91. Band Heft 4
ausgegeben am 24. 10. 1989

DMV

Jahresbericht

Jahresbericht
der Deutschen Mathematiker-Vereinigung

Der „Jahresbericht" ist das offizielle Veröffentlichungsorgan der Deutschen Mathematiker-Vereinigung, für dessen inhaltliche Gestaltung im Auftrag des Präsidiums der jeweilige Herausgeber zuständig ist. Im „Jahresbericht" sollen vornehmlich Überblicksartikel über Teilgebiete der reinen und angewandten Mathematik, Nachrufe sowie historische Artikel und Buchbesprechungen veröffentlicht werden.

Manuskripte

Alle für die Schriftleitung des Jahresberichts bestimmten Sendungen (Briefe, Manuskripte, Ankündigung von neuerscheinenden Büchern) sind an Prof. Dr. W.-D. Geyer zu richten. Bücher, von denen eine Besprechung erfolgen soll, werden bei den Verlagen angefordert. Die Autoren werden gebeten, bei der Vorbereitung ihrer Manuskripte die „Hinweise für Autoren" am Ende von Heft 90/2 zu beachten.

Grundsätzlich sollen nur solche Manuskripte eingereicht werden, die nicht gleichzeitig an anderer Stelle zur Veröffentlichung eingereicht oder bereits veröffentlicht worden sind. Mit der Annahme zur Veröffentlichung erwirbt der Verlag das Verlagsrecht zur Vervielfältigung und Verbreitung sowie das Recht der Übersetzung in andere Sprachen.

Bezugsinformationen

Jährlich wird ein Band veröffentlicht, bestehend aus 4 Heften, die vierteljährlich erscheinen. Der Bezug ist nur bandweise möglich.

Der im voraus zahlbare Bezugspreis pro Band beträgt DM 98,– einschließlich Versand. Bestellungen nehmen jede Buchhandlung oder der Verlag entgegen.

Für Mitglieder der DMV ist der Bezug des Jahresberichts im Mitgliedsbeitrag enthalten.

Verlag:
B. G. Teubner, Industriestr. 15, Postfach 801069
D-7000 Stuttgart 80, Tel. (0711) 78901-0
Verantwortlich für den Anzeigenteil: Berthold Gaupp

Printed in Germany – ISSN 0012-0456
Satz: Elsner & Behrens GmbH, D-6836 Oftersheim
Druck: Krebs-Gehlen Druckerei GmbH & Co KG, D-6944 Hemsbach

Jahresbericht

der Deutschen Mathematiker-Vereinigung

Herausgegeben von W.-D. Geyer
unter Mitwirkung von
P. L. Butzer, U. Felgner,
K.-H. Hoffmann, H. Kurzweil

91. Band

B. G. Teubner Stuttgart 1989

Printed in Germany – ISSN 0012-0456
Satz: Elsner & Behrens GmbH, Oftersheim
Druck: Krebs-Gehlen Druckerei GmbH & Co KG, Hemsbach

Inhalt

1. Abteilung

2. Abteilung

Buchbesprechungen

Jahresbericht
der Deutschen Mathematiker-Vereinigung

Inhalt Band 91, Heft 4

1. Abteilung

2. Abteilung

In den nächsten Heften erscheinende Arbeiten:

M. Denker: Eberhard Hopf 04–17–1902 to 07–24–1983
A. Schönhage: Numerik analytischer Funktionen und Komplexität
J. R. Whiteman, A. E. Beagles, M. K. Warby: Theoretical and Practical Aspects of Finite Elements in the Context of Some Problems of Solid Mechanics
J. M. Wills: Kugellagerungen und Konvexgeometrie
D. Zagier: Elliptische Kurven: Fortschritte und Anwendungen

Anschriften der Herausgeber

Prof. Dr. W.-D. Geyer, Bismarckstr. $1^1/_2$, 8520 Erlangen

Prof. Dr. P. L. Butzer, Templergraben 55, 5100 Aachen
Prof. Dr. U. Felgner, Auf der Morgenstelle 10, 7400 Tübingen
Prof. Dr. K.-H. Hoffmann, Memminger Str. 6, 8900 Augsburg
Prof. Dr. H. Kurzweil, Bismarckstr. $1^1/_2$, 8520 Erlangen

Bezugshinweis

Früher erschienene Bände (ab Band 68) des „Jahresberichts der Deutschen Mathematiker-Vereinigung“ können durch den Buchhandel oder den Verlag bezogen werden.

Nachdruck der Bände 1 bis 40 liefert: Johnson Reprint Corp., 111 Fifth Avenue, New York, N.Y. 10003

Nachdruck der Bände 41 bis 67 liefert: Swets & Zeitlinger, Heereweg 347b, POB 810, NL-2160 SZ Lisse/Holland

Jber. d. Dt. Math.-Verein.
91 (1989) 149–158
AMS subject classification: 00 A 25, 22 E 70, 55–02, 57 M 25, 57 M 99, 58 G 05, 81 E 10, 82–02

The Frontier between Geometry and Physics

M. F. Atiyah, Oxford

§ 1 Introduction

The relation between Geometry and Physics has a long and interesting history with many spectacular episodes. The most famous of these is Einstein's theory of General Relativity which describes gravitational force as the curvature of space-time. At the present time we are witnessing some remarkable developments, linking Geometry and Physics in new and surprising ways. When the excitement is over and a proper perspective can be achieved the present decade may well stand out as a landmark comparable to that of Einstein's Theory.

In this lecture I would like to present a brief survey of some of these exciting developments. Let me say at the outset that the relation between Geometry and Physics has impacts in both directions. A physicist lecturing to an audience of fellow scientists would no doubt emphasize the impact of new geometrical ideas on physical theory. However as I am a mathematician addressing the DMV I shall instead emphasize the new mathematical results that have been discovered by using concepts and techniques from physics. It is indeed remarkable that deep and unexpected mathematics has emerged in this way. The philosophical significance of this is a mystery that deserves to be pondered over.

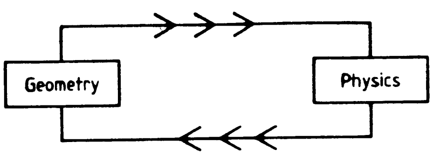


Fig. 1

Schematically one may view the relation between Geometry and Physics as in Fig. 1. Geometrical ideas are used as a basis of physics models. New ideas and techniques of a physical character then naturally emerge and some of these may feed back into Geometry, suggesting new points of view. An example which I will describe in detail concerns gauge theories which, from the mathematical end, are concerned with the differential geometry of fibre bundles. In their physical interpretation it is essential to introduce Quantum Mechanics and, when fed back into Geometry, these Quantum ideas provide a new and powerful approach to classical problems.

The two topics which I shall attempt to describe were pioneered in each case by a single mathematician although many others have now joined in exploiting the break-through. The two mathematicians and their topics are:

Vaughan Jones, Polynomial invariants for knots and links in 3-space.
Simon Donaldson, Structure of 4-dimensional smooth manifolds.

A third noteworthy topic which time does not allow me to deal with is that of *elliptic cohomology* [24], developed by Witten, Landweber, Stong and others, in which modular forms (of weight k) are attached to 4k-dimensional manifolds. From the point of view of physics this arises naturally from "string theory", but a full mathematical understanding has yet be to be achieved. The interplay between physics, geometry and number theory is quite fascinating.

§ 2 Knots and Links

The study of knots in ordinary 3-space is the prototype topological problem. It is concrete, simple to describe but extremely subtle mathematically. Traditionally knots are drawn as plane diagrams (Fig. 2) with over/under crossings, representing the orthogonal projection of a knot in R^3 onto R^2. The technical definition of a knot is that it is an embedding $S^1 \to R^3$. A *link,* corresponding to an embedding of a finite number of circles in R^3, can similarly be given by a plane diagram. Links and knots may be *oriented* or *unoriented* depending on whether or not we specify a direction in which each component is traversed.

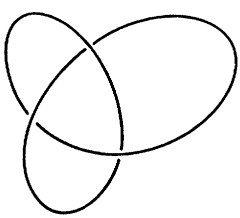


Fig. 2

The difficulty with using plane projections is of course that different projections can represent the "same knot". Here two knots or links are viewed as topologically equivalent if one can be deformed continuously into the other. One fundamental problem is therefore

(2.1) When do two plane projections represent equivalent knots (or links)?

A related problem, particularly relevant for a practical knot classification, is

(2.2) Construct knot invariants from plane projections.

The standard example of such a knot invariant is the Alexander polynomial [1] dating back half a century. Despite all the advances in algebraic topology since that time nothing comparable emerged until 1985 when Vaughan Jones [17] produced his polynomial invariant. This created a sensation among topologists especially since Jones came to the problem by accident while investigating von Neumann algebras. The Jones polynomial, unlike the Alexander polynomial, has the important feature of being capable (sometimes) of distinguishing a knot from its mirror image.

Since Jones produced his polynomial the subject has developed rapidly in many directions. In particular the relation with statistical mechanical models has emerged and this in turn has led to a whole series of new polynomial invariants. The final picture is not yet clear but the subject is extremely rich and lies at the cross roads of many different disciplines.

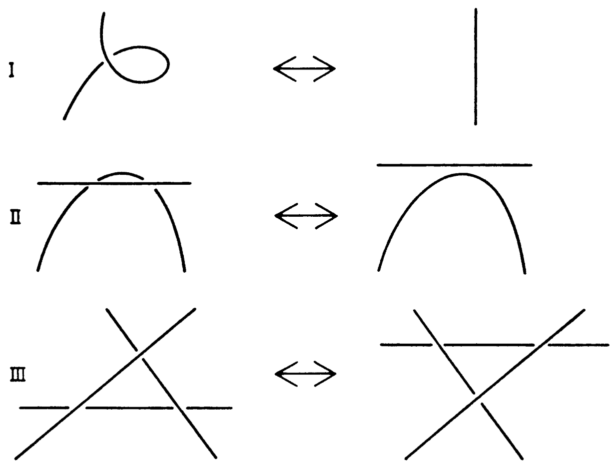


Fig. 3

Concerning the basic problem (2.1) it was shown long ago by Reidemeister that two oriented plane diagrams represent equivalent links if and only if one can be got from the other by a sequence of "elementary moves". These moves are of 3 types as indicated by the above figure 3 (I, II, III). These should be interpreted with all choices of orientation. It follows that a combinatorial invariant of a plane diagram which is unchanged by moves I, II, III gives a *link invariant.* It might be thought that it was a fairly simple matter to construct invariants by this process. In fact, after the discovery of the original Jones invariant, a combinatorial approach based on Conway's skein theory was developed and led to a 2-variable polynomial invariant [13]. However methods from statistical mechanics now being developed by Jones and others [22] appear to be more far-reaching, and so I shall briefly described the main ideas.

Let us begin by recalling the rudiments of statistical mechanics. Given a system with a finite number of states σ and an energy function $E(\sigma)$ the *partition function* of the system is defined by

$$Q(\beta) = \sum_{\sigma} e^{-\beta E(\sigma)}$$

Here β is a real parameter related to the temperature T by $\beta = (kT)^{-1}$, with k the Boltzmann constant. The knowledge of $Q(\beta)$ determines all the important macroscopic properties of the system.

The simplest systems are lattice models in which the vertices are occupied by atoms. The atoms are assumed to be in one of a finite number (e.g. 2 for the Ising model) of "internal states". The model is specified by describing the energy of a state. In the simplest models this is assumed to depend on the relative internal states of adjacent atoms.

Lattice models can be considered in any dimension but the relevant ones for us, and those with the most elaborate theory, are the 2-dimensional models. The simplest and best known – the Ising model – was solved by Onsager in 1945. Then in the 1970's R. J. Baxter discovered other soluble models [3]. The crucial observation is that the local energy function (describing nearest neighbour interaction) must satisfy an algebraic identity now known as the *Yang-Baxter equation,* because it had also turned up with a different physical interpretation in earlier work of Yang [25]. For Yang the problem concerned the dynamics of interacting particles on a line and the Yang-Baxter equation asserts that the effect of a 3-particle collision can be computed from the 2-particle collisions. Interpreting the figure in Reidemeister move III as consisting of world-lines of particles we see that the two triangles just differ by the order in which the collisions occur. Back in the language of statistical mechanics this means that for a model satisfying the Yang-Baxter equation the partition function is unchanged by Reidemeister move III.

Since moves I and II are relatively simple we see that one way to construct link invariants is to start with solutions of the Yang-Baxter equation. Now this equation has been extensively studied and there is a substantial theory for constructing solutions. One version is the theory of "Quantum Groups" developed by Drinfeld [10]. Roughly speaking a quantum group is an algebraic structure depending on a parameter h (Planck's constant) so that, as $h \to 0$, we recover an ordinary Lie group.

Working along these lines Jones and others [22] have constructed whole series of polynomial invariants for links. The indications are that there should be one such invariant for each pair (G, V), with G a compact Lie group and V an irreducible representation. The original Jones polynomial corresponds to the case $G = SU(2)$, $V = \mathbf{C}^2$ (the basic 2-dimensional representation).

To conclude this section let me just add that 2-dimensional statistical mechanics is very closely related to the Euclidean approach to quantum field theory in 2-dimensional space-time. It appears that the Jones polynomials, constructed as in [18] via representations of the braid groups, are closely related to conformally invariant quantum field theories. This connection is not well understood at present.

I should also mention that these topics form part of "string theory" and as such are related to the topic of elliptic cohomology mentioned in § 1.

§ 3 4-dimensional manifolds

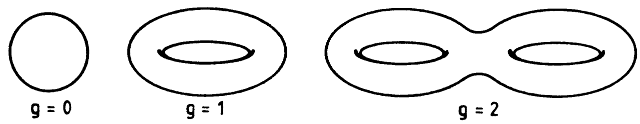
I now move on to my second topic, the work of Donaldson on the structure of smooth 4-dimensional manifolds. Let me begin by recalling the classical results about 2-dimensions – the theory of Riemann surfaces.

A surface, i.e. a closed connected orientable 2-dimensional manifold, is classified by a single non-negative integer g, its genus. We have the sequence Fig. 4. This classification can be related to the one-dimensional homology of the surface. This has 2g generators and the *intersection* of 1-cycles gives a skew-symmetric 2g x 2g matrix A_g. Elementary linear algebra gives a canonical form for A_g, namely

$$A_g = A_1 \oplus A_1 \oplus \cdots \oplus A_1 \quad \text{g times}, \quad A_1 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}.$$

The topological classification mirrors this in the sense that the surface X_g of genus g can be written as a "connected sum" of g copies of X_1 (see Fig. 4).

$$X_g = X_1 \# X_1 \# \cdots \# X_1 .$$



SPHERE TORUS

Fig. 4

Finally it is important to remember that surfaces arise naturally as the Riemann surfaces of *algebraic curves.* The genus g then has an algebraic definition and all values of g occur.

Now let us turn to 4-dimensional manifolds (compact, connected, orientable) and for simplicity restrict attention to the simply-connected case. Besides the 4-sphere standard examples arise from algebraic geometry. A complex algebraic surface gives a 4-dimensional real manifold. Taking connected sums of these and their opposites (i.e. reversing the natural orientation) gives further examples.

For a 4-manifold the intersection matrix A of 2-cycles is *symmetric* and so can be viewed as a quadratic form (integer and uni-modular). As in dimension 2 we can first classify these quadratic forms and then ask if the geometric classification mirrors the algebraic one. In particular we can ask:

If $A = A_1 \oplus A_2$ does $X = X_1 \# X_2$?

The answers to these questions turned out to be dramatically different depending on the category of manifolds considered. For *topological* manifolds the answer is essentially YES as was proved by M. Freedman [12]. However for *differentiable* manifolds the answer is quite definitely NO as S. Donaldson has shown [7] [8].

More precisely Donaldson has proved that the map

Diff. classes of 4-manifolds $\rightarrow$ Uni-modular quadratic forms

is neither *surjective* nor *injective.* In fact there are explicit examples [14] of an infinite sequence of algebraic surfaces, all with the same quadratic form, but all differentiably inequivalent. An even more striking result [8] is that algebraic surfaces are *essentially indecomposable* as differentiable manifolds. Birational transformations (blowing up points) give such decompositions but these are viewed as trivial or inessential.

This subject is still being actively developed but a general picture seems to be emerging and an optimistic (perhaps over-simplified) conjecture might be as follows (for the simply-connected case).

1. The only indecomposable smooth 4-manifolds are the 4-sphere, algebraic surfaces and their opposites.

2. If X, Y are algebraic surfaces which are differentiably equivalent then they belong to the same algebraic family (i.e. $\exists\, X_t, X_0 = X, X_1 = Y$).

These results of Donaldson, contrasted with those of Freedman, produced a sensation amongst geometers because they were totally unexpected and quite peculiar to dimension 4. This is most clearly visible if we move away from compact manifolds and consider manifolds with the topology of R^4. As a consequence of the Donaldson-Freedman work it is known [15] that there are *exotic* 4-spaces, i.e. 4-manifolds topologically but not differentiably equivalent to R^4. Their exoticness is manifested by the presence of compact sets which cannot be surrounded by a standard 3-sphere. In fact Taubes has now shown [21] that there are 2-parameter families of such exotic 4-spaces, mutually inequivalent. All of this is false in other dimensions, i.e. there are no exotic n-spaces in this sense for $n \neq 4$.

Having summarized these new results in the geometry of 4-dimensions I shall describe in the next section the methods (derived from physics) which have been used to prove them.

§ 4 Yang-Mills Instantons

As a preliminary let me digress to recall the essentials of Maxwell's theory of electro-magnetism. In modern notation Maxwell's equations in vacuo take the form

$$(4.1) \quad d\omega = 0 \qquad d^*\omega = 0$$

where ω is an exterior differential 2-form (anti-symmetric 2-tensor) on Minkowski space, d is the exterior derivative and d^* is its formal adjoint defined via the Minkowski metric.

In the 1930's Hodge [16] took Maxwell's equations, transposed to a positive definite Riemannian framework, as the basis for his theory of harmonic forms. Hodge's main theorem asserts that the space of harmonic p-forms ω (i.e. satisfying called a *Hodge structure* and it is essentially algebraic, i.e. independent of the Kähler metric chosen.

In short Hodge theory uses *linear elliptic equations to relate topology to algebra.* It is important to note that the elliptic equations are *systems,* i.e. they do not just deal with *scalar* functions.

After this brief historical background let me move on to the Yang-Mills theory which provides the starting point for Donaldson's work.

The Yang-Mills equations, in Minkowski space, are "matrix generalizations" of Maxwell's equations, with U(1) replaced by SU(2) (or other Lie group). They have a Riemannian analogue (on any 4-dimensional Riemannian manifold X) and they are *non-linear elliptic equations.* Their solutions are parametrized by a *non-linear* space $M_k(X)$, where the integer k is a topological invariant analogous to magnetic charge in Maxwell theory.

$M_k(X)$ depends on the Riemannian metric on X but Donaldson [8] managed to extract numerical *invariants of* X, independent of the metric. These can be used to distinguish different 4-manifolds. Moreover if X is an algebraic surface then $M_k(X)$ can, by another result of Donaldson [6], be defined algebraically so that Donaldson's numerical invariants become more readily computable.

Remarks. 1. Hodge's theory of harmonic forms is a *linear* elliptic theory and works for p-forms on an n-manifold for all p, n. The *non-linear* Donaldson theory works only for the physical dimensions $p = 2, n = 4$.
2. Solutions of the Yang-Mills equations can be concentrated near points or they can be spread out evenly. This is the reason for their success.

From this bald summary of Donaldson's theory it might seem that physics is only weakly involved, especially since we move from a Lorentz (Minkowski) metric to a Riemannian metric. The physics appears only to have suggested the appropriate differential equation. This is not the case. In fact physicists were the first to consider the Euclidean Yang-Mills equations, whose solutions they termed *instantons,* and I want to explain why this is of physical interest. This requires a digression into aspects of Quantum Theory, namely the phenomenon of *quantum tunnelling.*

Consider first a classical particle moving (in one dimension) in a background potential V. The stable equilibrium states are then given by the minima of V. When we quantize such a system we have a Schrödinger operator

$$-\frac{d^2}{dx^2} + V(x)$$

and the ground state is given by the lowest eigenvalue. If V has for instance 2 minima then from each of these classical ground states we can construct approximate quantum ground states S_1, S_2. However the exact quantum ground state may be a linear combination $S_1 + \lambda S_2$. In other words starting in the state S_1 there is quantum mechanically a small probability of jumping into the state S_2. This is referred to as *tunnelling* through the potential barrier (see Fig. 5).

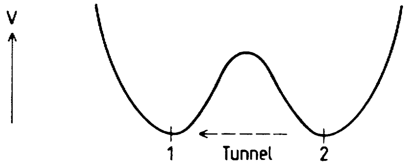


Fig. 5

Physicists have a standard recipe for computing (approximately) such tunnelling effects [4]. This can be formulated using "imaginary time" and is best understood by Feynman path integrals.

In principle all these ideas should apply in quantum field theory and, for quantized Yang-Mills, tunnelling effects are produced by instantons, minima of the classical Euclidean Yang-Mills action.

These physical ideas on the role of instantons have been brought closer to the geometry by recent work of A. Floer [11]. What Floer does is to work with a 3-dimensional manifold Y which physically is "space", as opposed to space-time. If $\pi = \pi_1(Y)$ is the fundamental group of Y, Floer assumes that $\pi = \pi'$ (its commutator subgroup) so that π becomes trivial when abelianized. This is a minor restriction and can probably be removed. Next Floer considers representations $\pi \to SU(2)$ or equivalently *flat* SU(2)-bundles over Y. Since flat bundles have zero curvature we should interpret them as classical Yang-Mills "vacua" or ground states. Instantons on $Y \times \mathbf{R}$, i.e. solutions of the (self-dual) Yang-Mills equations which become flat at $\pm\infty$ (in the $\mathbf{R}$-variable) are then tunnelling from one representation to another. Using these ingredients, along lines suggested by Witten [23], Floer defines new invariants of Y. Heuristically what Floer constructs are the quantum ground states of a certain quantum field theory.

The Floer invariants of Y are not just numerical, they are actually homology groups, and Donaldson has shown how to relate his invariants for a simply-connected 4-manifold X with the Floer homology of a 3-dimensional slice Y. What is interesting here is that topological information on Y, related to $\pi_1(Y)$, is related to the *differentiable* structure of X not just to its topology.

For a fuller account of this Floer-Donaldson theory I refer to [2].

§ 5 Final comments

Let me conclude with a few general comments and reflections on what I have been describing.

The really significant fact about the relation between Geometry and Physics in all this is that it is *Quantum* Physics which is related to *Topological* aspects of Geometry. In contrast the Einstein theory is a relation at the *classical* level between gravitation and local differential geometry. It is only at the *quantum* level that global topological phenomenon become relevant.

The quantum field theories that I have in mind here are those, like Yang-Mills theory, where the non-linearity has a clear geometric origin. In such cases we may reasonably expect topology to play an important part in the quantum field theory. Conversely such a physical consequence of the topology might provide a better understanding than a conventional classical approach.

We may also ask whether there is some deeper meaning to all these connections between Geometry and Physics. The 4-dimensional phenomena which have been unearthed by the Donaldson theory are so unexpected and peculiar to 4-dimensions that it is hard to believe they do not have a fundamental physical significance, particularly in view of their origin in Yang-Mills theory.

Note (added December 1987). Since my lecture in Berlin Witten has discovered a direct way to interpret Donaldson's invariants in a quantum field theory framework. This brings Donaldson's work (and the associated Floer theory) one step closer to the real physics.

It is also remarkable that both the Jones theory for knots and the Floer theory for 3-manifolds connect classical 3-dimensional topology, associated with the fundamental group, with quantum field theory (or statistical mechanics). A natural question in this direction is whether there is any connection between the work of Jones and of Floer. I have argued the case for this in more detail in [2] and various avenues are being explored. Essentially the outstanding problem is to find some intrinsic 3-dimensional definition of the Jones invariants which does not use an auxiliary plane projection*).

Finally it is interesting to recall that the pioneering work on knots in the 19th century by Tait [20] was motivated by the belief that atoms were knotted vortices. The key idea was that the stability of atoms might have a topological origin and be explained by the topological nature of knots. Although, as an atomic theory, this was eventually discarded and superceded, at the more fundamental level of elementary particles (quarks) it has something in common with present day theories. The role of topology is cloaked in the mystery of quantum theory but as a source of the fundamental stability of matter it is still pertinent. To speculate more wildly it is even possible that knots will eventually turn out to play some important role in physics.

References

[1] Alexander, J. W.: A lemma on a system of knotted curves. Proc. Nat. Acad. Sci, USA **9** (1923) 93–95

[2] Atiyah, M. F.: New invariants of 3 and 4-dimensional manifolds. Amer. Math. Soc. Symposia in Pure Maths. **48** (1988)

[3] Baxter, R. J.: Exactly solved models in statistical mechanics. London: Academic Press 1982

[4] Coleman, S.: The uses of instantons. Erice Lectures 1975

[5] Donaldson, S. K.: The Geometry of 4-manifolds. Proc. International Congress of Mathematicians. Berkeley 1986

[6] Donaldson, S. K.: Anti-self-dual Yang-Mills connections on complex algebraic surfaces and stable vector bundles. Proc. London Math. Soc. **50** (1985) 1–26

[7] Donaldson, S. K.: An application of gauge theory to 4-dimensional topology. Diff. Geom. **18** (1983) 279–315

*) This has now (August 1989) been done by Witten.

[8] Donaldson, S. K.: Polynomial invariants for smooth 4-manifolds. Topology (to appear)
[9] Donaldson, S. K.: La topologie differentielle des surfaces complexes, C. R. Acad. Sci. Paris **301** (1985) 317–320
[10] Drinfeld, V. G.: Quantum Groups. Proc. International Congress of Mathematicians. Berkeley 1986
[11] Floer, A.: An instanton invariant for 3-manifolds (to appear)
[12] Freedman, M. H.: The topology of four dimensional manifolds. J. Diff. Geom. **17** (1982) 357–453
[13] Freyd, P.; Yetter, D.; Hoste, J.; Lickorish, W. B. R.; Millett, K.; Ocheanu, A.: Bull. Amer. Math. Soc. **12** (1985) 239–246
[14] Friedman, R.; Morgan, J. W.: On the diffeomorphism types of certain algebraic surfaces I + II. J. Diff. Geom **27** (1989) 297–369 & 371–398
[15] Gompf, R.: Three exotic R^4 and other anomalies. J. Diff. Geom. **18** (1983) 317–328
[16] Hodge, W. V. D.: Theory and Applications of Harmonic Integrals. Cambridge University Press 1941
[17] Jones, V. F. R.: A polynomial invariant for knots via von Neumann algebras. Bull. Amer. Math. Soc. **12** (1985) 103–111
[18] Jones, V. F. R.: Hecke algebra representations of braid groups and link polynomials. Ann. of Math. **126** (1987) 335–388
[19] Kauffman, L.: State models and the Jones polynomial. Topology **26** (1987) 395–407
[20] Tait, P. G.: On knots I, II, III. Scientific papers, Vol. 1 (1898) 273–347
[21] Taubes, C. H.: Gauge theory on asymptotically periodic 4-manifolds. J. Diff. Geom. **25** (1987) 363–430
[22] Turaev, V. G.: The Yang-Baxter equation and invariants of links. Leningrad preprint 1987
[23] Witten, E.: Supersymmetry and Morse Theory, J. Diff. Geom. **17** (1982) 661–692
[24] Witten, E.: The index of the Dirac operator in loop space. Proc. Conf. Elliptic curves and Modular forms, in Algebraic Topology (Princeton, 1986)
[25] Yang, C. N.: S matrix for the one-dimensional N-body problem with repulsive or attractive delta function interaction. Phys. Rev. **168** (1968) 1920

Michael Atiyah
University of Oxford
Mathematical Institute
24–29 St. Giles'
Oxford OX 1 3LB
England

(*Eingegangen 25. 1. 1988*)

Jber. d. Dt. Math.-Verein.
91 (1989) 159–167
AMS subject classification 01 A 70

Helmut Grunsky

J. A. Jenkins, St. Louis

In November 1930 he took a position with the editor of the Jahrbuch über die Fortschritte der Mathematik published under the auspices of the Preussische Akademie der Wissenschaften. In 1935 he became editor of this periodical, a position which he held until 1939. In 1938 he received the degree of Dr. phil. habil. on the basis of a notable paper on the coefficients of univalent functions. After the war he was a high school teacher at Trossingen, Württemberg, for 1945–49. In 1949 he became Dozent at the University of Tübingen. He gave an invited address at the International Congress of Mathematicians held at Cambridge, Massachusetts, in 1950. He was visiting professor at Washington State College, [illegible]

he was nominated professor at the University of Mainz, where he stayed until 1958, after which he was appointed full professor at the University of Würzburg, a position he held until he retired on September 30, 1972 with the title of emeritus. He was visiting professor at the Middle East Technical University in Ankara, [illegible]

Turkey, in 1963–64, and at the State University of New York in Albany, for the spring semester in 1975. He was research consultant at Washington University (in St. Louis) in the spring semester of 1973 and in the fall semester of 1977. In 1935 he married his wife Irma née Schenk. They had three children Wolfgang, Hiltrud and Eberhard, born respectively in 1936, 1938 and 1941. After several years of failing health Helmut Grunsky passed away on June 5, 1986.

Helmut Grunsky's list of publications contains three books and 44 journal articles. Item [A] appears under the name of Issai Schur but was written by Helmut Grunsky from material in Schur's lectures. Item [C] is a very detailed and thorough-going treatment of Stokes' Theorem in various general forms. Item [B] is most closely related to Helmut Grunsky's overall activity and consists of a reworking of some of his most significant contributions to Function Theory, in many cases with a considerable simplification of exposition.

at infinity beginning with the term ζ. A particular set of comparison functions $j_\alpha(\zeta)$ is obtained by taking those satisfying the basic normalizations which map D onto domains bounded by slits on logarithmic spirals making the angle θ with rays through the origin where $\alpha = \tan\theta$. Then j_0 is the radial slit mapping, j_∞ the circular slit mapping. It is readily seen that every other $\log j_\alpha$ can be represented in an appropriate manner by a linear combination of $\log j_0$ and $\log j_\infty$. For a competing function $f(\zeta)$ one takes $F(\zeta) = f(\zeta)/j_\alpha(\zeta)$ for each α. Assuming first of all that f is regular on C the corresponding inequalities $\int_C \log R\, d\Phi \geqslant 0$, using the fact that $\log j_\alpha$ maps each boundary component on a line of direction $e^{i\theta}$, lead to an inequality of the form

(1) $\quad |\log f'(0) - m| \leqslant r,$

An approximation argument shows that one can drop the assumption of regularity on C and (1) then gives the region of values of $\log f'(0)$ with equality occurring only for the spiral slit mappings.

A technically simpler treatment is given in [B] where the expression $\frac{1}{2i}\int_C \overline{\log F(\zeta)}\, d\log F(\zeta)$ is used for the area rather than that above.

In his thesis Helmut Grunsky also treated in a related manner the problem of the region of values of $\log(f(z)/z)$ for $f \in S$ (normalized univalent functions defined in the unit disc) and $|z| < 1$.

If there is one paper which the name of Helmut Grunsky immediately brings to mind it is his Habilitationsschrift [13] in which he applied the method of contour integration in a somewhat different context. This paper presents a study of coefficient inequalities for functions in a domain B of finite connectivity on the sphere containing the point at infinity. The functions are to be univalent in B and regular apart from a pole at the point at infinity where the Laurent expansion has principal part z. By a straightforward approximation result it is possible to confine attention to the case where the domain is bounded by a finite number of analytic Jordan curves and the functions involved are regular on them. For arbitrary complex $x_0, x_1, \ldots, x_m$, he showed the existence of a unique function $f^{(\alpha)}(z)$ having principal part

$$x_m z^m + x_{m-1} z^{m-1} + \ldots + x_1 z + x_0$$

at the point at infinity, otherwise regular in the closure of B and mapping each boundary component of B into a line of inclination α with the real axis. The corresponding Laurent expansions are

$$f^{(\alpha)}(z) = \sum_{\mu=0}^{m} x_\mu z^\mu + \sum_{\nu=1}^{\infty} a_\nu^{(\alpha)} z^{-\nu}$$

with $\quad a_\nu^{(\alpha)} = \sum_{\mu=0}^{m} x_\mu b_{\mu\nu} + \sum_{\mu=0}^{m} \bar{x}_\mu c_{\mu\nu}$

where $b_{\mu\nu}$, $c_{\mu\nu}$ are independent of the x_j, the matrix $(\nu b_{\mu\nu})_1^\infty$ is symmetric and the matrix $(\nu c_{\mu\nu})_1^\infty$ is Hermitian symmetric with the quadratic form $\sum_{\mu,\nu=1}^{\infty} \nu c_{\mu\nu} x_\mu \bar{x}_\nu$ strictly positive definite.

He showed the relationship of the present problem to the Faber polynomials. For a function $f_1(z)$ with Laurent expansion at infinity

$$f_1(z) = z + \sum_{n=1}^{\infty} a_{1n} z^{-n}$$

these are polynomials p_m such that $p_m(f_1(z))$ has the Laurent expansion at infinity

$$f_m(z) = p_m(f_1(z)) = z^m + \sum_{n=1}^{\infty} a_{mn} z^{-n}.$$

The matrix $(\nu a_{\mu\nu})_1^\infty$ is symmetric. It is sometimes called the Grunsky matrix (although sometimes this term is applied to the matrix $(\sqrt{\nu/\mu}\ a_{\mu\nu})_1^\infty$ instead).

The principal result is as follows.

With the above notation a set of necessary and sufficient conditions for $f_1(z)$ *to be meromorphic and univalent in* B *is given by*

$$\left| \sum_{\mu,\nu=1}^{m} \nu(a_{\mu\nu} - b_{\mu\nu}) x_\mu x_\nu \right| \leqslant \sum_{\mu,\nu=1}^{m} \nu c_{\mu\nu} x_\mu \bar{x}_\nu, \qquad m = 1, 2, \ldots.$$

There is an appropriate equality statement.

The proof of necessity is obtained by setting $F(z) = f(z) - f^{(\alpha)}(z)$ where $f(z)$ is regular on the closure of B except at the point at infinity where it has the Laurent expansion

$$f(z) = \sum_{\mu=0}^{m} x_\mu z^\mu + \sum_{\nu=1}^{\infty} a_\nu z^{-\nu}.$$

and maps B onto a domain covering each point at most m times. Then

$$I(F) = \frac{i}{2} \int_{\partial B} F d\bar{F}$$

is non-negative. Further

$$I(F) = \frac{i}{2} \int_{\partial B} f d\bar{f} - \frac{i}{2} \int_{\partial B} f^{(\alpha)} d\bar{f} - \frac{i}{2} \int_{\partial B} f d\bar{f}^{(\alpha)} + \frac{i}{2} \int_{\partial B} f^{(\alpha)} d\bar{f}^{(\alpha)}.$$

The first integral on the right is non-positive, the fourth is zero and the remaining two reduce to

$$-\mathcal{R}\left(ie^{-2i\alpha} \int_{\partial B} f d\bar{f}^{(\alpha)}\right)$$

which, evaluated by the residue theorem, gives

$$\mathcal{R}\left(e^{-2i\alpha} \sum_{\mu=1}^{m} \mu x_\mu (a_\mu - a_\mu^{(\alpha)}) \right) \leqslant 0.$$

Choosing for f an appropriate expression in terms of the Faber polynomials of f_1 the desired inequalities are obtained. Helmut Grunsky's sufficiency proof was by contradiction.

In case B is the domain $|z| > 1$ the inequalities reduce to

$$\left|\sum_{\mu,\nu=1}^{m} \nu a_{\mu\nu} x_\mu x_\nu\right| \leqslant \sum_{\nu=1}^{m} \nu |x_\nu|^2, \qquad m = 1, 2, \ldots.$$

In this case a very simple sufficiency proof was later found.

In recent years others have found very simple proofs of the inequality $|A_4| \leqslant 4$ for functions $f(z) = z + \sum_{n=2}^{\infty} A_n z^n$ in S using the Grunsky inequalities. The present writer asked Helmut Grunsky whether he had tried anything along these lines. He said that he had made the corresponding attempt for the inequality $|A_3| \leqslant 3$ and when it did not succeed (as has been the case for all similiar attempts) it did not occur to him that the next stage might be so much simpler.

Another major theme in the work of Helmut Grunsky deals with the mapping of schlichtartig domains of finite connectivity (with non-degenerate boundary components) onto multiply covered circular discs. This work began with his proof [7] of the existence of a mapping of such a domain of connectivity n onto a n-fold covered disc, this mapping being unique under suitable normalization. The method of proof was to solve in the domain a potential theoretic problem for a function with boundary values zero and appropriate singularities at assigned boundary points and to show by a continuity method that a single-value conjugate can be chosen. The regular function so obtained solves the equivalent problem of mapping the domain onto a multiply covered half-plane. In [14] a somewhat simpler continuity argument is given. The brief note [18] summarizes results obtained by an alternative procedure for representing such mappings by forming linear sums of Green's functions and imposing subsidiary conditions that the periods of their conjugates be congruent to zero.

In the paper [16] Helmut Grunsky used these ideas to prove the following generalization of Schwarz's lemma. Let B be a domain of connectivity n as above, z_0, z^* distinct points of B and H the class of functions F regular in B satisfying $|F(z)| < 1$, $F(z_0) = 0$. The maximum of $|F(z^*)|$ for $F \in H$ is attained for a function mapping B onto n-fold covering of the disc $|w| < 1$. He considered also the case where different bounds apply to the various boundary components. The anticipated uniqueness up to rotation of the extremal function (as stated in [15]) was not proved in this paper. In [17] a proof of that was given in the case of a triply-connected domain and in [19] a very simple proof was given for the general case. In [15] there were given similar generalizations of results of Julia and Löwner.

Helmut Grunsky also made an extensive study of the question of extending entities defined on a plane domain or finite open Riemann surface to similar entities on a surface in which the former is imbedded, i.e., if the entity η is defined on the finite open Riemann surface S there is to be a conformal mapping h of S into a closed surface R which admits a regular extension to the border of S such that for the corresponding entity χ, $\chi h = \eta$. This goes back originally to old results of de la Vallée Poussin and Julia on mapping plane domains of finite connectivity onto domains bounded by lemniscates. The papers [26, 27] provide such a mapping onto domains bounded by generalized lemniscates by imbedding the domain in a sphere so that the extension of an appropriate linear combination of Green's functions of the domain gives a potential function on the sphere with only logarithmic poles as singularities. In [34] certain extremal properties of such imbeddings are presented and [37] and [41] consider the question of extension in the very general context of a meromorphic differential defined on a finite open Riemann surface.

One unusual aspect of Helmut Grunsky's list of publications, at least in view of modern practices, is that only two of his mathematical papers are of joint authorship, one [8] with Lars Ahlfors, the other [39] with the present writer. From the commentary in Ahlfors' Collected Papers as well as from direct communication from Helmut Grunsky himself it is clear that the former was a case of parallel development rather than collaboration. The latter is just a small note in the proceedings of the 1973 conference at Canterbury and is a preliminary report of work which was later developed much more extensively. While this work constitutes a very satisfying theory publication was deferred in the hope of finding some significant explicit applications. Some of the basic techniques are used in a related study [43] of some properties of certain Hilbert space operators which intervene. It seems worth while to give a very brief sketch of this joint work.

This study deals with functions f which map $|z| > 1$ conformally onto the exterior of an analytic slit Γ in the plane, having Laurent expansion at infinity beginning with the term z. If ν maps a neighborhood of Γ conformally carrying Γ to a segment on the real axis, $\mu = \nu f^{-1}$ gives a conformal mapping of a ring $1 < |z| < r$ which provides the same identifications on $|z| = 1$ as does f. The point of view in [39] was to concentrate attention on such functions. Later consideration showed it was more effective to focus on the function φ which gives a conformal self-mapping of a doubly-connected neighborhood of $|z| = 1$ and relates pairs of points identified by f (i.e., $f(\varphi(z)) = f(z)$). This function is involutory. The functions of the class of functions having the given properities are in (1,1) correspondence with the functions under study. If we take the Laurent expansions of all powers

$$\varphi^m(z) = \sum_{j=-\infty}^{\infty} \varphi_j^{(m)} z^j$$

and define

$$\Phi_1 = (\sqrt{j/m}\, \varphi_j^{(m)}), \quad \text{m row,} \quad \text{j column,} \quad m, j = 1, 2, \ldots$$

$$\Phi_2 = (\sqrt{j/m}\, \varphi_j^{(-m)}), \quad \text{m row,} \quad \text{j column,} \quad m, j = 1, 2, \ldots$$

it is readily verified that Φ_2 is symmetric while

$$\Phi_1 = -\bar{\Phi}_1^{tr}.$$

Applying the Faber polynomials p_n for f to the identity $f(\varphi(z)) = f(z)$ evidently give

$$p_m(f(\varphi(z))) = p_m(f(z))$$

which by a simple calculation provides the relation

$$\Phi_1 + \alpha\Phi_2 = I$$

where α is the Grunsky matrix. It can be shown that Φ_2 is non-singular which leads to the representation

$$\alpha = (I - \Phi_1)\Phi_2^{-1}.$$

In the papers left behind by Helmut Grunsky there is a manuscript entitled "Die Antinomien der Cantorschen Mengenlehre".

Finally the present writer would like to use this opportunity to rectify an inadvertant injustice done to Helmut Grunsky in my book "Univalent Functions and Conformal Mapping". There it is stated that the family K of functions f regular for $|z| < 1$ with $f(0) = 0$, $f(z_1)\overline{f(z_2)} \neq -1$, $|z_1|, |z_2| < 1$, was first studied by Tao-Shing Shah, whereas it was actually first introduced in the paper [4].

Thanks are expressed to Gerald Schmieder and Helmut Köditz who supplied biographical and bibliographical information.

Publications of Helmut Grunsky

[A] Issai Schur, Vorlesungen über Invariantentheorie. Bearbeitet und herausgegeben von [illegible]
vol. 143. Berlin, Heidelberg, New York: Springer Verlag 1968

[B] Lectures on theory of functions in multiply connected domains. 253 pages. Studia Mathe- [illegible]

[18] Zur Funktionentheorie in mehrfach zusammenhängenden Gebieten. Bericht Mathematikertagung Tübingen, Sept. 1946, 68–69

[19] Nachtrag zu meinen Arbeiten über „Eindeutige beschränkte Funktionen in mehrfach zusammenhängenden Gebieten". Math. Z. **52** (1950) 852

[20] Über beschränkte Funktionen (Bericht auf der Tagung der Deutschen Mathematiker-Vereinigung, Köln, 19–22 Sept. 1949). Jber. d. Dt. Math.-Verein. **55** (1951) 4–9

[21] Über Tschebyscheffsche Probleme. Proc. Internat. Congr. Math., Cambridge Mass. 1950. Vol II, 241–246

[22] Eine Methode zur Lösung von Anfangswertproblemen bei linearen

[43] On some operators in a Hilbert space of analytic functions connected with the theory of univalent functions, Functions, series, operators I, II (Budapest 1980). Colloq. Math. Soc. János Bolyai **35**, 561–565. Amsterdam, New York: North Holland 1983
[44] Ludwig Bieberbach zum Gedächtnis. Jber. d. Dt. Math.-Verein. **88** (1986) 190–205

List of persons who received the doctoral degree under the direction of Helmut Grunsky

Runck, Paul Otto, Über Konvergenzfragen bei Polynominterpolation mit äquidistanten Knoten (Mainz 1959)

Claus, Ulf, Über eine spezielle Klasse im Einheitskreis meromorpher Funktionen (Würzburg 1964)

Herold, Horst, Randwertprobleme bei Differentialgleichungen 2. Ordnung im Komplexen (Würzburg 1967)

Ziegler, H. J. W., Über das Anwachsen der Totalkrümmung der Flächen, die von Systemen meromorpher Funktionen erzeugt sind, mit Anwendung auf allgemeinere Minimalflächen (Würzburg 1969)

Röding, Eckehard, Konforme Abbildung Riemannscher Flächen auf kanonische Überlagerungsflächen der Zahlenkugeln (Würzburg 1972)

Wellstein, Hartmut, Untersuchungen über die Familie derjenigen schlichten, mit eins beschränkten Funktionen, die den linken Halbbogen in die Peripherie des Einheitskreises abbilden (Würzburg 1973)

Köditz, Helmut, Erweiterung von Riemannschen Überlagerungsflächen (Würzburg 1973)

Wagenknecht, Niels, Subharmonische Funktionen mit konzentriertem Fluss: Beiträge zum zweiten Randwertproblem der Potentialtheorie (Würzburg 1979)

James A. Jenkins
Department of Mathematics
Washington University
Box 1146
St. Louis, Mo. 63130
U.S.A.

(*Eingegangen: 16. 3. 1988*)

Jber. d. Dt. Math.-Verein.
91 (1989) 168–190
AMS subject classification: 01 A 70

Erich Hecke 1887–1947[1])

B. Schoeneberg, Hamburg

Erich Hecke ist vor vierzig Jahren im Alter von nicht ganz sechzig Jahren verstorben. Ich will im folgenden einige Aspekte zum Leben und Werk dieses bedeutenden Mathematikers der ersten Hälfte dieses Jahrhunderts aufzeigen. Die richts zählte Weyl noch in späteren Jahren zu den glücklichsten Zeiten seines Lebens.

Hecke heiratete im Jahre 1913 Helga Unruh, eine Tochter des Fabrikdirektors Gustav Unruh aus Leipzig. Ihr einziges Kind, ein Sohn, starb in jungen Jahren.

Hecke blieb in Göttingen bis 1915, bis zu seiner Berufung nach Basel als Nachfolger von Ludwig Bieberbach. Von dort kehrte er, nachdem er Berufungen nach Breslau und Karlsruhe abgelehnt hatte, im WS 1918/19 als Nachfolger von Constantin Carathéodory nach Göttingen zurück, erhielt aber schon im darauffolgenden Semester einen Ruf auf den zweiten Lehrstuhl für Mathematik an der neu gegründeten Universität in Hamburg, den er überraschend schnell annahm: Er verließ damit Göttingen, das neben Paris als Zentrum mathematischer Forschung galt. Wilhelm Blaschke war schon kurz vorher nach Hamburg berufen worden. Beide begannen ihre Vorlesungen im WS 1919/20 mit dem Vorlesungsbeginn der hamburgischen Universität.

Als Assistent kam Jacob Nielsen von Göttingen mit nach Hamburg, ihm folgten nacheinander als Assistenten Alexander Ostrowski, Heinrich Behnke, Hans Petersson, Wilhelm Maak. Daneben war für ein Semester (WS 1920/21) Carl Siegel in Hamburg; er ging dann als Assistent zu Courant nach Göttingen. Von dort kam 1922 Emil Artin. Er hatte sich eine enge Zusammenarbeit mit Hecke vorgestellt, zu der es indessen nicht kam, was immer wieder mit Erstaunen und Bedauern festgestellt wurde. Artin habilitierte sich in Hamburg, wurde dort a. o. Professor, o. Professor und blieb hier bis zum Jahre 1937, als er wegen seiner halbjüdischen Frau in den Ruhestand versetzt wurde. Er emigrierte in die USA. Man bemühte sich von verschiedenen Seiten, ihn an der Universität zu halten, doch ohne Erfolg. Heckes Ablehnung des Nationalsozialismus war in Hamburg – auch bei den Parteistellen – und darüber hinaus bekannt. Er gehörte einem Kreis von gleichgesinnten Hamburger Gelehrten an, die sich in lockerer Verbindung zu wissenschaftlichen Sitzungen und offenen Gesprächen trafen. Teilnehmer waren u. a. der Mediziner Hans Bürger-Prinz, der Erziehungswissenschaftler Wilhelm Flitner, der Gräzist Bruno Snell und der Anglist Emil Wolff. Gleich nach dem zweiten Weltkrieg bemühte man sich, Artin zurückzugewinnen, aber erst 1958 kehrte er zurück. Mit dem Triumvirat

Im folgenden soll auf die schöpferischen Leistungen Heckes in großen Zügen eingegangen werden. Eine gewisse Zusammenfassung von Untersuchungen in verschiedenen Abschnitten werde dabei zugrunde gelegt:

1. Hilbertsche Modulfunktionen in zwei Variablen.
2. Dedekindsche und Heckesche Zetafunktionen.
3. Erweiterung arithmetischer Begriffe und Methoden.
4. Neue elliptische Modulformen.
5. Algebraische Theorie der algebraischen Funktionen (Fundamentalproblem).

7. Die Primzahlen in der Theorie der elliptischen Modulfunktionen (Hecke-Operator T_n).
8. Heckes Beiträge zur Physik.

Auf Heckes Abhandlungen wird im folgenden durch das Zahlenpaar (a; b) hingewiesen mit der Nummer a in „Erich Hecke, Mathematische Werke“ und dem Jahr b der Erscheinung.

1 Hilbertsche Modulfunktionen in zwei Variablen

Das Thema seiner Dissertation war Hecke von David Hilbert gestellt worden: Zur Theorie der Modulfunktionen von zwei Variablen und ihre Anwendung auf die Zahlentheorie, (1; 1910).
Hilbert hatte sich schon Jahre vorher mit dem Problem beschäftigt, Funktionen von mehreren Variablen zu finden, die in der Theorie der algebraischen Zahlkörper zu verwenden wären und hier eine ähnliche Bedeutung hätten wie die Exponentialfunktion für den Körper der rationalen Zahlen und die elliptischen Modulfunktio-

solche von Interesse für die Weiterentwicklung der allgemeinen Funktionentheorie mehrerer Variabler sind, aber auch ein Hilfsmittel für die analytische Behandlung der Arithmetik der Zahlkörper darstellen.
Hecke legt einen reellen quadratischen Zahlkörper $\mathfrak{k} = \mathbf{Q}(\sqrt{d})$ mit der Diskriminante d und der Grundeinheit ϵ, welche >1 ist, zugrunde. Dann stellt er analytische Funktionen von zwei Variablen τ, τ' auf, welche bei der Gruppe G simultaner Transformationen

$$\tau_1 = \epsilon^k \tau + \mu, \quad \tau_1' = \epsilon^{-k}\tau' + \mu'; \quad k \in \mathbf{Z}; \mu \in \mathfrak{k} \text{ ganz}; \quad \mu' \text{ konjugiert zu } \mu$$

invariant sind. Ausgangspunkt ist die Darstellung invarianter Funktionen durch eine Art Poincaréscher Reihen und ihre Entwicklung als „Potenzreihe im quadratischen Körper $\mathfrak{k}$". Das sind Summen von der Gestalt

$$\sum c_\mu q^\mu q'^{\mu'}; \quad q, q' \text{ komplexe Variable};$$

die Summe ist über die ganzen total positiven μ aus $\mathfrak{k}$ zu erstrecken. Die wichtigsten und von ihm funktionentheoretisch genau untersuchten sind die Reihen mit $c_\mu = 1$, $c_\mu = 1/\mu\mu'$, die Analoga zur geometrischen und logarithmischen Reihe und die spezielle Thetareihe

$$\sum q^{\mu^2} q'^{\mu'^2}.$$

Alle Resultate werden im Grunde mittels eines einfachen, von Hecke ausdrücklich formulierten Prinzips gewonnen:
„Wenn eine Funktion bei einer Substitution (von unendlich hoher Ordnung) invariant bleibt, so entwickle man die Funktion in eine Fouriersche Reihe nach einer geeignet gewählten Variablen, welche die Invarianz in Evidenz setzt."
Gewisse Schwierigkeiten werden durch die damals schon vorliegenden Zetafunktionen mit Größencharakteren erledigt, auf die nachher eingegangen wird.
Den Hilbertschen Modulfunktionen liegt die Gruppe der simultanen Transformationen

$$\tau_1 = \frac{\alpha\tau + \beta}{\gamma\tau + \delta}, \quad \tau_1' = \frac{\alpha'\tau' + \beta'}{\gamma'\tau' + \delta'}$$

zugrunde. Dabei sind $\alpha, \ldots$ ganze Zahlen aus $\mathfrak{k}$, $\alpha', \ldots$ ihre Konjugierten und $\alpha\delta - \beta\gamma$ eine total positive Einheit. Hilbertsche Modulfunktionen sind solche analytischen Funktionen von zwei Variablen, die unter dieser Gruppe invariant sind und gewissen genaueren Festsetzungen der zulässigen Singularitäten genügen. Funktionen von τ, τ', die unter den genannten Transformationen den Faktor

$$(\gamma\tau + \delta)^k (\gamma'\tau' + \delta')^k$$

aufnehmen, heißen Modulformen vom Gewicht k, $k \in \mathbf{Z}$.
Hecke begründet (20; 1924) die Theorie der Hilbertschen Modulfunktionen von neuem – unabhängig von früheren Ansätzen. Die Eisensteinschen Reihen g_2 und g_3 aus der Theorie der elliptischen Funktionen werden auf den Körper $\mathfrak{k}$ verallgemeinert, in eine „Potenzreihe in $\mathfrak{k}$" entwickelt und dienen der Konstruktion neuer Modulfunktionen. Es gelingt so, unendlich viele Paare algebraisch unabhängiger Modulfunktionen zu gewinnen. Dann wird ein von zwei Variablen abhängiges

Analogon der Dedekindschen η-Funktion

$$\eta(\tau) = e^{\pi i \tau / 12} \sum_{n=1}^{\infty} (1 - e^{2\pi i n \tau}) = \sqrt[24]{\Delta(\tau)}$$

angegeben und untersucht. Dabei werden die Funktionalgleichungen der Heckeschen Zetafunktionen mit Größencharakteren herangezogen. Von besonderer Bedeutung ist ein von Hecke hier eingeführtes und erstmalig benutztes Summationsverfahren, durch das sich Eisensteinsche Reihen vom Gewicht 2 und 1 erklären lassen.

Auf dieses Verfahren werden wir im Rahmen der Eisensteinschen Reihen höherer Stufe in Abschnitt 4 noch zurückkommen.

folgt dann die Fortsetzbarkeit mit einem Pol 1. Ordnung bei s = 1 und die Funktionalgleichung

$$R(1-s) = R(s) \quad \text{mit} \quad R(s) = \pi^{-s/2}\Gamma(s/2)\zeta(s).$$

Für die Dedekindsche Zetafunktion eines beliebigen algebraischen Zahlkörpers $\mathfrak{k}$

(die Summe ist über alle von 0 verschiedenen ganzen Ideale des Zahlkörpers $\mathfrak{k}$ zu erstrecken; $N(\mathfrak{a})$ ist die Norm von $\mathfrak{a}$) konnte erst Hecke (7; 1917) allgemein beweisen, daß $\zeta_{\mathfrak{k}}(s)$ in die ganze s-Ebene fortsetzbar ist mit einem Pol 1. Ordnung bei s = 1 und einer Funktionalgleichung genügt, ähnlich der für die Riemannsche Zetafunktion gültigen. Sein Beweis war eine Übertragung des skizzierten Riemannschen Beweises. Die in größerer Allgemeinheit als bis dahin aufgestellten Thetafunktionen und ihre Transformationsgleichung bilden den Kern des Beweises. Die von dem Vorhandensein der Einheiten herrührenden Schwierigkeiten werden durch eine klare und einfache Idee überwunden. Schon der Fall des reellen quadratischen Körpers $\mathfrak{k} = \mathbb{Q}(\sqrt{d})$ läßt den Grundgedanken erkennen. Sei $\mu \in \mathfrak{k}$ ganz und von 0 verschieden, μ' die Konjugierte, ϵ die Grundeinheit > 1. Dann ist

$$\frac{\Gamma(s/2)^2}{|\mu\mu'|^s} = \iint\limits_{t,t'>0} e^{-t\mu^2 - t'\mu'^2}(tt')^{s/2-1}\,dt\,dt'$$

$$= \iint\limits_{B} (tt')^{s/2-1} \sum_{n=-\infty}^{\infty} e^{-t\epsilon^{2n}\mu^2 - t'\epsilon'^{2n}\mu'^2}\,dt\,dt'.$$

$$B = \left\{ (t,t') \,|\, t' > 0, \epsilon'^2 < \frac{t}{t'} < \epsilon^2 \right\}.$$

Dann folgt die (Heckesche) Integraldarstellung

$$\Gamma(s/2)^2 \sum_{(\mu)} N(\mu)^{-s} = \iint\limits_{B} \sum_{\mu} e^{-t\mu^2 - t'\mu'^2}(tt')^{s/2-1}\,dt\,dt'.$$

In der linken Summe ist über alle ganzen von 0 verschiedenen Hauptideale aus $\mathfrak{k}$ zu summieren, in der rechten Summe über alle von 0 verschiedenen ganzen Zahlen aus $\mathfrak{k}$. Das ist eine Darstellung einer Zetafunktion durch eine zweifache Thetareihe. Aus der Transformationsformel für die Thetareihe ergibt sich, wenn man die entsprechenden Ansätze für den allgemeinen Körper $\mathfrak{k}$ macht: Mit r_1 der Anzahl der reellen Konjugierten zu $\mathfrak{k}$, $2r_2$ der komplexen und d der Diskriminante von $\mathfrak{k}$ ist die Funktion

In einer wenig später erschienenen Arbeit (9; 1917) überträgt Hecke seine Methode auf die L-Funktionen algebraischer Zahlkörper:

$$L(s, \chi) = \sum_{\mathfrak{a}} \frac{\chi(\mathfrak{a})}{N(\mathfrak{a})^s}, \qquad \chi \text{ Restcharakter nach einem ganzen Idealmodul,}$$

und beweist die allgemeinste Formulierung des Satzes von Dirichlet über die Primzahlen in einer arithmetischen Reihe. Zu dieser Arbeit schrieb E. Landau am 25. 4. 1917: Lieber Herr Hecke, Ihr Manuskript gefällt mir außerordentlich und stellt einen der größten Fortschritte dar, die die Zahlentheorie überhaupt hätte machen können.

Durch Verbindung der Heckeschen Entdeckung mit den neueren Methoden der Primzahltheorie ergab sich eine Fülle von neuen Resultaten. Eine Einführung in diesen Gedankenkreis bringt Landau in seinem 1918 erschienenen Buch „Einführung in die elementare und analytische Theorie der algebraischen Zahlen und der Ideale“.

C. L. Siegel [Sie1] hat 1922 einen neuen Beweis für die Fortsetzbarkeit und Funktionalgleichung der Dedekindschen Zetafunktion erbracht. Er hat die Idee des zweiten Riemannschen Beweises auf algebraische Zahlkörper übertragen, d. h. er benutzt nicht eine Formel aus der Theorie der Thetafunktionen, sondern den Cauchyschen Integralsatz.

In Weiterführung der Schlußweisen, die für die Aufstellung der Funktionalgleichungen so erfolgreich waren, gelangte Hecke zur Bildung und Untersuchung der Zetafunktionen mit Größencharakteren (12; 1918), (14; 1920). Während die bis dahin bekannten Sätze über die Verteilung der Zahlen und Ideale in algebraischen Zahlkörpern sich auf eine Anordnung nach wachsender Norm beziehen, werden jetzt

K. Hey begründete 1929 in gewissem Anschluß an Hecke die analytische Zahlentheorie in Systemen hyperkomplexer Zahlen, insbesondere der Quaternionen [Hey].

3 Erweiterung arithmetischer Begriffe und Methoden

Die Methoden und Ergebnisse aus dem Bereich der Zetafunktionen erwiesen sich als fruchtbar für weitere Heckesche Untersuchungen. Auf ihr Auftreten in der Neubegründung der Theorie der Hilbertschen Modulfunktionen wurde schon hingewiesen. Daneben ist zunächst die Kroneckersche Grenzformel für reelle quadratische Körper zu nennen. Kronecker selbst ging aus von der Dirichletschen Reihe

$$f(s) = \Sigma' \varphi(m, n)^{-s}, \qquad \varphi(m, n) = am^2 + bmn + cn^2$$

für eine positive definite quadratische Form mit Koeffizienten aus **Z**. Sie definiert eine meromorphe Funktion von s mit einem Pol erster Ordnung in s = 1. Es ist also ist die Klassenzahl h(d) mindestens von den Größenordnung $|\sqrt{d}|/\log|d|$. M. Deuring bewies 1932, daß aus der Falschheit der Riemannschen Vermutung die Ungleichung $\underline{\lim}_{d\to-\infty} h(d) \geqslant 2$ folgt [D1]. Schließlich bewies H. Heilbronn [Hei] 1934 durch eine Kombination der Ansätze von Hecke und Deuring die Gleichung $\lim_{d\to-\infty} h(d) = \infty$. Über die Gaußschen Vermutung hinaus bewies Siegel [Sie3] 1935 die asymptotische Formel $\log h(d) \sim \log\sqrt{|d|}$, $d \to -\infty$. 1985 bewiesen Gross und Zagier [GZ] die Existenz einer unteren Schranke für h(d) in Abhängigkeit von d. Nach dem Satz von Heilbronn ist insbesondere die Anzahl der imaginären quadratischen Körper mit der Klassenzahl 1 endlich. Neun kannte man bereits. Man vermutete, daß es weitere nicht gäbe. K. Heegner [Hee] brachte 1952 dafür eine nicht ganz stichhaltige Beweisanordnung, die von M. Deuring 1968 noch unvollständig und von H. M. Stark 1969 – endgültig – zu einem vollständigen Beweis ergänzt wurde. H. M. Stark [St] gelang schon 1967 mit neuen Methoden die Lösung des Problems. Durch eine Abänderung des Starkschen Beweises gelang Siegel 1969 eine prinzipielle Vereinfachung. Einen weiteren Beweis verdankt man C. Meyer (1971).

[illegible]

für natürliches Argument formuliert und diskutiert.

Sei $\mathbb{K}$ ein total-reeller Zahlkörper über $\mathbb{Q}$ vom Grade n, d seine Diskriminante, $\mathfrak{a}$ ein Ideal in $\mathbb{K}$, k eine natürliche Zahl. Dann gilt für die Reihe

$$\zeta(\mathfrak{a}, k) = N(\mathfrak{a})^k \sum_{(\mu)} N(\mu)^{-k},$$

in der über alle $\mu \neq 0$, $\mu \in \mathfrak{a}$ summiert wird, die sich nicht um eine total-positive Einheit als Faktor unterscheiden, der folgende Satz:

$$\zeta(\mathfrak{a}, k)\pi^{-kn} d^{1/2}$$

Aus dem Heckeschen Satz folgt als Spezialfall:
Ist $\zeta_K(s)$ die Dedekindsche Zetafunktion des total-reellen Körpers K, so ist

$$\zeta_K(2k)\pi^{-2nk}d^{1/2}, \qquad k = 1, 2, \ldots$$

eine rationale Zahl r. Ein Beweis dieses Satzes stammt von Siegel [Sie4] 1937, der ihn als einfache Folgerung des Hauptsatzes seiner analytischen Theorie der quadratischen Formen herleitete. Die rationale Zahl r läßt sich in bestimmter Weise durch Darstellungsanzahlen quadratischer Fromen ausdrücken.

4 Neue elliptische Modulformen

Vor der Diskussion neuer von Hecke gefundener Modulformen einige Verabredungen: L ist eine Matrix der Form $L = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in SL_2(\mathbf{Z})$; $L(\tau) = \dfrac{a\tau + b}{c\tau + d}$; N eine natürliche Zahl $\geqslant 1$; $\Gamma(N)$ die Gruppe der Matrizen $L \equiv \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ mod N.

F heißt Modulfunktion der Stufe N, wenn F definiert ist für $\mathrm{Im}(\tau) > 0$ und alle rationalen Zahlen und folgendes gilt:

a) F ist meromorph für $\mathrm{Im}(\tau) > 0$.
b) $F(L(\tau)) = F(\tau)$, wenn $L \in \Gamma(N)$.
c) In jedem rationalen Punkt $-d/c$, $(c, d) = 1$, hat F eine Entwicklung der Form

$$F(\tau) = \sum_{\nu \geqslant \nu_0} c_\nu e^{\frac{2\pi i}{N} A(\tau)\nu}, \qquad A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in \Gamma(1)$$

F heißt ganze Modulform der Stufe N und des Gewichts k, $k \in \mathbf{Z}$ und $\geqslant 1$, wenn gilt

a) F ist holomorph für $\mathrm{Im}(\tau) > 0$.
b) Es ist $(F|L)(\tau) = F(\tau)$ für $(F|L)(\tau) = F(L(\tau))(c\tau + d)^{-k}$, $L \in \Gamma(N)$.
c) In jedem rationalen Punkt $-d/c$ hat F eine Entwicklung der Form

$$F(\tau)(c\tau + d)^k = \sum_{\nu \geqslant 0} c_\nu e^{\frac{2\pi i A(\tau)\nu}{N}}, \qquad A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in \Gamma(1).$$

Falls stets $c_0 = 0$ ist, heißt F Spitzenform. Die Anzahl von Klassen rationaler Zahlen, die nach $\Gamma(N)$ äquivalent sind, ist endlich $= \sigma(N)$.
Die Funktionen der Stufe N bilden einen Funktionenkörper, der über dem Körper der Funktionen der Stufe 1 algebraisch ist. Er ist galoissch mit der Gruppe $\Gamma(1)/\pm\,\Gamma(N)$. Es gelten also die Begriffe und Sätze der Theorie der algebraischen Funktionen, insbesondere der Riemann-Rochsche Satz.
Die ganzen Formen der Stufe N und des Gewichts k bilden einen Vektorraum $\mathfrak{M}(N, k)$. Dessen Dimension über $\mathbf{C}$ ist für $k \geqslant 2$ nach dem Riemann-Rochschen Satz zu berechnen. Für $k = 1$ versagt dieser Satz.
Durch Integration der Formen aus $\mathfrak{M}(N, 2)$ nach τ entstehen Integrale 1. Gattung, falls die Form Spitzenform ist, sonst solche 2. und 3. Gattung.

Für alle $F \in \mathfrak{M}(N, 2)$ und alle $S \in \Gamma(N)$ ist das Integral

$$\int_{\tau_0}^{S(\tau_0)} F(\tau)\,d\tau = \pi_S$$

unabhängig von τ_0 (Perioden des Integrals).

Durch das Γ-Integral gelangt man von der Potenzreihe $P(t) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n e^{-nt}$ zu der Dirichlet-Reihe $D(s) = \sum_{n=1}^{\infty} a_n n^{-s}$. Auf diesem Weg folgt aus der Funktionalgleichung für die Thetareihe die Funktionalgleichung für die Zetafunktion. Umgekehrt gelang man durch das Mellinsche Integral [Mel]

$$e^{-t} = \frac{1}{2\pi i} \int_{2-i\infty}^{2+i\infty} \frac{\Gamma(s)}{t^s}\,ds$$

von der Dirichlet-Reihe D(s) zur Potenzreihe P(t).

Ist D(s) eine Heckesche Zetafunktion, so gelangt man durch das Mellinsche Integral zu einer Potenzreihe, welche eine Funktionaleigenschaft besitzt, die der Funktionalgleichung der Zetafunktion entspricht. Sobald der Γ-Faktor in dieser Funktionalgleichung im wesentlichen mit Γ(s) identisch ist, wird die Potenzreihe sich beim Übergang von t zu 1/t in einfacher Weise verändern. Das kommt nur in den folgenden drei Fällen vor (23; 1926):

1. Die Heckesche Zetafunktion der reellen quadratischen Körper mit einem bestimmten Vorzeichencharakter.
2. Die Dedekindsche Zetafunktion des imaginären quadratischen Körpers.
3. Die Produkte von zwei rationalen L-Reihen verschiedenen Typs.

Die Gestalt der Zetafunktionen führt zu folgenden Definitionen:

1. Für den reellen quadratischen Körper $\mathbb{Q}(\sqrt{D})$ mit der Diskriminante $D > 0$

$$\vartheta(\tau; \rho; \mathfrak{a}, Q\sqrt{D}) = \Sigma \operatorname{sgn} \mu\, e^{2\pi i \frac{\tau\mu\mu'}{AQD}}$$

mit den Summationsbedingungen $\mu \equiv \rho\ (\mathfrak{a}Q\sqrt{D})$, $\mu\mu' > Q$,
dabei ist $\mathfrak{a}$ ein ganzes Ideal aus $\mathbb{Q}(\sqrt{D})$, $\rho \in \mathfrak{a}$, A die Norm $N(\mathfrak{a})$ und Q eine natürliche Zahl. In der Summe dürfen nur solche Zahlen μ auftreten, die sich nicht nur um eine totalpositive Einheit $\equiv 1$ (mod $Q\sqrt{D}$) unterscheiden.

2. Für den imaginären quadratischen Körper $\mathbb{Q}(\sqrt{D})$ mit der Diskriminante $D < 0$ die im wesentlichen schon vor Hecke bekannten Funktionen

$$\vartheta(\tau; \rho; \mathfrak{a}, Q\sqrt{D}) = \sum_{\mu \equiv \rho(\mathfrak{a}Q\sqrt{D})} e^{2\pi i \frac{\tau\mu\mu'}{AQ|D|}}.$$

Die Funktionen ϑ erweisen sich als ganze Modulformen der Stufe $Q|D|$, $D \gtrless 0$, und des Gewichts 1. Ihr Verhalten bei der Substitution $U: \tau \to \tau + 1$ ist klar. Ihr Verhalten bei der zweiten Erzeugenden der Modulgruppe $T: \tau \to -1/\tau$ folgt aus der Funktionalgleichung, wird aber von Hecke ohne ihre explizite Benutzung bewiesen. Das Ergebnis ist eine lineare homogene Kombination der ϑ mit denselben $\mathfrak{a}$, Q, D und konstanten Koeffizienten. Die Berechnung der Koeffizienten erfolgt auf einem für $D > 0$ und $D < 0$ gemeinsamen Weg, auch für beliebige $L \in \Gamma(1)$.

3. Die Funktionen des dritten Typs sind gerade die Teilwerte der Weierstraßschen ζ-Funktion. Sie sind Modulformen des Gewichts 1 und der Stufe N, wenn N der Teilungsgrad ist.

Mit tiefliegenden Hilfsmitteln aus der Arithmetik beweist Hecke:
Es gibt Formen aus den reellen quadratischen Körpern, welche sich durch Formen aus den imaginären quadratischen Körpern und den Teilwerten der Weierstraßschen ζ-Funktion nicht linear ausdrücken lassen.
Aus den Formen der zweiten Art gewinnt Hecke durch einen gewissen Differentiationsprozeß und seine Wiederholung die Funktionen

$$\vartheta_k(\tau; \rho, \mathfrak{a}, Q\sqrt{D}) = \sum \mu^{k-1} e^{2\pi i \tau \frac{\mu\mu'}{AQ|D|}}, \qquad k = 1, 2, \ldots, \quad D < 0.$$

Sie gehören zu $\mathfrak{M}(Q|D|, k)$, sind Spitzenformen für $k \geqslant 2$ und Integranden 1. Gattung für $k = 2$, deren Periodengitter Hecke später (27; 1928) für gewisse Fälle durch die Theorie der Klassenkörper bestimmt.
Gelingt es, die Identität von zwei auf verschiedene Weise gewonnenen Modulformen zu beweisen, so erhält man Beziehungen zwischen verschiedenen Körpern, auch solche zwischen reellen und imaginären quadratischen Körpern, z. B. zwischen den Körpern $\mathbf{Q}(\sqrt{-7})$, $\mathbf{Q}(\sqrt{21})$, $Q(\sqrt{-21})$.
Da die Zetafunktionen der definiten und indefiniten Quaternionen einer Funktionalgleichung genügen, deren Γ-Faktor im wesentlichen mit Γ übereinstimmt, ist auch hier der Übergang von den Zetafunktionen zu Modulformen möglich [Sch2]. Das Verfahren, bei quadratischen Körpern aus dem Verhalten der Funktionen bei U und T auf ihr allgemeines Verhalten zu schließen, ist übertragbar.

Neben diese Untersuchungen Heckes treten fast zeitgleich seine Untersuchungen über Eisensteinsche Reihen höherer Stufe (24; 1927):

$$G_k(\tau; a_1, a_2, N) = \sum_{m_i \equiv a_i(N)}{}' (m_1\tau + m_2)^{-k}; \qquad k, a_1, a_2, N \in \mathbf{Z}, \quad k \geqslant 3,$$
$$N \geqslant 1, \quad (a_1, a_2, N) = 1, \quad \mathrm{Im}(\tau) > 0.$$

Für sie findet man die Fourier-Entwicklung

$$G_k(\tau; a_1, a_2, N) = \delta\left(\frac{a_1}{N}\right) \sum_{m_2 \equiv a_2(N)}{}' m_2^{-k} +$$
$$+ C(k, N) \sum_{\substack{mm_1 > 0 \\ m_1 \equiv a_1(N)}} \operatorname{sgn} m\, \zeta_N^{a_2 m} e^{2\pi i m m_1 \tau / N}.$$

$$C(k, N) = (-2\pi i)^k / N^k (k-1)!, \qquad \zeta_N = e^{2\pi i/N}.$$

Sie gehören zu $\mathfrak{M}(N, k)$.
Für $k = 2$ konvergieren die G_k nicht absolut. Hecke definiert:

$$G_2(\tau; a_1, a_2, N) := \Phi_2(\tau; a_1, a_2, N, 0),$$

wobei für Re(s) > 0

$$\Phi_2(\tau; a_1, a_2, N, s) = \sum_{m_i \equiv a_i(N)}{}' \frac{1}{(m_1\tau + m_2)^2 |m_1\tau + m_2|^s},$$

eine Funktion, die holomorph nach s = 0 fortgesetzt werden kann. Die G_2 verhalten sich bei Modulsubstitutionen wie die G_k mit $k \geqslant 3$, unterscheiden sich aber von einer in $\mathrm{Im}(\tau) > 0$ holomorphen Funktion durch das additive Glied $-2\pi i/N^2(\tau - \bar{\tau})$. Der Unterraum der holomorphen Funktionen im Raum der G_2 liegt in $\mathfrak{M}(N, 2)$. Er ist identisch mit dem Raum der N-ten Teilwerte der Weierstraßschen $\wp$-Funktion. Seine Dimension über **C** ist $\sigma(N) - 1$. Die G_1 werden analog zu den G_2 definiert. Sie gehören schon selbst zu $\mathfrak{M}(N, 1)$ und sind identisch mit den N-ten Teilwerten der Weierstraßschen ζ-Funktion. Ihr Raum hat die Dimension $\sigma(N)/2$ für $N > 1$. Trotz des besonderen Verhaltens der Fälle k = 1 und k = 2 gilt allgemein: Zu jeder Modulform $M_k \in \mathfrak{M}(N, k)$ gibt es eine lineare Kombination Z_k der G_k mit komplexen Koeffizienten, so daß $M_k - Z_k = F_k$ Spitzenform ist.
Dieser Satz liefert Aussagen über die Anzahl der Darstellungen einer natürlichen Zahl durch gewisse quadratische Formen.
Die durch einen analytischen Ausdruck definierten $\wp$-Teilwerte lassen sich durch innere Eigenschaften kennzeichnen:
Der von den Integralen der $\wp$-Teilwerte erzeugte Vektorraum ist bei festem N identisch mit dem Vektorraum, der von den Logarithmen der Funktionen zu $\Gamma(N)$ erzeugt wird, die für $\mathrm{Im}\,\tau > 0$ holomorph und von 0 verschieden sind.
Aus den Heckeschen Ergebnissen, welche die Teilwerte der $\wp$-Funktion betreffen, und einem Satz von Max Noether [N] 1880 folgt: Der Vektorraum $\mathfrak{M}(N, 2k)$, $k \geqslant 1, N \geqslant 7$, wird erzeugt von den Potenzprodukten k-ten Grades der Formen aus $\mathfrak{M}(N, 2)$ [Sch 1] 1930.

5 Algebraische Theorie der algebraischen Funktionen (Fundamentalproblem)

In seinen Untersuchungen „Über die algebraischen Gebilde mit eindeutigen Transformationen in sich" (1893) behandelt Hurwitz [Hu] die Gruppe der linearen homogenen Transformationen, welche im Raum $\mathcal{S}$ der Differentiale 1. Gattung durch die Automorphismen eines solchen Gebildes $\mathcal{K}$ induziert werden. Er bestimmt die Wurzeln der charakteristischen Gleichung mit Hilfe gewisser Funktionensysteme auf der Riemannschen Fläche $\mathcal{K}$. In der Sprache der Darstellungstheorie endlicher Gruppen, die allerdings erst später (1896) von G. Frobenius [F] begründet wurde, heißt das, er bestimmt den Charakter einer bestimmten Darstellung $\mathcal{D}$ der Gruppe der Automorphismen von $\mathcal{K}$.
Der Darstellungsmodul $\mathcal{S}$ zur Darstellung $\mathcal{D}$ ist direkt zerlegbar in Teilräume, welche durch die Automorphismen auf sich abgebildet werden und nicht weiter zerlegbar sind (irreduzible Darstellungsmoduln, irreduzible Darstellungen). Hecke hat die Multiplizitäten, mit denen die irreduziblen Darstellungen in $\mathcal{D}$ stecken, für die Funktionen zu $\Gamma(q)$, $q \geqslant 7$, prim, berechnet. (18; 1928).
Die Abbildungen $f(\tau) \to (f|L)(\tau)$, $L \in \Gamma(1)$ bilden eine Darstellung von M(q), der inhomogenen Modulargruppe mod q.

Frobenius hat die einfachen Charaktere (die Spuren der Matrizen irreduzibler Darstellungen) für M(q) berechnet. Damit konnte Hecke die Multiplizitäten berechnen, zunächst mit einer Ausnahme. Die Multiplizitäten der beiden irreduziblen algebraisch konjugierten Darstellungen vom Grade $\frac{q+\epsilon}{2}$, $\epsilon = (-1)^{(q-1)/2}$, deren Summe er kannte, konnte er erst später trennen (29; 1930). Sie waren einander gleich, wenn $\epsilon = 1$, und unterschieden sich um die Klassenzahl h von $\mathbb{Q}(\sqrt{-q})$, wenn $\epsilon = -1$ ist. Die zweite Aussage ergab sich, als im Laufe der Rechnung der Ausdruck für die Dirichletsche Klassenzahlformel auftrat. Mit der Bestimmung der Multiplizitäten ist das wichtige Problem der Konstruktion der Integranden 1. Gattung zur Stufe q in einfachere Teilprobleme zerlegt. Zu den Integranden 1. Gattung gehören die binären Thetareihen $\vartheta_2(\tau; \rho, \mathfrak{a}, \sqrt{-q})$ für $q \equiv 3 \bmod 4$. Bei festem $\mathfrak{a}$ und passenden ρ bilden sie einen irreduziblen Darstellungsmodul der Dimension $\frac{q-1}{2}$ und sind jeweils linear unabhängig, wenn $\mathfrak{a}$ die verschiedenen Idealklassen in $\mathbb{Q}(\sqrt{-q})$ durchläuft. Das sind gerade die Integranden, von denen schon die Rede war. Ihr bekanntes Verhalten bei Modulsubstitutionen liefert die Elemente der Darstellungsmatrizen. Ein zweiter Darstellungsmodul innerhalb $\mathfrak{M}(q, 2)$ ist der Raum der q-ten

[illegible]

6 Bestimmung Dirichletscher Reihen durch ihre Funktionalgleichung

H. Hamburger [Ham] bewies 1921, daß die Riemannsche Zetafunktion $\zeta(s) = \sum_{n \geqslant 1} n^{-s}$ durch ihre Funktionalgleichung

$$R(s) = R(1-s) \quad \text{mit} \quad R(s) = \pi^{-s/2}\Gamma(s/2)\zeta(s)$$

bis auf einen konstanten Faktor eindeutig bestimmt ist, wenn noch verlangt wird

I. $(s-1)\zeta(s)$ ist eine ganze Funktion von endlichem Geschlecht,

II. $\zeta(s) = \sum_{n \geqslant 1} a_n n^{-s}$ ist eine absolut konvergente Dirichlet-Reihe für $\mathrm{Re}(s) > 1$.

Hamburger bewies diesen Satz unter etwas allgemeineren Voraussetzungen. Siegel [Sie2] brachte 1922 einen kurzen Beweis, ebenso Hecke in (10; 1923), dessen Methode auch die Behandlung anderer Probleme der analytischen Zahlentheorie ermöglichte, z. B. des Dirichletschen Teilerproblems und des Ellipsenproblems. Hecke untersuchte in (33; 1936) eine allgemeine Klasse von Funktionalgleichungen: Es seien λ, k, γ konstant, $\lambda, k > 0$; φ sei eine Funktion der komplexen Variablen s. Man bilde den Ausdruck

$$R(s) = \left(\frac{2\pi}{\lambda}\right)^{-s}\Gamma(s)\varphi(s)$$

und suche alle Funktionen φ, welche der Funktionalgleichung

$$R(s) = \gamma R(k-s), \qquad (\text{also } \gamma = \pm 1),$$

genügen, mit folgenden Eigenschaften:

I. $(s-k)\varphi(s)$ ist eine ganze Funktion von endlichem Geschlecht,

II. $\varphi(s) = \sum_{n \geqslant 1} a_n n^{-s}$ für $\mathrm{Re}(s) > x_0$ mit irgendeinem x_0.

Von einer Lösung des Problems sagt man, es habe die Signatur (λ, k, γ).
Die Aufgabe wird durch das Γ-Integral und seine Umkehrung, das Mellinsche Integral, in ein Problem der automorphen Funktionen überführt. Über das Mellinsche Integral wird der Funktion φ der Signatur (λ, k, γ) die in der oberen τ-Halbebene holomorphe Funktion f:

$$f(\tau) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n e^{2\pi i \tau n/\lambda} \qquad \text{mit einem gewissen } a_0$$

zugeordnet, welche folgende Eigenschaften besitzt:

$$f(\tau+\lambda) = f(\tau), \qquad f(-1/\tau) = \gamma(-i\tau)^k f(\tau)$$
$$f(x+iy) = O(y^{-K}) \quad \text{für} \quad y \to +0,\ K > k.$$

Umgekehrt führt jede Funktion f mit diesen Eigenschaften über das Γ-Integral zu einer Funktion φ der Signatur (λ, k, γ).
Aus dem Verhalten der Funktion f bei den Substitutionen

$$U: \tau \to \tau + \lambda, \qquad T: \tau \to -1/\tau$$

folgt ihr Verhalten bei den Transformationen der von U und T erzeugten Gruppe $G(\lambda)$. f ist eine automorphe Form des Gewichts k zur Gruppe $G(\lambda)$.
$G(\lambda)$ ist vom Schottky-Typus, wenn $\lambda > 2$, $G(2)$ ist die Thetagruppe. Für $\lambda < 2$ ist die Gruppe $G(\lambda)$ nur unter bestimmten von Hecke angegebenen Bedingungen für die Größe λ eigentlich diskontinuierlich.
Der Existenzbeweis wird für die Funktionen f geführt und benutzt nur den Fundamentalsatz der konformen Abbildung und das Spiegelungsprinzip und nicht die allgemeine Theorie der automorphen Funktionen.
Für $\lambda > 2$ gibt es unendlich viele linear-unabhängige Funktionen der Signatur (λ, k, γ), dagegen für $\lambda \leqslant 2$ nur endlich viele. Genau eine Lösung gibt es u. a. für
$(2, 1/2, 1)$ mit $\varphi(s) = \zeta(2s)$,
$(2,1,1)$ mit der Zetafunktion des Körpers $\mathbb{Q}(\sqrt{-1})$,
$(2,2,1)$ mit der Zetafunktion der Hurwitzschen Quaternionen.

7 Die Primzahlen in der Theorie der elliptischen Modulfunktionen (Hecke-Operator)

Nachdem Hecke die Beziehungen zwischen Dirichlet-Reihen mit Funktionalgleichung des bekannten Typs und Modulfunktionen – allgemeiner automorphen Funktionen – grundsätzlich geklärt hat, zeigt er (35; 1937), daß das Auftreten eines Euler-Produkts von der Form

$$\varphi(s) = \prod_p (1 - c_p p^{-s} + a_p p^{-2s})^{-1}$$

für die Dirichlet-Reihe $\varphi(s)$ sich nicht auf die bekannten Beispiele beschränkt, sondern eine Eigenschaft der Modulfunktionen ist, die sich nach Adjunktion gewisser Matrizen durch ein Euler-Produkt in diesem Matrizenring formulieren läßt. Es kommen damit die Primzahlen ins Spiel. Hecke behandelt zunächst nur den Raum $\mathfrak{M}(1, k)$, mit geradem $k \geqslant 4$, der auch hier skizziert sei.
Eine Basis für den Raum $\mathfrak{M}(1, k)$ der Dimension κ werde gegeben durch

$$F^\rho(\tau) = a^\rho(0) + \sum_{m=1}^{\infty} a^\rho(m) e^{2\pi i m\tau}, \qquad 1 \leqslant \rho \leqslant \kappa.$$

Für die Formen F aus $\mathfrak{M}(1, k)$ wird ein linearer Operator $T_n = T(n)$ mit natürlichem n definiert:

$$F|T_n = n^{k-1} \sum_{h=0}^{\sigma_1} F(M_h \tau) d_h^{-1}, \quad \text{mit}$$

$$M_h = \begin{pmatrix} a_h & b_h \\ 0 & d_h \end{pmatrix}, \quad a_h d_h = n, \quad d_h > 0, \quad b_h \bmod d_h.$$

Für das Produkt zweier Operatoren gilt

$$T(n)T(m) = \sum_{t|m,n} T\left(\frac{nm}{t^2}\right) t^{k-1} \qquad \text{für beliebige natürliche } n, m.$$

Die T(m) erzeugen einen kommutativen Operatorenring.
Mit F liegt auch $F|T_n$ in $\mathfrak{M}(1, k)$. Daher ist

$$F^\rho|T_n = \sum_{\sigma=1}^{\kappa} \lambda_{\rho\sigma}(n) F^\sigma(\tau), \qquad \rho = 1, \ldots, \kappa \quad \text{mit von } \tau \text{ unabhängigen } \lambda_{\rho\sigma}(n).$$

Die Matrizen $\lambda(n) = (\lambda_{\rho\sigma}(n))$ erzeugen einen mit dem Operatorenring der T(n) isomorphen Ring von Matrizen, in welchem

$$\lambda(n)\lambda(m) = \lambda(m)\lambda(n) = \sum_{t|n,m} \lambda\left(\frac{nm}{t^2}\right) t^{k-1}.$$

Durch Koeffizientenvergleich ergeben sich die Grundgleichungen

$$\sum_{t|n,m} a^\rho\left(\frac{nm}{t^2}\right) t^{k-1} = \sum_{\sigma=1}^{\kappa} \lambda_{\rho\sigma}(n) a^\sigma(n), \qquad m \geqslant 0, n \geqslant 1.$$

Aus ihnen folgt für die Matrix

$$B(\tau) = \sum_{n=0}^{\infty} \lambda(n) e^{2\pi i \tau n} \qquad \text{mit passendem } \lambda(0)$$

die Darstellung

$$B(\tau) = \sum_{\nu=1}^{\kappa} F^{\nu}(\tau) B_{\nu}$$

mit κ eindeutig bestimmten von τ unabhängigen Matrizen B_ν des Grades κ. Die Matrizen B_ν bilden eine Basis des Matrizenringes der $\lambda(n)$.

linear äquivalent.

Schließlich folgt als Hauptsatz der Theorie:

Sind die Reihen $\varphi^{\rho}(s) = \sum_{n=1}^{\infty} a^{\rho}(n) n^{-s}$ die den Funktionen $F^{\rho}(\tau)$ zugeordneten Dirichlet-Reihen, so besitzt die Matrix

$$\Phi(s) = \sum_{\nu=1}^{\kappa} \varphi^{\nu} B_{\nu} = \sum_{n=1}^{\infty} \lambda(n) n^{-s}$$

die Eulersche Produktentwicklung

$$\Phi(s) = \prod_p (E - \lambda(p)p^{-s} + E\,p^{k-1-2s})^{-1}$$

Der Beweis beruht auf der Idee der Metrisierung des Raumes der Spitzenformen durch Einführung eines bestimmten Skalarprodukts, einer Idee von großer Bedeutung für die ganze Theorie.
Der Ansatz – die Peterssonschen Ergebnisse eingeschlossen – läßt sich auf höhere Stufen übertragen (36; 1937). Eine Reihe von Modifikationen ist dabei erforderlich.
Die Verwendung der Theorie der Euler-Produkte bei der Untersuchung quadratischer Formen war für Hecke von vornherein ein besonders wichtiges Ziel. In einer groß angelegten Monographie (41; 1940) hat er diese Theorie auf die mit positiven ganzzahligen quadratischen Formen gerader Variablenzahl gebildeten Thetareihen angewandt. Er bewies eine große Anzahl völlig neuartiger Tatsachen über die Darstellung natürlicher Zahlen durch quadratische Formen. Das wichtigste Ergebnis ist, daß auch hier die Darstellung einer natürlichen Zahl durch quadratische Formen eines vollen Systems mit gegebener Determinante bekannt ist, wenn man die Darstellung der Primzahlen beherrscht. Folgender wichtiger Satz sei genannt:
Es sei Q eine positive quadratische Form von einer geraden Variablenzahl mit ganzen rationalen Koeffizienten, N ihre Stufe, $\chi(n)$ eigentlicher Charakter mod N und $a(n, Q)$ die Anzahl der ganzzahligen Lösungen von $Q = n$. Dann ist die Dirichlet-Reihe

$$\varphi(s) = \sum_{(n,N)=1} a(n, Q)\, n^{-s}$$

darstellbar als eine lineare Kombination von eindeutig bestimmten Eulerprodukten der Form

$$\prod_{p} (1 - c_p p^{-s} + \chi(p) p^{k-1-2s})^{-1} .$$

Siegel zählt die von Hecke mit seinen Methoden gefundenen arithmetischen Sätze zu den verborgensten und merkwürdigsten der gesamten Zahlentheorie.
Die letzte Abhandlung Heckes (42; 1944) betrifft die Kennzeichnung der Riemannschen Zetafunktion durch reine Funktionaleigenschaften. Er stellt die Aufgabe, das Koeffizientengesetz der Thetareihe $\vartheta(\tau)$ aus den Funktionaleigenschaften der Thetafunktion herzuleiten. Die Thetafunktion hat das Gewicht 1/2, und es bleibt von der Operatorentheorie nur wenig übrig. Mit diesem Rest gelingt es Hecke, das Euler-Produkt für $\zeta(2s)$ herzuleiten. Entscheidend für den Beweis ist, daß die Dirichlet-Reihe von vornherein als Euler-Produkt aufgebaut wird. Damit hat Hecke eine Aufgabe gelöst, die ihn lange beschäftigt hat.
Die Theorie der Hecke-Operatoren ist wohl die am weitesten wirkende von Heckes Leistungen. Sie spielt auch heute in weiten Teilen der Zahlentheorie eine fundamentale Rolle. Die Transformierten der Eigenformen zu den Hecke-Operatoren sind L-Funktionen mit einer Funktionalgleichung und einer Eulerschen Produktentwicklung. Es sind die sogenannten automorphen L-Funktionen. Daneben stehen die arithmetischen L-Funktionen wie die Zetafunktionen algebraischer Zahlkörper, die Artinschen L-Funktionen, die L-Funktionen zu den elliptischen Kurven und zu den Darstellungen von Galoisgruppen. Es erhebt sich dann die Frage, ob man unter Umständen automorphe L-Funktionen mit arithmetischen L-Funktionen identifizieren kann.

Ein Beispiel für eine solche Korrespondenz zwischen automorphen und arithmetischen L-Funktionen wird im abelschen Fall durch die Klassenkörpertheorie und das Artinsche Reziprozitätsgesetz gegeben. Weitere Beispiele liefern die von E. Artin gefundenen nicht-abelschen L-Funktionen, was sowohl ihm selbst als auch Hecke, die zu gleicher Zeit und am selben Ort arbeiteten, entgangen ist.
Im Grunde finden sich solche Ideen schon in Heckes Arbeit (7; 1917): „Über die Zetafunktion beliebiger algebraischer Zahlkörper", in der die $\zeta_{\mathfrak{k}}$-Funktion als Transformierte der ϑ-Funktion zu $\mathfrak{k}$ geschrieben wird.
Das gleiche gilt für die Modulformen der Gewichts 1, und die ihnen assoziierten L-Funktionen aus den reellen und imaginären quadratischen Zahlkörper, die in Abschnitt 4 behandelt wurden.

8 Heckes Beiträge zur Physik

Im Anschluß an eine Vorlesung von Hilbert über Strahlungstheorie (1912) veröffentlichte Hecke gemeinsam mit W. Behrens die Untersuchung „Über die geradlinige Bewegung des Bornschen starren Elektrons" (5; 1912). Zwei Untersuchungen über die Integralgleichungen, welche nach Hilbert der kinetischen Gastheorie zugrunde liegen, veröffentlichte Hecke später, (11; 1918) und (18; 1922). In der zweiten dieser Arbeiten kündigte er an, daß er Anwendungen und feinere Fragen der Gastheorie in einem demnächst bei Teubner erscheinenden Buch zur Darstellung bringen würde. Dieses Buch ist nicht erschienen. Hecke hielt das vor dem Abschluß stehende Buch nicht mehr für aktuell. Über den Verbleib des Manuskripts ist nichts bekannt[1]).

Mit diesen Bemerkungen sollte versucht werden, einen gewissen, notwendigerweise unvollständigen Überblick über Heckes Leben und Werk zu geben. Alle von ihm veröffentlichten Abhandlungen sind in einem Band von etwa 1000 Seiten zusammengefaßt:
Erich Hecke, Mathematische Werke, Vandenhoeck & Ruprecht, Göttingen, 1. Aufl. 1959, 2. Aufl. 1970, 3. Aufl. 1983.

Seine Veröffentlichungen zeichnen sich aus durch eine klare, wenn auch nicht immer leicht lesbare Darstellung, eine informative Einleitung über Geschichte der Fragestellung und Ziele der Abhandlung und sorgfältig ausgewählte Beispiele. In einer Reihe von Fällen hat er der Darstellung einer allgemeinen Theorie eine Behandlung unter vereinfachenden Bedingungen vorausgeschickt, ein nachahmenswerter didaktischer Gesichtspunkt. Seine Vorlesungen waren genauestens vorbereitet, auch hier wieder mit instruktiven zusammenfassenden Einleitungen, abschließend gewandt und elegant durchgeführter Rechnung.
Hecke hat 1923 ein viel beachtetes Lehrbuch „Vorlesungen über die Theorie der algebraischen Zahlen" (Akad. Verlagsges., Leipzig) herausgegeben. Es trat neben das Lehrbuch von Dirichlet-Dedekind und erlebte einen Neudruck, eine zweite Auflage (1954) und eine amerikanische Übersetzung (Springer 1981). Zwei Vorlesungen wurden posthum veröffentlicht:

---

[1]) Zusatz bei der Korrektur: Das Manuskript hat sich inzwischen angefunden und liegt jetzt bei dem Hecke-Nachlaß in Hamburg.

Dirichlet series, modular functions and quadratic forms (Vandenhoeck & Ruprecht, Göttingen 1983) = Vorlesungen in den USA 1938.

Analysis und Zahlentheorie (Vieweg, Braunschweig 1987) = Vorlesungen in Hamburg 1920.

Die von Hecke angeregten Dissertationen waren anspruchsvoll und aktuell. Eine Reihe bekannter Namen findet sich unter den Autoren. Vgl. die Zusammenstellung in Heckes Werken!

Verzeichnis der von Hecke gehaltenen Vorlesungen

Zahlentheorie, Algebraische Zahlen, Ausgewählte Kapitel neuerer Arithmetik, Einführung in die höhere Arithmetik, Anwendung der Analysis auf Zahlentheorie, Anwendung der Funktionentheorie auf Algebra (Ikosaeder), Analytische Zahlentheorie, Additive analytische Zahlentheorie.

Mengenlehre, Algebra, Gruppentheorie.

Infinitesimalrechnung, Bestimmte Integrale mit Anwendungen, Funktionen reeller Variabler, Lebesguesches Integral, Lineare Integralgleichungen, Reihenentwicklungen, Reihenentwicklungen und Integralgleichungen.

Funktionentheorie, Ausgewählte Kapitel der Funktionentheorie, Elliptische Funktionen, Algebraische Funktionen, Mehrfach periodische Funktionen, Elliptische Modulfunktionen, Konforme Abbildungen, Lineare Differentialgleichungen zweiter Ordnung.

Funktionen und Gruppen, Darstellungstheorie von Gruppen und fastperiodische Funktionen.

Nichteuklidische Geometrie, Einführung in die höhere Geometrie, Kurven und Flächen.

Grundlagenfragen der Mathematik, Das Unendliche in der Mathematik, Die historische Entwicklung der mathematischen Grundbegriffe.

Kinetische Gastheorie, Statistische Mechanik insb. kinetische Gastheorie, Relativitätstheorie, Allgemeine Relativitätstheorie.

Die Vorlesungen fanden meistens vierstündig je Woche statt und jeweils zwei nebeneinander. Neben den Vorlesungen führte Hecke regelmäßig ein Seminar für höhere Semester durch.

Für wertvolle Informationen und Anregungen bin ich den Herren R. Berndt (Hamburg), H. C. Im Hof (Basel) und M. Kneser (Göttingen) zu Dank verpflichtet.

Literaturhinweise

[Bl] Blumenthal, O.: Über Modulfunktionen von mehreren Veränderlichen. Math. Ann. **56** (1902) 509–548 und Math. Ann. **58** (1904) 497–527

[CW] Chevalley, C.; Weil, A.: Über das Verhalten der Integrale 1. Gattung bei Automorphismen des Funktionenkörpers. Abh. Math. Sem. Univ. Hamburg **10** (1934) 358–361

[D1] Deuring, M.: Imaginäre quadratische Zahlkörper und die Nullstellen der Riemannschen Zetafunktion. Verh. Int. Math. Kongreß Zürich 1932, Bd. II, 4–5

[D2] Deuring, M.: Die Zetafunktionen einer algebraischen Kurve vom Geschlecht Eins, I–IV. Nachr. Akad. Wiss. Göttingen (1953, 1955, 1956, 1957)

[F] F r o b e n i u s , G.: Über Gruppencharaktere. Sitzb. Preuß. Akad. Wiss. 1896, 985–1021
[Ga] G a u ß , C. F.: Disquisitiones arithemticae (1801), Art. 303. Deutsche Übersetzung von H. Maser: Untersuchungen über höhere Arithmetik 1889
[GZ] G r o ß , B.; Z a g i e r , D.: On singular moduli. J. reine und angew. Math. **355** (1985) 191–220
[Ham] H a m b u r g e r , H.: Über die Riemannsche Funktionalgleichung der ζ-Funktion I Math. Z. **10** (1921) 240–254
[Har] H a r d y , G. H.: Sur les Zéros de la fonction $\zeta(s)$ de Riemann. C.R. **158** (1914) 1012–1014
[Hee] H e e g n e r , K.: Diophantische Analysis und Modulfunktionen. Math. Z. **56** (1952) 227–253
[Hei] H e i l b r o n n , R.: On the class-number in imaginary quadratic fields. Quart. J. Math. (2) **5** (1934) 150–160
[Hey] H e y , K.: Analytische Zahlentheorie in Systemen hyperkomplexer Zahlen. Dissertation Hamburg 1929
[Hi] H i l b e r t , D.: Mathematische Probleme. Nachr. Ges. Wiss. Göttingen 1900, 253–297 (= Ges. Abhandlungen Bd. 3, Abh. 19)
[Hu] H u r w i t z , A.: Über die algebraischen Gebilde mit eindeutigen Transformationen in sich, Math. Ann. **41** (1893) 403–442 (= Math. Werke Bd. 1, Abh. 23)
[Kl] K l i n g e n , H.: Über die Werte der Dedekindschen Zetafunktionen. Math. Ann. **145** (1962) 265–272
[Kr] K r o n e c k e r , L.: Werke Bd. 4. Teubner Leipzig und Berlin 1929
[Mel] M e l l i n , H.: Abriß einer einheitlichen Theorie der Gamma- und hypergeometrischen Funktionen. Math. Ann. **68** (1910) 305–337
[Mey1] M e y e r , C.: Die Berechnung der Klassenzahl Abelscher Körper über quadratischen Zahlkörpern. Berlin 1957
[Mey2] M e y e r , C.: Über die Bildung von elementar-arithmetischen Klasseninvarianten in reell-quadratischen Zahlkörpern. Ber. Math. Forsch. Inst. Oberwolfach 2, Mannheim 1966, 165–215
[Mo] M o r d e l l , L. J.: On Mr Ramanujan's empirical expensions of modular functions. Proc. Cambridge Phil. Soc. **19** (1917) 117–124
[N] N o e t h e r , M.: Über die invariante Darstellung algebraischer Funktionen Math. Ann. **17** (1880) 263–284
[P] P e t e r s s o n , H.: Konstruktion der sämtlichen Lösungen einer Riemannschen Funktionalgleichung durch Dirichletreihen mit Eulerscher Produktenentwicklung I, II, III. Math. Ann. **116** (1939) 401–412 und Math. Ann. **117** (1940) 39–64, 277–300
[Ra] R a m a n u j a n , S.: On certain arithmetical functions. Trans. Cambridge Phil. Soc. **22** (1916) 159–184 (= Collected Papers, 136–162)
[Ri] R i e m a n n , B.: Über die Anzahl der Primzahlen unter einer gegebenen Größe. Monatsberichte Preuß. Akad. Wiss. 1859, 671–680
[Sch1] S c h o e n e b e r g , B.: Zur Theorie der automorphen Formen. Math. Ann. **104** (1930) 150–154
[Sch2] S c h o e n e b e r g , B.: Indefinite Quaternionen und Modulfunktionen. Math. Ann. **113** (1936) 380–391
[Siel] S i e g e l , C. L.: Neuer Beweis für die Funktionalgleichung der Dedekindschen Zeta-

[Wei] W e i l , A.: Über die Bestimmung Dirichletscher Reihen durch Funktionalgleichungen Math. Ann. **168** (1967) 149–156

[Wey] W e y l , H.: Über die Gleichverteilung von Zahlen mod Eins. Math. Ann. **77** (1916) 313–352

Prof. Dr. B. Schoeneberg
Mathematisches Seminar
Bundesstraße 55
2000 Hamburg 13

(*Eingegangen: 9. 11. 1987; revidiert: 2. 8. 1988*)

Buchbesprechungen

Blaschke, W., Gesammelte Werke (Bände I–VI), Herausgeber: W. Burau, S. S. Chern, K. Leichtweiß, H. R. Müller, L. A. Santalo, U. Simon, K. Strubecker, Essen: Thales-Verlag 1982–1986, 365 pp., 368 pp., 416 pp., 400 pp., 351 pp., 383 pp., hardcover, Band I 164,– DM, Bände II–VI 178,– DM pro Band

Die Herausgabe von gesammelten Werken ist ein schwieriges Unternehmen. Ein bloßes Nachdrucken der Arbeiten läßt sich im Zeitalter des Photokopierens nur dann rechtfertigen, wenn man nur schwer zugängliche Quellen sammelt, was meistens (auch im Fall Blaschke) nur einen Teil der wissenschaftlichen Produktion betrifft, oder wenn man aus den einzelnen Facetten des Werkes die einheitlichen Wurzeln der Ideen bloßlegen und die wissenschaftliche Persönlichkeit in ihrer Integrität präsentieren kann (was im Falle Blaschke dem Verleger gelungen ist). Der Erfolg der Herausgabe von gesammelten Werken hängt aber am wesentlichsten davon ab, wie kompetent aus dem aktuellen Stand der Forschung heraus die Arbeiten kommentiert und wie nachvollziehbar sie in den Strom der mathematischen Entwicklung eingebettet werden. Ich möchte dem Verleger und den Herausgebern bescheinigen, dieses Ziel bei den Gesammelten Werken von W. Blaschke vollauf erreicht zu haben.

Band I, welcher von K. Strubecker kommentiert wird, enthält Arbeiten zur Differentialgeometrie spezieller Flächen, zur Kinematik und zur Geometrie der Speere. Er zeigt deutlich die Herkunft Blaschkes aus demjenigen mathematischen Universum, in welchem noch heute die österreichisch geprägte Geometrie lebt. Die Arbeiten zur Geometrie der Speere inspirierten wohl später W. Benz zur axiomatischen Definition und grundlagentheoretischen Behandlung von Laguerreebenen und Liegeometrien. Die von Blaschke studierten Hermiteschen Geometrien und ihre Metriken führten zu Kählermannigfaltigkeiten und zur einfacheren Darstellung der Heckeschen Theorie der automorphen Funktionen.

Im ersten Teil des zweiten Bandes sind Arbeiten zur Kinematik enthalten, die bis heute die Entwicklung dieses Gebietes maßgeblich beeinflussen. Sie werden detailliert von H. R. Müller kommentiert, der eng mit Blaschke zusammengearbeitet hat. Dabei wird einem die herausragende Rolle der von Blaschke und Grünwald entdeckten kinematischen Abbildung vor Augen geführt und der Vorteil demonstriert, den die Darstellung von Geometrien mittels Algebren, die die komplexen Zahlen und Quaternionen verallgemeinern, bietet, eine Sicht, die von L. B. Rosenfeld und seiner Schule in der Sowjetunion weiterentwickelt wurde und auch heute noch gepflegt wird. Der zweite Teil des zweiten Bandes zeigt Blaschke als Begründer der Integralgeometrie. Der Kommentar von seinem Schüler L. A. Santaló (The Work of Wilhelm Blaschke on Integral Geometry) ist zugleich ein kurzer Abriß der Geschichte der Integralgeometrie bis etwa 1980. In ihm wird die Entstehungsgeschichte der Integralgeometrie aus der Theorie der geometrischen Wahrscheinlichkeiten geschildert und auf die Tatsache hingewiesen, daß bei der Geburt der stochastischen Geometrie vor etwa 20 Jahren und der kombinatorischen Integralgeometrie vor etwa 15 Jahren Ideen von Blaschke Pate gestanden haben; auch die vielfältigen Anwendungen der Integralgeometrie, die sich von der Theorie der konvexen Körper bis hin zu Singularitäten komplexer Mannigfaltigkeiten erstrecken, werden registriert.

Der dritte Band enthält Arbeiten über konvexe Körper, isoperimetrische Probleme, die Differentialgeometrie konvexer Kurven und Flächen, über Kurven und Flächen konstanter Breite sowie über Variationsprobleme. Der Bericht von K. Leichtweiß

(Blaschkes Arbeiten zur Geometrie der konvexen Körper) vermittelt einem eindrucksvoll die Akzente, die Blaschke in der Theorie der konvexen Körper gesetzt hat und deren Wirkungen bis in die achtziger Jahre reichen; so die Erkenntnis, daß den Ungleichungen für geometrische Größen eine zentrale Rolle zukommt, sowie Blaschkes Vorliebe für Charakterisierungen des Kreises und der Sphäre in der euklidischen bzw. der Ellipse und des Ellipsoids in der äquiaffinen Geometrie.

Der vierte Band enthält die Arbeiten zur affinen Differentialgeometrie und zur Differentialgeometrie der Kreise und Kugeln. Die Kommentierung der Schriften zur affinen Differentialgeometrie ist vorbildlich; W. Burau und U. Simon (Blaschkes Beiträge zur affinen Differentialgeometrie) gehen darauf ein, wie Blaschke die affine Differentialgeometrie, angeregt durch seine Prager Zeit, von den vorhandenen Rudimenten (die im wesentlichen nur die affine Kurventheorie betrafen) zu einem kraftvollen ergebnisreichen Gebiet ausgebaut hat. Geleitet durch die von Blaschke aufgeworfenen Probleme gibt U. Simon in seinem umfangreichen Aufsatz „Zur Entwicklung der affinen Differentialgeometrie nach Blaschke“ eine systematische Darstellung der neueren Entwicklungen dieses Gebietes; da die Monographie von P. A. und A. P. Schirokov (Leipzig, Teubner 1962) den Stand der Theorie bis etwa 1957 erfaßt, konzentriert er sich dabei insbesondere auf die letzten 30 Jahre. Die von ihm angegebene Liste von 220 Arbeiten ist gemeinsam mit der Bibliographie des Buches von Schirokov *das* Literaturverzeichnis zur affinen Differentialgeometrie bis 1985. Die wichtigsten von U. Simon behandelten Themen sind: Systematik der Kurven- und Flächentheorie, Eilinien, Streifentheorie, Normalenbild, Geodätische, Schattengrenzen und ebene Schnitte, Verbiegungen, Affinsphären, Minimalflächen, Vollständigkeitsbegriffe, globale Beweismethoden. Der Beitrag von W. Burau „Über die Arbeiten von W. Blaschke und seinen Schülern zur Differentialgeometrie der Kreise und Kugeln“ befaßt sich mit Sätzen der Möbius-, Laguerre- und Liegeometrie und würdigt die Auswirkungen dieser Facette Blaschkescher Mathematik auf die Geometrie in Japan und die grundlagentheoretische Schule von W. Benz.

Der fünfte Band enthält die Beiträge zur Theorie der Gewebe. Den Kommentar zu diesen Arbeiten und zur Weiterentwicklung der von Blaschke geschaffenen Gewebegeometrie wurde durch S. S. Chern geliefert (Wilhelm Blaschke und Web Geometry). Chern betont drei Themen, die die Schriften von Blaschke über Gewebe durchziehen: lokale Differentialinvarianten und ihre geometrische Interpretation, Abelsche Gleichungen und der Rang eines Gewebes, Konfigurationen und Grundlagen der Geometrie. Unter den neueren Entwicklungen, die Chern besonders am Herzen liegen, sind die beiden folgenden zu nennen: Einmal die Zusammenhänge zwischen Geweben und der Struktur des Bahnenraumes einer Mannigfaltigkeit unter einer intransitiven Liegruppe, zum andern die Bedingungen, die ein Gewebe U algebraisierbar machen, d. h. lokal äquivalent zu einer Graßmann-Mannigfaltigkeit, so daß die Blätter von U Schubert-Varietäten sind. Nach meiner Meinung wird die Theorie der Gewebe heutzutage am systematischsten in der Sowjetunion betrieben; als Protagonisten seien hier etwa M. A. Akivis, V. Goldberg, P. O. Micheev, L. V. Sabinin und A. M. Schelechov genannt. Die russischen Ergebnisse, die häufig durch kunstvolle, auf Blaschke aufbauende Rechentechniken gewonnen wurden, haben in der Theorie der analytischen Loops die Definition eines Tangentialobjekts – der Akivisalgebra einer analytischen Loop – angeregt, die sich für eine Liegruppe auf deren Liealgebra reduziert und auch im allgemeinen Fall weitgehend eine zur Liealgebra analoge Rolle spielen kann.

Der sechste Band enthält die Arbeiten, die unter keines der Generalthemen der ersten fünf Bände aufgenommen worden sind; trotz seiner Vielfalt umfaßt er wichtige Aspekte Blaschkescher Mathematik. So sind darin etwa die Beiträge zur Funktionentheorie und Potentialtheorie abgedruckt und von H. Grunsky präzise kommentiert; die kurze Note, in der das Blaschke-Produkt kreiert wird, zeigt, daß auch Seitenpfade der Forschung eines mit Spürsinn begabten Mathematikers nachhaltige Wirkungen zeitigen können. Die Arbeiten von Blaschke zur Differentialgeometrie im Großen und zur Riemannschen Geometrie werden von K. Leichtweiß analysiert, während K. Strubecker den Beiträgen zur differentiellen Liniengeometrie des elliptischen Raumes und zur euklidischen Differentialgeometrie nachgeht. W. Burau wendet sich einigen Arbeiten über die Differentialgeometrie spezieller Flächen zu, während W. Benz die Arbeiten über Systeme von Kurven auf Flächen, insbesondere von Kreisen auf der Kugel auswertet. D. Kölzow verfolgt Spuren, die Blaschkesche Ideen zur Distanzschätzung und Integraldarstellung konkaver Funktionen in neueren Arbeiten hinterlassen haben. Der abgedruckte Aufsatz „Mathematik und Leben“ sowie die Nachrufe auf Hermann Brunn, Enea Bortolotti, E. A. Weiß und L. Bianchi zeigen, daß Blaschke über sein Fach hinaus ein Träger europäischer Kultur war, der in deutsch und italienisch die Feder feinsinnig zu führen verstand. Der sechste Band wird durch den Artikel W. Benz: „Das Mathematische Seminar der Universität Hamburg in seinen ersten Jahrzehnten“ abgeschlossen; in diesem wird außer auf Blaschke, insbesonders auf E. Hecke, J. Radon und E. Artin näher eingegangen.

Das mathematische Gesamtwerk von W. Blaschke und sein Einfluß auf die heutige Mathematik wird in zwei Aufsätzen von S. S. Chern („The Mathematical Work of Wilhelm Blaschke“ und „The Mathematical Work of Wilhelm Blaschke – an Update“) gewürdigt. In ihnen konzentriert sich Chern darauf, zu demonstrieren, welchen Einfluß Ideen von Blaschke auf die Entwicklung der globalen Differentialgeometrie genommen haben und noch nehmen. Zum einen erläutert er dies am Beispiel der Wiedersehensmannigfaltigkeiten, die man auch Blaschke-Mannigfaltigkeiten nennt; erst 1978 wurden sie durch Kombination der Ergebnisse von M. Berger, J. Kazdan, A. Weinstein und C. T. Yang als Standardsphären erkannt. Zum andern markiert er Spuren, die von Blaschke zu Sätzen von Calabi und dem Beweis der Calabi-Vermutung durch S. Y. Cheng und S. T. Yau führen.

Es gibt einen russisch verfaßten Nachruf von I. M. Jaglom und einen italienisch abgefaßten, persönlich gehaltenen, von E. Bompiani. Die restlichen deutsch geschriebenen Nachrufe stammen von E. Sperner (Zum Gedenken an Wilhelm Blaschke), E. Kruppa, O. Haupt, W. Burau (Blaschkes Leben und Werk) und zwei von H. Reichardt.

Das Personenregister der Gesammelten Werke umfaßt 698, das Sachregister 2573 Stichwörter.

Erlangen K. Strambach

Baker, R. C., Diophantine Inequalities (London Math. Soc. Monographs, New Series, vol. 1), Oxford: Clarendon Press 1986, Xii + 275 S., Hard Cover, £ 40,–

In der vorliegenden Monographie werden Anwendungen der Hardy-Littlewood-Methode auf Fragen der nichtlinearen diophantischen Approximationen besprochen. Um dieses Gebiet war es nach grundlegenden Arbeiten von Heilbronn und Davenport in den vierziger und fünfziger Jahren ruhiger geworden. Erst die bahnbrechenden Ergebnisse von W. M. Schmidt zwischen 1977 und 1985 weckten neuerliches Interesse. Wesentliche Teile des Buches beschäftigen sich mit diesen neuen Entwicklungen.

Im ersten Teil (Kapitel 2–10) werden Approximationen auf dem Torus $\mathbb{R}/\mathbb{Z}$ untersucht. Bezeichnen wir mit $\|x\|$ den Abstand der reellen Zahl x von der nächtsten ganzen Zahl, so besagt der klassische Satz von Dirichlet: zu jedem $\alpha \in \mathbb{R}$ und zu jedem $N > 1$ besitzt die Ungleichung $\|n\alpha\| < N^{-1}$ eine ganzzahlige Lösung n mit $1 \leqslant n \leqslant N$.

Heilbronn [3] behandelte das einfachste nichtlineare Analogon: zu jedem $\varepsilon > 0$ gibt es eine Konstante c_1, so daß für jedes $N > c_1$ die Ungleichung

$$\|n^2\alpha\| < N^{-(1/2)+\varepsilon} \tag{1}$$

eine ganze Lösung n mit $1 \leqslant n \leqslant N$ besitzt. Der Beweis gelingt hier nicht mehr auf so elementare Weise wie beim Dirichletschen Satz. Wesentliches Hilfsmittel ist Fourieranalysis.

Sei $0 < \delta < 1/2$. Sei $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ eine stetige periodische Funktion mit Periode 1 und mit $f(x) = 0$ für $\|x\| \geqslant \delta$, $f(x) = 1$ für $\|x\| < \delta/2$ und mit absolut konvergenter Fourierentwicklung $f(x) = \sum_{\nu \in \mathbb{Z}} b_\nu e(\nu x)$ (wie üblich setzen wir $e(x) = e^{2\pi i x}$). Besitzt dann die Ungleichung $\|n^2\alpha\| < \delta$ keine Lösung n mit $1 \leqslant n \leqslant N$, so gilt $\sum_{n=1}^{N} f(\alpha n^2) = 0$. Mittels der Fourierentwicklung erhalten wir $\sum_{\nu \neq 0} |b_\nu| \left| \sum_{n=1}^{N} e(\nu\alpha n^2) \right| \geqslant |b_0| N$. Im Zentrum des Beweises stehen sodann Abschätzungen für Weylsche Summen $\sum_{n=1}^{N} e(\nu\alpha n^2)$.

Mit derselben Methode können auch Monome αn^k und allgemeiner Polynome $\alpha_k n^k + \ldots + \alpha_1 n$ behandelt werden. Für Monome erhält man in (1) den Exponenten $-(1/K) + \varepsilon$ mit $K = 2^{1-k}$. Die klassischen Ergebnisse für allgemeine Polynome sind deutlich schlechter. Mit einer höchst aufwendigen Verfeinerung der Weylschen Abschätzungen gelang es dem Autor [1], auch hier den Exponenten $-(1/K) + \varepsilon$ herzuleiten. Vermutlich liefert aber in allen Fällen erst der Exponent $-1 + \varepsilon$ eine scharfe Schranke.

Die bisher genannten Resultate basieren auf der Weylschen Abschätzung für Exponentialsummen. Für großes k liefert die Vinogradovsche Methode bessere Exponenten vom Typ $-1/(c_2 k \log k)$. Eine Verbesserung für kleine k erscheint als extrem schwierig. Immerhin könnte die kürzlich erschienene Arbeit von Heath-Brown [2] Ansatzpunkte bieten.

In den Kapiteln 7 und 8 werden simultane Approximationen studiert. 1977 führte W. M. Schmidt eine raffinierte Variante zur Abschätzung der entsprechenden Weylschen Summen ein, mit deren Hilfe er zeigen konnte: zu $\varepsilon > 0$ und zu h existiert eine Konstante c_3, so daß für reelle Zahlen $\alpha_1, \ldots, \alpha_h$ und für $N > c_3$ die simultanen Ungleichungen $\|\alpha_i n^2\| > N^{-1/(h^2+h)+\varepsilon}$ $(1 \leqslant i \leqslant h)$ eine ganze Lösung n mit $1 \leqslant n \leqslant N$ besitzen. In früheren Arbeiten hing hier der Exponent exponentiell von h ab.

In den Kapiteln 9 und 10 werden Ungleichungen auf dem Torus für Formen $F(n_1, \ldots, n_s)$ in vielen Variablen untersucht. Für Formen F mit geradem Grad k konnten allerdings bisher nur quadratische Formen und für $k \geqslant 4$ Diagonalformen behandelt werden. Das Prinzip der dargestellten Beweisen beruht darauf, daß die Hardy-Littlewood-Methode eine sehr gute Approximation der Form F mit reellen Koeffizienten durch eine Form G mit ganzen Koeffizienten liefert. Es stellt sich dann die Aufgabe, kleine ganzzahlige Lösungen von Kongruenzen $G(n_1, \ldots, n_s) \equiv 0 \pmod m$ zu finden. Unter anderem wird mit dieser Methode gezeigt: ist $s > c_4(\varepsilon)$ und $N > c_5(\varepsilon)$, dann besitzt für jede quadratische Form $Q(n_1, \ldots, n_s)$ die Ungleichung $\|Q(n_1, \ldots, n_s)\| < N^{-2+\varepsilon}$ eine Lösung in ganzen Zahlen $n_1, \ldots, n_s$ mit $1 \leqslant \max |n_i| \leqslant N$. Für allgemeine Formen F geraden Grades $k \geqslant 4$ sind bisher keine entsprechenden Resultate bekannt.

Zweifellos hat jedoch W. M. Schmidt mit seinen Ergebnissen über die Abschätzung unvollständiger Exponentialsummen über endlichen Körpern und den Anwendungen auf kleine Lösungen von Kongruenzen einen Meilenstein in die Richtung solcher Ergebnisse gesetzt. Anders als bei Deligne können bei Schmidt auch singuläre Formen behandelt werden. Die tiefliegenden Beweise werden in den Kapiteln 15–18 gegeben. Für

Anwendungen auf Approximationsfragen erscheint folgender Satz als besonders wichtig (W. M. Schmidt [6]): sei $s > c_6(k, \varepsilon)$ und $m > c_7(k, \varepsilon)$. Dann besitzt für jede Form $G(n_1, \ldots, n_s)$ vom Grad k mit ganzen Koeffizienten die Kongruenz $G(n_1, \ldots, n_s) \equiv 0 \pmod m$ eine Lösung in ganzen Zahlen $n_1, \ldots, n_s$ mit $1 \leqslant \max |n_i| \leqslant m^{(1/2)+\varepsilon}$. Die Exponenten in den hier zitierten Ergebnissen für Formen in vielen Variablen sind jeweils (bis auf möglicherweise das ε) bestmöglich. Für Formen mit kleiner Variablenzahl sind zur Zeit noch die meisten entsprechenden Fragen offen.

In den Kapiteln 11–14 werden Approximationen auf $\mathbb{R}$ untersucht. Hier handelt es sich darum, Lösungen von Ungleichungen des Typs $|F(n_1, \ldots, n_s)| < N^{-c}$ für Polynome F in ganzen Zahlen $n_1, \ldots, n_s$ mit $0 \leqslant \max |n_i| \leqslant N$ zu finden. Auch dieses Problem wird mit Fourieranalysis angegangen. Eine alte Vermutung besagte: sei $\varepsilon > 0$, sei k ungerade und h eine natürliche Zahl. Dann gibt es eine Konstante $c_8(k, h, \varepsilon)$ mit folgender Eigenschaft. Ist $s > c_8$ und sind $F_1(n_1, \ldots, n_s), \ldots, F_h(n_1, \ldots, n_s)$ Formen vom Grad k so besitzen die simultanen Ungleichungen $|F_i(n_1, \ldots, n_s)| < \varepsilon (1 \leqslant i \leqslant h)$ eine nichttriviale ganzzahlige Lösung. Diese Vermutung wurde 1980 von W. M. Schmidt [5] bewiesen. Wesentlicher Inhalt der Kapitel 11–14 ist der Schmidtsche Beweis, vorbereitet durch Sätze über kleine Lösungen von entsprechenden Gleichungen. Ähnlich wie bei der Approximation von Formen auf dem Torus Kongruenzen eine wichtige Rolle spielen, sind bei der Approximation in $\mathbb{R}$ Ergebnisse über kleine ganzzahlige Nullstellen von Formen mit ganzen Koeffizienten von zentraler Bedeutung.

Anmerkung des Referenten: In den zuletzt genannten Fragenkreis gehört auch die Oppenheimsche Vermutung: ist $Q(x_1, \ldots, x_s)$ eine indefinite reelle quadratische Form, welche nicht zu einer Form mit rationalen Koeffizienten proportional ist, so besitzt die Ungleichung $|Q(x_1, \ldots, x_s)| < \varepsilon$ eine nichttriviale ganze Lösung, falls die Variablenzahl s mindestens 3 ist. Bekanntlich wurde diese Vermutung kürzlich von G. A. Margulis [4] gelöst, jedoch mit ganz anderen als den hier besprochenen Methoden (Ergodentheorie, arithmetische Gruppen). Mittels der Hardy-Littlewood-Methode hatten Birch, Davenport und Ridout die Richtigkeit der Vermutung für $s \geqslant 21$ bewiesen, und ebenfalls mit der Hardy-Littlewood-Methode wurde dies später mit gewissen Einschränkungen bezüglich des Typs der Form auf $s \geqslant 18$ ausgedehnt.

Der Autor behandelt jedoch die Oppenheimsche Vermutung nicht. Tatsächlich hätte ein Beweis des bei Drucklegung des Buches nur bekannten Resultats mit 21 Variablen den Umfang gesprengt. Ansonsten werden die neuesten Ergebnisse in der nichtlinearen diophantischen Approximation mit allen Einzelheiten bewiesen. Sicherlich ist das Buch nicht ganz leicht zu lesen, zumal die technischen Details der Methode oft etwas unangenehm sind und manche Beweise – wegen der nicht unbeträchtlichen Schwierigkeiten – sich über mehrere Kapitel erstrecken. Diese Bemerkung sollte den Leser jedoch eher zur nötigen Geduld ermuntern. Er wird mit einem exzellenten Überblick über Anwen-

dungen der Hardy-Littlewood-Methode auf nichtlineare diophantische Approximationen belohnt.

Stanley, R. P., Enumerative Combinatorics, vol. I, Monterey: Wadsworth and Brooks/Cole 1986, xi + 306 pp., $ 42.95

Das Angebot an anspruchsvollen und einigermaßen umfassenden Darstellungen der enumerativen Kombinatorik ist nicht gerade reichhaltig und spiegelt die Entwicklung auf diesem Gebiet in den letzten Jahren und Jahrzehnten keineswegs adäquat wider. Als Nachfolger der „Klassiker" von J. Riordan (*An Introduction to Combinatorial Analysis,* Wiley, 1958, bzw. *Combinatorial Identities,* Wiley, 1968) und des Buches von L. Comtet (*Advanced Combinatorics,* Reidel, 1974) war bislang eigentlich nur die umfangreiche und wichtige Monografie *Combinatorial Enumeration* von I. P. Goulden und D. M. Jackson (Wiley, 1983) in Erscheinung getreten, eine enzyklopädische Darlegung aller mit gewöhnlichen und exponentiellen erzeugenden Funktionen zu behandelnden Enumerationsprobleme für lineare bzw. numerierte Strukturen. Vergleicht man damit das vorliegende Buch von R. P. Stanley, so fällt – abgesehen von der Tatsache, daß sich beide Werke trotz fast gleichlautender Titel inhaltlich eher ergänzen als überschneiden – ein deutlicher Unterschied in Stil und Anlage auf: Stanley dringt immer sehr schnell zum mathematischen Kern der Probleme vor, beschränkt Notation und begrifflichen Apparat auf ein überschaubares Maß und macht nicht den Versuch, möglichst viel in einen umfassenden, einheitlichen Apparat zu zwängen. Die einzelnen Kapitel bieten jeweils ein Gerüst an Theorie, dazu exemplarische, vertiefende Beispiele und Anwendungen. Trotz (oder gerade wegen) der konzisen Darstellung ist die Lektüre ein Vergnügen. Die Breite wird vor allem durch die jedem Kapitel beigegebenen umfangreichen, nach Schwierigkeit graduierten Übungen erreicht, die reichhaltig und sorgfältig mit Lösungs- und Literaturhinweisen ausgestattet sind, und die insgesamt mehr als 1/3 des Umfanges ausmachen. (Um nicht einen falschen Eindruck zu erwecken: auch Goulden und Jackson sparen nicht an Übungsmaterial, auch wenn deren 200 (!) Seiten Lösungen mehr den Charakter einer – kaum kommentierten – Musterlösungssammlung haben).

Einige Worte zum Inhalt: Das erste Kapitel (*What is Combinatorial Enumeration?*) ist eine vorzügliche, knappe Einführung in Fragestellung, Methodik und Systematik der zählenden Kombinatorik. Das recht kurze zweite Kapitel *Sieve Methods* behandelt das Prinzip von Inklusion-Exklusion von Altbekanntem bis hin zum Involutionsprinzip. Gewichtiger sind das dritte (*Partially Ordered Sets*) und vierte (*Rational Generating Functions*) Kapitel. Im Kapitel über partielle Ordnungen steht die Möbius-Funktion im Mittelpunkt, sowie kombinatorisch interessante Klassen von Ordnungen, wie „binomial posets" und „Eulerian posets" – die vielseitigen Bezüge zur kommutativen Algebra und algebraischen Topologie, die ja Gegenstand vieler gewichtiger Arbeiten des Verfassers sind, werden allerdings nur gestreift. Im Kapitel über rationale erzeugende Funktionen wird mit dem Studium der erzeugenden Funktionen für P-Partitionen die Thematik des dritten Kapitels vertieft; daneben werden die schöne geometrische Theorie der erzeugenden Funktion für die positiven Lösungen linearer diophantischer Gleichungssysteme und die in der statistischen Mechanik beliebte Transfer-Matrix-Methode ausführlich dargestellt.

Man sieht: weite Bereiche der enumerativen Kombinatorik werden kaum oder überhaupt nicht angesprochen, neben der von Goulden und Jackson ausführlich behandelten Thematik wären beispielsweise zu nennen: Enumeration unter Gruppenaktionen, Enumeration von Partitionen, Tableaux etc., Algebraische und D-finit erzeugende Funktionen, Asymptotische Methoden. Leider verrät der vorliegende Band nichts über den Inhalt der geplanten Fortsetzung(en), aber seine Qualitäten, sowohl als Einführung auf anspruchsvollem Niveau, als auch als Referenz, geben Anlaß zu hohen Erwartungen.

Erlangen V. Strehl

Stanton, D., White, D., Constructive Combinatorics (Undergraduate Texts in Mathematics), Berlin u. a.: Springer-Verlag 1986, 73 figs., x, 183 pp., Hardcover, DM 48,–

Dieser in Stoffauswahl und Präsentation durchaus unkonventionelle Text stellt eine erfreuliche Bereicherung der Literatur über kombinatorische Methoden dar. Dabei ist es erklärte Absicht der Autoren, kombinatorische Sachverhalte – wo immer möglich – *algorithmisch* zu beweisen, also z. B. unter Verwendung von Computer-Programmen, die Abbildungen zwischen Objektmengen realisieren.

Derartige Realisierungen können dann wieder *experimentell* genutzt werden, um Datenmaterial zu gewinnen, aus dem man weitergehende Einsichten oder Vermutungen über mathematische Eigenschaften der beteiligten Strukturen ziehen kann. So wird der Leser auf elementarem Niveau anhand geschickt ausgewählter Beispiele, ohne allzu großen begrifflichen und notationel-

Siu Y.-T., Lectures on Hermitian-Einstein Metrics for Stable Bundles and Kähler-Einstein Metrics (DMV Seminar Band 8); Basel: Birkhäuser-Verlag 1987, 172 S., softcover, DM 48,–

Es handelt sich um die Ausarbeitung einer Vorlesung, gehalten bei einem Seminar, veranstaltet von der DMV im Juni 1986 in Schloß Mickeln in Düsseldorf. Ziel ist die Konstruktion von Hermite-Einstein-Metriken auf stabilen Vektorbündeln auf kompakten Kähler-Mannigfaltigkeiten sowie die Konstruktion einer Kähler-Einstein-Metrik auf kompakten Kähler-Mannigfaltigkeiten mit negativer oder trivialer antikanonischer Klasse.

Eine Hermitesche Metrik auf einem holomorphen Vektorbündel auf einer Kähler-Mannigfaltigkeit heißt Hermite-Einsteinsch, wenn eine gewisse Verträglichkeitsbedingung mit der gegebenen Kählermetrik erfüllt ist. Lübke zeigte 1982, daß ein Bündel mit einer solchen Metrik auf einem kompakten M notwendig orthogonale direkte Summe von stabilen Bündeln ist.

Die Umkehrung, d. h. die Konstruktion einer Hermite-Einstein-Metrik auf einem stabilen Bündel gelang Donaldson 1985 zunächst für kompakte algebraische Flächen und dann 1986, etwa zur Zeit des Seminars, für projektive Mannigfaltigkeiten beliebiger Dimension. Für den Fall einer kompakten Riemannschen Fläche war das Ergebnis in einer etwas anderen Terminologie bereits von Narasimhan und Seshadri bewiesen worden. Kapitel 1 bringt nach einer kurzen Einführung Donaldsons Beweis. Für die a priori Abschätzungen wurde die Wärmegleichungsmethode benutzt, sowie ein Satz von Mehta und Ramanathan, der besagt, daß die Restriktion eines stabilen Bündels auf eine Hyperfläche hinreichend großen Grades ebenfalls stabil ist. In einem Appendix wird auch dieser Satz bewiesen.

Eine Kähler-Einstein-Metrik ist eine Kähler Metrik ω, deren Ricci-Krümmung ein konstantes Vielfaches von ω ist. In Kapitel 2 wird der Beweis des folgenden Satzes erbracht: Gegeben sei eine kompakte Kähler-Mannigfaltigkeit mit negativer oder trivialer antikanonischer Klasse. Angenommen die gegebene Kählerklasse ist in der kanonischen Klasse im ersten Fall. Dann existiert eine eindeutig bestimmte Kähler-Einstein-Metrik in der gegebenen Kähler-Klasse. Beitragende zum ursprünglichen Beweis dieses Satzes waren Calabi, Aubin und Yau. Der hier gegebene Beweis geht auf Bourguignon zurück. Für die Konstruktion von Hermite-Einstein-und Kähler-Einstein-Metriken kann man gleichermaßen die Stetigkeits- und die Wärmegleichungsmethode benutzen. Während im ersten Kapitel die letztere Methode verwendet wird, kommt hier der Abwechslung halber die Stetigkeitsmethode zur Anwendung.

Die letzten drei Kapitel beschäftigen sich mit Kähler-Einstein-Metriken im Fall einer positiven antikanonischen Klasse. Die Eindeutigkeit einer solchen Metrik bis auf Biholomorphie wurde 1985 von Bando und Mabuchi bewiesen. Kapitel 3 liefert den Beweis dieses Satzes. Für die Existenz von Kähler-Einstein-Metriken in diesem Fall gibt es Obstruktionen: Die erste ist die Nichtreduktivität der Automorphismengruppe, gefunden von Matsushima und Lichnerowitz und die zweite die Existenz nicht verschwindender invarianter holomorpher Vektorfelder, entdeckt von Kazhdan, Warner und Futaki. Beide werden im vierten Kapitel behandelt. Eine Vermutung besagt, daß jede kompakte Kähler-Mannigfaltigkeit mit positiver antikanonischer Klasse ohne nichtverschwindende holomorphe Vektorfelder eine Kähler-Einstein-Metrik besitzt. Es gibt aber nur wenige Beispiele für solche Metriken in diesem Fall. Das letzte Kapitel diskutiert kurz eine Methode des Autors, die Existenz unter der zusätzlichen Annahme einer geeigneten endlichen oder kompakten Gruppe von Symmetrien nachzuweisen. Diese Methode ist beispielsweise anwendbar auf Fermathyperflächen.

Die DMV-Seminare und ihre Ausarbeitungen sollen helfen, jüngeren Mathematikern sowie Nichtspezialisten Zugang zu einem Gebiet aktueller mathematischer Forschung zu verschaffen. Diesem Ziel entspricht der vorliegende Band in hohem Maße. Überdies sind eine Menge heuristischer und intuitiver Bemerkungen eingeflochten, die erklären, warum einzelne Beweisschritte benutzt und Begriffe eingeführt werden.

Erlangen H. Lange

Lang, S., Introduction to Complex Hyperbolic Spaces, Berlin – Heidelberg – New York: Springer-Verlag 1987, 300 S., DM 118,–

Auf einer (reellen) Riemannschen Mannigfaltigkeit wird die zugrundeliegende natürliche Metrik dadurch gegeben, daß man je zwei Punkte durch eine Kette reeller Kurven verbindet, deren Länge bzgl. der Riemannschen Metrik mißt und dann das Infimum bzgl. aller derartigen Verbindungen nimmt. Kobayashi hatte die fundamentale Idee, zwei Punkte auf einer komplexen Mannigfaltigkeit X durch Ketten von Einheitskreisen holomorph zu verbinden (p, q heißen durch einen Einheitskreis $D \subset \mathbb{C}$ holomorph verbunden, wenn es $f: D \to \mathbb{C}$ holomorph gibt und $x, y \in D$ mit $f(x) = p$, $f(y) = q$) und dann das Infimum über die Längen bzgl. der jeweiligen hyperbolischen Metrik (auf D) zu nehmen. Dies definiert i. a. nur eine Pseudometrik d auf X. X heißt hyperbolisch, wenn d tatsächlich eine Metrik ist.

Das Urbeispiel aller hyperbolischen Mannigfaltigkeiten ist also der Einheitskreis. Weitere einfache Beispiele sind die beschränkten Gebiete in $\mathbb{C}^m$. Man kann Hyperbolizität auch für singuläre Räume erklären, des weiteren gibt es nützliche Verallgemeinerungen des Begriffs der Hyperbolizität. Weder möchte ich darauf näher eingehen noch jedes einzelne Kapitel in Langs Buch genauer referieren.

Statt dessen möchte ich typische Resultate über hyperbolische Mannigfaltigkeiten vorstellen, wie sie in Langs Buch erscheinen.

Der erste wichtige Aspekt sind Fortsetzungssätze. Ist etwa X kompakt und hyperbolisch, so läßt sich jede holomorphe Abbildung $D^* = \{z \in \mathbb{C} \mid |z| < 1\} \setminus \{0\} \longrightarrow X$ holomorph über 0 fortsetzen (Satz von Kwack). Allgemeiner braucht X nur in einer Mannigfaltigkeit Y „hyperbolisch eingebettet" zu sein und $\bar{X}$ kompakt. In diesem Resultat ist dann der große Picard enthalten. Im höherdimensionalen gilt z. B.: Ist M eine komplexe Mannigfaltigkeit, A ein Divisor mit normalen Überkreuzungen (z. B. A eine glatte Hyperfläche), und ist $f: M \setminus A \to X$ holomorph in eine kompakte Mannigfaltigkeit X, so läßt sich f holomorph auf M fortsetzen.

Ein zentrales Problem in der Theorie sind selbstredend Hyperbolizitätskriterien. Ein äußerst wichtiges Resultat von Brody besagt: Eine kompakte Mannigfaltigkeit X ist hyperbolisch genau dann, wenn jede holomorphe Abbildung $f: \mathbb{C} \to X$ konstant ist. Anders geartet sind differentialgeometrische Kriterien: Eine kompakte Mannigfaltigkeit X mit negativer holomorpher Bischnittkrümmung (oder amplem Cotangentialbündel) ist hyperbolisch. Negative Riccikrümmung dagegen genügt nicht. Beispiele werden durch Fermat-Hyperflächen gegeben.

Ein anderes Hyperbolizitätskriterium von Kobayashi benutzt die (1, 1)-Form einer Hermiteschen Metrik und fordert gewisse Abschätzungen.

Eine ganz wichtige Verallgemeinerung des Begriff der Hyperbolizität ist die „Maßhyperbolizität", die mit maßtheoretischen Methoden definiert wird. Trägt X eine sog. Pseudovolumenform mit positiver Riccikrümmung, so ist X maßhyperbolisch. Ferner sind hyperbolische Mannigfaltigkeiten maßhyperbolisch.

Die letzten Kapitel in Langs Buch beschäftigen sich mit Nevanlinna-Theorie und deren Anwendungen auf die Existenz holomorpher Abbildungen $f: \mathbb{C} \to \mathbb{P}_n$, die gewissen Hyperflächen nicht treffen, und über normalen Familien. I. A. ist es noch (viel) schwieriger für nicht-kompakte Mannigfaltigkeiten, Hyperbolizität nachzuweisen. Dies geschieht oft mit ad-hoc-Methoden (Konstruktion von Finsler-Metriken etc). Erwähnt sei stellvertretend für viele andere Ergebnisse folgendes jüngstes Resultat von Grauert:
$\mathbb{P}_2 \setminus$(3 Quadriken in allgemeiner Lage) ist hyperbolisch.

Die Faszination der Theorie der hyperbolischen Mannigfaltigkeiten liegt (u. a.) in einer Reihe von sehr plausiblen, wunderschönen, aber sehr schwierigen Vermutungen, z.B.:

a) Eine kompakte Mannigfaltigkeit ist maßhyperbolisch genau dann, wenn sie bimeromorph äquivalent zu einer hyperbolischen Mannigfaltigkeit ist, genau dann, wenn sie „vom allgemeinen Typ" ist.
b) Eine projektive Mannigfaltigkeit ist hyperbolisch genau dann, wenn alle Unterräume maßhyperbolisch sind.
c) Eine projektive Mannigfaltigkeit X ist hyperbolisch, wenn jede algebraische Abbildung $f: \mathbb{P}_1 \to X$ bzw. $f: T \to X$, T ein Torus, konstant ist.

Die hyperbolische Theorie verknüpft, wie man sieht, in interessanter und vielfältiger Weise komplexe Analysis, algebraische Geometrie, Differentialgeometrie und Maßtheorie. Ferner gibt es wichtige Beziehungen zur diophantischen Geometrie (Mordell ...).

Es gelingt Lang sehr gut, diese Faszination dem Leser mitzuteilen. Das Buch ist sehr elementar geschrieben und besticht durch Präzision und Klarheit. Viele Hilfsmittel – etwa aus der Maßtheorie oder komplexen Analysis – werden eigens bereitgestellt. Den Verbraucher soll's freuen. Was das Kapitel V im Buch zu suchen hat, ist mir allerdings verborgen geblieben. Dort wird in epischer Breite die Theorie der Zusammenhänge und Krümmungen auf (holomorphen) Vektorbündeln dargestellt, nur um ein Resultat zu beweisen (und das noch nicht einmal vollständig), das früher schon viel eleganter bewiesen wurde. Dies ist umso bedauerlicher, als jüngere wichtige Resultate von Green und Griffiths (mit interessanten Techniken, jets etc.) dadurch unter den Tisch fallen (müssen?).

Als Resumée möchte ich feststellen, daß Lang eine sehr schöne – mit den oben genannten Einschränkungen – Einführung in die Theorie der hyperbolischen Mannigfaltigkeiten gelungen ist, für Seminare sicher hervorragend geeignet. Sie ist sehr leicht lesbar und anregend – eine ideale Nachtlektüre.

Bayreuth Th. Peternell

Dieudonné, J., Grundzüge der modernen Analysis, Band 8 (Logik und Grundlagen der Mathematik, Bd. 24), Wiesbaden: Vieweg Verlag 1983, 336 pp., hard cover, DM 72,–

Die Darlegung der Theorie der (linearen) partiellen Differentialgleichungen – z. B. in der Form einer Universitätsvorlesung – halte ich für eine der schwierigsten (pädagogischen) Aufgaben: In Hinsicht auf die enorme Menge des zur Verfügung stehenden Materials muß man notwendigerweise eine gewisse Auswahl treffen und steht dann vor einem Dilemma. Auch der Verfasser des vorliegenden Bandes mußte dieses Problem lösen und hat dabei eine neue, untraditionelle Lösung gefunden – wie übrigens in dem ganzen, enormen, auf 25 Kapitel angelegten Werk Éléments d'Analyse.

Kapitel 23 dieses Werkes trägt den Titel „Lineare Funktionalgleichungen" und ist durch zwei Bände (7 und 8) der großartigen Dieudonnéschen Serie bedeckt; allein dies zeugt von dem enormen Ausmaß des Materials. Band 7 trägt den Untertitel „Pseudodifferentialoperatoren“ und enthält das wesentliche Werkzeug, mit Hilfe dessen dann in Band 8 (Teil II von Kapitel 23, ganz einfach „Randwertprobleme“ benannt) die drei klassischen Typen der partiellen Differentialgleichungen – die elliptischen, die parabolischen und die hyperbolischen – behandelt werden. Die Typen sind zwar klassisch, die Darlegungsweise jedoch wieder untraditionell; der Verfasser benutzt im Stil der vorhergehenden Bände die sehr abstrakte axiomatische Methode und so ist auch Band 8 weder Lehrbuch noch Nachschlagewerk. Die sehr gedrängte und formale Darstellung wird dem Leser ziemlich viel Mühe bereiten; ohne ausführliche Kenntnis von Band 7 (und eigentlich auch der Bände 1 bis 6) ist Band 8 nur schwer zu bewältigen.

In Band 7 hat Dieudonné schon vor mehr als zehn Jahren die Wichtigkeit der Theorie der Pseudodifferentialoperatoren erkannt – zu einer Zeit, da kaum Lehrbücher über dieses Gebiet vorhanden waren. Das Ziel von Band 8 sieht ziemlich bescheiden aus:

Bis auf eine bestimmte Klasse von Gleichungen beschränkt sich der Verfasser hauptsächlich „auf die Untersuchung des Cauchyschen Problems in seiner elementarsten Form, d. h. des Problems, auf einer Mannigfaltigkeit X eine Lösung zu bestimmen, deren Normalableitungen niedrigerer Ordnung als der Ordnung der Gleichung auf einer Hyperfläche Σ in X bekannt sind“ (Zitat aus der Einführung); es stellt aber an den Leser hohe Ansprüche.

Nun kurz zum Inhalt: Das auf mehr als 300 Seiten in 37 Abschnitte verteilte Material ist in sechs Blöcke gegliedert – mit den Titeln „Die Theorie von Weyl-Kodaira“ (Abschnitte 23.39 bis 23.45), „Mehrschichtpotentiale“ (23.46 bis 23.48), „Feine Randwertprobleme für elliptische Differentialoperatoren“ (23.49 bis 23.61), „Parabolische Gleichungen“ (23.62 bis 23.64), „Die Wellengleichung“ (23.66 bis 23.68) und „Strikt hyperbolische Gleichungen“ (23.69 bis 23.74). Der erste Block bildet die oben erwähnte Ausnahme; er betrifft lineare Differentialgleichungen in e i n e r reellen Variablen und als wesentliches Hilfsmittel erscheint hier die Spektraltheorie der Operatoren auf Hilbert-Räumen. Zu den elliptischen Gleichungen sei noch bemerkt, daß der Verfasser es absichtlich und sorgfältig vermieden hat, auf den Spezialfall der Operatoren zweiter Ordnung einzugehen. Der Grund dafür ist die Tatsache, daß bei diesen Operatoren Phänomena auftreten, die mit dem Maximumprinzip verknüpft und deshalb nicht auf Operatoren höherer Ordnung übertragbar sind. Es wird deshalb die Darlegung einer Theorie von elliptischen Operatoren beliebiger Ordnung angestrebt. Bei den parabolischen und hyperbolischen Gleichungen, wo vor allem das lokale Cauchysche Problem betrachtet wird, gibt es dagegen keine analogen Phänomena, die die Untersuchung von Operatoren zweiter Ordnung hervorheben, und deshalb kann mit dem Studium der klassischen Gleichungen (Wärmeleitungs- und Wellengleichung) begonnen werden.

Als Hauptziel wird angesehen, zu *klassischen* Existenz- und Eindeutigkeitsaussagen zu gelangen, d. h. beliebig oft differenzierbare Lösungen zu erhalten (natürlich unter der Voraussetzung, daß alle Daten, die geometrischen sowie die funktionalen, auch beliebig glatt sind). Dazu wird in der Einführung gesagt: „... leider wird diese Notwendigkeit logie" sieht (wieder ein Zitat aus der Einführung), ist der Standpunkt des Verfassers begreiflich; dadurch wird jedoch ein sehr enger Leserkreis angesprochen.

Übrigens sind Beziehungen zu den Anwendungen (im „klassischen" Sinne, d. h. in der Physik und Technik) in dem Band nur schwierig auszumachen, denn – wie schon bemerkt – die Darlegung ist formal und axiomatisch und viele tiefliegende Fragen werden in den Übungsaufgaben behandelt. Also alles in allem: keine leichte Lektüre, aber trotzdem – ein beachtenswertes und respektables Vorhaben.

Prag A. Kufner

Ditzian, Z., Totik, V., Moduli of Smoothness (Springer Series in Computational Mathematics, Vol. 9), New York – Berlin – Heidelberg – London – Paris – Tokyo: Springer-Verlag 1987, IX, 227 pp., Hard cover, DM 108,–

Das vorliegende Buch berichtet über eine der interessantesten Entwicklungen des letzten Jahrzehnts in der Approximationstheorie – Bereitstellung eines Glattheitsmaßes, das dazu geeignet ist, Konvergenzordnungen bei der Approximation durch algebraische Polynome in L^p zu beschreiben. Genauer gesagt wird ein von den Autoren entworfener Stetigkeitsmodul vorgestellt, mit dessen Hilfe in den letzten Jahren eine Reihe alter, offener Probleme gelöst werden konnten. Das Buch gliedert sich in zwei Teile: In Teil I (6 Kapitel) werden der neue Modul eingeführt und seine grundlegenden Eigenschaften hergeleitet; Teil II (7 Kapitel) ist Anwendungen gewidmet, die eindrucksvoll seine Nützlichkeit dokumentieren.

Für Funktionen $f \in L_p(D)$, $1 \leqslant p \leqslant \infty$, ist das neue Glattheitsmaß gegeben durch

$$\omega_\varphi^r(f, t)_p := \sup_{0<h\leqslant t} \|\Delta_{h\varphi(x)}^r f(x)\|_{L_p(D)},$$

$$\Delta_u^r f(x) := \sum_{k=0}^{r} (-1)^k \binom{r}{k} f(x + ru/2 - ku),$$

mit der Konvention, daß $\Delta_u^r f(x) = 0$ gesetzt ist, falls $x \pm ru/2 \notin D$. Dabei ist D ein nicht notwendigerweise beschränktes Intervall der reellen Achse und $L_p(D)$ für $1 \leqslant p < \infty$ der übliche Lebesgue-Raum und für $p = \infty$ der Raum der auf D stetigen, beschränkten Funktionen. Offensichtlich entspricht der übliche r-te Stetigkeitsmodul dem Spezialfall $\varphi(x) \equiv 1$. Durch das von der Variablen x abhängige Inkrement $h\,\varphi(x)$ in der Definition von $\omega_\varphi^r(f, t)$ wird aber nun eine zusätzliche, punktweise Struktur eingebaut, die dem Phänomen verbesserter Konvergenzgeschwindigkeiten nahe den Endpunkten des Intervalls D Rechnung tragen kann. Typische Beispiele von Schrittlängengewichten φ sind $(x(1-x))^{1/2}$ für $D = (0, 1)$, $(1-x^2)^{1/2}$ für $D = (-1, 1)$, x für $D = (0, \infty)$ etc. Als ein erstes, wichtiges Resultat wird in Kap. 2 für eine recht allgemeine Klasse von Schrittlängengewichten die Äquivalenz (für $t \to 0+$) zwischen $\omega_\varphi^r(f, t)_p$ und dem K-Funktional

$$K_{r,\varphi}(f, t^r)_p := \inf\{\|f - g\|_p + t^r\|\varphi^r g^{(r)}\|_p : g^{(r-1)} \in AC_{loc}(D)\}$$

hergeleitet. Nachdem in Kap. 3 weitere Modifikationen diskutiert worden sind, zeigt Kap. 4, wie sich die üblichen, sog. elementaren Eigenschaften eines Stetigkeitsmoduls auf $\omega_\varphi^r(f, t)_p$ übertragen. Dazu werden Saturation und Marchaud-Ungleichungen für $\omega_\varphi^r(f, t)_p$ behandelt. Teil I schließt mit einer Analyse der Bedingungen an die Schrittlängengewichte (Kap. 5) und Verallgemeinerungen auf gewichtete L^p-Räume (Kap. 6).

In Teil II belegen die Autoren dann ihren Anspruch, mit ihrem Modul ω_φ^r das geeignete Strukturmaß in der algebraischen Approximation gefunden zu haben, eindrucksvoll durch eine Reihe hochkarätiger Anwendungen. Die Resultate besagen, grob vereinfacht, daß ein vorgegebenes Fehlerfunktional für eine Funktion dann und nur dann mit der Ordnung $O(n^{-\alpha})$ konvergiert, wenn die Funktion einer der durch Bedingungen des Typs $\omega_{\varphi}^{r}(f, t)_p = O(t^{\beta})$, $0 < \beta < r$, $\beta = \beta(\alpha)$, festgelegten Lipschitz-Klasse angehört. Während Kap. 7, 8, 11 diesbezüglich Fragen der besten (gewichteten) Approximation durch algebraische Polynome gewidmet sind, behandeln Kap. 9, 10 lineare Approximationsverfahren (Bernstein-Kantorovitch-Polynome, Szász-Mirakjan-Operatoren etc.). Schließlich werden in Kap. 12 einige erste Aspekte einer mehrdimensionalen Theorie diskutiert.

Das vorliegende Buch beschreibt einen Gegenstand, der im letzten Jahrzehnt einen Durchbruch in dem schwierigen Gebiet der algebraischen Approximation in L^p ermöglichte. Es ist sorgfältig geschrieben, aber nicht immer einfach zu lesen. Die Beweise sind oft (in der Natur der Dinge liegend) sehr kompliziert, zum Teil auch recht langwierig, so daß vom Leser fast überall die Liebe zu gründlichen Details klassisch analytischer Natur gefordert ist. In der Tat betonen die Autoren am Ende (S. 4) der Einleitung: „This book was written as a research paper, but it has outgrown this description in size. However, it has retained the characteristics of a research work and all the results presented are new.“ Zur Motivation sollten deshalb, neben der Einleitung und den vergleichenden Schlußbemerkungen (Kap. 13), auch die einführenden § 7.1 und 9.1 gesehen werden. In [illegible]

Aussagen und Anregungen, so daß der Referent sich voll und ganz den Schlußbemerkungen (S. 216) der Autoren anschließen kann: „We believe that the present set of ideas and definitions is the „correct“ treatment for the behavior of a modulus of smoothness near an edge of the interval discussed or near a singularity of a weight function. It is our hope that the theorems and methods here will be useful and will lead to many other applications.“

man solche „irrationalen“ Nash-Gleichgewichtspunkte durch geeignete axiomatische Forderungen ausschließen?

Diese Frage wird grundsätzlich durch die Anwendung von Begriffen wie „subspiel-perfekt“ oder „sequentiell“ beantwortet, die allerdings noch viele Varianten zulassen. Anders als beim dynamischen Programmieren ist in der spieltheoretischen Diskussion das „Prinzip des dynamischen Optimierens“ (also „rückwärts rechnen“, um optimale

sengegensatz der Spieler (wenn man kein Nullsummenspiel hat) und zum Teil an der unvollständigen/imperfekten Information.

Neben der Frage nach dem, was „Sequentialität“ eigentlich bedeuten soll, ist auch die Frage von Interesse, ob man nicht durch Robustheitsforderungen gewisse Nash-Gleichgewichte aussondern kann. Tatsächlich ist ja bekannt, daß beide Wege das Problem anzugehen zu ähnlichen Ergebnissen führen.

Es ist nun das Ziel des vorliegenden Buches, die Zusammenhänge zwischen den

Auszahlungen des „one-shot-games“ durch geeignete Verfeinerungen des Nash Konzepts [illegible]

setzt, das allgemeinste „perfect folk theorem“ anzugeben (auf S. 164 des Buches ausgiebig beschrieben). Allerdings macht er von vornherein die Annahme, daß die gemischten Aktionen der Spieler während des wiederholten Spieles observiert werden können. Über eine gewisse Gefahr in diesem Argument ist er sich im klaren, und der Leser wird vor voreiligen Schlüssen durch passende Hinweise gewarnt.

Kapitel 9 gibt eine Schilderung der Anwendungen der Spieltheorie in der Evolutionsbiologie: evolutionäre Spieltheorie. Bekanntlich kann die Stabilität von Populationen unter evolutionären Einflüssen spieltheoretisch modelliert werden indem man sie derart umdeutet, daß Nash-Gleichgewichtspunkte eben jene Stabilität der Situation erklären.

Gerade an diesem Anwendungsbeispiel zeigt sich, wie wichtig gute Interpretation ist. Es sind nicht die einzelnen Mitglieder der Population (Phänotypen), die rationales Verhalten an den Tag legen, vielmehr handelt es sich um ein „prägrogrammiertes Verhalten“, das man etwa dem Genpool zuschreiben könnte und das in der Gleichgewichtssituation rein formal von ähnlichem Charakter ist wie die Gleichgewichtspunkte eines passenden Bimatrix-Spiels. Dazu kommt, daß zumindest beim derzeitigen Stand der Dinge „evolutionäre Spieltheorie“ auf einer ganzen Reihe von Forderungen beruht (monomorphe Population, asexuelle Reproduktion und andere einschneidende Einschränkungen), ohne die die Modellbildung nicht plausibel ist. Diese wichtigen Einschränkungen werden in dem vorliegenden Buch durchaus betont. Dabei lernt der Leser Wichtiges über das ESS-Konzept und seine Anwendungen in der Biologie kennen.

Kapitel 10 schließlich diskutiert die strategische Stabilität à la Kohlberg/Mertens.

Van Dammes Buch muß jedem empfohlen werden, der sich mit dem derzeitigen Stand der nicht-kooperativen Spieltheorie vertraut macht. Es ist auch als Nachschlagewerk wichtig. Das vorliegende Buch erklärt, warum in den vergangenen 10 bis 15 Jahren das Eindringen spieltheoretischer Konzepte nunmehr in fast alle Bereiche theoretisch-ökonomischen Denkens unaufhaltsam stattgefunden hat. Rationales Verhalten, der Zusammenhang zwischen Glaubwürdigkeit von Drohungen und Stabilitätskonzepten, die und auch in der Chemie. Man denke zum Beispiel an die Informationsübertragung in Nervenzellen, an Populationsmodelle oder an die bekannte Belousov-Zhabotinskii-Reaktion. Ein sehr einfaches mechanisches Beispiel, das ein intuitives Verständnis von Relaxationsschwingungen vermittelt, wird in der Einleitung beschrieben, nämlich eine Schaukel mit einem Wasserbehälter auf der einen Seite, dem konstant Wasser zugeführt wird.

Das vorliegende Buch befaßt sich mit mathematischen Methoden zur Behandlung solcher Relaxationsschwingungen, wobei das Schwergewicht auf asymptotischen Methoden liegt, die in der sogenannten singulären Störungstheorie entwickelt wurden („matched asymptotic expansions"). Dabei geht es darum, die gesuchte periodische Lösung quantitativ zu beschreiben mit Hilfe von asymptotischen Approximationen bezüglich des vorhandenen kleinen Parameters. Typisch für diese Art Probleme ist es, daß mehrere lokale Approximationen nötig sind, die teils in sehr kleinen Regionen des Phasenraums bzw. der unabhängigen Variablen gültig sind. Der Autor behandelt mit diesen Methoden im wesentlichen drei Probleme: die klassische Van der Pol-Gleichung als Beispiel einer freien Relaxationsschwingung, gekoppelte Oszillatoren vom Van der Pol-Typ („mutual entrainment") und die periodisch angeregte Van der Pol-Gleichung. Im Kapitel über freie Schwingungen werden zudem noch Volterra-Lotka-Gleichungen näher betrachtet. Die Behandlung von sogenannten stochastischen und chaotischen Phänomenen - obwohl in Einleitung und Inhaltsverzeichnis betont - nimmt daneben geringen Raum ein und kann wohl nur als Randbemerkung genommen werden. Z. B. kann die knappe Darstellung der umfangreichen Arbeit von Levi über die periodisch angeregte Van der Pol-Gleichung mit qualitativen, geometrischen Methoden kaum überzeugen, ebensowenig der Anhang über Konzepte aus der Theorie der Dynamischen Systeme und der stochastischen Differentialgleichungen. Auch der Versuch einer exakten mathematischen Definition einer Relaxationsschwingung steht mehr oder weniger im luftleeren Raum.

Der Autor hat in diesem Buch viel Material über Relaxationsschwingungen zusammengetragen, mit vielen guten Beispielen. Das Buch überzeugt dort, wo es sich an die asymptotischen Methoden hält, und dort, wo es in die Tiefe geht, so vor allem im Kapitel über die gekoppelten Oszillatoren und in der asymptotischen Behandlung der periodisch angeregten Van der Pol-Gleichung. Diese Teile gehen denn auch auf Originalarbeiten des Autors zurück. Von Bedeutung und von Nutzen sind auch die vielen Hinweise auf Anwendungen und die zahlreichen und informativen Bezugnahmen auf die ausführliche Bibliographie.

Zürich K. Nipp

Baumeister, J., Stable Solution of Inverse Problems (Serie: Advanced Lectures in Mathematics), Braunschweig - Wiesbaden: Vieweg 1987, VII + 254 S., softcover, DM 54,-

Das vorliegende Buch stellt eine Einführung in das Gebiet der stabilen Lösung von inversen Aufgaben dar. Es ist, wie aus dem Serientitel hervorgeht, als Vorlesung intendiert, die, wie im Vorwort angegeben, für Studenten mit Kenntnissen in höherer Analysis, linearer Algebra und Funktionalanalysis zugänglich sein soll. Zumindest an hiesigen Universitäten könnte man auch voraussetzen, daß Hörer, die sich für dieses fortgeschrittene Gebiet der numerischen Analysis interessieren, auch Kenntnisse in den Grundlagen der Numerik aufweisen. Damit könnte wahrscheinlich eine Vorlesung, die auf diesem Buch aufbaut, noch etwas straffer organisiert werden. Dagegen wird man vermutlich mehr Mühe und Zeit für die funktionalanalytischen Grundlagen verwenden müssen.

Im 1. Teil werden die Grundkonzepte behandelt. Dazu werden zunächst Beispiele inverser Probleme, wie Rekonstruktion von Signalen, Bildrekonstruktionen aus Projektionen (Tomographie), Bestimmung von Diffusionskoeffizienten u. a., schon in mathematischer Formulierung angegeben. Dann werden schlecht gestellte Probleme funktionalanalytisch formuliert und Lösungsmöglichkeiten durch Regularisierungen behandelt, auch für inexakte Daten.

Im 2. Teil werden Regularisierungsmethoden im einzelnen behandelt. Dazu wird die Singulärwertzerlegung für kompakte Operatoren hergeleitet, ihre Anwendung auf Regularisierungen, verallgemeinerte Inverse und die Tychonovmethode beschrieben, sowie die Regularisierung mit Projektionsmethoden (Galerkin-Verfahren).

Der 3. Teil behandelt damit zusammenhängende Probleme der numerischen linearen Algebra. Hier finden sich neben vielen wohlbekannten Inhalten, die etwa im Buch von Golub/Van Loan und bei anderen besser und vollständiger zu finden sind, auch neue Ergebnisse, etwa 9.5.

Etwas ärgerlich sind hier Inkonsistenzen, wenn etwa die Moore-Penrose-Inverse im 3. Teil als Pseudoinverse und im 2. Teil als verallgemeinerte Inverse bezeichnet wird. Aus 9.1 könnte man den Eindruck gewinnen, daß man die least-square-Lösung A^+y von $Ax = y$ numerisch mit Hilfe der Bidiagonalisierung von A gewinnt, wo doch nur eine QR-Zerlegung von A nötig ist.

auch eigene Beiträge des Autors eingebracht.

Die einzelnen Kapitel enden mit kurzen Hinweisen auf Originalliteratur und weitere Lehrbücher. Das Buch wird dem Anspruch der Serie (fortgeschrittene Vorlesung) durchaus gerecht. Der Text ist sauber aufgebaut, gut gegliedert und lesbar, Tippfehler halten sich in Grenzen. Wer eine Vorlesung über dieses aktuelle und interessante Gebiet halten will, ist mit dem vorliegenden Buch sehr gut bedient, wenn er auch sicher noch einige Arbeit in das Studium der Originalliteratur investieren muß.

falls er überhaupt existiert, von der Wahl des Zwischenwertes τ_i abhängig. Diesen Gordischen Knoten durchschlägt man dadurch, daß man die Wahl des Zwischenwertes vorschreibt. Bei der Wahl $\tau_i = 1/2\ (t_i + t_{i+1})$ gelangt man zum Stratonovich-Integral, bei der Wahl $\tau_i = t_i$ zum Ito-Integral. Das Ito-Integral hat viele mathematische Vorteile (es ist z. B. ein Martingal in der oberen Grenze des Integrals), beim Modellieren hat das Stratonovich-Integral manchmal Vorzüge. Glücklicherweise lassen sich beide Typen durch eine einfache Formel ineinander umrechnen.

Mit Hilfe der stochastischen Integration (wir meinen im folgenden immer das Ito-Integral) läßt sich nun auch eine Theorie der stochastischen Differentialgleichungen aufbauen. Man schreibt solche Gleichungen in der Form

$$dX_t = b(t, X_t)dt + \sigma(t, X_t)dW_t \tag{1}$$

wobei W_t die Brownsche Bewegung, b und σ gegebene Funktionen und X_t die gesuchte Lösung der stochastischen Differentialgleichung bezeichnet. Da – wegen der Nichtdifferenzierbarkeit von W_t – die Gleichung (1) direkt wenig Sinn macht, faßt man sie auf als eine bequeme Schreibweise für die stochastische Integralgleichung

$$X_t = X_0 + \int_0^t b(t, X_t)dt + \int_0^t \sigma(t, X_t)dW_t \tag{2}$$

wobei wir noch den Anfangswert X_0 eingefügt haben. In (2) sind nun alle Terme wohldefiniert, insbesondere ist das letzte Integral als Ito-Integral zu verstehen.

Mit dieser Einleitung ist eines der Hauptthemen des vorliegenden Buches kurz umrissen. Die wichtigsten Kapitel beschäftigen sich mit der stochastischen Integration (Kapitel 3) und mit stochastischen Differentialgleichungen (Kapitel 5). Das stochastische Integral wird viel allgemeiner definiert als oben angedeutet, nämlich $\int f(t, w)dM_t$ wird für stetige lokale Martingale M erklärt und untersucht. Die notwendigen Grundlagen hierfür werden im ersten Kapitel bereitgestellt.

Das zweite Kapitel ist ganz der Brownschen Bewegung gewidmet. Es enthält verschiedene Arten der Definition der Brownschen Bewegung und eine gründliche Diskussion ihrer Eigenschaften.

Das vierte Kapitel weicht von dem Grundgedanken ab, stochastische Größen mit analytischen Mitteln zu untersuchen, und behandelt statt dessen die Lösung analytischer Probleme mit stochastischen Methoden. Genauer wird die Lösung des Dirichletproblems mit Hilfe der Brownschen Bewegung untersucht. Außerdem wird die Feynman-Kac-Formel vorgestellt. Der Rezensent hätte sich hier – wie auch an anderen Stellen des Buches – eine Diskussion einiger (physikalischer) Anwendungen der Theorie gewünscht.

Das schon erwähnte fünfte Kapitel untersucht ausführlich die verschiedenen Lösungskonzepte für stochastische Differentialgleichungen. Es geht auf (schon im vierten Kapitel deutlich gewordene) Beziehungen zu den partiellen Differentialgleichungen ein und behandelt schließlich zwei wirtschaftswissenschaftliche Anwendungen: Optionspreis-Theorie und eine Theorie von Investition und Verbrauch.

Das letzte Kapitel ist ganz der lokalen Zeit $L_t(x)$ der Brownschen Bewegung gewidmet, einer Größe, die – anschaulich gesprochen – die Zeit (bis zur Zeit t) mißt, in der sich ein Brownscher Pfad beim Punkt x aufhält.

Beim Lesen dieses Buches fällt zweierlei auf. Erstens ist dieses Buch ungewöhnlich sorgfältig geschrieben. So werden viele komplizierte Betrachtungen und Konstruktionen (z. B. langwierige, aber notwendige Meßbarkeitsuntersuchungen) detailliert durchgeführt und dieser Stil wird durch das ganze Buch durchgehalten.

Auf der anderen Seite – vielleicht nicht unabhängig davon – ist das Buch über lange Strecken sehr technisch geschrieben. Es fehlt fast völlig an Motivation, überblicksartiger Zusammenfassung und an konkreten Anwendungen. Wo diese gegeben werden (Abschnitte 5.8), gibt es keinerlei Einführung in die (wirtschaftswissenschaftliche) Problematik, die den Modellen zugrundeliegt.

Damit ist das Buch für Studenten oder Wissenschaftler, die sich neu in das Gebiet einarbeiten wollen, kaum geeignet, obwohl es – streng genommen – nur wenig mehr als den Inhalt einer Standardvorlesung in Wahrscheinlichkeitstheorie (z. B. nach dem Buch von Bauer) voraussetzt.

Für Fortgeschrittene aber, die die Theorie schon in groben Zügen kennen und ihr Wissen vertiefen möchten, wird dieses Buch hervorragende Dienste leisten, auch weil es an vielen Stellen bis an die aktuelle Forschung heranführt. Für diesen Zweck hat es gute Chancen, zu einem Standardwerk zu werden.

Bochum W. Kirsch

Jacod, J., Shiryaev, A. N., Limit Theorems for Stochastic Processes (Grundlehren der math. Wissenschaften, Band 288) Berlin u.a.O.: Springer 1987, XVII + 601 Seiten, DM 198,–

Den Gegenstand des Buches bilden, wie es im Titel heißt, Grenzwertsätze für stochastische Prozesse. Im Vorwort sagen die Autoren genauer, daß sie sich auf einen bestimmten Typ von Grenzwertsatz, besser: auf ein Beweisprinzip, konzentrieren wollen:

Seien Prozesse (X^n) gegeben mit Zeitparameter in $[0,\infty)$; ihre Verteilungen im Raum D der anständigen, d. h. càdlàg, Pfade mögen P^n heißen. Man will schwache Konvergenz der Folge (P^n) gegen ein P nachweisen. Dazu reicht es hin, dreierlei Dinge nachzuprüfen, nämlich

(a) daß die Menge $\{P^n\}$ straff ist;
(b) daß jeder Häufungspunkt der Folge (P^n) die gleichen *lokalen Charakteristiken* (d. h. Drift, Diffusionsmatrix, Sprungintensitäten) wie P hat;
(c) daß P das einzige Maß mit diesen lokalen Charakteristiken ist.

Typische Situationen, in welchen dieses Denkschema angewendet werden kann und wo es entstanden ist, sind Invarianzprinzipien (d. h. P ist das Wienermaß), Konvergenz gegen einen Poissonprozeß, Diffusionslimiten für (unstetige) Markovprozesse oder der Fall („Statistik der zufälligen Prozesse"), daß man $X^n(t)$ als log. Likelihood von Maßen auf der Algebra der bis t beobachtbaren Ereignisse interpretiert und nach dem Limesverhalten des zugehörigen Experiments fragt.

Auf dieses so beschriebene Ziel hin ist konsequent der Aufbau des gesamten Buches angelegt. Es werden Sprachregelungen (aus der „Allgemeinen Theorie"), Hilfsmittel aus unterschiedlichen Bereichen (Martingalprobleme, Girsanovsätze, Skorochodtopologie), Beispiele (relativ ausführlich: Prozesse mit unabhängigen Zuwächsen) bereitgestellt. Einige Ansätze werden auch etwas weiter verfolgt, z. B. Hellingerprozesse, Normkonvergenz und Absolutstetigkeit; eine gewisse Beziehung zum selbstgestellten Thema bleibt aber stets gewahrt. Die Kapitalüberschriften lauten, in Kurzfassung und übersetzt: I. Allgemeine Theorie. II. Charakteristiken von Semimartingalen. III. Martingalprobleme. IV. Hellingerprozesse. V. Kontiguität. VI. Skorochodtopologie. VII. Konvergenz von Prozessen mit unabhängigen Zuwächsen. VIII. Konvergenz gegen Prozesse mit unabhängigen Zuwächsen. IX. Konvergenz gegen Semimartingale. X. Grenzwertsätze, Dichteprozesse, Kontiguität.

Man mag hier Kap. I bis VI als vorbereitend ansehen, wenn auch manches, vor allem in IV und V, von eigenem Interesse ist; Kap. VII bis IX bringen Konvergerzaussagen in zunehmender Allgemeinheit; Kap. X ist Anwendungen aus der Statistik der Prozesse gewidmet.

Der Charakter des Buches ist gewiß nicht der eines Lehrbuchs in dem Sinn, daß man es einem Diplomanden mit stochastischen Grundkenntnissen in die Hand drücken könnte, auf daß er aus ihm die höhere stochastische Analysis lerne. Dessen sind sich auch die Autoren bewußt, wenn sie explizit sagen, daß z. B. Kap. I durchaus nichtelementare Inhalte nur resumiert, ohne im Detail zuviel zu erklären. In viel stärkerem Maß ist das Buch als Nachschlagewerk für einen Forscher zu verstehen, der im besagten Themenkreis arbeitet und ganz genau - ohne die durch umgangssprachliches Denken bedingten Vagheiten - die technischen Bedingungen wissen will, unter denen gewisse Dinge gelten oder auch nicht. Für diesen Personenkreis, dessen bin ich sicher, wird es sich als nützliches Arbeitsmittel erweisen. Es gibt in der Tat einiges an Substanz, was seit Mitte/Ende der 70er Jahre von den beiden Autoren und mit ihnen zusammen publizierenden Personen (etwa Kabanov, Liptser, Mémin, Yor, um nur diese Namen zu nennen) zusammengetragen worden ist und nun systematisch vorgestellt wird. (Eine große - und notwendige - Hilfe, damit der Zweck als Nachschlagewerk erfüllt wird, sind die ausführlichen Indices im Anhang, welche sich auf Stichworte, Notationen und Abkürzungen von Bedingungen erstrecken. Ohne sie wäre die Lektüre, trotz der sehr klaren Gliederung und Organisation des Stoffs, wesentlich schwieriger zu bewältigen).

Zur Abgrenzung des Spektrums der behandelten Themen: *nicht* enthalten sind stochastische Differentialgleichungen (hier gibt es nur Zitate einiger klassischer Resultate in Kap. III); ganz fehlt der Aspekt der Beziehung zu partiellen Differentialgleichungen und zur sogenannten „harten Analysis“, auch werden unendlichdimensionale Zustandsräume oder Kontrollprobleme nicht berührt.

Eine Kleinigkeit: ich hätte mir in der Einleitung eine Auseinandersetzung mit der vorhandenen Literatur gewünscht, welche über den Rahmen bloßer bibliographischer Quellenangaben (solche gibt es natürlich) hinausgeht. Ich könnte mir vorstellen, daß mancher Leser (etwa ein Hochschullehrer, der eine Vorlesung plant) *vor der Lektüre* des Werks gern gewußt hätte, ob es jenseits des eingangs genannten Beweisschemas zur schwachen Korvergenz von Maßen noch andere Gesichtspunkte gegeben hat, denen die Autoren Geltung verschaffen wollten, und worin das Spezifische dieses Buches liegt, im Vergleich zu, sagen wir, Stroock-Varadhan, Liptser-Shiryaev, Ikeda-Watanabe, Ethier-Kurtz. (Die beiden letzgenannten Titel sind übrigens in der langen Liste der Referenzen nicht einmal erwähnt).

Fassen wir zusammen: wir haben hier ein Zeugnis des Schaffens einer bedeutenden Gruppe sowjetischer und französischer Probabilister. Es ist ein Kompendium dessen, was man mit den Methoden und unter dem Blickwinkel der „Allgemeinen Theorie“ zum Thema sagen kann. Den Rahmen haben die Autoren sicher sehr eng gewählt, dafür aber geben sie detaillierte Informationen.

Heidelberg H. Rost

Borgwardt, K. H., The Simplex Method, A Probabilistic Analysis (Algorithms and Combinatorics 1), Berlin - Heidelberg - New York - London - Paris - Tokyo: Springer-Verlag 1987, 268 pp., soft cover, DM 68,-

Der Simplex-Algorithmus der linearen Optimierung besitzt bekanntlich theoretisch im ungünstigsten Fall schlechte Komplexitätseigenschaften, während dieses Verfahren aber praktisch recht effizient arbeitet. Mit dem vorliegenden Buch wird mit Hilfe sto- [illegible] fizient erweist. So wird z. B. gezeigt, daß die durchschnittliche Anzahl von Pivot-Schritten polynomial beschränkt ist.

Zunächst wird in einer Einführung auf die Problemstellung und die Modellannahmen sowie auf die Entwicklungen auf diesem Forschungsgebiet eingegangen. Außerdem werden die Ergebnisse dieses Buches bereits kurz zusammengestellt. Thema des 1. Kapitels ist der Schatteneckenalgorithmus, der im weiteren Verlauf näher analysiert wird. Das 2. Kapitel stellt weitere Grundlagen bereit und beschreibt das stochastische Modell. Im 3. Kapitel wird gezeigt, daß die durchschnittliche Anzahl von Pivot-Schritten polynomial beschränkt ist. Ergebnisse zum asymptotischen Verhalten des Verfahrens sind im 4. Kapitel zusammengestellt. Im 5. Kapitel wird die vorgestellte Theorie und die gewonnenen Ergebnisse auch auf Probleme mit Nichtnegativitätsbedingungen erweitert. Ein Anhang und eine umfangreiche Literaturliste runden dieses Buch ab.

Insgesamt vermittelt dieses Buch einen guten Überblick über den derzeitigen Forschungsstand zur Komplexität des Simplex-Verfahrens. Es ist unverzichtbar für diejenigen, die sich mit Fragestellungen der linearen Optimierung beschäftigen.

Erlangen J. Jahn

Litvinchuk, G. S., Spitkovskii, I. M., Factorization of Measurable Matrix Functions (Operator Theory, Vol. 25), Basel – Boston – Stuttgart: Birkhäuser Verlag 1987, 372 pp., hard cover, DM 98,–

Seit in den ersten Jahrzehnten dieses Jahrhunderts die Theorie der singulären Integralgleichungen, Toeplitzoperatoren und Faltungsgleichungen auf der Halbachse entwickelt wurde, ist bekannt, daß dabei die Faktorisierung von Funktionen eine entscheidende Rolle spielt, ja, daß es sich hier eigentlich um vier verschiedene Erscheinungsformen einer einzigen Theorie handelt.

Unter der Faktorisierung einer Funktion, die auf einer geschlossenen Jordan-

Bücher wie das vorliegende sowie die übrigen in derselben Reihe erschienenen Bände beigetragen.

Unter den vielen Richtungen dieser Entwicklung sind in den letzten Jahren drei besonders verfolgt worden:

erstens die Untersuchung immer allgemeinerer Funktionenklassen, für die noch Ergebnisse über die Existenz von Faktorisierungen möglich sind;
zweitens die Untersuchung irregulärer Kurven;
drittens die Konstruktion von expliziten Formeln für die Faktorisierung von Matrixfunktionen.

Das vorliegende Buch befaßt sich nur mit dem ersten und teilweise dem zweiten Punkt. Bei den behandelten Gebieten wird eine gewisse Vollständigkeit angestrebt. Dabei werden Ergebnisse aus der Sowjetunion bis 1984 und aus dem Westen bis 1981 berücksichtigt. So fehlt zum Beispiel das Resultat von Coifman, MacIntosh, Meyer (1982), daß alle Lipschitzkurven der Klasse $\mathscr{R}$ angehören, sowie neuere Resultate über die Beschränktheit der Hilberttransformation auf sogenannten „chord-arc"-Kurven.

Das Buch ist in 9 Kapitel gegliedert. Im ersten Kapitel wird die notwendige Hintergrundinformation über Fredholmoperatoren, Randwerte von analytischen Funktionen und das Cauchysche singuläre Integral bereitgestellt. Dabei werden keine Vorkenntnisse vorausgesetzt, Beweise jedoch nur soweit gegeben, wie sie für das Folgende von Interesse sind. Zahlreiche Literaturhinweise erleichtern das Einarbeiten.

Im zweiten Kapitel werden die wesentlichen Definitionen gegeben und allgemeine Sätze über die Faktorisierbarkeit in L^p bewiesen. Ein Algorithmus zur Faktorisierung von meromorphen Matrixfunktionen wird hier dargestellt.

Im dritten Kapitel wird der Zusammenhang zwischen Faktorisierung, Riemannschem Randwertproblem und singulären Integralgleichungen untersucht.

Es folgen Kapitel über die Faktorisierung von Matrixfunktionen, die auf Dreiecksgestalt gebracht werden können, über Faktorisierung in einigen Funktionenalgebren, über die Stabilität der Faktoren und Partialindizes, über Kriterien, die den numerischen Wertebereich der Matrizen betreffen und über Faktorisierbarkeit in L^p.

Im letzten Kapitel sind Ergebnisse der Autoren über das Riemannsche Randwertproblem mit Konjugation enthalten.

Jedes Kapitel schließt mit einem Abschnitt, in dem die Geschichte der Ergebnisse und weiterführende Resultate diskutiert werden und der teilweise den Charakter eines Rechenschaftsberichts hat.

Zwei kritische Anmerkungen: Die Lesbarkeit des Textes wird erschwert durch einige Russizismen in der englischen Übersetzung, aber auch durch die optische Form des Manuskripts, die noch aus der Zeit vor der Einführung der Elektrizität in die Textverarbeitung stammt. Dies ist wohl auch der Grund für die zu knappen Stichwort- und Symbolverzeichnisse. Als einen schwerwiegenderen Mangel betrachte ich aber, daß das Buch außer in einem kleinen Abschnitt in der Einleitung in keiner Weise auf die vielfältigen Anwendungen eingeht, die gerade dieses Gebiet in weiten Bereichen der Analysis und der Mathematischen Physik hat.

Das Buch ist geeignet für den Fachmann, der sich über die in der Sowjetunion bis 1984 auf diesem Gebiet erzielten Resultate informieren will, aber auch für den Studenten, der sich in dieses interessante und für viele Anwendungen wichtige Gebiet gründlich einarbeiten will. Es ergänzt durch seinen Detailreichtum das 1981 in derselben Reihe erschienene Buch *Factorization of matrix functions and singular integral operators* von K. F. Clancey und I. Gohberg.

Darmstadt M. Costabel