltigkeit, i.e. M ist eine $2n$ -dimensionale C^∞ -Mannigfaltigkeit und ω eine geschlossene nichtentartete 2-Form auf M . Beispiele von symplektischen Mannigfaltigkeiten sind etwa die Cotangentialbündel T^*N von differenzierbaren Mannigfaltigkeiten N – diese tragen eine kanonisch definierte symplektische Struktur (siehe etwa [A 9], § 37). Falls auf N zusätzlich eine Riemannsche Metrik definiert ist, so kann mit Hilfe dieser Metrik das Tangentialbündel TN mit dem Cotangentialbündel T^*N identifiziert werden, und somit trägt dann auch TN eine kanonische symplektische Struktur. In diesem Sinn ist auch TS^2 aus dem Beispiel des Kugelpendels eine symplektische Mannigfaltigkeit; die symplektische Form stimmt überein mit der Einschränkung der Form $dx_1 \wedge dv_1 + dx_2 \wedge dv_2 + dx_3 \wedge dv_3$ auf $TS^2 \subset \mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}^3$.

Ist $H : M \rightarrow \mathbb{R}$ eine differenzierbare Funktion auf der symplektischen Mannigfaltigkeit (M, ω) , so ist dH eine 1-Form auf M . X_H sei das Bild des Schrittes dH im

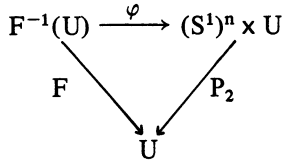
Satz (Arnol'd³), Jost). Wir nehmen an, daß $F : M \rightarrow \mathbb{R}^n$ eigentlich ist. Sei $B \subset \text{Bild}(F)$ die Menge der regulären Werte von F . Dann ist

$$F|_{F^{-1}(B)} : F^{-1}(B) \rightarrow B$$

ein lokal-triviales Bündel von n -Tori. Für jedes $c \in B$ ist das Vektorfeld X_H linear auf dem Torus M_c .

Bemerkungen. 1. Unter einem n -Torus verstehen wir eine Mannigfaltigkeit der Form \mathbb{R}^n/Γ , wobei $\Gamma \cong \mathbb{Z}^n$ ein Untergitter von \mathbb{R}^n ist. Ein solcher Torus hat eine flache Struktur, und mit Torus-Bündel meinen wir ein Bündel von Tori mit flacher Struktur. Da I_1, \dots, I_n Integrale von X_H sind, ist X_H tangential an jedes M_c . Der zweite Teil des Satzes besagt, daß die Integralkurven von X_H in M_c Bilder paralleler Geraden unter der Projektion $\mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n/\Gamma \cong M_c$ sind. Insbesondere ist X_H quasiperiodisch auf jedem M_c .

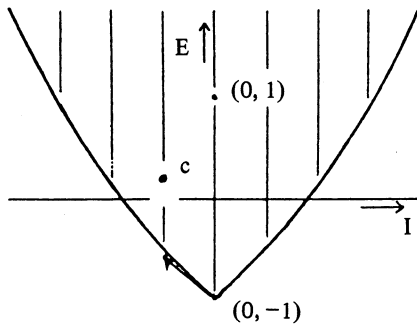
2. Mit Hilfe der Hamilton-Jacobi-Methode kann man für jedes $c \in B$ explizit eine Umgebung U von $c \in B$ und einen symplektischen Diffeomorphismus $\varphi : F^{-1}(U) \rightarrow (S^1)^n \times U$ angeben, so daß das Diagramm



kommutiert. In den Standardkoordinaten auf $(S^1)^n \times U$ (den „Wirkungs-Winkel-Variablen“) ist X_H linear und kann sofort integriert werden. Dazu und zum Beweis des Satzes von Arnol'd-Jost siehe etwa [A 9], § 41, 50, [D 7], [M 2]. Im Fall des Kugelpendels hat das Bild der Abbildung

$$F = (I, E) : M \rightarrow \mathbb{R}^2$$

etwa folgende Gestalt:

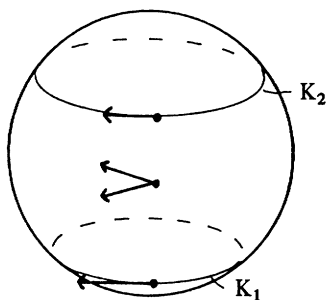


Kritische Werte von F sind natürlich der Rand des Bildes, und außerdem noch der Punkt $\hat{c} := (0, 1)$. (Über \hat{c} liegt ein kritischer Punkt von M , er entspricht der instabilen Ruhelage des Massenpunktes am Nordpol der Sphäre: $x = (0, 0, 1)$,

³) Arnol'd [A 9] schreibt diesen Satz Liouville zu.

$v = (0, 0, 0)$.) Die Tori aus dem Satz von Arnol'd-Iost kann man in diesem Fall

konkret sehen: Sei etwa $c = (c_1, c_2) \in B$ wie in der obigen Zeichnung. Da der Drehimpuls c_1 von Null verschieden ist, ist das Bild eines Elementes von M_c unter der Projektion $M = TS^2 \rightarrow S^2$ weder der Nordpol noch der Südpol der 2-Sphäre. Also gibt es zwei Breitenkreise K_1, K_2 auf der Sphäre, so daß M_c aus Tangentialvektoren an S^2 besteht, deren Fußpunkte zwischen diesen beiden Breitenkreisen liegen. Man überlegt sich leicht, daß es für einen Punkt $p \in S^2$ zwischen K_1 und K_2 genau zwei Tangentialvektoren v, v' gibt, so daß $(p, v), (p, v') \in M_c$. Falls $p \in K_1 \cup K_2$, so fallen v und v' zusammen.



Die Einschränkung der Projektion $M = TS^2 \rightarrow S^2$ auf M_c realisiert also M_c als doppelte verzweigte Überlagerung des Streifens zwischen K_1 und K_2 , die über K_1 und K_2 verzweigt. Damit sieht man, daß M_c diffeomorph zu einem 2-Torus ist. Die Abbildung $F : M \rightarrow \mathbf{R}^2$ hat recht interessante geometrische Eigenschaften; beispielsweise ist die Monodromie des 2-Torus-Bündels $F^{-1}(B) \rightarrow B$ nicht trivial. Wir wollen darauf nicht eingehen und verweisen auf [D 7], [C 1].

Bekanntlich läßt sich Differentialgleichung, die das Kugelpendel beschreibt, durch elliptische Funktionen lösen ([W 2], § 55). Dies legt nahe, daß die reellen 2-Tori M_c in natürlicher Weise aufgefaßt werden können als Menge von reellen Punkten auf einer komplex-algebraischen Varietät, die selbst die Struktur einer kommutativen Gruppe hat. Um diese komplex-algebraische Varietät zu finden, ist es hier am einfachsten, bei allen Definitionen (von M, M_c, F usw.) die reellen durch die komplexen Zahlen zu ersetzen. Die entstehenden Varietäten bezeichnen wir mit $M^{\mathbf{C}}, M_c^{\mathbf{C}}$ etc., also

$$M^{\mathbf{C}} = \{(x, v) \in \mathbf{C}^3 \times \mathbf{C}^3 / x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 = 1, x_1 v_1 + x_2 v_2 + x_3 v_3 = 0\}$$

$$M_c^{\mathbf{C}} = \left\{ (x, v) \in M^{\mathbf{C}} / \frac{1}{2}(v_1^2 + v_2^2 + v_3^2) + x_3 = c_2, x_1 v_2 - x_2 v_1 = c_1 \right\}$$

Genau wie die Gruppe $SO(2, \mathbf{R})$ auf M durch Drehung um die x_3 -Achse operiert und dabei die Fasern M_c von F in sich überführt, operiert $SO(2, \mathbf{C})$ auf $M^{\mathbf{C}}$ durch

$$SO(2, \mathbf{C}) \times M^{\mathbf{C}} \rightarrow M^{\mathbf{C}}$$

$$\left(\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}, (x, v) \right) \mapsto (ax_1 + bx_2, cx_1 + dx_2, x_3; av_1 + bv_2, cv_1 + dv_2, v_3)$$

führt jedes $M_c^{\mathbf{C}}$ in sich über. Diese Aktion von $SO(2, \mathbf{C}) \cong \mathbf{C}^*$ kann man dazu verwenden, um die Struktur von $M_c^{\mathbf{C}}$ zu analysieren.

Wir wollen das Resultat in der Sprache der (verallgemeinerten) Jacobivarietäten formulieren. Ist C eine irreduzible, eventuell singuläre algebraische Kurve und $p : \tilde{C} \rightarrow C$ ihre Normalisierung, so sei $\gamma_1, \dots, \gamma_r$ eine Basis von $H_1(C, \mathbf{Z})$ und $\omega_1, \dots, \omega_g$ eine Basis des Vektorraums der Rosenlicht-Differentiale (vgl. [S 2] IV § 3)⁴⁾. $\Gamma \subset \mathbf{C}^g$ sei die Untergruppe, die von den Vektoren

$$\left(\int_{\gamma_i} \omega_1, \dots, \int_{\gamma_i} \omega_g \right), \quad i = 1, \dots, r$$

erzeugt wird. Wir setzen

$$\text{Jac}(C) := \mathbf{C}^g / \Gamma,$$

dies ist eine kommutative algebraische Gruppe. Sie ist kompakt genau dann, wenn C nichtsingulär ist. Da jedes holomorphe Differential auf \tilde{C} ein Rosenlicht-Differential auf C definiert, hat man eine kanonische Abbildung

$$\text{Jac}(C) \rightarrow \text{Jac}(\tilde{C}).$$

Diese Abbildung ist ein Bündel, dessen Faser isomorph zu einem Produkt von Kopien von \mathbf{C} und \mathbf{C}^* ist. Falls C etwa nur einen gewöhnlichen Doppelpunkt hat, so ist die Faser isomorph zu \mathbf{C}^* . (Zur Theorie der verallgemeinerten Jacobivarietäten siehe [S 2], V.) In dieser Sprache läßt sich nun die Struktur von M_c^C mit $c \in B$ beschreiben.

Satz. (i) Sei $\pi : M^C \rightarrow \mathbf{C}^2$ die Abbildung $(x, y) \mapsto (x_3, y_3)$. Dann ist π invariant unter der $SO(2, \mathbf{C})$ -Aktion und $\pi(M_c^C) = \{(z, y) \in \mathbf{C}^2 / y^2 = 2(c_2 - z)(1 - z^2) - c_1^2 =: E_c\}$. Die Kurve E_c läßt sich durch einen „unendlich fernen“ Punkt zu einer glatten elliptischen Kurve \bar{E}_c kompaktifizieren.

(ii) Sei \hat{E}_c die singuläre Kurve, die aus E_c durch Identifikation der Punkte $(1, ic_1)$ und $(-1, ic_1)$ zu einem gewöhnlichen Doppelpunkt entsteht. Dann gibt es eine birationale Abbildung $\psi : M_c \rightarrow \text{Jac}(\hat{E}_c)$ so daß das Diagramm

$$\begin{array}{ccc} M_c & \xrightarrow{\psi} & \text{Jac}(\hat{E}_c) \\ \pi \downarrow & & \downarrow \\ \bar{E}_c & \cong & \text{Jac}(\bar{E}_c) \end{array}$$

kommutiert. Dabei sind \bar{E}_c und $\text{Jac}(\bar{E}_c)$ durch die Abel-Jacobi-Abbildung mit dem unendlich fernen Punkt als Basispunkt identifiziert (cf. [M8] III).

(iii) Bezeichnet X^C die Komplexifizierung des Vektorfeldes X , das die Bewegung des Kugelpendels beschreibt, so ist $\psi_*(X^C)$ ein lineares Vektorfeld auf der kommutativen algebraischen Gruppe $\text{Jac}(\hat{E}_c)$. Die Richtung von $\psi_*(X^C)$ kann folgendermaßen beschrieben werden:

Der Cotangentia Raum von $\text{Jac}(\hat{E}_c)$ im Nullpunkt ist der Vektorraum der Rosenlicht-Differentiale auf \hat{E}_c . Die Menge aller solchen Differentiale, die im unendlich fernen Punkt von \hat{E}_c verschwinden, ist darin eine Hyperebene. Dual zu dieser Hyperebene ist eine Gerade im Tangentialraum von $\text{Jac}(\hat{E}_c)$ – und dieser Geraden entspricht die Richtung von $\psi_*(X^C)$.

⁴⁾ falls C nichtsingulär ist, sind dies gerade die holomorphen Differentiale auf C .

Man sagt, das Vektorfeld $X = X_E$ werde auf der Jacobivarietät von \hat{E}_c linearisiert. Wenn man will, kann man diese Beschreibung von M_c^C und X^C dazu verwenden, um – ohne weitere Rechnungen – eine Parametrisierung der Lösungen der Differentialgleichung in Termen von elliptischen Funktionen und Thetafunktionen auf \bar{E}_c anzugeben. Sicher wirkt diese algebraisch-geometrische Betrachtungsweise bei einem so einfachen und klassischen Beispiel etwas umständlich und weit hergeholt; bei anderen etwas komplizierteren Beispielen erweist sie sich aber bei der Untersuchung des Systems als sehr nützlich.

2 Beispiele integrierbarer Hamiltonscher Systeme

In diesem Abschnitt möchte ich einige der wichtigsten Beispiele integrierbarer Hamiltonscher Systeme kurz vorstellen – dies ist natürlich eine sehr subjektive und einseitige Auswahl.

Der schwere symmetrische Kreisel [K 10], [63], [L 2], [R 1])

Unter einem Kreisel verstehen wir einen starren Körper, der in einem festen Punkt aufgehängt ist und sich um diesen Punkt frei und nur unter dem Einfluß der Gravitation bewegt. Zeichnet man eine Ruhelage des Kreisels aus, so läßt sich jede Position des Kreisels eindeutig durch das Element der Gruppe $SO(3, \mathbf{R})$ beschreiben, das den Körper aus der Ruhelage in diese Position bringt. Der Phasenraum für die Differentialgleichung, die die Bewegung beschreibt, ist also $M = TSO(3, \mathbf{R})$. Bei einem allgemeinen Kreisel hat die Bewegungsgleichung zwei unabhängige Integrale, nämlich die Energie E und den Drehimpuls I_1 um die Gravitationsachse durch den Aufhängepunkt. Im allgemeinen gibt es kein weiteres, von E und I_1 unabhängiges analytisches Integral (vgl. [H 5], siehe auch § 4). Falls das Trägheitsellipsoid des Körpers (bzgl. des Aufhängepunktes) symmetrisch ist und der Schwerpunkt des Körpers auf seiner Symmetrieachse liegt, so ist der Drehimpuls I_2 um diese Symmetrieachse ein weiteres Integral. Man prüft leicht nach, daß E , I_1 und I_2 den Bedingungen für Integrabilität genügen. Ähnlich wie im Fall des Kugelpendels hat man auf den komplexifizierten Niveaumannigfaltigkeiten der Energie-Impuls-Abbildung eine Aktion der Gruppe $\mathbf{C}^* \times \mathbf{C}^*$; und die Tori aus dem Satz von Arnol'd-Jost sind in diesem Fall reelle Teile eines $\mathbf{C}^* \times \mathbf{C}^*$ -Bündels über einer elliptischen Kurve.

Der Kowalewski-Kreisel ([K 16], [K 13], [G 3], [L 2])

Die bisher betrachteten Beispiele hatten offensichtliche Symmetrien (beim schweren symmetrischen Kreisel die Rotation um die Gravitationsachse und die Rotation um die Symmetrieachse des Trägheitsellipsoid): und solche Symmetrien entsprechen nach einem Satz von E. Noether (cf. [A 9] § 20 und appendix 5) jeweils ein Integral. Bei vielen integrierbaren Hamiltonschen Systemen aber lassen sich die Integrale nicht alle aus den Symmetrien und der gegebenen Hamiltonfunktion ableiten, man spricht dann auch von „verborgenen Symmetrien“. Ein Beispiel dafür ist der von S. Kowalewski 1889 [K 16] entdeckte Fall der Kreiselbewegung. Hierbei sind zwei Hauptträgheitsmomente gleich (etwa m), das dritte Hauptträgheitsmoment ist gleich $\frac{1}{2} m$, und der Schwerpunkt des Kör-

pers liegt in der Ebene der beiden gleichen Hauptträgheitsmomente. Das dritte Integral ist in diesem Fall recht kompliziert (siehe auch [W 2] § 74). Die regulären Fasern der Abbildung $F : \text{TSO}(3, \mathbf{R}) \rightarrow \mathbf{R}^3$, die durch die Integrale gegeben wird, sind in diesem Fall der reelle Teil eines \mathbf{C}^* -Bündels über einer 2-dimensionalen Abelschen Varietät. Diese 2-dimensionale Abelsche Varietät wurde kürzlich von A. Lesfari (Louvain) als Prym-Varietät einer doppelten Überlagerung einer elliptischen Kurve, die in zwei Punkten verzweigt, identifiziert.

Der kräftefreie Kreisel

Hier nimmt man an, daß der Schwerpunkt des Körpers mit dem Unterstützungspunkt des Kreisels zusammenfällt. Dieses Problem ist äquivalent zur Untersuchung des geodätischen Flusses auf $\text{SO}(3, \mathbf{R})$ bezüglich einer links-invarianten Metrik, die durch den Trägheitstensor des Körpers bestimmt wird (cf. [A 9], appendix 2). Dieses Problem ist an und für sich nicht integrabel, da die Poissonklammern der durch die $\text{SO}(3, \mathbf{R})$ -Symmetrie gegebenen Integrale untereinander nicht verschwinden. Durch den sogenannten Marsden-Weinstein-Reduktionsprozeß (vgl. [A 9] appendix 5) läßt sich dieses Problem aber zurückführen auf ein integrables Hamiltonsches System auf einem Orbit der adjungierten Darstellung von $\text{SO}(3, \mathbf{R})$ auf ihrer Lie-Algebra $\mathfrak{so}(3, \mathbf{R})^5$). Diese adjungierte Orbiten sind zwei-dimensional; und die Faser der Abbildung, die durch das Integral (die Hamiltonfunktion) gegeben wird, ist die Menge der reellen Punkte einer elliptischen Kurve.

Geodätischer Fluß auf $\text{SO}(4)$ bezüglich linksinvarianter Metriken

Wie im Fall des geodätischen Flusses auf $\text{SO}(3)$ läßt sich dieses Problem reduzieren auf ein Hamiltonsches System auf adjungierten Orbiten in $\mathfrak{so}(4)$. Diese adjungierten Orbiten haben Dimensionen vier und werden durch zwei quadratische

Gleichungen in dem sechsdimensionalen Raum $\mathfrak{so}(4)$ beschrieben. Die Hamiltonfunktion reduziert sich ebenfalls zu einer quadratischen Funktion auf $\mathfrak{so}(4)$. Die Fälle von Metriken, für die ein zusätzliches quadratisches Integral existiert, wurden in letzter Zeit sorgfältig untersucht ([A 6], [A 7], [M 4], [H 1], [H 2]). Es ergeben sich sehr schöne Beziehungen zwischen den Abelschen Varietäten, auf denen der Fluß linearisiert werden kann, und der Geometrie des Linearsystems von Quadriken, das von den Orbit-Invarianten, der Hamiltonfunktion und dem zusätzlichen Integral aufgespannt wird. Diese Systeme sind eng verwandt mit den integrablen Fällen der Bewegung eines starren Körpers in einer idealen Flüssigkeit, die von Clebsch, Steklov, Liapunov, Kötter (siehe [K 14], [P 2]) untersucht wurden.

Geodätische auf Quadriken und das mechanische Problem von C. Neumann

C. Neumann [N 2] untersuchte 1858 die Bewegung eines Massenpunktes auf der Sphäre $S^n := \{x \in \mathbf{R}^{n+1} / x_1^2 + \dots + x_{n+1}^2 = 1\}$ unter dem Einfluß eines quadratischen Potentials $P(x) = a_1 x_1^2 + \dots + a_{n+1} x_{n+1}^2$. Die Differentialgleichung für dieses System läßt sich leicht aufstellen; sie lautet

$$\ddot{x}_i = -a_i x_i + u x_i \quad \text{mit} \quad u(x, \dot{x}) = \sum_{i=1}^{n+1} (a_i x_i^2 - \dot{x}_i^2)$$

⁵⁾ nach einem Satz von Kirilov-Kostant ([A 9] appendix 2) trägt ein solcher adjungierter Orbit eine natürliche symplektische Struktur; A. Weinstein bemerkte, daß die zugehörige Poissonklammer bereits in einer Arbeit von S. Lie beschrieben ist (cf. [W 1]).

Dieses Problem ist eng verwandt mit der Untersuchung von Geodätischen auf Quadriken (vgl. [K 12], [M 7]): Bezeichnet Q die Quadrik $Q := \{x \in \mathbb{R}^{n+1} / a_1 x_1^2 + \dots + a_{n+1} x_{n+1}^2 = 0\}$, und ist $\xi(t)$ eine geeignet parametrisierte Geodätische auf Q , so ist der Normaleneinheitsvektor $x(t)$ and Q im Punkt $\xi(t)$

$$x_i(t) := \frac{1}{\|\xi(t)\|} a_i \xi_i(t)$$

eine Lösung der obigen Differentialgleichung und jede Lösung des Neumann-Problems kann auf diese Weise erhalten werden.

Beide Probleme lassen sich linearisieren auf Jacobivarietäten hyperelliptischer Kurven – das Problem des Geodätischen Flusses auf einem Ellipsoid wurde bereits von Jacobi 1838 gelöst (vgl. [J 1] 28. Vorlesung). Für die Beziehungen dieser Probleme zur Geometrie konfokaler Quadriken siehe auch [M 5], [M 6], [K 11].

Konstruktion von Monopolen

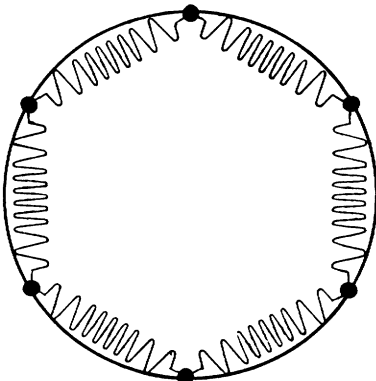
W. Nahm [N 1] zeigte, daß man Lösungen der Selbst-Dualitätsgleichung auf $\mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}$ aus Lösungen des folgenden Systems von Differentialgleichungen für komplexe $n \times n$ -Matrizen T_1, T_2, T_3 mit $T_i^* = -T_i$ erhalten kann:

$$T_1 = [T_2, T_3], \quad T_2 = [T_3, T_1], \quad T_3 = [T_1, T_2].$$

Dabei bezeichnet $[A, B] = A \circ B - B \circ A$ den Kommutator von A und B . Es stellt sich heraus, daß dieses System als integrables Hamiltonsches System aufgefaßt werden kann, und daß es auf Jacobivarietäten gewisser nichtsingulärer Kurven linearisiert wird. Für eine genauere Diskussion und die Beschreibung des Zusammenhangs mit der „Twistor-Konstruktion“ von Ward verweisen wir auf die Arbeit von Hitchin [H 4].

3 Toda-Gitter und isospektrale Deformationen

Eines der nicht-klassischen Systeme, deren Untersuchung das Interesse an integrablen Hamiltonschen Systemen und ihrer Beziehungen zur algebraischen Geometrie wieder aufleben ließ, ist das Toda-Gitter: Wir betrachten eine Kette von n Massenpunkten auf dem Kreis, die untereinander durch „Federn“ mit exponentiellem Kraftgesetz verbunden sind.



Die Beschreibung dieser Situation führt zu folgender Differentialgleichung:

$$\dot{x}_i = \frac{\partial H}{\partial y_i}, \quad \dot{y}_i = -\frac{\partial H}{\partial x_i}$$

mit $H(x, y) := \sum_{i=1}^n \left(\frac{1}{2} y_i^2 + \exp(x_i - x_{i+1}) \right)$, wobei $x_{i+n} = x_i$ gesetzt wird.

Dabei beschreibt x_i die Entfernung des i -ten Teilchens von einer fest gewählten Ruhelage.

Dieses System wurde um 1970 von M. Toda untersucht; unter anderem deshalb, weil es in gewisser Weise eine Diskretisierung der Korteweg-de Vries- und der Boussinesq-Gleichung darstellt.

Gegen 1974 bemerkte H. Flaschka (siehe etwa [F 1]), daß dieses System äquivalent ist zu der Gleichung

$$\dot{A} = [B, A]$$

mit $a_i := \frac{1}{2} \exp(x_i - x_{i+1}), \quad b_i := -v_i$.

gerade

$$\ker (y \cdot E - A(z, t))$$

ist (falls C singularär ist, erhält man eine torsionsfreie Garbe vom Rang 1 auf C). C läßt sich in natürlicher Weise durch glatte Punkte kompaktifizieren zu einer algebraischen Kurve \bar{C} , und auch L_t läßt sich in kanonischer Art erweitern zu einem Geradenbündel \bar{L}_t auf \bar{C} (siehe [M 9], [G 4]). $t \mapsto \bar{L}_t$ ist dann eine Abbildung von der Zeit-Geraden in die Menge $\text{Pic}^d(\bar{C})$ der Geradenbündel über \bar{C} von einem gewissen festen Grad d . Nach dem Satz von Abel ist $\text{Pic}^d(\bar{C})$ isomorph zu $\text{Jac}(\bar{C})$ (siehe etwa [M 8]). Ph. Griffiths [G 4] gibt nun notwendige und hinreichende Bedingungen an das Lax-Paar an dafür, daß diese Abbildung $t \rightarrow \bar{L}_t$ linear ist, i.e. daß das durch die Lax-Gleichung gegebene Vektorfeld auf $\text{Jac}(\bar{C})$ linearisiert wird. Diese Bedingungen sind einfach nachzuprüfen – und natürlich in den Fällen aus § 2 und beim Toda-Gitter erfüllt. Im Fall des Toda-Gitters ist \bar{C} wieder eine hyperelliptische Kurve – allerdings treten nicht alle hyperelliptischen Kurven bei einem Toda-Gitter auf.

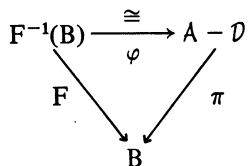
Lax-Gleichungen können auch aufgefaßt werden als Hamiltonsche Vektorfelder auf adjungierten Orbits in einer Lie-Unteralgebra von $\mathfrak{gl}(n, \mathbb{R})$, wobei \mathbb{R} den Ring aller Laurentreihen mit komplexen Koeffizienten bezeichnet. Dieser Zusam-

menhang zwischen integralen Hamiltonschen Systemen und unendlich-dimensionalen Lie-Algebren ist sorgfältig untersucht worden; wir verweisen hier nur auf [V 1], [V 2], [M 4].

Falls ein Hamiltonsches System in Lax-Form dargestellt ist, gibt es also eine recht

H gegebene⁶⁾ Hamiltonsche System X_H heißt algebraisch vollständig integrabel, wenn es holomorphe Funktionen $I_1, \dots, I_n : M \rightarrow \mathbf{C}$ gibt, so daß gilt:

- (i) $\{I_i, I_j\} = \{I_i, H\} = 0$ für $i, j = 1, \dots, n$.
- (ii) Die durch I_1, \dots, I_n definierte Abbildung $F : M \rightarrow \mathbf{C}^n$ ist submersiv auf einer Zariski-offenen dichten Teilmenge von M .
- (iii) Über einer Zariski-offenen dichten Teilmenge B von \mathbf{C}^n gibt es ein Bündel $\pi : A \rightarrow B$ von Abelschen Varietäten, einen Divisor $\mathcal{D} \subset A$ und einen Isomorphismus $\varphi : F^{-1}(B) \rightarrow A - \mathcal{D}$, so daß das Diagramm



kommutiert und so daß das Vektorfeld $\varphi_*(X_H)$ linear auf jeder der Abelschen Varietäten $\pi^{-1}(c)$, $c \in B$ ist.

In diesem Sinne sind alle bisher betrachteten Beispiele (evtl. nach Reduktion) algebraisch vollständig integrabel. Für algebraische Integrabilität nun gibt es eine einfache notwendige Bedingung, die im Grunde auf S. Kowalewski [K 16], [K 17] zurückgeht: Man kann zeigen, daß das Vektorfeld $\varphi_*(X_H)$ transversal zu \mathcal{D} ist. Ist $p \in \mathcal{D}$ so entspricht der Integralcurve von $\varphi_*(X_H)$ durch p vermöge φ^{-1} eine Lau-

rentreihe, die die ursprüngliche Differentialgleichung löst. Da $\dim_{\mathbf{C}} \mathcal{D} = 2n - 1$, ergibt sich (vgl. [A 5]):

Satz. Ist X_H algebraisch vollständig integrabel, so ist die Dimension des Raums aller echten Laurentreihen⁷⁾, die die Differentialgleichung lösen, mindestens $2n - 1$.

Dies ist ein recht effektives Kriterium: Man setzt eine Laurentreihe mit unbekann-

tem Koeffizienten als Lösung der Differentialgleichung an:

$$x_i = \sum_{j=-k}^{\infty} a_{ij} t^j \quad (i = 1, \dots, N)$$

Auß der Tatsache, daß dies eine Lösung der Differentialgleichung ist, ergeben sich

Bedingungen an die Koeffizienten der Form

$$L_{ij}(a_{1j}, \dots, a_{Nj}) = f_{ij}(a_{1,j-1}, \dots, a_{1,-k}, \dots, a_{N,-k})$$

mit linearen L_{ij} . Algebraische Integrabilität impliziert, daß der durch die L_{ij} gegebene lineare Operator mindestens Corang $2n - 1$ hat.

des kräftefreien Kreisels und des symmetrischen Kreisels nur noch der (hier schon in § 2 beschriebene) Kowalewski-Kreisel diese Bedingung erfüllt. Im zweiten Teil der Arbeit [K 16] beweist sie die Integrabilität des Kowalewski-Kreisels, indem sie das dritte Integral explizit angibt, und gibt die Lösungen des Gleichungssystem in Termen von Thetafunktionen an.

Kowalewskis Methode wurde von M. Adler und P. van Moerbeke [A 5] in moderner Sprache formuliert und auf mehrere andere Beispiele angewandt (siehe etwa [M 4]). Andere notwendige Bedingungen für Integrabilität wurden in letzter Zeit von Ziglin und Koslov (siehe [K 18], [Z 1]) und auch L. Haine [H 2] und Duistermaat [D 8] entwickelt. Sie beruhen zumeist auf der Untersuchung der Differentialgleichung in der Umgebung einer bereits bekannten Lösungskurve des Systems; sind also etwas weniger allgemein, aber auch mit weniger rechnerischem Aufwand verbunden als Kowalewskis Methode.

5 Die Korteweg-de Vries-Gleichung

Dies ist die folgende nichtlineare partielle Differentialgleichung:

$$\text{KdV} : u_t = 3uu_x - \frac{1}{2}u_{xxx} \quad (8)$$

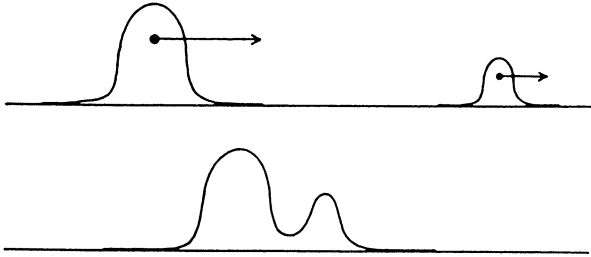
Sie wurde eingeführt von G. de Vries in seiner Dissertation [V 3] 1894⁹⁾, um Wasserwellen in einem langen flachen Kanal zu beschreiben. Eines der Hauptziele dieser Arbeit war es, das Phänomen der „solitären Wellen“ zu erfassen, das ca. 60 Jahre vorher von J. Scott-Russel beobachtet worden war. Dabei handelt es sich um eine einzelne Welle, die sich – ohne ihre Gestalt zu verändern – mit konstanter Geschwindigkeit in dem Kanal bewegt¹⁰⁾. Ein Auszug aus Scott Russels romanti-

schem Bericht über die „Entdeckung des Solitons“ ist zu Beginn des Übersichtsartikels [K 3] abgedruckt. Diese solitäre Welle – auch 1-Soliton genannt – entspricht der Lösung

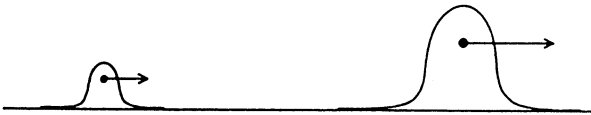
$$u(x, t) = \frac{-c}{\cosh^2 \left(\sqrt{\frac{c}{2}} (x - ct) \right)}$$

Allgemeiner untersuchte de Vries stationäre Lösungen dieser Gleichung, d. h. Lösungen der Form $u(x, t) = f(x - ct)$. Es stellt sich heraus, daß alle derartigen

Gegen 1960 trat die KdV-Gleichung auch in verschiedenen anderen physikalischen Zusammenhängen auf (zu ihrer Geschichte vgl. [B 1], [K 22]); und N. Zabusky, M. Kruskal und andere begannen mit einer numerischen (computergestützten) Untersuchung dieser Gleichung. Dabei wurde auch das Phänomen des n-Solitons entdeckt: Aus der Formel für das 1-Soliton sieht man, daß die Geschwindigkeit des Solitons proportional zu seiner Höhe ist. Beginnt man nun mit Anfangsdaten, die man durch Überlagerung zweier 1-Solitonen in großer Entfernung zueinander erhält, von denen das linke höher ist als das rechte, so beobachtet man das folgende:



Nach einer gewissen Zeit hat das linke Soliton das rechte eingeholt und vermischt sich mit ihm, aber wenn man noch länger wartet, so findet man die beiden Solitonen in unveränderter Form wieder; das große hat das kleine überholt, und es tritt eine kleine Phasenverschiebung auf.



Eine entsprechende Situation tritt bei der Überlagerung von n solitären Wellen auf – man nennt dies dann n-Soliton-Lösungen. Mathematisch präzise wurde ihre Existenz von Hirota [H 3] bewiesen (siehe auch [M 10] IIIb, § 5). Außerdem bemerkten Kruskal, Zabusky u. a. eine Reihe von Erhaltungsgrößen; z. B. sind die Größen

$$\int_{-\infty}^{+\infty} u dx, \quad \int_{-\infty}^{+\infty} u^2 dx, \quad \int_{-\infty}^{+\infty} \left[\frac{1}{2} u^3 - \frac{1}{4} u_x^2 \right] dx$$

– sofern sie definiert sind – unabhängig von t. Bis 1968 waren etwa 10 solche

Gleichung für Differentialoperatoren

$$\frac{d}{dt} Z = [Z, K]$$

Aus dieser Gleichung sieht man (ähnlich wie in § 3), daß das Spektrum von Z (in einem geeigneten Funktionenraum) von t unabhängig ist. Dies liefert dann unendlich viele Erhaltungsgrößen. Mit etwas Vorsicht kann man die KdV-Gleichung als integrables Hamiltonsches System auf dem Raum der Funktionen in eine Veränderlichen auffassen – für eine Diskussion der symplektischen Struktur und verwandter Fragen siehe etwa [A 2], [K 23], [M 1]. Bei dieser Analogie entsprechen den Fasern der Abbildung, die durch die Integrale gegeben ist (und die in der Situation des Satzes von Arnol'd-Jost Tori sind) Mengen von Funktionen $v(x)$

in einer geeigneten Klasse, für die der Operator $-\frac{d^2}{dx^2} + v$ ein vorgegebenes Spektrum hat. In der Tat ist es in vielen Fällen möglich, diese Mengen isospektraler Operatoren zu untersuchen¹¹⁾.

Besonders einfach ist die Situation, falls man sich auf quasiperiodische Funktionen v beschränkt und als Spektrum im Raum der zweimal stetig differenzierbaren Funktionen mit kompaktem Träger eine endliche Vereinigung S von Intervallen vorgibt, die nach unten beschränkt, nach oben unbeschränkt ist.

S : 

Wir setzen $I(S) := \{v : \mathbf{R} \rightarrow \mathbf{R}/v \text{ ist quasiperiodisch und der Operator } -\frac{d^2}{dx^2} + v \text{ hat Spektrum } S\}$. Ferner sei C die hyperelliptische Kurve, die als doppelte Überlagerung von $P_1(C)$ mit den Randpunkten von S als Verzweigungspunkten realisiert wird.

Satz (McKean-van Moerbeke [K 8], Novikov et al. [D 2]). *Es gibt einen Isomorphismus ψ zwischen $I(S)$ und der Menge der reellen Punkte der Jacobivarietät $Jac(C)$ von C . Der durch die Lax-Darstellung der KdV-Gleichung auf $I(S)$ definierte Fluß entspricht unter ψ einem linearen Fluß auf $Jac(C)$.*

M. a. W.: „Die KdV-Gleichung wird auf $Jac(C)$ linearisiert“.

Eine elegante Beschreibung dieses Isomorphismus ψ wurde von Krichever gegeben, wir wollen einen Teil seiner Konstruktion hier skizzieren (vgl. [K 19], [M 9]):

Sei also $v \in I(S)$, und Z bezeichne den Operator $-\frac{d^2}{dx^2} + v$. Dann kann man zeigen, daß es einen Operator ungerader Ordnung Y der Form

$$Y = \frac{d^k}{dx^k} + a_{k-1}(x) \frac{d^{k-1}}{dx^{k-1}} + \dots + a_0(x) \quad (k \text{ ungerade})$$

¹¹⁾ Die Untersuchung solcher isospektraler Mannigfaltigkeiten mit geometrischen und algebraisch geometrischen Methoden ist auch unabhängig von dem Zusammenhang mit integrablen Hamiltonschen Systemen interessant und bietet wohl noch viele interessante Perspektiven für das Zusammenspiel von Analysis und algebraischer Geometrie (vgl. etwa [62]).

gibt, der mit Z kommutiert:

$$Y \cdot Z = Z \cdot Y.$$

Nachdem man evtl. Y durch Potenzen von Z abgeändert hat, kann man zeigen, daß Y und Z eine Gleichung

$$Y^2 = p(Z)$$

mit einem Polynom p vom Grad k erfüllen. Die Nullstellen von p sind gerade die Ränder des Spektrums von Z .

$$C' := \{(y, z) \in \mathbb{C}^2 / y^2 - p(z) = 0\}$$

ist dann eine affine algebraische Kurve, die sich durch einen glatten Punkt im Unendlichen zu einer hyperelliptischen Kurve C kompaktifizieren läßt. Für jeden Punkt $(y, z) \in C'$ sei

$$L_{(y, z)} := \{f \in \mathbb{C}[[x]] / Y(f) = y \cdot f, Z(f) = z \cdot f\};$$

dies ist ein eindimensionaler \mathbb{C} -Vektorraum¹²⁾, Die Räume $L_{(y, z)}$ lassen sich zu einem Geradenbündel L' auf C' zusammenkleben; und indem man geeignete Wachstumsbedingungen für Schnitte im Unendlichen stellt, läßt sich L' fortsetzen zu einem Geradenbündel L auf C .

Auf diese Weise erhält man also ausgehend von Z (bzw. v) ein Geradenbündel L auf C , also im wesentlichen ein Element der Jacobivarietät von C . Variiert nun Z entsprechend der Lax-Beschreibung der KdV-Gleichung, so bleibt offenbar p und die Kurve C fest, aber das Geradenbündel L variiert linear auf $\text{Jac}(C)$.

Auch die Umkehrabbildung von ψ kann in konzeptueller Weise elegant beschrieben werden. Wir beschränken uns hier auf die (zu dieser Konstruktion ..im wesent-

lichen“ äquivalenten) folgenden Feststellung (siehe z. B. [D 9]):

Ist C eine hyperelliptische Kurve vom Geschlecht g und ϑ ¹³⁾ ihre Riemannsche Thetafunktion, so erfüllt

$$u(x, t) := -2 \frac{\partial}{\partial x^2} \ln \vartheta(\vec{U} \cdot x + \vec{V} \cdot t) + \text{const}$$

die KdV-Gleichung¹⁴⁾.

In der oben beschriebenen Konstruktion der Abbildung ψ ist die spezielle Gestalt der Operatoren Y, Z unwesentlich; sie hängt nur von dem kommutativen Ring von Differentialoperatoren ab, der von Y und Z erzeugt wird. Allgemeiner erhält man auf die oben angedeutete Weise eine Beziehung zwischen kommutativen Ringen von Differentialoperatoren und torsionsfreien Garben auf Kurven – eine Beziehung, die bereits 1922 von Burchnall und Chaundy [B 2] untersucht worden war¹⁵⁾.

¹²⁾ falls Y von minimal möglichem Grad gewählt war.

¹³⁾ Zur Definition und Eigenschaften von Thetafunktionen siehe etwa [M 8], [M 10].

¹⁴⁾ \vec{U} und \vec{V} sind Richtungen in \mathbb{C}^g , die durch einen Weierstraßpunkt von C bestimmt sind.

¹⁵⁾ Diese Arbeiten waren allerdings in Vergessenheit geraten.

In diesem Stil lassen sich auch mehrere andere spezielle Differentialgleichungen behandeln, so etwa

die Boussinesq-Gleichung $\ddot{u} = \frac{\partial^2}{\partial x^2} \left(\frac{4}{3} u^2 - \frac{1}{3} \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \right)$, die äquivalent ist zu dem Lax-Paar $\dot{L} = [L, A]$ mit

$$L = -\frac{d^3}{dx^3} + 2u \frac{d}{dx} + \frac{\partial}{\partial x} + v, \quad A = -\frac{d^2}{dx^2} + \frac{4}{3} u$$

die nichtlineare Schrödingergleichung $i\dot{u} = 2|u|^2 u - u_{xx}$ mit der Lax-Darstellung $\dot{L} = [L, A]$, wobei

$$L = i \begin{pmatrix} \frac{\partial}{\partial x} & u \\ v & -\frac{\partial}{\partial x} \end{pmatrix}, \quad A = i \begin{pmatrix} \left(-2 \frac{\partial^2}{\partial x^2} - uv \right) & \left(-u_x - 2u \frac{\partial}{\partial x} \right) \\ \left(-v_x - 2v \frac{\partial}{\partial x} \right) & \left(2 \frac{\partial^2}{\partial x^2} + uv \right) \end{pmatrix}$$

und $\dot{u} = Fv$

die Sine-Gordon-Gleichung $\ddot{u} - \frac{2u}{x^2} + \sin u = 0$ (für eine Kommutatordarstellung siehe etwa [K 6] § 3).

Wir wollen darauf nicht weiter eingehen und verweisen nur auf die Übersichtsartikel [D 6], [D 9], [K 3], [M 4], sowie auf [K 6], [K 7]. Stattdessen kehren wir noch einmal zurück zur KdV-Gleichung und den Mengen isospektraler eindimensionaler Schrödingeroperatoren.

Der Fall, daß man als Spektrum für den Operator $-\frac{d^2}{dx^2} + v$ mit fast-periodischer Funktion v eine abzählbare Vereinigung von Intervallen vorgibt, wurde von McKean-Trubowitz [K 9] (im periodischen Fall) von Levitan ([L 3], [L 4] im allgemeinen) untersucht. Die Menge aller v , für die $-\frac{d^2}{dx^2} + v$ ein vorgegebenes Spektrum hat, ist dann isomorph zur Menge der reellen Punkte der Jacobivarietät einer hyperelliptischen Kurve von unendlichem Geschlecht (vgl. [K 5]).

Ein anderer Zugang zu der Untersuchung der isospektralen Mannigfaltigkeiten $I(S)$ wie oben wurde von Moser und Trubowitz gefunden (vgl. [M 7]): Betrachte eine Lösung $x(t)$ des in § 2 beschriebenen mechanischen Problems von C. Neumann. Dann ist jede Komponente $x_i(t)$ von $x(t)$ eine Eigenfunktion des Operators

$$Z := -\frac{d^2}{dt^2} + \lambda(x(t))$$

zum Eigenwert a_i . Man sieht aus der Integrabilität des Neumann-Problems, daß λ quasiperiodisch ist. Es stellt sich heraus, daß das Spektrum von Z aus nur endlich vielen Intervallen besteht, und daß jeder derartige Operator auf diese Weise aus einer Lösung eines Neumann-Problems gewonnen werden kann. Der algebraisch-geometrische Aspekt der KdV-Gleichung kann also fast vollständig auf ein mechanisches Problem aus dem letzten Jahrhundert zurückgeführt werden.

Für andere der oben genannten Gleichungen haben Deift-Lund-Trubowitz [D 1] ebenfalls endlich-dimensionale Systeme konstruiert, die zu diesen Gleichungen in ähnliche Beziehung stehen wie das Neumann-System zur KdV-Gleichung. Diese Systeme sind aber i. allg. wesentlich komplizierter als das Neumann-System. In

letzter Zeit bemühen sich H. Flaschka und seine Mitarbeiter um einen systematischen Ansatz, um zu den partiellen Differentialgleichungen, die mit Krichevers Methode behandelt werden können, kanonische endlich-dimensionale Systeme zu konstruieren, die die gesamte algebraisch-geometrische Struktur widerspiegeln (siehe etwa [F 2]).

Neben der hier geschilderten algebraisch-geometrischen Betrachtungsweise gibt es natürlich viele andere Aspekte der KdV-Gleichung (wie etwa der Zusammenhang mit Kac-Moody-Algebren, siehe [S 1], [K 1]); diese zu beschreiben, würde jedoch weit über den Rahmen dieses Aufsatzes hinausgehen.

6 Die Kadomtsev-Petviashvili-Gleichung und das Schottky-Problem

Bei der Untersuchung der Stabilität der Soliton-Lösungen der KdV wurden Kadomtsev und Petviashvili [K 2] zu folgender partieller Differentialgleichung für Funktionen in den Variablen x, y, t geführt:

$$(u_t - 6uu_x + u_{xxx})_x + u_{yy} = 0$$

Auch diese Gleichung (die man oft kurz die KP-Gleichung nennt) läßt sich als Kommutatorgleichung für Differentialoperatoren schreiben, nämlich

$$\left[\frac{\partial}{\partial t} - Z, \frac{\partial}{\partial y} - K \right] = 0$$

mit
$$Z = -\frac{d^2}{dx^2} + u, \quad K = \frac{d^3}{dx^3} + \frac{3}{4} \left(u \frac{d}{dx} + \left(\frac{d}{dx} \right) u \right) + w.$$

Mit ähnlichen Methoden wie bei der KdV-Gleichung läßt sich auch diese Gleichung linearisieren auf der Jacobivarietät einer algebraischen Kurve – allerdings treten hier nicht nur hyperelliptische Kurven auf, sondern beliebige kompakte algebraische Kurven. Genauer gilt (vgl. [D 5]).

Ist C eine nichtsinguläre kompakte algebraische Kurve vom Geschlecht g und ϑ ihre Riemannsche Thetafunktion, so gibt es $\vec{U}, \vec{V}, \vec{W} \in \mathbb{C}^g$, so daß

$$u(x, y, t) := -2 \frac{\partial^2}{\partial x^2} \ln (\vec{U} \cdot x + \vec{V} \cdot y + \vec{W} \cdot t) + \text{const}$$

die KP-Gleichung erfüllt ($\vec{U}, \vec{V}, \vec{W}$ und die Konstante sind explizit gegeben, vgl. [K 20]).

Diese Tatsache regte Novikov zu der Vermutung an, daß sich unter allen hauptpolarisierten Abelschen Varietäten die Jacobivarietäten algebraischer Kurven dadurch charakterisieren lassen, daß sich auf ihnen die KP-Gleichung linearisieren läßt. Dies ist in der Tat richtig – nach Vorarbeiten von Dubrovin [D 5], Arbarello-De Concini [A 8], Mulase [M 11] und anderen gelang es Shiota [S 3] zu zeigen:

Satz. Sei Ω eine symmetrische komplexe $g \times g$ -Matrix mit positiv definitem Imaginärteil, $A := \mathbf{C}^g / \mathbf{Z}^g + \Omega \mathbf{Z}^g$ die zugehörige hauptpolarisierte Abelsche Varietät (cf. [M 8]) und ϑ ihre Riemannsche Thetafunktion $\vartheta(z) = \sum_{m \in \mathbf{Z}} \exp(2\pi i' m z + \pi i' m \Omega m)$.

Dann sind die folgenden Aussagen (a) und (b) äquivalent:

(a) A ist isomorph zur Jacobivarietät einer nichtsingulären kompakten algebraischen Kurve.

(b) Es gibt Vektoren $\vec{U}, \vec{V}, \vec{W} \in \mathbf{C}^g$, $U \neq 0$ und eine quadratische Form $Q(x, y, t)$, so daß

$$(i) \quad u(x, y, t) := -2 \frac{\partial^2}{\partial x^2} Q(x, y, t) \cdot \ln \vartheta(\vec{U} \cdot x + \vec{V} \cdot y + \vec{W} \cdot t + \xi)$$

ist für jedes $\xi \in \mathbf{C}^g$ eine Lösung der KP-Gleichung, und

(ii) der Θ -divisor von A enthält keine Abelsche Untervarietät von A , zu der der Vektor \vec{U} tangential ist.

Vermutlich folgt (b, ii) bereits aus (b, i). Dieser Satz (bzw. bereits das Resultat von Arbarello-De Concini [A 8]) ermöglicht es zum Beispiel, auf dem Modulraum der hauptpolarisierten Abelschen Varietäten Gleichungen anzugeben, die gerade den Ort aller Jacobivarietäten beschreiben.

Das Problem, die Jacobivarietäten unter allen Abelschen Varietäten zu charakterisieren, war bereits von Riemann aufgeworfen worden. Es wird i. a. das Schottky-Problem genannt, da Schottky erste erfolgversprechende Ansätze zu einer Lösung entwickelt hatte (vgl. [M 8] IV). Die obigen Resultate sind aber die erste vollständige Lösung dieses Problems. Sie ist vielleicht für praktische Zwecke noch nicht voll befriedigend – man würde sich eine geometrische Charakterisierung des Ortes aller Jacobivarietäten wünschen; es gibt aber bereits eine Reihe von erfolg-

- [B 1] van der Blij, F.: Some details of the history of the Korteweg-de Vries equation. *Nieuw Archief voor Wiskunde* **26** (1978) 54–64
- [B 2] Burchnall, J.; Chaundy, T.: Commutative ordinary differential operators. *Proc. Roy. Soc. London, Ser. A*, **118** (1928) 557–583
- [B 3] Buys, M.: The Kovalevskaya Top. Thesis, NYU 1982
- [C 1] Cushman, R.: Geometry of the energy-momentum mapping of the spherical pendulum. *CWI Newsletter* **1** (1983) 4–18
- [D 1] Deift, P.; Lund, F.; Trubowitz, E.: Nonlinear wave equations and constrained harmonic motion. *Comm. Math. Physics* **74** (1980) 141–188
- [D 2] Dubrovin, B.; Matveev, V.; Novikov, S.: Nonlinear equations of Korteweg-de Vries type, finite-zone linear operators and abelian varieties. *Russ. Math. Surveys* **31** (1) (1976) 59–149
- [D 3] Dubrovin, B.: Completely integrable Hamiltonian systems associated with matrix operators and Abelian varieties. *Funct. Anal. Appl.* **11** (1977) 265–277
- [D 4] Dubrovin, B.: Theta functions and non-linear equations. *Russ. Math. Surveys* **36** (1981) 11–92
- [D 5] Dubrovin, B.: The Kadomtsev-Petviashvili equation and the relations between the periods of holomorphic differentials on Riemann surfaces. *Math. USSR Izv.* **19** (2) (1982) 285–296
- [D 6] Dubrovin, B.; Krichever, I.; Novikov, S.: Topological and Algebraic Geometry methods in contemporary mathematical physics II. *Sov. Sci. Rev., Sect. C*, **3** (1982) 1–150
- [D 7] Duistermaat, J.: On global action angle coordinates. *Comm. Pure Appl. Math.* **33** (1980) 687–706
- [D 8] Duistermaat, J.: Non-integrability of the 1 : 1 : 2 resonance. *Ergodic Th. & Dynam. Sys.* **4** (1984) 553–568
- [D 9] Drinfeld, V.; Krichever, I.; Manin, Y.; Novikov, S.: Methods of algebraic geometry in contemporary mathematical physics. *Sov. Sci. Rev., Sect. C*, **1** (1980) 1–54
- [E 1] Ehlers, F.; Knörrer, H.: An algebro-geometric interpretation of the Bäcklund-transformation for the Korteweg-de Vries equation. *Comm. Math. Helvetici* **57** (1982) 1–10
- [F 1] Flaschka, H.: Discrete and periodic illustrations of some aspects of the inverse method. In: *Dynamical Systems, Theory and Applications*, pp. 441–466. *Lecture Notes in Physics* **38**. Springer 1975
- [F 2] Flaschka, H.: Relations between infinite-dimensional and finite-dimensional isospectral equations. In: *Proc. RIMS Symposium on non-linear integrable systems* (editors: M. Jimbo and T. Miwa), pp. 221–240. *World Science Publ. Comp. Singapore* 1983
- [F 3] Fuchssteiner, B.: Soliton-Gleichungen. In: *Jahrbuch Überblicke Mathematik 1984*, pp. 9–36. *Bibliogr. Institut Mannheim – Zürich* 1984
- [G 1] van der Geer, G.: The Schottky problem. In: *Arbeitstagung 1984*, pp. 385–406. *Lecture Notes in Math.* **1111**, Springer 1985
- [G 2] Giesecker, D.; Trubowitz, E.: Fermi curves and density of states. In *Vorbereitung*
- [G 3] Golubev, V.: *Lectures on integration of the equations of motion of a rigid body about a fixed point*. Moskau 1953 (Übersetzt von J. Shorr-Kon für die National Science Foundation 1960)
- [G 4] Griffiths, Ph.: Linearizing flows and a cohomological interpretation of Lax equations. In: *Seminar on Nonlinear Partial Differential Equations*, pp. 37–46. *MSRI Publ.* **2**, Springer 1984
- [H 1] Haine, L.: Geodesic flow on $SO(4)$ and abelian surfaces. *Math. Ann.* **263** (1983) 435–472
- [H 2] Haine, L.: The algebraic complete integrability of geodesic flow on $SO(N)$. *Comm. Math. Phys.* **94** (1984) 271–288
- [H 3] Hirota, R.: Exact solution of the Korteweg-de Vries equation for multiple collisions of solitons. *Phys. Rev. Letters* **27** (1971) 1192–1194
- [H 4] Hitchin, N.: On the construction of monopoles. *Comm. Math. Physics* **89** (1983) 145–190

- [H 5] Holmes, Ph.; Marsden, J.: Horse shoes and Arnolds diffusion for Hamiltonian systems on Lie groups. *Indiana Univ. Math.* **32** (1983) 273–309
- [J 1] Jacobi, C.: Vorlesungen über Dynamik. Ges. Werke VIII
- [K 1] Kac, V.: Infinite dimensional Lie algebras. *Progr. in Math.* **44**. Birkhäuser 1983
- [K 2] Kadomtsev, B.; Petviashvili, V.: On the stability of solitary waves in weakly dispersing media. *Sov. Phys. Dokl.* **15** (1970) 539–541
- [K 3] McKean, H.: Integrable systems and algebraic curves. In: *Global Analysis*

- [M 1] Manin, Y.: Algebraic aspects of nonlinear differential equations. J. Sov. Math. 11 (1978) 1–122
- [M 2] Markus, L.; Meyer, K.: Generic Hamiltonian dynamical systems are neither integrable nor ergodic. Mem. AMS 144 (1974)
- [M 3] van Moerbeke, P.; Mumford, D.: The spectrum of difference operators and algebraic curves. Acta Math. 143 (1979) 93–154
- [M 4] van Moerbeke, P.: Algebraic complete integrability of Hamiltonian systems

and Kac-Moody Lie algebras. Erscheint in Proc. Int. Cong. Math, /arschau 1983

- [M 6] Moser, J.: Geometry of quadrics and spectral theory. In: The Chern Symposium 1979, pp. 147–188. Springer 1980
- [M 7] Moser, J.: Integrable Hamiltonian systems and spectral theory. Lezioni Fermiane, Pisa 1981



Buchbesprechungen

Borel, A., *Collected Papers*, Berlin – Heidelberg – New York – Tokyo: Springer-Verlag 1983, 3 volumes, xvi, 2226 pp., cloth, DM 348,—

Armand Borel hat die Herausgabe seiner „Gesammelten Werke“ selbst betreut. Mit Ausnahme einiger Seminar- oder Vorlesungsausarbeitungen und der Buchmonographien sind alle Arbeiten enthalten, die er allein oder mit anderen Mathematikern bis zum Jahre 1982 publiziert hat. Die Abhandlungen sind photomechanisch wiedergegeben. Manche der bisher nur maschinenschriftlich veröffentlichten Arbeiten wurden gesetzt; dies gilt insbesondere für die hier zum größten Teil aufgenommenen Vorträge, die A. Borel im Séminaire Bourbaki gehalten hat, leider jedoch nicht für die Titel [104] und [118] der Bibliographie A. Borels, die jedem der drei Bände beigegeben ist. *)

In die Sammlung seiner Arbeiten hat A. Borel auch zwei bisher unveröffentlichte Manuskripte aufgenommen. Das erste „Représentations linéaires et espaces homogènes kähleriens des groupes simplex compacts“ ([30], I, 392–396) stammt vom März 1954 und geht zum Teil auf eine Zusammenarbeit mit A. Weil zurück. Die zweite Arbeit „On periodic maps of certain $K(\pi, 1)$ “ ([87], III, 57–60) wurde 1969 verfaßt und beantwortet eine von D. Sullivan gestellte Frage.

A. Borel hat viele seiner Arbeiten mit Kommentaren versehen, in denen eventuelle Korrekturen durchgeführt oder spätere Resultate erläutert werden, die die Ergebnisse des Textes vervollständigen oder verallgemeinern und gestellte Fragen beantworten; gelegentlich werden noch offen gebliebene Probleme angedeutet. In diesen Anmerkungen werden zahlreiche Hinweise auch zur neueren Literatur gegeben.

Es kann hier nicht meine Aufgabe sein, das bisherige wissenschaftliche Werk von Armand Borel zu beschreiben und zu würdigen; dies steht in seiner ganzen Tiefe und in seinem Einfluß, den es auf die Entwicklung der Mathematik hat, für sich selbst ein. Die vorliegenden Bände zeugen davon, und man muß die ungebrochene Tatkraft A. Borels bewundern, mit der er sich neuere mathematische Theorien und Sachverhalte erschließt und mit vorantreibt.

Einige Anmerkungen, die mir beim Studium einzelner Arbeiten A. Borels in den Sinn kamen, sei mir jedoch zu äußern gestattet.

Schon in den 1952 zur Erlangung des Doktorgrades der „Faculté des Sciences“ der Universität von Paris vorgelegten „Thèses“ werden zwei wichtige Themen bezeichnet, die die wissenschaftliche Arbeit A. Borels durchziehen. Die Arbeit „Sur la cohomologie des espaces fibrés principaux et des espaces homogènes de groupes de Lie compacts“ ([23], I, 123–215) markiert beispielhaft in ihren Auswirkungen die Beiträge, die A. Borel zur algebraischen Topologie Liescher Gruppen und der zugehörigen homogenen Räume und zur Entwicklung der Theorie charakteristischer Klassen geleistet hat. Das andere Thema „Fonctions automorphes de plusieurs variables complexes“ läßt zum ersten Mal (cf. hierzu [22], I, 104–119) die Beschäftigung mit Problemen aus der Theorie arithmetischer Gruppen und automorpher Formen offenbar werden. Damit sind auch zugleich exemplarisch zwei Gesichtspunkte in der Theorie der Lieschen Gruppen genannt, die die Herausbildung dieses Gebietes zu seiner heutigen Form wesentlich mitbestimmt haben. Dies meint zum einen den „transzendenten“ Zugang, der auf die grundlegenden Arbeiten von H. Weyl und E. Cartan zurückgeht und in dem sich Differentialgeometrie, Topologie und algebraische Methoden verschränken, und zum anderen die Theorie der linearen algebraischen Gruppen wie sie in den Jahren 1956–58 durch A. Borel ([39], I, 490–552) und C. Chevalley über algebraisch abgeschlossenen Körpern ent-

*) Auch im folgenden beziehen sich Ziffern in eckigen Klammern auf diese Bibliographie, gefolgt von Bandnummer und Seitenangaben.

wickelt wurde und in deren Begründung Ergebnisse der algebraischen Geometrie sehr stark eingehen.

Dieser zweite Aspekt ist in den Arbeiten Borels immer mehr in den Vordergrund getreten, und es ist deutlich, daß der Begriff der Theorie der Lieschen Gruppen in Borels Verständnis nicht nur die klassischen reellen oder komplexen Lieschen Gruppen meint, sondern auch die linearen algebraischen Gruppen und p -adischen Gruppen sowie die zugehörigen p -adischen „symmetrischen Räume“ einschließt. Zusammen mit J. Tits hat A. Borel die Strukturtheorie reductiver Gruppen über beliebigen Körpern aufgebaut (cf. „Groupes réductifs“ [66], II, 424–520. „Compléments à l'article: ‚Groupes réductifs““ [94], III, 129–152). Aus sehr verschiedenen Motiven heraus kam es zu dieser Entwicklung: Für jeden Typ der durch W. Killing und E. Cartan gegebenen Klassifikation der komplexen einfachen Lieschen Gruppen hatte C. Chevalley 1955 („Sur certains groupes simples“ Tohoku Math. J. 7 (1955) 14–66) eine lineare Gruppe über beliebigem Körper k konstruiert und damit (für k endlich) insbesondere bisher nicht bekannte endliche einfache Gruppen erhalten. Die Rolle, die dabei von der Bruhat-Zerlegung gespielt wird, und die Untersuchung verschiedener Geometrien waren sicherlich für J. Tits ein wichtiger Anstoß. Aufbauend auf der klassischen Reduktionstheorie quadratischer Formen und den Arbeiten von C. L. Siegel hierzu und der damit verbundenen Entwicklung einer Theorie der automorphen Funktionen in mehreren Variablen hatte Borel andererseits, auch zusammen mit Harish-Chandra, Fundamentalmengen für arithmetische Untergruppen beliebiger algebraischer Gruppen über einem Zahlkörper studiert und so einen allgemeinen Rahmen für eine Theorie automorpher Formen vorgeschlagen. Dies bedingte auch eine intensive Auseinandersetzung mit den arithmetischen und rationalen Eigenschaften algebraischer Gruppen. Das Problem, eine für das Studium automorpher Formen sinnvolle Verallgemeinerung des Begriffs einer parabolischen Spitze eines Fundamentalbereichs für die Aktion einer Fuchsschen Gruppe auf der oberen Halbebene zu finden, hat dann Borel auch, wie er selbst bemerkt, zu den Strukturfragen reductiver algebraischer Gruppen geführt.

Dies kann als Beispiel gelten, daß A. Borel stets daran wesentlich mitgewirkt hat, das Gebäude der Theorie der Lieschen Gruppen zu vervollkommen und ihre Rolle, die sie in den anderen Gebieten der Mathematik spielt, zu erhellen. Der Zusammenhang mit dem Studium automorpher Formen und deren Beziehung zur Zahlentheorie und algebraischen Geometrie sind dabei leitende Motive. Untersuchungen zur Darstellungstheorie reductiver Gruppen, Kompaktifizierungen arithmetischer Quotienten symmetrischer Räume, zur Kohomologie arithmetischer Gruppen und automorphen L -Funktionen, die in den Fragenkreis der nicht-abelschen Klassenkörpertheorie hineingehören, kommen zueinander.

Immer wieder hat A. Borel in sorgfältig und klar geschriebenen Überblicksaufsätzen innegehalten und versucht, den gegenwärtigen Stand der mathematischen Forschung zu bestimmten Problemen festzuhalten, offene Fragen auszusprechen und Ausblicke auf mögliche weitere Entwicklungen zu geben. Um das Fortschreiten der Mathematik zu begreifen und um die Zusammenhänge einzelner Ergebnisse untereinander zu verstehen, sind diese Arbeiten Borels eine wertvolle Hilfe. Ein ebenso großer Wert ist den Ergebnisberichten, die aus von A. Borel mitinitiierten Tagungen und Seminaren bis in jüngster Zeit hervorgegangen sind, zuzusprechen. Beispielhaft seien hier nur die beiden Bände „Automorphic forms, representations and L -functions“ (Proc. Symp. in Pure Maths., XXXIII, Amer. Math. Soc., Providence 1979) erwähnt.

Will man über die mathematischen Forschungsarbeiten hinaus ein wenig mehr das Verstehen und die Auffassung von Mathematik, die Borel eigen sind, kennenlernen, so lese man die Niederschrift ([119], III, 685–701) eines 1981 gehaltenen Vortrages unter dem Titel „Mathematik: Kunst und Wissenschaft“. Hier leuchtet manche Facette der Persönlichkeit Armand Borels auf, die sonst hinter dem mathematischen Gegenstand zurücktritt.

Fuks, D. B., Rokhlin, V. A., *Beginner's Course in Topology* (Universitext), Berlin – Heidelberg – New York – Tokyo: Springer-Verlag 1984, 17 fig., xi + 519 p., Soft cover, DM 88,—

Was ist dieses Buch nicht? – so fragen wir wie ein einfältiger Prüfer, um gleich zu antworten: Es ist nicht, was sein Titel sagt. Kein Anfänger versuche daraus Topologie zu lernen, und niemand versuche, danach eine Vorlesung zu halten. Schon allein der streng codierte Formalismus steht dem entgegen. Etwa 230 Einträge finden sich im Symbolverzeichnis. Wie dieser Reichtum zustande kommt, ahnt man schon auf Seite 2: Angenommen man hat eine Abbildung $f: X \rightarrow Y$, und $A \subset X$ mit $f(A) \subset B \subset Y$, so hat man ja auch $f|_A: A \rightarrow B$. Aber in diesem Buch hat man stets $ab: A \rightarrow B$ und damit die Abbildung von Paaren $\text{rel } f = (f, ab f) : (X, A) \rightarrow (Y, B)$. Das muß man sich jetzt merken, denn das Unkraut überflüssiger Bezeichnungen wuchert schnell, und weil damit ja einem maschinengeübten Geist alles klar ist, werden weitere Erklärungen nicht gegeben. Immerhin hilft das Symbolverzeichnis, auch „ $ab \text{ tl ad } f$ “ (S. 299) zu entschlüsseln. Aber – man weiß es vom Maschinenwesen – ein simpler Druckfehler kann sich bei diesem Stil schlimm auswirken. Das ist, was man gern als Bourbaki-Stil bezeichnet, doch zu Unrecht: Denn die meisten Bücher von Bourbaki sind wunderbar zu lesen, auch in Auszügen, und ihre Bezeichnungen haben sich durchgesetzt, weil sie einfach, sinnfällig und geschickt sind. Das kann man von den Bezeichnungen dieses Buches nicht sagen, und noch dazu werden viele allgemein akzeptierte Symbole und Namen geändert: zum Beispiel \otimes statt \wedge für das smash product und „Borsuk-pair“ für „cofibration“. Überhaupt rühmen sich die Autoren: “We have even departed from the tradition that some theorems bear the names of their real or imaginary authors. In return, we willingly have used names of topologists in the terminology and notations.” – Ein schlechtes und unsachliches Verfahren, das der Willkür der Verteilung von Ehren erst recht Tür

Arnold, V. I., Geometrical Methods in the Theory of Ordinary Differential Equations (Grundlehren, Band 250), Berlin – Heidelberg – New York: Springer-Verlag 1983, 153 fig., x + 334 p., cloth, DM 94,–

Die Lösung geometrischer Probleme durch gewöhnliche Differentialgleichungen wird in dem Buch natürlich auch behandelt, der geodätische Fluß auf Riemannschen Flächen und der Satz von Riemann-Roch und sogar ein Satz von Grauert über das Normalenbündel exzeptioneller Kurven. Aber Gegenstand des wunderbaren Buches sind die geometrischen Methoden für Differentialgleichungen.

Die Vorstellung, daß eine Kugel den Berg längs einer Fallinie bis zur Ruhelage hinunterrollt, trifft gewiß nicht zu, markiert aber etwa das Motiv dieses Buches. Gegenstand ist die strukturelle Stabilität von dynamischen Systemen. Da gilt: Ein (orientierter) Diffeomorphismus der S^1 ist strukturell stabil, wenn und nur wenn die Rotationszahl rational ist, und alle Zyklen nicht-ausgeartet sind. Ist aber die Rotationszahl irrational, dann ist der Diffeomorphismus topologisch äquivalent zu einer Rotation. Diese beiden Sätze von Denjoy und Poincaré werden bewiesen und erklärt.

Im Fall, daß die Diffeomorphismen durch analytische Funktionen gegeben sind, ist die Lösung der homologischen Gleichung ebenfalls analytisch, was hier mit einer Technik von Kolmogorov vorgeführt wird, die konsequent weiterverfolgt, zu wichtigen Sätzen führt. Am Beispiel des Torus werden Anosov-Systeme behandelt und bewiesen, daß jeder Anosov-Diffeomorphismus stabil ist. Daß die stabilen Systeme trotzdem nicht überall dicht sind, ist ein höchst unerwartetes Resultat von S. Smale. Für das Verstehen in vielen Anwendungen ist die Störungstheorie wertvoll.

Betrachtet werden dazu adiabatische Invarianten, um deren Entwicklung vorherzusagen. Wir treffen dabei auf ein berühmtes Bild, nämlich das eines homoklinischen Punktes. Die Dynamik der Resonanzen beherrscht das Bild. Die Normalformen für dynamische Systeme sind gegeben durch ganz große Ergebnisse von H. Poincaré und C. L. Siegel. Sind bei einem holomorphen Vektorfeld die Eigenwerte der linearisierten Gleichung im Poincaré-Gebiet und nichtresonant, dann ist das Feld zu seinem linearen Teil biholomorph äquivalent. Sind die Eigenwerte im Siegel-Gebiet und vom (zahlentheoretischen) Typ (C, ν) , dann ist das Feld ebenso zum linearen Teil biholomorph äquivalent. Die Konvergenzprobleme für den Beweis des Siegelschen Satzes sind riesengroß, das Buch führt die Behandlung der homologischen Gleichung aber sorgfältig vor.

Das letzte Kapitel „Lokale Bifurkationstheorie“ beschreibt Transversalität mit R. Thom und erklärt den Unterschied von „hard“ und „soft“ auftretendem Verlust der Stabilität. Ein schönes Theorem von Poincaré-Andronov kann hier verwandt werden, um die Dynamik in einer Poiseuille-Strömung durch einen Attraktor im \mathbb{R}^4 und für ein verwandtes Problem zu Navier-Stokes-Gleichungen mit einem Attraktor im \mathbb{R}^6 zu beschreiben. Ähnliche qualitative Probleme werden hier auch für sich selbst regelnde Oszillationen hergeleitet. Die vielen Diagramme beschreiben Metamorphose der Topologie bei Resonanzen sehr ausführlich, ohne daß der Verfasser einer Eitelkeit Raum lassen will, zu beweisen, daß er alle Diagramme angegeben habe.

Es gibt einen recht kurzen Appendix mit Prüfungsaufgaben, aber die eingestreuten Probleme (problem, hint) decken hier den Stoff noch viel schöner ab. Referiert werden in dem Buch eine ganz lange Reihe bedeutender russischer mathematischer Arbeiten, die hier gewiß nur wenig bekannt und bewundert worden sind, und es ist ein liebenswertes Buch. (Für eine zweite Auflage wäre höchstens ein Index für die Begriffe und ein Verzeichnis der zitierten Arbeiten ein schöner Vorteil.)

Iooss, G., Joseph, D. D., *Elementary Stability and Bifurcation Theory* (Undergraduate Texts in Mathematics), Berlin – Heidelberg – New York: Springer-Verlag 1980, 47 fig., xv + 286 p., cloth, DM 42,—

Mit diesem Buch verfolgen die Autoren das Ziel, einem breiten Leserkreis die grundlegenden Phänomene der Verzweigungstheorie näherzubringen. Sie illustrieren ihre Ergebnisse durch eine Vielzahl von Beispielen gewöhnlicher und partieller Differentialgleichungen. Betrachtet werden Probleme nichtlinearer Differentialgleichungen, die ein- oder zweidimensional sind oder sich durch Projektionen auf solche zurückführen lassen. Anstatt der meist benutzten Methoden (Liapunov-Schmidt, Reduktion auf center manifold) wenden die Autoren den Satz über implizite Funktionen an, um mit Hilfe der Fredholm-Alternative Reihendarstellungen für die verzweigenden Lösungen zu gewinnen und deren Stabilitätseigenschaften zu charakterisieren. Die Voraussetzungen sind jeweils so gefaßt, daß dazu die Kenntnis der ersten drei Terme der Taylorentwicklung der rechten Seite der jeweiligen Differentialgleichung genügt.

Die betrachteten singular gestörten Differentialgleichungen zeichnen sich dadurch aus, daß ein kleiner Parameter ϵ die höchste Ableitung – hier die zweite – multipliziert und die

„singular gestört“ beruht darauf, daß man die gegebene Differentialgleichung als „Störung“ der durch $\epsilon = 0$ entstehenden Differentialgleichung niedrigerer Ordnung auffaßt. Die Störung ist in dem Sinne „singular“, daß beim Übergang zu einer Differentialgleichung niedrigerer Ordnung nicht mehr alle Randbedingungen erfüllt werden können. Aus diesem Grunde können Grenzschichten verschiedenster Art sowie Resonanzphänome vorliegen.

Für die verschiedenen Problemklassen werden in dem Buch die Existenz von Lösungen sowie asymptotische Darstellungen mit Hilfe von Grenzschichtfunktionen und Abschätzungen in Potenzen des kleinen Parameters bewiesen. Wesentlich dafür ist eine Formulierung von geeigneten Bedingungen, unter denen bei den verschiedenen Grenzschichtverhalten Existenz von Lösungen gezeigt und Maximumprinzipien angewandt werden können. Diese Bedingungen werden durch die verschiedenen „Stabilitätsdefinitionen“ präzisiert.

Die vorliegende Monographie zeichnet sich dadurch aus, daß alle betrachteten Probleme durch eine einheitliche Methode, die der Differentialgleichungen, behandelt werden. Die Probleme schließen Nichtlinearitäten hervorgerufen durch Potenzen der ersten Ableitung ein. Darüber hinaus werden nicht nur Dirichletsche sondern auch gemischte Randbedingungen untersucht. Schließlich werden einige Ergebnisse auch für Systeme von singular gestörten Differentialgleichungen hergeleitet. Das Buch enthält eine Reihe von Ergebnissen, die bisher noch nicht publiziert worden sind. Es wäre interessant zu sehen, inwieweit die Resultate der wichtigen und grundlegenden Arbeit von A. van Harten [J. Math. Anal. Appl. 65 (1978), pp. 126] durch die Ergebnisse des Buches abgedeckt sind. In der genannten Arbeit beruhen die Beweise überwiegend auch auf Maximumprinzipien.

An einigen Stellen weisen die Autoren auf die noch zu füllenden Lücken in diesem

gungen erfüllt werden können. Aus diesem Grunde können Grenzschichten der verschiedensten Art vorliegen.

Ausgehend von strömungsmechanischen Anwendungen (Diffusion-Konvektion) werden solche Probleme untersucht, bei denen das reduzierte Problem von erster Ordnung ist. Bedingt durch den Verlauf der Charakteristiken des globalen Problems treten verschiedenartige Situationen des asymptotischen Verhaltens auf, die detailliert studiert werden. Die Monographie verfolgt das Ziel, die erreichten Fortschritte bei der Konstruktion und dem Nachweis gleichmäßiger (im Sinne der Maximumnorm) asymptotischer Approximationen der Lösung singular gestörter elliptischer und parabolischer Probleme unter einheitlichem Gesichtspunkt darzustellen. Deshalb vermittelt das Buch neben eigenen Ergebnissen der Autoren auch einen Überblick über die Originalliteratur des behandelten Gebietes.

Im ersten Kapitel findet man grundlegende Begriffe und Prinzipien der asymptotischen

Attouch, H., *Variational Convergence for Functions and Operators* (Applicable Mathematics Series), Boston – London – Melbourne: Pitman Publishing 1984, xiv + 423 p., kart., £ 20.95

In der Optimierungstheorie approximiert man oft gezwungenermaßen ein gegebenes Problem $\inf_X \varphi(x) - (X, \tau)$ ein topologischer Raum, $\varphi : X \rightarrow \mathbb{R}_\infty = \mathbb{R} \cup \{\infty\}$ – durch Probleme $\inf_X \varphi_n(x)$ und steht dann allgemein vor der Frage: Für welche Art von Konvergenz $\varphi_n \rightarrow \varphi$ hat man $\inf_X \varphi_n(x) \rightarrow \inf_X \varphi(x)$ und Konvergenzbeziehungen zwischen den Lösungen dieser Probleme?

In diesem „Buch“ wird anhand einiger interessanter Beispiele und neuerer Arbeiten gezeigt, daß epi-Konvergenz, d. h. $\text{epi } \varphi_n \rightarrow \text{epi } \varphi = \{(t, x) : x \in X, t \geq \varphi(x)\}$, in etlichen Situationen das richtige Konzept ist; dabei bedeutet $A_n \rightarrow A$ die übliche Mengenkongruenz im Sinne von Kuratowski, also

$$A = \varliminf_{n \rightarrow \infty} A_n = \bigcup_{n \geq 1} \bigcap_{k \geq n} \bar{A}_k = \overline{\varliminf_{n \rightarrow \infty} A_n} = \bigcap_{n \geq 1} \overline{\bigcup_{k \geq n} A_k}.$$

Leider hat sich der Autor (= Autorin, falls H. = Hedy weiblich ist) nicht überlegt, für wen er schreibt. Das sieht dann so aus.

Zuerst werden in typischer J. Lions-Schüler-Manie(r) einige elliptische Randwertprobleme vorgeführt, die einen Parameter ϵ enthalten, der z. B. von vielen kleinen Löchern im Gebiet Ω oder von einer dünnen Schicht anderer Leitfähigkeit herrührt; man läßt diese Größen in gewisser Weise mit ϵ gegen Null gehen und hofft, daß die Lösung des Grenzwertproblems eine gute Näherung für die Lösung des ϵ -Problems ist; dies läuft unter dem Namen Homogenisierung. Hierbei wird vom Leser verlangt, daß er solche Probleme routiniert in Variationsprobleme umschreiben kann und insbesondere Räume wie $H_0^1(\Omega)$, $H^{-1}(\Omega)$ kennt, die nirgends definiert werden. Dann wird epi-Konvergenz in einer der obigen Frage angepaßten Form eingeführt, und man muß mehr als 70 Seiten warten, bis endlich die Äquivalenz mit $\text{epi } \varphi_n \rightarrow \text{epi } \varphi$ kommt; dabei fällt das Niveau schon deutlich ab mit seitenlangen Beweisen, die nicht mehr als das Verständnis von \inf und \sup erfordern.

Dies setzt sich im zweiten Kapitel zunächst mit trivialen Zusammenhängen zwischen epi-Konvergenz und Konvergenz der entsprechenden Lösungen sowie einer trivialen Folgerung aus Kuratowskis Kompaktheitskriterium für Mengenkongruenz fort. Auf S. 167–195 gibt’s dann interessante Ergebnisse über Folgen von Variationsungleichungen mit Hindernissen, d. h.

$$\min \left\{ \int_{\Omega} |\text{grad } u|^2 dx - \int_{\Omega} f u dx : u(x) \geq g_n(x) \text{ a.e. in } \Omega \right\},$$

anschließend Triviale über monotone Folgen (φ_n) sowie epi-Konvergenz bei verschiedenen τ (im wesentlichen ein Vergleich mit diskrettem τ). Dann findet man Beziehungen zwischen epi-

Konvergenz und den Moreau-Yosida-Approximationen $\varphi_\lambda(x) = \inf_x \left(\varphi(y) + \frac{1}{2\lambda} d(x, y)^2 \right) -$

(X, d) metrisch und $\lambda > 0$ – und als weiteren Kuratowski-Abklatsch eine Topologie auf den unterhalbstetigen Funktionen $\varphi : (X, \tau) \rightarrow \bar{\mathbb{R}} = \mathbb{R}_\infty \cup \{-\infty\}$, die epi-Konvergenz induziert, falls τ lokalkompakt Hausdorff ist; Blüten wie „Let us denote by d_0 a distance on $X = \mathbb{R}^m$ inducing τ_0 , the usual topology“ sind typisch für das topologische Gehabe des Autors.

Im letzten Kapitel wird zuerst eine Verbindung der epi-Konvergenz mit Stetigkeits-eigenschaften der Fenchel-Transformation $\varphi^*(x^*) = \sup_X (x^*(x) - \varphi(x)) - x^* \in X^*$ (Dualraum

von X), X reflexiv – hergestellt. Letztere wird als Motivation zur Einführung der „U. Mosco-

Konvergenz“ $\varphi_n \xrightarrow{M} \varphi$ herangezogen, bzgl. der man $\varphi_n \xrightarrow{M} \varphi \Leftrightarrow \varphi_n^* \xrightarrow{M} \varphi^*$ und $\varphi_n \xrightarrow{M} \varphi \Leftrightarrow \varphi_{n\lambda}(x) \rightarrow \varphi_\lambda(x)$ auf X für alle $\lambda > 0$ hat (für konvexe φ). Dann gibt’s eine Topologie für Mosco-Konvergenz und Beispiele. Als krönender Abschluß werden maximal monotone $F : X \rightarrow X^*$ behandelt:

Zunächst vielfach Gebuchtes über Yosida-Approximationen, dann eine „Graph-Konvergenz“, die nichts anderes ist als $R_{n\lambda}(x) \rightarrow R_\lambda(x)$ auf X für alle $\lambda > 0$ – $R_\lambda(x)$ die Lösung von $F(y - x) + \lambda Fy = 0$, F die Dualitätsabbildung –, dann eine Topologie für Graph-Konvergenz und schließlich die Spezialisierung auf Subdifferenziale.

Das Literaturverzeichnis ist interessant, da es hauptsächlich Französisch-Italienisches enthält, das selbst dem Kenner anderer Nationalität nicht so geläufig sein könnte. Es gibt keinen Index, keine Liste der (französischen) Symbole und kaum Tippfehler.

Zusammenfassend muß man bedauern, daß durch exzessives Breittreten an sich interessanter topologischer Randbemerkungen die Gelegenheit verpaßt wurde, ein nützliches Buch über die in den interessanten Beispielen angerissenen neueren Anwendungen und Methoden der Optimierungstheorie zu schreiben. Da die wesentlichen Dinge mühelos bei halbem Umfang besser dargestellt werden können, wird der gebotene Inhalt viel zu teuer verkauft.

Paderborn

K. Deimling

Guillemin, V., Sternberg, S., Symplectic techniques in physics, Cambridge – London: Cambridge University Press 1984, xi + 468 p., cloth, £49.50

Symplektische Methoden haben ihren Ursprung in der Hamiltonschen Theorie der Optik und der Mechanik. Inzwischen hat sich die symplektisch-geometrische Sprache nicht nur für die Physik, sondern auch für verschiedene Bereiche der Mathematik als sehr nützlich erwiesen. Das vorliegende Buch ist eine physikalisch motivierte Einführung in die symplektische Geometrie und führt den Leser relativ schnell und mühelos zu den neueren Entwicklungen in diesem Gebiet. Die besondere Betonung liegt hierbei auf dem gruppentheoretischen Aspekt, der eng mit der Theorie der geometrischen Quantisierung und mit der Theorie der vollständig-integrablen Systeme verflochten ist.

Das erste einführende Kapitel, das ungefähr ein Drittel des Buches ausmacht, ist eine

schöne elementare Darstellung der historischen Entwicklung der Optik – angefangen von der Gaußschen Strahlenoptik über die Hamiltonsche geometrische Optik bis hin zu der Fresnelschen Wellenoptik. Die Quantenmechanik fügt sich dann nahtlos als eine natürliche Fortsetzung an und unterstreicht somit die Hamiltonsche Analogie zwischen der Optik und der Mechanik.

Im nächsten Kapitel wird die rein-mathematische Theorie der symplektischen Mannigfaltigkeiten behandelt. Das zentrale Thema ist hier der von Kostant und Souriau stammende Begriff der Impulsabbildung (moment map). Die Theorie wird bis zu dem wichtigen Satz über die Konvexität des Bildes bei Torus-Aktionen (Atiyah 1982, Guillemin-Sternberg 1982) entwickelt. Auch der Satz über die stationäre Phase (Duistermaat-Heckmann 1982), der eine wichtige Rolle bei der geometrischen Quantisierung spielt, wird bewiesen. Ferner sind verschiedene integrable Systeme (Kreisel, sphärisches Pendel, Geodätische auf dem Ellipsoid) als Beispiele ausgeführt.

Im Kap. III werden Bewegungsgleichungen in einer klassischen Yang-Mills-Feldtheorie nach einem allgemeinen Prinzip (das sog. Kovarianzprinzip) hergeleitet. Diese Methode ist eine Verallgemeinerung und Formalisierung der „minimalen Kopplung“ in der Physik.

Kap. IV enthält eine Beschreibung einiger bekannter vollständig-integrabler Systeme (Calogero-Systeme, Korteweg-de Vries-Gleichung) mit Hilfe der Impuls-Abbildung, allerdings ohne Benutzung von Kac-Moody-Algebren.

Das letzte Kapitel beinhaltet einige Tatsachen über Lie-Algebren und eine Deformationstheorie für symplektische Gruppenaktionen nach D. Coppersmith.

Das Buch ist in einem knappen klaren Stil geschrieben und bietet einen recht guten Überblick über neuere Arbeiten in diesem Gebiet. Weder als Einführung in die klassische Mechanik für Anfänger – wie etwa das bekannte Buch von Arnold – noch als ein Textbuch

über Quantenmechanik für Mathematiker ist dieses Buch wohl konzipiert. Aber für den interessierten Leser, der sich mit den wichtigen Ideen und Entwicklungen der letzten Jahre in diesem schönen anwendungsreichen Gebiet befassen möchte, ist es sehr zu empfehlen.

Bonn

M. Min-Oo

Hofbauer, J., Sigmund, K., Evolutionstheorie und dynamische Systeme, Mathematische

Das schlanke, inhaltsreiche Buch behandelt dynamische Aspekte evolutionsbiologischer

Hinweise für Autoren

Für den Abdruck vorgesehene Manuskripte sind in einwandfrei leserlicher und völlig satzfertiger Form (einseitig beschriebenes Manuskript, Schreibmaschinenschrift 1 1/2-zeilig) und entsprechend den nachstehenden Richtlinien ausgezeichnet einzureichen.

Der Beginn von Absätzen oder neuen Abschnitten sollte deutlich durch Einrücken gekennzeichnet sein. In jedem Fall sollte ein Hinweis für den Setzer, in dem alle Besonderheiten aufgeführt sind, beigelegt werden.

Ferner sollten die Manuskripte entsprechend dem Subject Classification Schemes der Mathematical Reviews (AMS/MOS) klassifiziert sein. Am Ende der Manuskripte sollte die genaue Anschrift des oder der Verfasser angegeben werden. Zuschriften sowie die Versendung der Korrekturabzüge erfolgen, sofern nicht anders vermerkt, immer an den erstgenannten Autor.

Zeichnungen sollten fortlaufend nummeriert werden und auf gesonderten Blättern in Form von klaren Bleistiftzeichnungen im richtigen maßstäblichen Verhältnis möglichst in doppelter Größe dem Manuskript beigelegt werden. Am linken Rand des Textes sollte ein Hinweis auf die jeweils einzufügende Figur angebracht werden.

Fußnoten sollten auf der jeweiligen Seite, auf die sie Bezug nehmen, angebracht werden (nicht am Ende des Textes). Literatur sollte in folgender Weise zitiert [1] und dann am Ende des Textes in alphabetischer Reihenfolge zusammengestellt werden. Verweise sollten in folgender Form vorgenommen werden:

[1] Neven, J.: Martingale Problems. Jber. d. Dt. Math.-Verein. 79 (1957) 175–180

[2] Wittenburg, J.: Dynamics of Systems of Rigid Bodies. Stuttgart: Teubner 1977. = Leitfäden der Angewandten Mathematik und Mechanik Bd. 33.

Um eine rasche Veröffentlichung zu erreichen, erhalten die Autoren nur einen Korrekturabzug. Die Autoren werden gebeten, nur Druckfehler zu korrigieren. Sollten weitere Korrekturen wie Einfügungen oder Streichungen vorgenommen werden, müssen diese dem Autor berechnet werden. Die von den Autoren durchgesehenen Korrekturabzüge sind umgehend an den Herausgeber zurückzusenden.

Die Autoren erhalten von ihren Arbeiten nach Veröffentlichung 75, von Buchbesprechungen 2 Sonderdrucke unentgeltlich. Zusätzliche Sonderdrucke können gegen entsprechende Berechnung zum Zeitpunkt der Rückgabe der Korrekturen bestellt werden.

Auszeichnungen für den Satz

Die im Manuskript enthaltenen Formelbuchstaben werden generell steil gesetzt. Besondere Schriftarten sind entsprechend den folgenden Richtlinien farblich auszuzeichnen.

gestrichelte schwarze Unterstreichung	– Sperrung
doppelte schwarze Unterstreichung	– halbfett (nur im laufenden Text zu verwenden, nicht in Formeln)
grüne Unterstreichung	– <i>kursiv</i> (nur im laufenden Text zu verwenden, nicht in den Formeln)
doppelte grüne Unterstreichung	– halbfette lateinische Buchstaben (in Formeln)
rote Unterstreichung	– griechische Buchstaben
lila Unterstreichung	– Groteskbuchstaben
doppelte lila Unterstreichung	– halbfette Groteskbuchstaben z. B. für R, N, C usw.
blaue Unterstreichung*)	– Fraktur
gelbe Unterstreichung	– Großbuchstabe O (zur Unterscheidung von der Ziffer Null)
gelb eingekastelt*)	– Skript
lila eingekastelt	– logische und mengentheoretische Symbole wie z. B. $\exists, \forall, \vee, \wedge, \neg$, Malkreuz \times , Verknüpfungszeichen $\circ, \cap, \cup, \Pi, \cup, \in, \subset$, Laplace-Operator Δ , Nabla ∇
grün eingekastelt	– Kleinbuchstabe ℓ (zur Unterscheidung zur Ziffer eins (1))

Die Bezeichnungen Theorem, Lemma, Korollar, Proposition, Definition usw. werden üblicherweise halbfett gesetzt. Der danach folgende Text (bis auf Formelbuchstaben) wird kursiv gesetzt. Die Bezeichnungen Beweis, Bemerkung, Hinweis usw. werden normal gesetzt, jedoch gesperrt. Der nachfolgende Text wird in normaler Schrift gesetzt.

Mathematische Formeln sollten so deutlich geschrieben werden, daß kein Mißverständnis möglich ist. Die Autoren werden gebeten, insbesondere deutlich zu unterscheiden zwischen Großbuchstaben und Kleinbuchstaben, Null sowie kleinem o oder großem O, griechischen Buchstaben $\varphi, \phi, \Phi, \kappa, K, \vartheta, \theta, \Theta$, Strich (z. B. Ableitungsstrich) und Apostroph. Ferner sollte darauf geachtet werden, daß keine Verwechslung zwischen k, K, r, u, v (lateinisch) und κ, μ, ν (griechisch) sowie \in und ϵ (griechisch) möglich ist.

*) Von der Verwendung dieser Schriftarten ist beim Compositorsatz nach Möglichkeit abzusehen.



Witting

Mathematische Statistik

Von Prof. Dr. rer. nat. Hermann Witting, Universität Freiburg

1

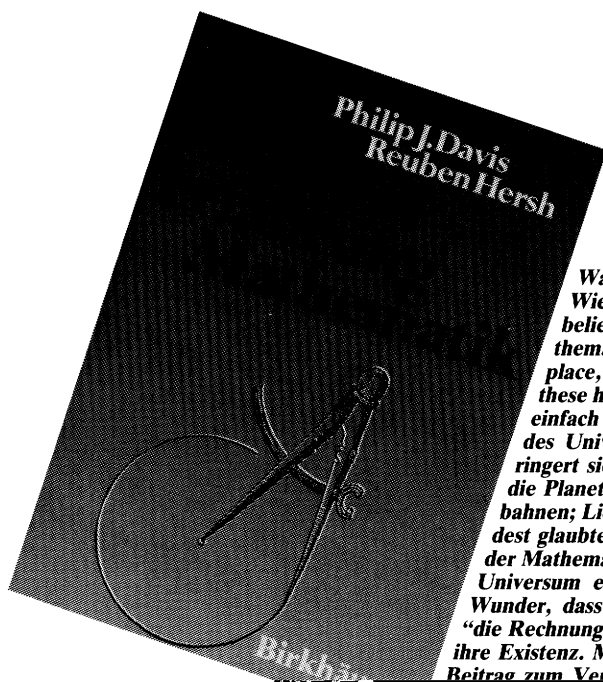
**Parametrische Verfahren bei festem
Stichprobenumfang**

1985. 538 Seiten mit zahlreichen Beispielen und
Aufgaben. 16,2 × 22,9 cm. ISBN 3-519-02026-2
Geb. DM 125,—

Parametrische Verteilungsfunktionen und

〈Dieses Buch wird ein Klassiker werden〉

J. BERNSTEIN, The New Yorker



Was gibt der Mathematik ihre Macht? Wieso funktioniert sie überhaupt? Eine beliebte Erklärung ist, dass Gott selber Mathematiker ist. Wenn man jedoch, wie Laplace, dies nicht für eine notwendige Hypothese hält, kann man in der Mathematik auch einfach die naturgegebene Ausdrucksweise des Universums sehen: Die Schwerkraft verringert sich mit dem Quadrat der Entfernung; die Planeten umkreisen die Sonne auf Ellipsenbahnen; Licht pflanzt sich gradlinig fort – zumindest glaubte man das vor Einstein. So hat sich in der Mathematik ein symbolisches Gegenstück zum Universum entwickelt. Es ist deshalb auch kein Wunder, dass die Mathematik funktioniert – dass "die Rechnung aufgeht", denn eben darauf beruht ja ihre Existenz. Mit diesem Buch liegt ein wesentlicher Beitrag zum Verständnis dieser Wissenschaft und zur