94. Band Heft 1
ausgegeben am 19. 2. 1992

DMV

Jahresbericht
der Deutschen Mathematiker-Vereinigung

Herausgegeben von W.-D. Geyer
unter Mitwirkung von
P. L. Butzer, U. Felgner,
K.-H. Hoffmann, H. Kurzweil

B. G. Teubner Stuttgart 1992

Jahresbericht
der Deutschen Mathematiker-Vereinigung

Der „Jahresbericht“ ist das offizielle Veröffentlichungsorgan der Deutschen Mathematiker-Vereinigung, für dessen inhaltliche Gestaltung im Auftrag des Präsidiums der jeweilige Herausgeber zuständig ist. Im „Jahresbericht“ sollen vornehmlich Überblicksartikel über Teilgebiete der reinen und angewandten Mathematik, Nachrufe sowie historische Artikel und Buchbesprechungen veröffentlicht werden.

Manuskripte

Alle für die Schriftleitung des Jahresberichts bestimmten Sendungen (Briefe, Manuskripte, Ankündigung von neuerscheinenden Büchern) sind an Prof. Dr. W.-D. Geyer zu richten. Bücher, von denen eine Besprechung erfolgen soll, werden bei den Verlagen angefordert. Die Autoren werden gebeten, bei der Vorbereitung ihrer Manuskripte die „Hinweise für Autoren“ zu beachten.

Grundsätzlich sollen nur solche Manuskripte eingereicht werden, die nicht gleichzeitig an anderer Stelle zur Veröffentlichung eingereicht oder bereits veröffentlicht worden sind. Mit der Annahme zur Veröffentlichung erwirbt der Verlag das Verlagsrecht zur Vervielfältigung und Verbreitung sowie das Recht der Übersetzung in andere Sprachen.

Bezugsinformationen

Jährlich wird ein Band veröffentlicht, bestehend aus 4 Heften, die vierteljährlich erscheinen. Der Bezug ist nur bandweise möglich.

Der im voraus zahlbare Bezugspreis pro Band beträgt DM 128,– einschließlich Versand. Bestellungen nehmen jede Buchhandlung oder der Verlag entgegen.

Für Mitglieder der DMV ist der Bezug des Jahresberichts im Mitgliedsbeitrag enthalten.

Verlag:
B. G. Teubner, Industriestr. 15, Postfach 801069
D-7000 Stuttgart 80, Tel. (0711) 78901-0, Telefax 78901-10
Verantwortlich für den Anzeigenteil: Berthold Gaupp

Printed in Germany – ISSN 0012-0456
Satz: Elsner & Behrens GmbH, D-6836 Oftersheim
Druck: Krebs-Gehlen Druckerei GmbH & Co KG, D-6944 Hemsbach

Jahresbericht
der Deutschen Mathematiker-Vereinigung

Inhalt Band 94, Heft 1

1. Abteilung

2. Abteilung

In den nächsten Heften erscheinende Arbeiten:

H. Edwards, Kronecker's Arithmetical Theory of Algebraic Quantities
B. Kühlshammer, Offene Probleme in der Darstellungstheorie endlicher Gruppen
K. Leichtweiß, Karl Strubecker zum Gedenken
R. Racke, Zur Existenz globaler Lösungen nichtlinearer Wellengleichungen

---

Bezugshinweis

Früher erschienene Bände (ab Band 68) des „Jahresberichts der Deutschen Mathematiker-Vereinigung" können durch den Buchhandel oder den Verlag bezogen werden.

Nachdruck der Bände 1 bis 40 liefert: Johnson Reprint Corp., 111 Fifth Avenue, New York, N.Y. 10003

Nachdruck der Bände 41 bis 67 liefert: Swets & Zeitlinger, Heereweg 347b, POB 810, NL-2160 SZ Lisse/Holland

Jber. d. Dt. Math.-Verein.
94 (1992) 1–39

Oswald Teichmüller – Leben und Werk

Herausgegeben von N. Schappacher und E. Scholz
mit Beiträgen von K. Hauser, F. Herrlich, M. Kneser, H. Opolka, N. Schappacher, E. Scholz

Es bleibt eben tatsächlich die einzige Möglichkeit,
möglichst viel nichttrivialen Unsinn aufzustellen.
Oswald Teichmüller

Der folgende Text geht auf den Versuch zurück, in zwei Wochenendseminaren (am 7./8. 12. 1985 in Göttingen und am 31. 5./1. 6. 1986 in Bielefeld) ein möglichst verläßliches Bild von Leben und Werk Oswald Teichmüllers zu gewinnen. Ziel beim Studium des Werkes war es dabei ebenso die Verbindung zur zeitgenössischen Forschung sichtbar werden zu lassen, wie den Auswirkungen von Teichmüllers Ideen in neueren Arbeiten nachzugehen.

Das Göttinger Seminar bestand aus Vorträgen von Hauser, Kneser, Opolka, Schappacher und Scholz, von denen die Abschnitte 1 bis 4 des folgenden Textes knappe schriftliche Ausarbeitungen sind.

Das Wochenendseminar in Bielefeld wurde von Heinz Helling ausgerichtet und enthielt Vorträge von R. Böhme, A. Duma, H. Helling, H. Kriete und N. Schappacher. Der Hauptgegenstand hier waren Teichmüllers Arbeiten zu dem, was heute Teichmüllertheorie heißt. Einen Vortragenden über Teichmüllers Arbeiten zur Werteverteilungslehre zu finden war im Vorfeld des Wochenendes gescheitert.

Von den Bielefelder Vorträgen war der unten folgende Abschnitt 5 leicht auszuarbeiten; die übrigen sollten in einem umfassenden 6. Abschnitt dargestellt werden, wobei zunächst auch geplant war, die Lücke bei der Werteverteilungslehre zu schließen. Aus verschiedenen Gründen schob sich die Ausführung dieses ehrgeizigen Vorhabens immer mehr hinaus. Schließlich erklärte sich Frank Herrlich dankenswerter Weise bereit, den unten abgedruckten 6. Abschnitt über die Teichmüllertheorie bei Teichmüller beizusteuern. Dabei benutzte er zwar die Bielefelder Vortragsmanuskripte, verzichtete aber bewußt darauf, alle in den Abschnitten 1–5 noch nicht besprochenen Arbeiten Teichmüllers abzudecken.

Obwohl demnach im folgenden nicht das komplette Werk Oswald Teichmüllers besprochen wird, glauben wir doch eine Ausarbeitung vorzulegen, die wesentlichen Aspekten von Teichmüllers Leben und Werk sorgfältig nachgeht. Vielleicht veranlaßt diese Veröffentlichung Kenner des Werkes dazu, ergänzende Beiträge zu Papier zu bringen!

Im Anhang publizieren wir zwei bislang unbekannte Briefe Oswald Teichmüllers: vom 3. 11. 1933 an Edmund Landau (Erläuterung des studentischen Boykotts der Landau-Vorlesung), und vom 7. 12. 1938 an einen ehemaligen Göttinger Kommilitonen. Der erstgenannte Brief wurde uns erst während der Drucklegung aus dem Nachlaß E. Kamke zugänglich.

November 1991 N. Schappacher, E. Scholz

Verweise in spitzen Klammern ⟨..⟩ beziehen sich auf die Numerierung von Teichmüllers Arbeiten in seinen „Gesammelten Abhandlungen" [Teichmüller 1982]. Dieses Inhaltsverzeichnis der „Gesammelten Abhandlungen" geben wir der Vollständigkeit halber im Anhang *wieder.*[1]*) Eckige Klammern [..] verweisen auf die Literaturliste am Ende, runde (..) auf die ebenfalls am Ende nachgewiesenen biographischen Quellen. Im Quellenverzeichnis sind auch die benutzten Siglen erklärt.*

1 Biographie

Paul Julius Oswald Teichmüller wurde am 18. 6. 1913 in Nordhausen am Harz geboren.[2]) Er war einziges Kind des im ersten Weltkrieg verletzten und frühzeitig verstorbenen Webers Julius Adolf Paul Teichmüller (1881–1925), der eine eigene Werkstatt im nahegelegenen St. Andreasberg betrieb,[3]) und von Gertrud Teichmüller, geborene Dinse (1875–1954). Oswald wuchs zunächst im dörflichen St. Andreasberg auf, besuchte dort die Grundschule (Ostern 1919–1922) und dreieinhalb Jahre lang die Hauptschule, bevor er kurz nach dem Tode des Vaters (im Herbst 1925) zu einer Tante nach Nordhausen zog, um auf das dortige Realgymnasium überzuwechseln, das er bis zum Abitur besuchte (2/1931). Oswald war den Berichten seiner Mutter nach ein aufgeweckter Junge mit Zeichen intellektueller Frühentwicklung und sprachlich – auch in den klassischen Sprachen – sehr begabt.[4]) Übereinstimmend wird er als ebenso intellektueller wie impulsiver Mensch geschildert. Dieser Bericht kann auf die Charakterisierung der gespannten und widersprüchlichen Persönlichkeit nicht weiter eingehen; er wird sich ganz auf eine Darstellung der belegbaren Ereignisse des Lebens und der wissenschaftlichen Entwicklung Oswald Teichmüllers beschränken.

1.1 Studium und Beginn der Fachschaftsarbeit (1931–1933)

Oswald Teichmüller begann sein Studium der Mathematik im Sommersemester 1931 mit Grundvorlesungen über Analysis bei R. Courant und Analytische Geometrie bei O. Neugebauer. Insbesondere bei Courant, der seine Vorlesungen häufig improvisierte, fiel Teichmüller durch Zwischenfragen und Einwände auf, die Courant zur Korrektur oder Verbesserung von Beweisen zwangen.[5]) Noch während seines ersten Semesters knüpfte Teichmüller neben fachlichen auch politische Kontakte. Aus einem kleinbürgerlichen Elternhaus stammend, dessen materielle Sicherheit durch den frühen Tod des Vaters zusätzlich in Frage gestellt war, wandte er sich wie viele seiner Kommilitonen in der Endkrise der

---

[1]) Übrigens entspricht die Reihenfolge der Arbeiten in den „Gesammelten Abhandlungen“ nicht immer der des Entstehens der Arbeiten. So entstand z. B. ⟨7⟩ vor der Arbeit ⟨6⟩ und ⟨11⟩ vor ⟨10⟩. Auch wir kennen aber die Entstehensdaten nur in Einzelfällen und haben uns nicht weiter bemüht, eine chronologisch zuverlässige Liste der Veröffentlichungen Teichmüllers zu erstellen.

[2]) In den Gesammelten Abhandlungen ist fälschlicherweise der 14. 6. 1913 angegeben. Das wird durch alle Dokumente, einschließlich der Meldeakten widerlegt.

[3]) Als Beruf seines Vaters gab Teichmüller stets „Fabrikant“ oder „Fabrikbesitzer“ an. Das war aber nach allen Berichten über die materielle Stellung der Familie ein Euphemismus.

[4]) Seine Mutter gab an, daß er mit dreieinhalb Jahren ohne Anleitung Lesen und Rechnen lernte (G. Teichmüller 3. 12. 1949). Seine Kompetenz im Lateinischen und Griechischen wird von Weber (3. 3. 1933) und Kleinsorge (2. 3. 1985) hervorgehoben.

[5]) Übereinstimmende Darstellung bei Wittich (2. 6. 1983) und Kleinsorge (2. 3. 1985); vgl. (Courant 1. 3. 1933).

Weimarer Republik den Nationalsozialisten zu. Nach Ablauf des ersten Semesters trat er der NSDAP bei und wurde in der SA aktiv.[6])

Das hielt ihn jedoch keineswegs von einem intensiven Studium der Mathematik (bei Courant, Neugebauer, Herglotz, Landau, Weyl, Lewy, u. a.[7])) ab. Er setzte sich frühzeitig eine wissenschaftliche Tätigkeit zum Ziel und brachte dabei der reinen Mathematik das größte Interesse entgegen.[8])

Mit der Machtübernahme der Nazis wurden die Deutsche Studentenschaft[9]) gleichgeschaltet und die Fachschaftsvorstände durch Nazi-Studenten besetzt. Die Fachschaftsleiter wurden vom Göttinger „Studentenschaftsführer" ernannt. Teichmüller wurde stellvertretender Leiter der Mathematisch-Naturwissenschaftlichen Fachschaft und Leiter der Fachabteilung Mathematik.[10]) Ziel der von den NS-Studenten vertretenen Politik war zunächst die personelle „Säuberung" der Institute von republikanisch eingestellten Wissenschaftlern und solchen jüdischer Herkunft. In der Göttinger Mathematisch-Naturwissenschaftlichen Fakultät nahm diese Seite nationalsozialistischer Ideologie und der damit verbundene Zugriff des Staates auf das Wissenschaftssystem besonders katastrophale Dimensionen an.[11])

1.2 Kampf um die „Gleichschaltung" des Instituts (1933/34)

Die studentische Agitation richtete sich innerhalb der Mathematik insbesondere gegen Landau und Courant. Während bei Landau der abstrakte und formale Stil der mathematischen Darstellung als Stein des Anstoßes erschien, richteten sich bei Courant die Angriffe insbesondere auf seine wissenschaftsorganisatorisch zentrale Stellung im Institut. Courant hatte in den 20er Jahren die Institutsleitung übernommen und die schon auf Klein zurückgehende Tradition einer Integration der theoretischen und angewandten Zweige der Mathematik erfolgreich fortgesetzt. Die NS-Studenten griffen nun Courants dominierende Stellung in der Organisation des Instituts unter dem Schlagwort der „Courant-Clique" an, in dem sie politische Verdächtigungen und antijüdische Ressentiments amalgierten und zu einem Feindbild verdichteten.

Um keiner Negativheroisierung Teichmüllers und seiner studentischen Mitstreiter das Wort zu reden, ist zu bemerken, daß der nun folgende NS-Aktionismus unter der Hülle der Fachschaft in den Jahren 1933/34 nur insoweit seine fatale Wirkung entfalten konnte, als er mit dem institutionellen Eingriff des Nazi-Staates parallel lief.[12]) Das war im Falle des Göttinger Mathematischen

---

[6]) Zeitpunkt des Parteibeitritts 14. 7. 1931 (NSDAP Ortsgruppe Göttingen 10. 10. 1938).

[7]) (Teichmüller 14. 6. 1935)

[8]) (Kleinsorge 2. 3. 1985)

[9]) Ungefähr vergleichbar dem heutigen ASTA; nicht zu verwechseln mit der Parteiorganisation „NS-Studentenbund".

[10]) Es gab Fachabteilungen Mathematik/Physik (später getrennt), Chemie, Biologie, Psychologie. Fachschaftsleiter wurde bei dieser Gelegenheit Heinrich Kleinsorge.

[11]) Siehe dazu [Schappacher 1987], [Schappacher/Kneser 1990 § 3.3]. Hinweise auf Verschiebungen in späteren Phasen finden sich bei [Mehrtens 1983].

[12]) H. Mehrtens [1985] schildert eine analoge Situation im Falle Bieberbachs, dessen Bedeutung innerhalb der Mathemathik des Dritten Reiches nach 1935 deutlich abnahm.

Institutes nur für die erste Phase der „Gleichschaltung", der Zerschlagung der Hilbert-Kleinschen Tradition im Jahre 1933, gegeben, nicht mehr in der zweiten Phase, der Neuzusammensetzung des Instituts, die mit der Berufung Hasses im Sommersemester 1934 begann. Die Vorgänge 1933/34 am Institut sind detailliert in [Schappacher 1987] aufgezeichnet. An dieser Stelle interessiert lediglich die Rolle der Mathematisch-Naturwissenschaftlichen Fachschaft und Oswald Teichmüllers.

Im März und April 1933 beurlaubte das Ministerium unter Hinweis auf die nationalistische, antijüdische Agitation der SA-Studenten einen großen Teil des Lehrkörpers des Mathematischen Instituts Göttingen oder „bat" sie, ihre Lehre bis zur endgültigen Klärung der Lage einzustellen. So wurde das antirepublikanische und antijüdische „Gesetz zur Wiederherstellung des Berufsbeamtentums" vom 7.4.1933 unter Berufung auf die Unruhe innerhalb der Studentenschaft sehr weit ausgelegt [Schappacher 1987, § 1.3].

Ein zweites Mal wurden die Fachschaftsaktionen zum Hebel der „Gleichschaltung" im Inneren des Instituts, als E. Landau seine auf Anweisung des Dekans im Sommer an W. Weber (seinen habilitierten Assistenten, der ein überzeugter Nationalsozialist war) übertragene Vorlesung über Differential- und Integralrechnung zu Beginn des Wintersemesters wieder selber fortsetzen wollte. Über Fachschaftskanäle wurden zu Semesterbeginn die in der SA organisierten Studenten für einen Vorlesungsboykott am 2. 11. 1933 zusammengetrommelt.[13]) Sie blockierten den großen Hörsaal gegenüber potentiellen Hörern. Teichmüller trat dabei Landau gegenüber als Sprecher der Boykotteure auf, und erklärte, daß deutsche Studenten - zumindest der Anfangssemester - nicht mehr von „fremdrassigen" Wissenschaftlern ausgebildet werden sollten. Er versicherte zwar Landau seiner Hochschätzung und räumte ein, daß Landau seiner Ansicht nach „besonders geeignete" Studenten in fortgeschrittenen Vorlesungen weiterhin „rein international mathematisch-wissenschaftlich" ausbilden könne; wies aber darauf hin, daß die Mehrheit seiner „Kameraden" auch dies für „untragbar" halte. Landau - von den Vorgängen sicher tief getroffen - zog die Konsequenz, mit Schreiben vom 5. 11. 1933 seine Entlassung vorzuschlagen.[14]) Am 7. 2. 1934 wurde er in den Ruhestand versetzt.

---

[13]) (Kleinsorge 2. 3. 1985)

[14]) Die Tatsache, daß wirklich Teichmüller den Boykott leitete und dann Landau die Gründe dafür persönlich erläutert, wird belegt durch den Brief (Courant 12. 1. 1934): „Über die Landauaffaire sind Sie ja schon unterrichtet. Wissen Sie auch, daß Teichmüller der Anführer der boykottierenden Studenten war?" Sowie durch einen Brief der Mutter (Gertrud Teichmüller 20. 11. 1948): „... Und Oswald? Der hat in Bieberbachs Horn geblasen, lauter als er. Und 1933 hat O[swald] verhindert, daß Studenten in eines alten verdienten Juden Vorlesung gingen und hat es d[em] Juden zu m[einem] Entsetzen sogar schriftlich gegeben, daß ‚wir' beim Juden nicht mehr hören wollen. Vorm Examen. Dies Schriftstück wird weiterleben." - Frau Teichmüller unterschätzte hier zunächst die bewundernswerte Fairness Landaus gegenüber dem jungen Studenten: Er gab zwar eine Abschrift von Teichmüllers Brief an das Ministerium weiter, verschwieg dabei jedoch den Namen des Autors. Diese Abschrift (wie auch das Original des Briefes) schien bisher verloren. Durch Zufall erhielten wir aber während der Drucklegung dieses Artikels ein Exemplar der Briefabschrift aus der ‚Handakte Landau' des Nachlasses Erich Kamkes (der mit Landau schon im Sommer 1933 in Verbindung stand und Anfang 1934 eine Solidaritätsaktion für Landau initiierte, die dann C. L. Siegel in die Hand nahm). Der Text von Teichmüllers Brief ist im Anhang abgedruckt. In derselben ‚Handakte Landau' Kamkes findet sich

Nach diesen Anfangserfolgen für die versuchte „Gleichschaltung“ des Instituts kam nun der zweite, schwierigere Teil einer den Nazis genehmen Neubesetzung (zumindest eines Teils) der vakanten Stellen. Der mittlerweile zum kommissarischen Institutsleiter avancierte W. Weber versuchte nach anfänglilich tiefgreifende Schäden herrufen mußte.[19]) Seine mathematische Kompetenz und Aufrechterhaltung internationaler Verbindungen trugen wesentlich dazu bei, daß das Göttinger Mathematische Institut in der Folgezeit nicht zur Bedeutungslosigkeit herabsank - wenn auch die Klein-Hilbertsche Tradition durch die Schärfe des erzwungenen Eingriffs zunächst einmal unwiderruflich von Göttingen abgetrennt war.

1.3 Promotion und Assistenzzeit in Göttingen (1934–1936)

Die Aktivitäten während der selbstproduzierten Wirren der Jahre 1933/1934 hielten Teichmüller keineswegs von einer vollen Weiterführung seines Studiums ab. Noch im Wintersemester 1933/34 nahm er an einem Seminar Rellichs (den er im übrigen der „Courant-Clique" zurechnete[20])) über Operatorentheorie teil; dort entstand die Idee für seine Doktorarbeit (vgl. Abschnitt 2 unten). Schon gegen Ende Oktober 1934 legte er dem weniger als ein halbes Jahr vorher noch scharf bekämpften Hasse ein erstes Manuskript vor, um abzuklären, ob er diese Ideen zu einer Dissertation ausbauen könnte. Teichmüller akzeptierte Hasse also sehr schnell (vielleicht von vorneherein) fachlich, jedoch nicht politisch. Nach einer Ausarbeitung des Rohmanuskripts zu seiner Dissertation ⟨1⟩ und bestandener Doktorprüfung (am 26. 6. 1935 „mit Auszeichnung") wurde er kaum ein Jahr nach Hasses Ankunft in Göttingen zum Dr. phil. promoviert (Aushändigung der Urkunde am 15. 11. 1935).

Die Stabilisierung des Instituts nach der Berufung Hasses brachte auch eine Verlagerung des Schwerpunktes der Fachschaftsaktivitäten Teichmüllers mit sich. Unter leitender Mitarbeit E. Witts, der nach Hasses Ankunft Assistent geworden war, sowie Teichmüllers von seiten der Fachschaft bildete sich eine ständige, rein fachliche „Arbeitsgemeinschaft der Fachschaft", die von Hasse regelmäßig besucht und inhaltlich geprägt wurde. Daneben gab es natürlich weiterhin allgemeinpolitische Indoktrinierung der Studenten durch die Fachschaft, die nun aber vorwiegend auf in größeren Abständen abgehaltene Wochenendlager im nahen Rittmarshausen ausgelagert wurde.

Die Arbeitsgemeinschaft der Fachschaft entwickelte schnell den Charakter eines hochkarätigen Forschungsseminars. So entstand aus ihr vom Wintersemester 1934/35 bis zum Sommersemester 1936 eine Reihe von Forschungsarbeiten zur Strukturtheorie assoziativer Algebren, zyklischer p-Algebren und der Theorie diskret bewerteter Körper, darunter allein 6 von Teichmüller (vgl. Abschnitt 3 unten).

Parallel zur letztgenannten Arbeitsgemeinschaft hörte Teichmüller im Sommer 1936 eine Vorlesung E. Ullrichs über Werteverteilungslehre und ergänzte sein unter Hasses Einfluß entstandenes algebraisches Interesse um eines innerhalb

[19]) Im Falle von Bieberbachs Vorgehen in der DMV war diese Schwelle offenbar überschritten; so war Hasse entscheidend an der Eindämmung des Bieberbachschen Versuchs beteiligt, der DMV seine „Führerschaft" aufzuzwingen [Mehrtens 1985].

[20]) Laut einer von Teichmüller für W. Weber erstellten Liste mit Kurzbeurteilungen von Mathematikern, die im Frühjahr 1934 am Göttinger Institut arbeiteten oder (wie Hasse) kurz vor ihrer Berufung standen (Weber 1940, Anlage 64).

der Funktionentheorie. Im folgenden Wintersemester hörte er bei R. Nevanlinna, der für einen einjährigen Gastaufenthalt nach Göttingen gekommen war, und begann mit dem Studium der Arbeiten Grötzschs über quasikonforme Abbildungen ⟨9⟩, S. 177. In dieser Zeit entstanden die ersten Publikationen zur Funktionentheorie mit Themen aus der Werteverteilungslehre ⟨8⟩ und der quasikonformen Abbildungen ⟨9⟩.

Parallel zu dieser fachlichen Erweiterung seines Horizonts bereitete Teichmüller im Herbst 1936 seinen Wechsel zu Bieberbach nach Berlin vor. Vahlen sicherte ihm zu diesem Zweck ein Stipendium des Ministeriums für Wissenschaft, Erziehung und Volksbildung zu.[21]) Bei der zunächst in einem Schreiben an Bieberbach ausgesprochenen Begründung seines Wunsches, nach Berlin zu gehen, zeigte Teichmüller erneut, daß er Hasse lediglich auf fachlicher Ebene akzeptierte, politisch aber weiterhin ablehnte, sah er doch durch diesen die volle „Gleichschaltung“ des Göttinger Instituts auf absehbare Zeit verhindert.[22]) So hatten weder Hasse noch im übrigen der Göttinger NS-Dozentenbund[23]) etwas gegen Teichmül-

1.4 Teichmüllers Verständnis von „Deutscher Mathematik“

Der Wechsel zu Bieberbach bedeutete nicht, daß Teichmüller dessen Ideologie der „Deutschen Mathematik“ voll übernahm. Bieberbach hatte bekanntlich 1933/34 versucht, den Eingriff des Nazi-Staates in das Wissenschaftssystem von innen heraus zu legitimieren und gleichzeitig zur Durchsetzung eines Programms typenpsychologisch verbrämter rassistischer Ausrichtung („Deutsche Mathematik“) zu nutzen. Dabei scheiterte er allerdings schon im Frühherbst 1934 mit seinem zu betreiben, für sinnvoll; sie beschäftigten sich jedoch nur sporadisch damit – etwa anläßlich der „Fachschaftslager" in Rittmarshausen – und allem Anschein nach, ohne sich an dem von Bieberbach geforderten direkten Eingriff des ideologischen Programms in die Disziplin zu beteiligen.[25]) Das bedeutete allerdings keine [illegible] müller verstand darunter eher ein allgemeinpolitisches Programm zur Durchsetzung der Naziideologie unter Mathematikern und der Eroberung der „Führung" mathematischer Institutionen durch Mathematiker nationalsozialistischer Gesinnung als ein „Programm" im Bieberbachschen Sinne. Teichmüller trennte also anders als Bieberbach die fachlichen und die politischen Ebenen deutlich gegeneinander ab.

Das führte jedoch dazu, daß er mit der Konzentration der Gruppe der „Deutschen Mathematiker" um Bieberbach und der damit verbundenen Frontstellung zwischen dem Berliner und dem Göttinger Mathematischen Institut in der zweiten Hälfte der 1930er Jahre nicht recht glücklich wurde. Ein im Dezember 1938 an einen ehemaligen Göttinger Kommilitonen geschriebener Brief hinterläßt den Eindruck einer persönlichen und fachlichen Isolierung in Berlin, dergegenüber er mit einer gewissen Nostalgie an die Göttinger Zeit zurückdachte (Teichmüller 7. 12. 1938 – vgl. Anhang). So bedauerte er ausdrücklich die Spannung zwischen dem Berliner und dem Göttinger Mathematischen Institut, die durch die personelle Konzentration der „Deutschen Mathematiker" in Berlin fast bis zur Feindschaft angestiegen sei, und fuhr fort:

Selbst falls im letzten Satz andeutungsweise eine Kritik an Bieberbachs Vorgehen liegen sollte, zeigt diese Passage, daß Teichmüller auch Ende 1938 lediglich die Vermischung der politischen und der fachlichen Ebene, wie sie von Bieberbach praktiziert wurde, ablehnte. Das hinderte ihn jedoch keineswegs, an einer hartnäckigen und agressiven Vertretung der „Deutschen Mathematik" in seinem Sinne festzuhalten.

1.5 Wissenschaftliche Entwicklung in Berlin (1937–1939)

Mit seiner Ankunft in Berlin im April 1937 konzentrierte sich Teichmüller auf die Ausarbeitung der schon in Göttingen begonnenen Habilitationsschrift *Untersuchungen über konforme und quasikonforme Abbildungen* ⟨13⟩.[27]) Noch vor Jahresende 1937 konnte er sie abgeben und habilitierte sich Anfang 1938 bei Bieberbach (Urkunde vom 22. 3. 1938).

In dieser Arbeit schloß er an Ergebnisse und Methoden von Nevanlinna, Ahlfors, Grötzsch und seiner eigenen Göttinger Arbeit ⟨9⟩ an. Er studierte Ringgebiete und „Vierecke" in der komplexen Ebene, beides Klassen Riemannscher Flächen mit eindimensionalem Modulraum, deformierte Flächen derselben Klasse durch quasikonforme Abbildungen ineinander und entwickelte Abschätzungen, wie sich der Modul des quasikonformen Bildes mit (Schranken von) Dilatationsquotienten der Abbildung verändert (vgl. Abschnitt 6 unten). Das Ergebnis war originell, aber nicht spektakulär. Bieberbach hob den ersten Aspekt besonders hervor, nicht ohne einen kleinen Seitenhieb gegen die von Hasse geprägte Periode in Teichmüllers Schaffen.[28])

Bieberbach sollte aber mit seiner Betonung der Originalität in Teichmüllers funktionentheoretischen Arbeiten mehr recht behalten, als dessen Publikationen bis Anfang 1938 anzusehen war. Teichmüller entdeckte nämlich, noch ehe ein weiteres Jahr vergangen war, die Möglichkeit einer äußerst ergiebigen Anwendung quasikonformer Abbildungen beim Studium des Modulproblems Riemannscher Flächen. Ende 1938/Anfang 1939 schrieb er eine große Arbeit ⟨20⟩ für die Abhandlungen der Berliner Akademie der Wissenschaften mit einer heuristischen Erforschung dieses Problemfeldes nieder. Durch sie eröffnete er einen neuen, äußerst fruchtbaren Zugang zu einem klassischen Problem der Funktionentheorie, das vor ihm schon B. Riemann, F. Klein, H. Poincaré, R. Fricke u. a. behandelt hatten. Teichmüllers Zugang wurde nach dem Krieg von L. Ahlfors, L. Bers u. a. zu einem einflußreichen Forschungsprogramm der Funktionentheorie mit Ausstrah-

---

[27]) Nach Wittich kannte Teichmüller „die meisten Resultate dieser Arbeit" schon in seiner Göttinger Zeit (Wittich 2. 6. 1983).

[28]) „Der Habilitand hat mit dieser seiner zweiten funktionentheoretischen Arbeit [es war die dritte, E.S.] eine bedeutende Leistung in der Uniformisierungstheorie geliefert. Vorher galten seine Arbeiten der Algebra. Dort fiel weniger als in der neuen funktionentheoretischen Arbeit die Originalität der Fragestellung auf. Es handelt sich in den zahlreichen algebraischen Arbeiten mehr darum, verzwickte unerledigte Fragen aus fremden Arbeitsgebieten zur Erledigung zu bringen oder einen verworrenen Fragenkreis zu ordnen. Dabei hat der Habilitand eine seltene Findigkeit im Aufspüren der tatsächlichen Sachlage und eine seltene Kraft der Beweisführung geliefert." (Gutachten Bieberbach KUB).

lung in andere Gebiete ausgebaut, das nun seinen Namen trägt (vgl. Abschnitt 6 unten).

Teichmüllers Arbeit ⟨20⟩ zeichnete sich durch ihren explorativen, programmatischen Charakter aus. Sie enthielt wenig Beweise; den gegebenen Begründun- [illegible]

sches Argument oder einen Beweis darstellen sollen – in der Mehrzahl der Fälle trifft wohl das erstere zu. Teichmüller sah die Publikation einer solchen Erkundung der Zusammenhänge trotzdem als sinnvoll an, lieferte sie doch den Ausgangspunkt für eine weitere Ausarbeitung der angedeuteten Theorie. So proklamierte er durchaus im Sinne traditioneller – aber bei Publikationen selten akzeptierter – Heuristik als spätere Aufgabe:

„Beweisen heißt, den Gedankengang auf den Kopf stellen." ⟨20⟩, Seite 338.

Wahrscheinlich versuchte er, andere Mathematiker zur Mitarbeit an seinem Programm zu gewinnen. Darüber gibt es aber bis auf wenige Ausnahmen kaum Überlieferungen. Jedoch wurde jeder Ansatz in diese Richtung durch die bald erfolgende Mobilisierung zur Wehrmacht und den beginnenden Krieg nahezu unmöglich gemacht.[29])

Der Durchbruch zu einem äußerst gehaltvollen Forschungsprogramm der Funktionentheorie hatte nicht zur Folge, daß Oswald Teichmüller seine frühere Beschäftigung mit algebraischen Fragen etwa ganz aufgegeben hätte. Im Gegenteil publizierte er unter anderem 1939 eine Arbeit über die Bedeutung des Auswahl-

April desselben Jahres am Einmarsch in Norwegen und der nachfolgenden Besetzung teil.[32])

Eine militärische Karriere war jedoch nicht sein Anliegen. Trotz seines Bildungshintergrundes, SA- und Parteizugehörigkeit kam er Anfang 1941 als Gefreiter zurück[33]) – kein Wunder, nützte er doch die verbleibende freie Zeit und seinen Urlaub dazu, weiter mathematisch zu arbeiten. Bieberbach schrieb im März 1941 an das Ministerium, daß Teichmüller während seiner Dienstzeit als Soldat „... nicht weniger als 3 treffliche und umfangreiche Arbeiten in Druck gegeben ...“ habe.[34]) Damit meinte er wahrscheinlich die Arbeiten zur Funktionentheorie ⟨23, 24, 25⟩.

[illegible]

tion der erweiterten Version eines mathematischen Briefes an Hasse mit *Drei Vermutungen über algebraische Funktionenkörper* ⟨27⟩ (vgl. Abschnitt 5 unten). Teichmüllers Forschungsinteresse ging also trotz der beschwerlichen Umstände über die unmittelbare Verfolgung seines Forschungsprogramms von 1938/39 hinaus. Dessen Ausführung gestaltete sich allerdings schwieriger, als er vorher wohl gemeint hatte.[35])

Im Laufe des Jahres 1941 wurde Teichmüller zum Oberkommando der Wehmacht (OKW) nach Berlin abkommandiert, um dort wie andere Mathematiker in der Decodierung zu arbeiten.[36]) In dieser Zeit bemühte sich Bieberbach um eine begrenzte Freistellung Teichmüllers zur Abhaltung von Lehrveranstaltungen an der Universität.[37]) Sehr wahrscheinlich fanden im Sommer 1942 die einzigen (selbstverantwortlichen) Lehrveranstaltungen Teichmüllers statt.[38]) In jedem Falle nutzte er diese Zeit zu weiteren wissenschaftlichen Arbeiten, darunter einer mit einem Existenzbeweis extremaler quasikonformer Abbildungen für geschlossene Riemannsche Flächen ohne ausgezeichnete Punkte ⟨29⟩.

Seine letzte wissenschaftliche Veröffentlichung über *Veränderliche Rie-*

diesmal mit der Fragestellung, wie unter dem Rückgriff auf schon von Riemann verwendete Methoden zur lokalen Parametrisierung Riemannscher Flächen diese mit einer analytischen Struktur versehen werden können (vgl. Abschnitt 6 unten).

1.7 Meldung zum erneuten Frontdienst und Tod (1943)

Im Februar 1943, dem Monat des sowjetischen Sieges bei Stalingrad, mobilisierte die deutsche Seite neue zusätzliche Kräfte für die Ostfront („Brunhilde-Aufruf“). Teichmüller, der schon im Sommer vorher Andeutungen gemacht hatte, sich von der relativ sicheren Position beim OKW wieder an die Front zurückversetzen lassen zu wollen,[39]) leistete diesem Aufruf Folge. Er wurde im Mai 1943 in eine schnell zusammengewürfelte Einheit eingegliedert,[40]) die bei einer im Frühsommer geplanten Großoffensive im Raum Kursk als Kanonenfutter benötigt wurde.[41])

Teichmüller wurde im Juni/Juli 1943 auf der Krim zum Unteroffizier ausgebildet und erhielt im August noch einmal Heimaturlaub. Während dieser Zeit war die Anfang Juli eröffnete deutsche Offensive schon gebrochen und völlig in die Defensive gedrängt worden. Teichmüllers Einheit war Ende August aus ihren Stellungen bei Charkow geworfen, Anfang September eingeschlossen und bis auf kleine Reste aufgerieben worden - genau in den Tagen, als Teichmüller seine Rückreise vom Heimaturlaub antrat. Die versprengten Reste versuchten noch einmal, sich bei Poltawa zusammenzuschließen, wo Teichmüller wahrscheinlich seine Einheit hätte treffen sollen.[42]) Das gelang in der Rückzugsunordnung jedoch nicht. Teichmüllers Feldpostnummer wurde aufgelöst, er selber sollte einer anderen Einheit eingegliedert werden.[43]) Ob dies je geschah, ist unklar. Wie Zehntausende anderer ging er in den aussichtslosen Rückzugsgefechten der

---

[39]) (Kleinsorge 2. 3. 1985). Natürlich sind die verschiedenartigsten Motive für die Frontmeldung denkbar. Es liegen aber keine schlüssigen Quellen oder Berichte von Zeitzeugen darüber vor.

[40]) Die 355. Infanterie-Division, Grenadier Regiment 867 (Auskunft Bundesarchiv, Abt. Militärarchiv, vom 5. 2. 1985 auf Grundlage der von seiner Mutter genannten (10. 1. 1951) letzten Feldpostnummer 59428 E).

[41]) Hitler setzte dabei - gegen den Rat des realistischeren Teils der militärischen Führung - alles auf die Karte einer von neuer Panzertechnik unterstützten Großoffensive bei Kursk, um noch einmal die Initiative an der sowjetischen Front an sich zu reißen. Gestützt auf detaillierte Aufklärung der gegnerischen Absichten erwartete die sowjetische Führung genau dies und konnte aufgrund von

geschlagenen Invasionarmee im Dniepr-Gebiet zugrunde. Ort, nähere Umstände und genaues Todesdatum sind unbekannt.[44])

Erhard Scholz

2 Dissertation: „Operatoren im Wachsschen Raum"

Sie entstand im Anschluß an Franz Rellichs Seminar (akademisches Jahr 1933/34) über Operatorentheorie. Als Schüler Courants war Rellich den nationalsozialistischen Studenten in Göttingen politisch suspekt.[45]) Das hinderte Teichmüller aber nicht, Mathematik bei ihm zu lernen. Teichmüllers Kommilitone und SA-Genosse Hermann Wachs, über dessen weitere mathematische Entwicklung nichts bekannt zu sein scheint, hatte offenbar im Zusammenhang mit Rellichs Seminar die Idee, eine Verallgemeinerung des Hilbertraumes mit den Quaternionen $\boldsymbol{H}$ als Skalarbereich zu betrachten. Teichmüller entwickelte daraufhin selbständig, aber in enger Anknüpfung an Rellichs Darstellung, bis Herbst 1934 die Operatorentheorie dieser von ihm so genannten „Wachsschen Räume". Zu dieser Zeit war Rellich in Göttingen gerade entlassen worden.[46]) Teichmüller gab sein erstes Manuskript dem neuen Institutsdirektor Hasse, der es an G. Köthe (Münster) zur Begutachtung schickte. Dieser begleitete die Arbeit kritisierend und begutachtend bis zur Endfassung im Frühjahr 1935, obwohl er selber Rellich für den geeignetsten Gutachter hielt.[47]) Hasses Urteil über die Dissertation war schließlich *summa cum laude.* Das Rigorosum bestand Teichmüller am 26. 6. 1935 *mit Auszeichnung,* geprüft von Hasse, Herglotz und Pohl.[48])

Den leichteren ersten Teil der Arbeit, bis zur Übertragung des Spektralsatzes für selbstadjungierte Operatoren, hatte auch Y. Y. Tseng in einer von E. H. Moore angeregten unveröffentlichten Dissertation (Chicago 1933) erledigt – anscheinend wußten weder Teichmüller noch Köthe davon.[49]) Die wichtigste neue Schwierigkeit bei der Fortsetzung hermitescher Operatoren im „Wachsschen Raum" entsteht dadurch, daß die Operatoren $\lambda \cdot E$, für $\lambda \in \boldsymbol{H}$, nur für $\lambda \in \mathbb{R} = \boldsymbol{Z}(\boldsymbol{H})$ linear sind. So kann man die im Hilbertraumfall üblichen Defektindizes $\dim ker(A^* \pm iE)$ nicht ohne weiteres definieren. Teichmüller zieht hier Darstellun-

---

[44]) Die detaillierteste Information, die über Teichmüllers Todesumstände zu erhalten ist, ist einem standardisierten Suchbericht des Deutschen Roten Kreuzes zu entnehmen: „Seit diesen Kampftagen (im September 1943, E.S.) werden zahlreiche Soldaten der 355. Infanterie-Division vermißt. Für einige von ihnen liegt die Aussage eines Rückkehrers vor, daß sie gefallen sind. Viele aber haben in dem unübersichtlichen Wald- und Sumpfgelände den Tod gefunden ... Es gibt keinen Hinweis dafür, daß der Verschollene in Gefangenschaft geraten ist; zumal er auch niemals in einem Lager gesehen wurde. Alle Feststellungen lassen nur die Schlußfolgerung zu, daß er gefallen ist". (DRK-Suchbericht, 16. 10. 1972)

[45]) In seiner eigenen kommentierenden Liste der Dozenten am Mathematischen Institut vom 30. 7.–1. 8. 1934 (Weber 1940, S. 212 und Anlage 64) trug Teichmüller bei Rellich unter „politische Einstellung" lakonisch „Courant clique" ein.

[46]) Siehe [Schappacher 1987, S. 357 und S. 367, Fußnote 133].

[47]) UBG, Nachlaß Hasse, Briefe von Köthe 1934/35. – MI, Hasse an Köthe, November 1933.

[48]) UAG, Promotion Teichmüller; No. 247/1753.

[49]) Zentralblatt **12** (1936) 408; **13** (1936) 117f.

gen von $\boldsymbol{H}$ in der Algebra der beschränkten Operatoren auf dem „Wachsschen Raum" heran und definiert so einen Defektindex $a \in \boldsymbol{Z}$, dessen Restklasse (mod 2) angibt, ob der Operator eine selbstadjungierte Fortsetzung besitzt oder nicht.

Die von Teichmüller behandelte Operatorentheorie im „Wachsschen Raum" taucht der Sache nach heute in einigen axiomatischen Grundlegungen der relativistischen Quantenmechanik auf. Vgl. hierzu [Jauch 1968], [Finkelstein et al. 1962], [Powers 1973].

Norbert Schappacher

3 Algebraische Arbeiten

3.0 Die Dissertation blieb Teichmüllers einziger Beitrag zur Funktionalschon in der Mitte des letzten Jahrhunderts zur Definition allgemeiner Potenzrestsymbole geläufig benutzt.

Das zentrale Resultat der Strukturtheorie ist, daß die absolut unverzweigten (d. h. p erzeugt das Bewertungsideal) Körper K der Charakteristik 0, mit Restklassenkörper $k^p = k$ wie oben, eindeutig durch k charakterisiert sind: das „kaufmännische Rechnen" in K bzgl. Teichmüllers Repräsentantensystem ist durch Witts Polynome gegeben. Verzweigte Körper entstehen durch Zerfällung von Eisenstein-Gleichungen. So bleibt am Ende die Fleißarbeit, die inseparablen Phänomene aufzuklären, die bei unvollkommenem Restklassenkörper auftreten. Teichmüller führt dabei, anscheinend als erster, den freilich naheliegenden Begriff der p-Basis ein.[53])

3.2 Stilistisch ist die Akademienote ⟨2⟩ einmalig in Teichmüllers *oeuvre* durch ihre bestechende Knappheit. Ihre Lektüre ist ein ungetrübter Genuß,[54]) im Gegensatz zu seiner sonst besonders in den rein inseparablen Passagen anderer Arbeiten mitunter ins Kraut schießenden Ausführlichkeit um der Präzision willen – vgl. ⟨6⟩, ⟨7⟩, ⟨10⟩ und ⟨11⟩, deren Gedankengänge hier nicht im einzelnen verfolgt werden. (Zu ⟨6⟩ vgl. aber 3.3 unten.)

Norbert Schappacher

3.3 *Verschränkte Produkte* wurden von Emmy Noether systematisch eingeführt,[55]) aber von Hasse in ihrem Namen propagiert.[56]) In ⟨3⟩ führt Teichmüller eine Verallgemeinerung des verschränkten Produkts ein, durch die sich insbesondere Skalarerweiterungen und Tensorprodukte verschränkter Produkte wieder als verschränkte Produkte schreiben lassen: Man läßt bei dem verschränkten Produkt mit Zentrum K,

$$(a_{\sigma,\tau}, L, G) = \bigoplus_{\sigma \in G} L u_\sigma, \qquad u_\sigma u_\tau = a_{\sigma,\tau} u_{\sigma\tau}$$

statt endlicher Galoiserweiterungen L/K mit Gruppe G beliebige kommutative separable K-Algebren L zu, auf denen eine Gruppe G mit $|G| = \dim L < \infty$ so

Im Sinne der eben geschilderten Theorie untersucht Teichmüller in ⟨4⟩ den Spezialfall der zyklischen Algebren: $G=\langle\sigma\rangle$, und beweist, daß die zyklischen Algebren von fester Dimension n^2 über K eine Gruppe bilden, die zu Hom $(\mathrm{Gal}(K_{\mathrm{sep}}/K), \mu_n)$ isomorph ist.

In ⟨6⟩ studiert Teichmüller eingehend einfache zentrale K-Algebren der Dimension p^{2n} über einem Körper der Charakteristik p. Er beweist insbesondere, daß jede solche „p-Algebra" ähnlich ist zu einem Produkt zyklischer Algebren. – Diese Aussage für beliebige zentral einfache Algebren über beliebigen Körpern ist viel schwieriger zu beweisen und wurde erst 1982 von Merkuriev und Suslin etabliert.

3.4 Zweimal noch veröffentlichte Teichmüller in seiner Berliner Zeit über Gegenstände der abstrakten Algebra: In der Note ⟨12⟩ von 1937 beantwortet er eine Frage van der Waerdens dahingehend, daß der Elementarteilersatz[57]) für Matrizen jedenfalls über jedem (nicht notwendig kommutativen) Ring gilt, in dem jedes Links- und jedes Rechtsideal ein Hauptideal ist. Lehrbuchartig ist dieser Satz Teichmüllers in [Jacobson 1943, chap. 3 § 7] dargestellt.

Martin Kneser, Norbert Schappacher

3.5 Teichmüllers Kozykel

In ⟨22⟩ untersucht Teichmüller u. a. das Problem, unter welchen Voraussetzungen sich, bei gegebener endlicher Galoiserweiterung K/k, eine (endlichdimensionale) einfache zentrale K-Algebra A so in eine einfache zentrale k-Algebra B einbetten läßt, daß A der Zentralisator $\mathscr{Z}_B(K)$ von K in B ist. Dies ist genau dann möglich, wenn die Klasse $[A]$ von A in der Brauer-Gruppe $\mathrm{Br}(K)$ im Bild der Abbildung $K\otimes_k : \mathrm{Br}(k)\to\mathrm{Br}(K)$ liegt. Die Automorphismengruppe $\mathrm{Aut}(K)$ operiert auf $\mathrm{Br}(K)$ durch Twisten der K-Struktur der Algebren. Teichmüller konstruiert nun einen Homomorphismus t: $\mathrm{Br}(K)^G\to H^3(G,K^*)$, so daß folgende Sequenz exakt wird (wobei $G=\mathrm{Gal}(K/k)$).

(3.5.1) $0\to\mathrm{Br}(K/K)\to\mathrm{Br}(k)\to\mathrm{Br}(K)^G\xrightarrow{t} H^3(G,K^*)$

Ist G zyklisch, so folgert Teichmüller aufgrund von $H^3(G,K^*)=H^1(G,K^*)=0$ die Lösbarkeit des ursprünglichen Problems.

Um t explizit zu beschreiben, sei $\mathrm{Aut}(K,A)$ der Stabilisator in $\mathrm{Aut}(K)$ der Klasse $[A]\in\mathrm{Br}(K)$, und $\mathrm{Inn}(A)$ bezeichne die Gruppe der inneren Automorphismen von A. Dann ist

(3.5.2) $1\to\mathrm{Inn}(A)\to\mathrm{Aut}(A)\to\mathrm{Aut}(K,A)\to 1,$

mit der Restriktion als dritter Abbildung, exakt. Andererseits hat man die exakte Sequenz

(3.5.3) $1\to K^*\to A^*\to\mathrm{Inn}(A)\to 1.$

---

57) Korrigiere den Druckfehler in diesem Wort in [Teichmüller 1982, S. VII, 195, 747].

Für $[A] \in \mathrm{Br}(K)^G$ ergibt sich somit ein Homomorphismus $G \to \mathrm{Aut}(A)/\mathrm{Inn}(A)$, indem man jedem $\sigma \in G$ die Nebenklasse einer beliebigen Fortsetzung $a(\sigma)$ von σ auf A zuordnet. Vertreter $b(\sigma, \tau) \in A^*$ für $a(\sigma)a(\tau)a(\sigma\tau)^{-1} \in \mathrm{Inn}(A)$ liefern dann einen 3-Kozykel auf G mit Werten in K^*:

$$f_A(\sigma, \tau, \varrho) = \frac{b(\sigma, \tau)b(\sigma\tau, \varrho)}{b(\tau, \varrho)^\sigma b(\sigma, \tau\varrho)} \qquad (\sigma, \tau, \varrho \in G).$$

Es ist $t([A]) = [f_A]$. Die Zykelklasse $[f_A]$ ist das Hindernis für die Existenz einer Gruppenerweiterung von G mit Kern A^*.[58]) Man erhält $[f_A]$ auch als Bild der durch (3.5.2) definierten Kozykelklasse $[c_A]$ in $H^2(G, A^*/K^*)$ unter der nichtabelschen Korandabbildung $\delta: H^2(G, A^*/K^*) \to H^3(G, K^*)$.[59])

In heutiger Sicht folgt (3.5.1) aus der entsprechenden Hochschild-Serre Spektralsequenz[60]) und t ist die Transgressionsabbildung $H^2(G_K, \bar{k}^*)^G \to H^3(G, K^*)$. Im Zahlkörperfall ist t surjektiv, und das ursprüngliche Problem ist genau dann lösbar, wenn $[K:k]$ gleich dem kleinsten gemeinsamen Vielfachen aller lokalen Grade ist.[61]) Deuring hatte in [Deuring 1936] Beispiele konstruiert, in denen dies nicht der Fall ist.

Mithilfe des Teichmüller-Kozykels konstruiert Hürlimann in [Hürlimann 1982] eine Familie von Del Pezzo-Flächen ohne Hasse-Prinzip. Allgemein liefert jedes Element von

$$H^n(G, K^*) = H^1(G, T_{n-1}(K)),$$

für einen geeigneten über K zerfallenden k-Torus T_{n-1}, eine k-Isomorphieklasse prinzipal homogener Räume für T_{n-1} mit K-rationalem Punkt. Im Zahlkörperfall, mit $n = 3$, erhält man also aus dem Teichmüller Kozykel eine Menge algebraischer Varietäten ohne Hasse-Prinzip, falls $[K:k]$ verschieden vom kgV der lokalen Grade ist. Z. B. liefert Hürlimanns Konstruktion für die Erweiterung $\boldsymbol{Q}(\sqrt{2}, \sqrt{q})/\boldsymbol{Q}$ mit $q \equiv 1 \pmod 8$ prim die folgende Familie von Del Pezzo-Flächen ohne Hasse-Prinzip (für $r \in \boldsymbol{Q}$).

$$x_1 x_4 = q x_2 x_3, \qquad x_5^2 - \frac{1}{2}(r+1)^2 x_4^2 = r(x_1^2 - q x_2^2 - 2q x_3^2)$$

Hans Opolka

58) Vgl. [Eilenberg-MacLane 1948, § 15]. – Für Beispiele von Erweiterungen K/k mit $H^3(G, K^*) = 0$ siehe [Hürlimann 1981, III § 2].

59) Siehe [Giraud 1971, S. 362]. – [Janusz 1978, § 1] beweist, daß $[c_A] = 0$ genau dann gilt, wenn $A = K \otimes_k B$ für eine zentraleinfache k-Algebra B ist.

60) Vgl. [Hochschild-Serre 1953].

61) Siehe [Artin-Tate 1967, S. 68/69], [Tate 1967, S. 198], [Janusz 1978, I § 2].

4 Auswahlaxiom

Teichmüllers Arbeit ⟨19⟩ ist keine beweistheoretische Abhandlung; vielmehr wird die praktische Anwendbarkeit des Auswahlaxioms und verwandter Prinzipien in der Algebra diskutiert. Die betrachteten Prinzipien sind:

A $\forall M \exists F(Fkt(F) \wedge \forall X \subseteq M(X \neq \emptyset \rightarrow F(X) \in X))$

B $\forall M \exists R(\forall x, y \in M(x = y \vee xRy \vee yRx) \wedge \forall x \in M \neg xRx \wedge \forall x, y, z \in M$
$(xRy \wedge yRz \,.\!\rightarrow\!.\, xRz) \wedge \forall X \subseteq M(X \neq \emptyset \rightarrow \exists x \in X \forall y \in X \neg yRx))$

Dies ist gerade der Wohlordnungssatz. Nach [Zermelo 1904] läßt sich in der Zermelo-Fraenkel-Mengenlehre die Äquivalenz der Prinzipien A und B herleiten:

$$\mathscr{ZF} \vdash A \leftrightarrow B.$$

C $\forall M \forall F: M \times \omega \rightarrow Pot(M)(\forall x \in M \forall n < \omega F(x, n) \neq \emptyset \rightarrow \forall x \in M \exists s \in {}^{\omega}M$
$(s(0) = x \wedge \forall n < \omega\, s(n+1) \in F(s(n), n)))$

Dieses Prinzip hat eine gewisse Ähnlichkeit mit dem sogenannten „axiom of dependent choices" - siehe [Bernays 1942]:

$\boldsymbol{DC_{\aleph_0}}$ $\forall M \forall b \in M \forall R(\forall x \in M \exists y \in M xRy \rightarrow \exists s \in {}^{\omega}M$
$(s(0) = b \wedge \forall n < \omega\, s(n)Rs(n+1)))$

In der Tat sind $\boldsymbol{C}$ und $\boldsymbol{DC_{\aleph_0}}$ äquivalent; man zeigt

$$\mathscr{ZF} \vdash C \rightarrow DC_{\aleph_0} \rightarrow DC^*_{\aleph_0} \rightarrow C,$$

wobei nach [Levy 1964],

$\boldsymbol{DC^*_{\aleph_0}}$ $\forall M \forall b \in M \forall R(\forall n \geqslant 1 \forall s \in {}^{n}M \exists y \in M sRy \rightarrow \exists s \in {}^{\omega}M$
$(s(0) = b \wedge \forall n < \omega\, s{\upharpoonright}(n+1)Rs(n)))$

Man beachte, daß Teichmüllers Arbeit drei Jahre vor [Bernays 1942] erschien.

Eine Teilmenge Φ von $Pot(M)$ heiße von endlichem Charakter, wenn $\forall X \subseteq M(X \in \Phi \leftrightarrow \forall Y \subseteq X(|Y| < \aleph_0 \rightarrow Y \in \Phi))$. Dann lautet das vierte von Teichmüller betrachtete Prinzip:

D *Jede nichtleere Teilmenge Φ von $Pot(M)$, die von endlichem Charakter ist, hat ein maximales Element.*

In der Literatur wird dieses Prinzip üblicherweise als das Lemma von Teichmüller-Tukey bezeichnet, weil Teichmüller in ⟨19⟩ und Tukey in [Tukey 1940] es unabhängig voneinander formuliert haben.

Teichmüller behandelt eine Reihe von Beispielen, die belegen sollen, daß alle in der Algebra vorkommenden Wohlordnungsschlüsse stets durch Anwendung von D umgangen werden können. Allerdings - und dieses Resultat wird in der Arbeit nach den Beispielen als „Überraschung" formuliert und bewiesen - gilt $\mathscr{ZF} \vdash D \rightarrow A$, und es ist übrigens leicht zu sehen, daß $\mathscr{ZF} \vdash B \rightarrow D$. Teichmüller weist aber darauf hin, daß der Beweis der Implikation $D \rightarrow A$ auf Mengen höherer

Mächtigkeit zurückgreifen muß. – In [Jech 1966] wird bewiesen, daß $AC_{\aleph_1}$ – und somit A – stärker ist als C.

Unabhängigkeitsresultate aus der Mengenlehre zeigen, daß A unerläßlich für eine „vernünftige“ Algebra ist. So konstruiert [Läuchli 1963] Permutationsmodelle, in denen, ohne A, z. B. Körper ohne algebraischen Abschluß oder Vektorräume ohne Basis existieren. Allerdings arbeitet Läuchli dort in einer Modifikation von $\mathscr{ZF}$, nämlich $\mathscr{ZFA}$, in der neben Mengen noch „Atome“ als Objekte zugelassen sind. Mit der Methode von [Jech-Sochor 1966] kann man aber jedes Permutationsmodell hinreichend genau in ein symmetrisches Modell einbetten und erhält dieselben Pathologien auch in $\mathscr{ZF}$, ohne A. – Die von einigen Mathematikern vertretene These, die jeweils benötigten Anwendungen der Algebra benützten A nicht, läßt sich immer nur von Fall zu Fall entscheiden. Vgl. etwa [Deligne 1980, 1.2.11].

Kai Hauser

5 Funktionenkörper

Die drei Arbeiten Teichmüllers zur Theorie der Funktionenkörper: ⟨27⟩, ⟨34⟩, sowie ⟨28⟩ (gemeinsam mit H. L. Schmid) sind von der damals aktuellen Forschung über die Arithmetik globaler algebraischer Funktionenkörper (erstes Stichwort: „Analogon der Riemannschen Vermutung“) ziemlich unabhängig.[62]) Sie stellen vielmehr Nebenprodukte seiner Beschäftigung mit Familien Riemannscher Flächen dar – vgl. Abschnitt 6 unten.

Die Arbeit ⟨28⟩ mit H. L. Schmid gibt einen neuen Beweis der auf [Weissinger 1938] zurückgehenden Funktionalgleichung der L-Funktionen (zu Charakteren) eines algebraischen Funktionenkörpers einer Veränderlichen über endlichem Konstantenkörper. Die Funktionalgleichung wird auf eine Formel zurückgeführt, in der ein gewisser Modul und sein „Duales“ vorkommen. Solche Dualitätsüberlegungen lagen Teichmüller damals nahe durch den Umgang mit der heute so genannten „Serre-Dualität“ über Riemannschen Flächen. Die besagte Formel bewies Schmid dann mit einem einfachen Trick aus der Theorie der Exponentialsummen.

Vielleicht war die Zusammenarbeit mit Schmid auch das Ergebnis der (mathematischen) Kontaktbemühungen Teichmüllers in seiner Berliner Zeit. Dies gilt jedenfalls für die Vermutungen, denen die Arbeiten ⟨27⟩ und ⟨34⟩ gewidmet sind, und die Teichmüller eigens aufgestellt hat, damit „Algebraiker“ einen Zipfel seiner analytischen Gedankengänge in ihrer Sprache behandeln konnten.[63])

---

[62]) Vgl. allerdings die teilweise analogen Anregungen, die A. Weil zur selben Zeit aus der klassischen Riemannschen Theorie für das Studium der Funktionenkörper zog: Kommentare zu den Arbeiten [1938b], [1939a], [1940b] in [Weil 1979]. – In Weils Kommentar [1940b]* ist der (auf Seite 550) in fragwürdiges Licht gestellte, aber nicht namentlich erwähnte Autor der Jahrbuch-Besprechung gerade H. L. Schmid.

[63]) Martin Eichler erzählt (Eichler 6. 8. 1985), Teichmüller sei bei einem Mathematikertreffen auf ihn zugekommen mit den Worten: „Sie sind Algebraiker; Sie müssen diese Vermutung beweisen!“

Sei X eine kompakte Riemannsche Fläche, $\Omega^2 = \Omega \otimes_{\mathcal{O}_X} \Omega$, bzw. $\Omega^{-1} = \check{\Omega}$, die – wie wir heute sagen – Garbe der holomorphen quadratischen bzw. reziproken Differentiale auf X; $\mathscr{M}^2$ bzw. $\mathscr{M}^{-1}$ die entsprechenden meromorphen Differentiale. Teichmüller nennt eine Čech-Kokette $\mu \in C^0(\mathscr{U}, \mathscr{M}^{-1})$ eine „Hauptteilsystemklasse", wenn der Rand $\delta\mu$ in $H^1(X, \Omega^{-1})$ liegt. μ wird global durch ein holomorphes reziprokes Differential gegeben genau dann, wenn $\delta\mu = 0$ ist.[64]) Nun ist („Serre-Dualität") $H^1(X, \Omega^{-1}) = H^0(X, \Omega^2)^{\vee}$; andererseits ist nach Teichmüllers Theorie der Familien Riemannscher Flächen[65]) der Dualraum rechts gerade der Raum der Geschwindigkeitsvektoren der infinitesimalen Verrückungen von X. Die sich ergebende Interpretation von Geschwindigkeitsvektoren als Hauptteilsystem hat Teichmüller im algebraischen Funktionenkörpermodell einer Familie Riemannscher Flächen,

$$K = Y(z); \quad z \text{ transzendent über } Y,$$
$$Y = k(y); \quad y \text{ transzendent über } k,$$

nachgerechnet und erhält an der Stelle v von K/Y den Hauptteil

$$\left(-\frac{F_y}{F_z} \, \mathrm{d}z^{-1} \right),$$

wo $F(z, z_v) = 0$ eine irreduzible Gleichung für die gewählte Ortsuniformisierende z_v über Y ist. Die Unabhängigkeit von der Uniformisierenden ist leicht einzusehen;

Das Modulproblem für Riemannsche Flächen besteht darin, die Menge der analytischen Isomorphieklassen Riemannscher Flächen von einem vorgegebenen topologischen Typ auf natürliche Weise zu einem topologischen Raum zu machen, oder besser: zu einem differenzierbaren bzw. reell-analytischen bzw. komplex-analytischen Raum, und schließlich zu einer quasi-projektiven algebraischen Varietät. Seit Riemanns berühmter Bemerkung, daß die kompakten Riemannschen Flächen vom Geschlecht g stetig von $3g-3$ komplexen Parametern abhängen, haben sich viele Mathematiker um Präzisierung und Lösung dieses Problems bemüht. Teichmüller war der erste, der systematisch (reell-)analytische Methoden, insbesondere die Technik der quasikonformen Abbildungen auf das Modulproblem angewandt hat.

Teichmüllers befruchtendster Beitrag zu der Theorie, die heute seinen Namen trägt, war zweifellos die 1939 in den Abhandlungen der Preußischen Akademie der Wissenschaften erschienene Arbeit ⟨20⟩; sie fällt nicht nur durch ihre Länge von fast 200 Seiten aus dem üblichen Rahmen, sondern auch durch ihren Inhalt und nicht zuletzt auch durch den Stil:

Teichmüller sprüht hier von Ideen und formuliert eine Vielzahl schöner Sätze, die sich alle als korrekt erwiesen haben. In den meisten Fällen kann er aber keine vollständigen Beweise liefern (Teichmüller selbst spricht häufig von „heuristischen" Argumenten und formuliert konsequenterweise vieles als Vermutungen). Für den Leser hat diese Vermengung von Sätzen, präzisen Beweisen, heuristischen Begründungen und Vermutungen zur Folge, daß öfters nicht klar ist, was nun wirklich bewiesen ist und was als Vermutung anzusehen ist. In mehreren späteren Arbeiten (⟨24⟩, ⟨29⟩, ⟨30⟩, ⟨31⟩, ⟨32⟩) greift Teichmüller einzelne Aspekte dieser großen Arbeit ⟨20⟩ auf und liefert detaillierte (und z. T., wie in ⟨29⟩, umständliche) Beweise nach. Es bleibt aber das große Verdienst von Ahlfors, den Ansatz Teichmüllers aufgegriffen und in der Arbeit [Ahlfors 1953–54] einem größeren Leserkreis bekanntgemacht zu haben. Ahlfors hat die Arbeiten Teichmüllers „sortiert" und dessen in ⟨20⟩ manchmal recht verwinkelte Gedankenführung begradigt und dabei die Ergebnisse teilweise auch durch Abschwächen von Voraussetzungen verbessert.

6.2 Teichmüllers erste Idee zur Behandlung des Modulproblems besteht darin, statt der Isomorphieklassen Riemannscher Flächen das zu betrachten, was heute *markierte Riemannsche Flächen* genannt wird (Teichmüller spricht in ⟨20⟩ von *topologisch festgelegten Hauptbereichen,* wobei ein Hauptbereich für ihn eine kompakte Riemannsche Fläche ist, evtl. berandet und nicht notwendig orientierbar, auf der noch endlich viele Innen- und Randpunkte ausgezeichnet sind): Eine kompakte Riemannsche Fläche ist durch das Geschlecht, die Anzahl der Randkurven und (im nicht-orientierbaren Fall) die Anzahl der Kreuzhauben topologisch festgelegt, dazu kommen noch die Anzahlen ausgezeichneter Punkte. Eine *Markierung* einer kompakten Riemannschen Fläche X ist nun eine Homotopieklasse von Homöomorphismen von X auf eine fest gewählte Fläche X_0 des gleichen topologischen Typs. Ist X geschlossen vom Geschlecht g, so ist eine Markierung dasselbe wie die Wahl eines Standard-Erzeugendensystems a_1, $b_1 \ldots, a_g, b_g$ der Fundamentalgruppe von X. Diese Tatsache, eine Konsequenz aus dem Satz von Dehn-Nielsen[66]), wird von Teichmüller in ⟨29⟩ benutzt, um (reell-analytische) Koordinaten auf der Menge der Klassen von markierten Riemannschen Flächen zu erhalten. Im Fall $g \geqslant 2$ benutzt man dazu, daß die universelle Überlagerung von X die obere Halbebene ist, die Fundamentalgruppe von X also mit einer (diskontinuierlichen) Untergruppe von $PSL_2(\mathbb{R})$ identifiziert werden kann.

Die Äquivalenzklassen von markierten Riemannschen Flächen eines festen topologischen Typs bilden die Punkte des zu diesem Typ gehörigen Teichmüller-Raums. Der Übergang zum ursprünglichen Riemannschen (oder Modul-)Raum der Isomorphieklassen Riemannscher Flächen wird durch die Aktion der (Teichmüller-)Modulgruppe erreicht, d. h. der Abbildungsklassengruppe der topologischen Fläche des entsprechenden Typs. Aus der Sicht des Modulproblems besteht die Hauptaufgabe der Teichmüllertheorie also darin, den Teichmüller-Raum mit einer Topologie (bzw. Metrik, bzw. reell- oder komplex-analytischen Struktur) zu versehen und zu zeigen, daß die Modulgruppe diskontinuierlich operiert. Das letztere erweist sich als einfach; in der Frage der Struktur führt Teichmüller eine Metrik ein, eine reell-analytische Struktur und zumindest skizzenhaft auch eine komplexe Struktur.

Im Fall der geschlossenen Flächen von Geschlecht $g \geqslant 2$ ist das Hauptergebnis, daß der Teichmüller-Raum T_g zu $\mathbb{R}^{6g-6}$ homöomorph ist.

6.3 Die nächste grundlegende Idee von Teichmüller besteht in der Verwendung von quasikonformen Abbildungen zwischen (markierten) Riemannschen Flächen: Für einen orientierungserhaltenden Diffeomorphismus $f: X \to X'$ von Riemannschen Flächen wird für jeden Punkt $x \in X$ der Dilatationsquotient

$$D_f(z) := \frac{|\partial f(z)| + |\bar{\partial} f(z)|}{|\partial f(z)| - |\bar{\partial} f(z)|}$$

definiert; f heißt dann quasikonform, wenn es ein $K \geqslant 1$ gibt, so daß $D_f(z) \leqslant K$ ist für alle $z \in X$.

Diese analytische Definition geht auf Grötzsch zurück und wird auch von Teichmüller verwendet, übrigens in einer von Ahlfors stammenden Version. Später zeigt Ahlfors in der schon erwähnten Arbeit [Ahlfors 1953–54], daß man statt des Dilatationsquotienten die maximale Dilatation von Vierecken (oder die von Ringbereichen) benutzen kann und dann sogar ohne Differenzierbarkeitsvoraussetzung auskommt.

Der erste wichtige Satz, den Teichmüller erst in der späteren Arbeit ⟨29⟩ beweisen konnte, ist nun, daß es zwischen 2 markierten geschlossenen Riemannschen Flächen vom gleichen Geschlecht stets eine quasikonforme Abbildung gibt. Mit diesem Satz kann man die Teichmüller-Metrik τ auf T_g einführen: für

---

[66]) Teichmüller zitiert diesen Satz, der besagt, daß jeder Automorphismus der Fundamentalgruppe einer geschlossenen Riemannschen Fläche von einem Homöomorphismus induziert wird, nicht nach der Originalarbeit von J. Nielsen (Acta math. **50**, 1927), sondern nach der in Math. Z. **50** (1939) veröffentlichten Dissertation von W. Mangler, der unter Anleitung von Seifert einen neuen Beweis gegeben hat.

$X, X' \in T_g$ setzt man

$$\tau(X, X') = \frac{1}{2} \inf_f \log K_f$$

wobei f alle quasikonformen Abbildungen $X \to X'$ durchläuft und $K_f = \sup_{z \in X} D_f(z)$ der maximale Dilatationsquotient von f sei.

Heute ist bekannt [Royden 1971], daß die Teichmüllermetrik mit der hyperbolischen (oder Kobayashi-)Metrik auf T_g übereinstimmt.

6.4 Wird in der Definition der Teichmüllermetrik das Infimum durch eine quasikonforme Abbildung f_0 angenommen, so heißt diese extremal. Ein wichtiges Ergebnis der Teichmüllerschen Arbeiten besagt, daß es für geschlossene Riemannsche Flächen in jeder Homotopieklasse von Homöomorphismen (also zu je 2 Punkten in T_g) genau eine extremale quasikonforme Abbildung gibt. Diese zu charakterisieren war die vielleicht originellste Idee Teichmüllers (die ihm, wie er in ⟨20⟩, § 46 schreibt, „1938 eines Nachts" kam): eine extremale quasikonforme Abbildung entspricht eindeutig einem holomorphen quadratischen Differential (bis auf Multiplikation mit einer positiven Konstanten) sowie einem Dilatationsquotienten $K > 1$, und umgekehrt bestimmt jedes solche Datum eine extremale quasikonforme Abbildung. Aus diesem in ⟨20⟩ vermuteten und in ⟨29⟩ bewiesenen Satz folgt leicht das Hauptergebnis der Teichmüllertheorie, daß nämlich T_g homöomorph ist zu $\mathbb{R}^{6g-6}$ (für $g \geqslant 2$).

Teichmüllers Konstruktionsmethode ist die folgende: Es sei X eine fest gewählte Riemannsche Fläche und $\varphi(z)\mathrm{d}z^2$ ein (in lokalen Koordinaten ausgedrücktes) holomorphes quadratisches Differential auf X. Ist $p_0 \in X$ ein Punkt mit $\varphi(p_0) \neq 0$, so ist

$$\zeta := \int_{p_0}^{p} \sqrt{\varphi(z)}\,\mathrm{d}z$$

Stetigskeits- und Zusammenhangsargument, das von Ahlfors [Ahlfors 1953–54] durch ein Variationsargument ersetzt wurde.

Der von Teichmüller entdeckte Zusammenhang zwischen extremalen quasikonformen Abbildungen und holomorphen quadratischen Differentialen ist in der Folgezeit systematisch untersucht worden. Ein wesentlicher Beitrag zum heutigen Verständnis dieses Zusammenhangs ist die Einführung der komplexen Dilatation und der Beltrami-Gleichung durch Bers:

Ist f ein quasikonformer Diffeomorphismus, so heißt $\mu(z) := \dfrac{\bar{\partial} f(z)}{\partial f(z)}$ die komplexe Dilatation von f. Gibt man umgekehrt eine meßbare Funktion μ vor mit $\|\mu\|_\infty < 1$, so heißt die partielle Differentialgleichung $\bar{\partial} f = \mu \partial f$ Beltrami-Gleichung. Bers hat gezeigt, daß jede L^2-Lösung einer Beltrami-Gleichung, die zudem noch ein Homöomorphismus ist, schon quasikonform ist (vgl. [Lehto 1987]).

6.5 In seiner letzten Arbeit zu diesem Themenkreis ⟨32⟩ hat Teichmüller u. a. eine Möglichkeit skizziert, eine komplexe Struktur auf T_g einzuführen: jede geschlossene Riemannsche Fläche vom Geschlecht g läßt sich als $(g+1)$-blättrige verzweigte Überlagerung der Zahlenkugel darstellen. Diese Überlagerungen lassen sich durch „Windungsstückkoordinaten" beschreiben, die als analytische Koordinaten angesehen werden können. Die keineswegs selbstverständlichen Details dieser Konstruktion sind allerdings nicht ausgeführt, wie überhaupt die ganze Arbeit ⟨32⟩ äußerst skizzenhaft ist.

Es scheint Teichmüller auch nicht klar gewesen zu sein, daß die so definierte Topologie auf der Menge der „topologisch festgelegten Hauptbereiche" mit der früher über quasikonforme Abbildungen eingeführten übereinstimmt (er vermutet, daß der neue Raum einfach zusammenhängend ist, was er für T_g in ⟨29⟩ bewiesen hat).

In modifizierter Form (und in algebraisch-geometrischem Rahmen) wurde dieser Ansatz später u. a. von Fulton [Fulton 1969] aufgegriffen (Stichwort: Hurwitzschema).

Die ersten rigorosen Definitionen einer komplexen Struktur auf T_g stammen von Ahlfors [Ahlfors 1960] und Bers [Bers 1958] und sind viel näher an Teichmüllers ursprünglichem Zugang als die „Hurwitzschemata": Einem Punkt (X, φ) in T_g entspricht eindeutig eine extremale quasikonforme Abbildung $\bar{f}: X_0 \to X$ von einer fest gewählten Riemannschen Fläche X_0 nach X. Diese liften wir zu einer quasikonformen Selbstabbildung f der oberen Halbebene. Die komplexe Dilatation μ von f setzen wir durch $\mu = 0$ in der unteren Halbebene zu einer meßbaren Funktion μ auf $\mathbb{C}$ fort und lösen die Beltrami-Gleichung $\bar{\partial} g = \mu \partial g$. Die gefundene Lösung ist in der unteren Halbebene eine holomorphe Funktion f_μ. Von dieser betrachten wir die Schwarzsche Ableitung

$$S_{f_\mu} := \left(\frac{f_\mu''}{f_\mu'}\right)' - \frac{1}{2}\left(\frac{f_\mu''}{f_\mu'}\right)^2 .$$

S_{f_μ} erweist sich als qudratisches Differential, das invariant ist unter der Decktransformationsgruppe G von X_0, also ein holomorphes quadratisches Differential auf X_0 definiert. Bers hat gezeigt, daß die Zuordnung $f \to S_{f_\mu}$ eine offene Einbettung (die heute Bers-Einbettung heißt) des Teichmüller-Raums in den komplexen Banachraum aller G-invarianten quadratischen Differentiale auf der unteren Halbebene gibt, woraus die komplexe Struktur auf T_g resultiert. (Die Einzelheiten dieser schönen Konstruktion kann man sich z. B. aus dem Buch von Lehto [Lehto 1987] zusammensuchen; ein Vorteil dieser Methode ist, daß sie nicht nur für geschlossene Riemannsche Flächen anwendbar ist).

Ein anderer Zugang zur komplexen Struktur auf T_g benutzt die hyperbolische Metrik von konstanter Krümmung -1 auf einer Riemannschen Fläche und harmonische Abbildungen, um eine Bijektion zwischen T_g und dem Raum der holomorphen quadratischen Differentiale auf X_0 zu konstruieren – siehe [Jost 199●], [Wolf 1989]. Noch eine weitere Möglichkeit ist es, den Schottkyraum als komplexe Mannigfaltigkeit zu konstruieren und diese analytische Struktur auf seine universelle Überlagerung, eben den Teichmüller-Raum, zu liften ([Hejhal 1975], [Gerritzen, Herrlich 1988]).

6.6 In der schon erwähnten Arbeit ⟨32⟩ beschreibt Teichmüller sehr genau, in welchem Sinn die komplexe Struktur auf T_g „natürlich" zu sein hat: zunächst definiert er analytische Scharen (oder Familien, wie es heute zumeist heißt) Riemannscher Flächen; dann behauptet er, daß es über T_g eine solche analytische Schar C_g gibt, so daß über jedem Punkt von T_g die zugehörige „topologisch festgelegte" Riemannsche Fläche liegt. C_g soll die folgende universelle Eigenschaft haben: Jede analytische Familie $X \to S$ markierter Riemannscher Flächen gibt Anlaß zu einer analytischen Abbildung $S \to T_g$, die $s \in S$ auf den Punkt in T_g abbildet, der der markierten Fläche über s entspricht. Weiter soll sich diese Abbildung $S \to T_g$ zu einer analytischen Abbildung $X \to C_g$ liften. Präzisiert man diesen letzten Zusatz noch dahingehend, daß X das Faserprodukt von S und C_g über T_g sein soll, so hat Teichmüller hier die noch heute übliche Definition eines feinen Modulraums gegeben (dieser Ausdruck sowie der schwächere, auf M_g zutreffende des groben Modulraums stammen von Mumford [Mumford 1965]).

Anders als in seiner großen Arbeit ⟨20⟩ spricht Teichmüller in ⟨32⟩ nicht von Vermutungen, sondern von Sätzen. Obwohl ⟨32⟩ bestenfalls einen Beweisplan enthält, ist es doch gut möglich, daß Teichmüller genauere Untersuchungen angestellt hat als man sie hier findet. Wir wissen zwar nicht genau, wo das Manuskript zu ⟨32⟩ entstanden ist; der knappe, stellenweise fast gehetzt wirkende Stil läßt aber den Schluß zu, daß diese Arbeit irgendwann während des Krieges „nebenbei" geschrieben wurde.

Teichmüller hat auch gesehen, daß die Abbildungsklassengruppe diskontinuierlich auf T_g operiert, wodurch man auf M_g eine Struktur als „komplexe Mannigfaltigkeit mit Singularitäten" erhält. Explizit begründet er, daß der hyperelliptische Ort in M_4 singulär ist. Seine Einschätzung allerdings, daß es sich hierbei um eine „schwere" Singularität handelt ((⟨32⟩, p. 359) wirkt aus heutiger Sicht übertrieben, handelt es sich doch um den Quotienten einer Mannigfaltigkeit nach einer Gruppe der Ordnung 2! Allgemeiner sind alle Singularitäten von M_g Quotientensingularitäten (eine unmittelbare Folgerung aus Teichmüllers Ergebnissen), und diese werden heute als die harmlosesten Singularitäten angesehen (Rauch [1988] hat als erster die Singularitäten von M_g genau charakterisiert

Mumford hat an mehreren Stellen gezeigt, daß die Singularitäten keine unüberwindlichen Hindernisse schaffen [Mumford, Harris 1982], [Mumford 1983]).

6.7 Die Arbeiten Teichmüllers sind in so vielfältiger Weise ergänzt und verallgemeinert worden, daß ich hier nur eine kleine Auswahl der Themen erwähnen kann. Für weitere Information verweise ich auf den Übersichtsartikel von Schumacher [Schumacher 1990] oder das Buch von Nag [Nag 1988] und die dort zitierte Literatur.

Zunächst sei ein Ergebnis genannt, das Teichmüller von seinem funktionentheoretischen Standpunkt aus vielleicht gar nicht interessiert hätte[67]): daß M_g nämlich zusätzlich zur komplexen auch eine algebraische Struktur trägt. In der Tat ist M_g quasiprojektiv, wie man zum Beispiel durch Betrachten der Torelli-Abbildung in den Modulraum der abelschen Varietäten beweisen kann. Die Torelli-Abbildung, die einer Kurve ihre Jacobische zuordnet, hat übrigens eine Entsprechung auf dem Teichmüller-Raum: die Periodenabbildung in den Siegelschen Halbraum H_g. Diese ist verträglich mit den Aktionen der jeweiligen Modulgruppe auf T_g bzw. H_g und induziert so die Torelli-Abbildung.

Im Zuge des Aufblühens der abstrakten algebraischen Geometrie gelang es Mumford [Mumford 1965], eine rein algebraische Konstruktion des Modulraums der nichtsingulären projektiven Kurven eines festen Geschlechts anzugeben. Seine Konstruktion ist nicht nur über jedem Körper, sondern über $\mathbf{Z}$ möglich. M_g erscheint dabei als geometrischer Quotient eines Hilbertschemas nach einer algebraischen Gruppe von ziemlich hoher Dimension. Deshalb haben auch die algebraischen Geometer zur Untersuchung geometrischer Eigenschaften von M_g immer wieder auf den Teichmüller-Raum zurückgegriffen.

Viel Interesse fand auch die Kompaktifizierung des Teichmüller-Raums: Nachdem T_g homöomorph zum offenen Einheitsball in $\mathbb{R}^{6g-6}$ ist, liegt es nahe, den abgeschlossenen Einheitsball als topologische Kompaktifizierung $\overline{T_g}$ zu nehmen. Man möchte aber auch die Metrik fortsetzen können und die Aktion der Modulgruppe so ausdehnen, daß sie als Gruppe von Homöomorphismen auf $\overline{T_g}$ operiert. Dies ist Thurston dadurch gelungen, daß er „Blätterungen mit Maßen“ (measured foliations) untersuchte – siehe [Fathi et al. 1979]. Natürlich kann die Modulgruppe nicht diskontinuierlich auf der Thurston-Kompaktifizierung operieren, man hat also keinen Quotienten mehr. Auf der anderen Seite hat man durch den von Deligne und Mumford [Deligne, Mumford 1969] eingeführten Begriff der stabilen Kurven eine modultheoretische Kompaktifizierung von M_g zu einer projektiven Varietät $\overline{M_g}$. Auch diese kann man als Quotienten einer Teilkompaktifizierung von T_g nach einer (weitgehend) diskontinuierlichen Aktion der Modulgruppe beschreiben, wenn man gewisse „Spitzensingularitäten“ in Kauf nimmt [Herrlich 1990a].

Auch differentialgeometrische Eigenschaften von T_g sind inzwischen viel studiert worden. Dazu verwendet man jedoch meistens statt der Teichmüllerschen Metrik die Weil-Petersson-Metrik: A. Weil hat gesehen, daß man das von H. Petersson eingeführte Skalarprodukt für automorphe Formen dazu benutzen

---

[67]) Vgl. seine Bemerkung zu van der Waerdens Arbeit in der Einleitung zu ⟨32⟩.

kann, auf dem Teichmüller-Raum eine Hermitesche Metrik einzuführen: man hat dazu den Tangentialraum an T_g mit den quadratischen Differentialen zu identifizieren, und diese mit automorphen Formen vom Gewicht 2 auf der oberen Halbebene. Gegenüber der Teichmüller-Metrik hat die Weil-Petersson-Metrik den Vorteil, invariant unter der Modulgruppe zu sein und somit eine Metrik auf dem Modulraum M_g zu induzieren. Die Weil-Petersson-Metrik ist Kählersch, und ihre Krümmung ist negativ (Ahlfors); außerdem läßt sie sich auf $\overline{M_g}$ fortsetzen. Die dadurch auf $\overline{M_g}$ erhaltene symplektische Geometrie wird vor allem in den Arbeiten von Wolpert studiert ([Wolpert 1985]), z. B. kann er mit diesen Methoden $H_2(\overline{M_g}; \boldsymbol{Q})$ berechnen ([Wolpert 1983]).

Schließlich sei noch erwähnt, daß man die erfolgreichen komplex-analytischen Methoden der Teichmüllertheorie auf jeden algebraisch abgeschlossenen Körper k übertragen kann, über dem man Funktionentheorie betreiben kann, d. h. der vollständig bewertet ist. Ist die Bewertung von k nichtarchimedisch, so besitzen allerdings nicht alle glatten projektiven Kurven über k eine Uniformisierung durch eine diskrete Gruppe auf einem Gebiet in $\boldsymbol{P}^1(k)$, sondern nur die sogenannten Mumfordkurven. Mit der Teichmüllertheorie erreicht man hier daher nicht den gesamten Modulraum der Kurven, sondern nur den k-analytisch offenen Teilraum der Mumfordkurven [Herrlich 1987]. Dafür ist hier die Modulgruppe weniger kompliziert (die äußere Automorphismengruppe der freien Gruppe vom Rang g), und der den stabilen Mumfordkurven entsprechende erweiterte Teichmüller-Raum hat keine Spitzensingularitäten, sondern ist eine k-analytische Mannigfaltigkeit [Herrlich 1990b].

Frank Herrlich

Anhänge

Zwei Briefe Oswald Teichmüllers

Erster Brief: O. Teichmüller an E. Landau

Die Publikation dieses bizarren Erläuterungsbriefes zum Landauboykott folgt (mit heutiger Rechtschreibung) der von Landau veranlaßten Abschrift des Originals, von der eine Kohlekopie in der Handakte „Landau" des Nachlasses Erich Kamke erhalten ist. Der Briefautor wird nicht namentlich genannt; es handelt sich aber eindeutig um Teichmüller – siehe oben, Fußnote 14. Wir danken Herrn D. Kamke sehr herzlich für die Mitteilung über die Handakte und die Genehmigung zur Publikation.

Göttingen, den 3. XI. 1933.

Sehr geehrter Herr Professor!

Auf Ihren Wunsch fasse ich hiermit den Standpunkt, den ich in unserer gestrigen Unterredung vertreten habe, schriftlich zusammen, muß jedoch gleich zu Anfang betonen, daß es sich teilweise nur um meine persönliche Ansicht über die schwierigen Fragen handelt. Diese Fragen sind aber die nach dem Ursprung, dem Sinn und dem Endzweck der gestrigen Vorfälle.

Eine studentische Aktion, die das Verhältnis von Lehrer und Schüler trübt oder auch nur zu trüben droht, kann aus zwei Ursachen entstehen. Erstens können große außerakademische Erfolge der Geistesrichtung, der der größere oder überhaupt irgendwie ausschlaggebende Teil der Studenten angehört, Zustände, die sie bisher stillschweigend, wenn auch unzufrieden als unabänderlich hinnahmen, als unzeitgemäß geworden erscheinen lassen. Zweitens kann ein provozierendes Betragen (das kommt in Ihrem Fall natürlich nicht in Frage) oder auch ein auf Mangel an Interesse für die oder jedenfalls an eingehender Kenntnis der Mentalität der Mehrheit der Hörerschaft zurückzuführendes Betragen, welches auf die Studenten denselben Eindruck, und sei es auch nur auf Grund von Mißverständnissen, macht, sie zum Widerstand herausfordern. Welche der beiden Ursachen hier überwiegt, ist nicht leicht zu entscheiden.

Die Sachlage der ersten lag zu Anfang des vorigen Semesters vor. Das Beispiel der anderen Fachgruppen Göttingens berechtigt zu der Frage, ob es praktisch möglich gewesen wäre, daß Sie damals Ihre Vorlesungen und Übungen unangefochten, wenn auch nicht gerne gesehen, selbst gehalten hätten. Ich wage nicht, sie im einen oder anderen Sinne zu beantworten. Jedenfalls muß der Herr Dekan, dessen Rate Sie ja gefolgt sind, sie verneint haben. Die Folge war, daß wir die für das vorige Semester getroffene Regelung als natürliche Folgerung aus den politischen Ereignissen ansehen lernten und erstaunt waren, als in bezug auf Ihre Vorlesungen der Zustand der Jahre vor unserer Revolution wiederhergestellt werden sollte. Vor der Aussprache mit Ihnen nahmen wir nämlich an, dies sei darauf zurückzuführen, daß Sie der Ansicht seien, Sie könnten uns gegenüber jetzt anders auftreten, da wir nicht mehr die alten revolutionären Kämpfer geblieben wären. Nur so sind die gestrigen Vorkommnisse erklärlich. In der Aussprache erfuhr ich allerdings, daß andere Gründe Ihren Entschluß herbeigeführt hatten.

Durch die gestrige Aktion ist nun aber eine vollständig neue Lage geschaffen worden. Um die Ruhe in unserem Institut wiederherzustellen, genügt es nicht, den Anlaß nun nachträglich als Irrtum zu erklären, sondern es ist nötig, die Zustände, die ein derartiges Vorkommnis ermöglichten, auf ihre Existenzberechtigung zu prüfen und vor allem das Grundsätzliche der Sache klarzustellen. Sie sprachen gestern die Annahme aus, daß es sich um eine antisemitische Demonstration gehandelt habe. Ich stand und stehe auf dem Standpunkt, daß sich eine judenfeindliche Einzelaktion gegen ziemlich jeden anderen eher richten sollte als gegen Sie. Es handelt sich für mich nicht darum, Ihnen als Juden Schwierigkeiten zu machen, sondern lediglich darum, die deutschen Studenten des zweiten Semesters unter möglichster Schonung aller übrigen davor zu bewahren, gerade in der Differential- und Integralrechnung von einem ihnen ganz fremdrassigen Lehrer unterrichtet zu werden. Ich wage so wenig wie jeder andere Ihre Fähigkeit der rein international-mathematisch-wissenschaftlichen Belehrung von geeigneten Studenten beliebiger Abstammung zu bezweifeln. Aber ich weiß auch, daß viele akademische Vorlesungen, insbesondere auch die Differential- und Integralrechnung, zugleich erzieherischen Wert haben und den Schüler nicht nur in eine neue Begriffswelt, sondern auch zu einer anderen geistigen Einstellung führen. Da aber die geistige Einstellung des einzelnen von seinem Geiste, der da umgestellt werden soll, abhängt, dieser Geist aber nach nicht nur jetzt, sondern schon lange bekannten Grundsätzen ganz wesentlich von der rassischen Zusammensetzung des einzelnen abhängt, dürfte es sich im allgemeinen nicht empfehlen, z. B. arische Schüler von einem jüdischen Lehrer ausbilden zu lassen. Ich kann hier aus eigener anderweitiger Erfahrung sprechen. Dem Schüler bleiben da eigentlich nur zwei Wege: Entweder er zieht aus dem Vortrag des Lehrers nur das international-mathematische Gerippe heraus und umkleidet es mit eigenem Fleisch. Das ist eine mathematisch-philosophisch produktive Arbeit, der nur die wenigsten gewachsen sind. Die Übrigen lassen den Vortrag nur auf ihr Gedächtnis und auf die äußerste Oberfläche ihres Verstandes wirken und bemühen sich, nach dem Staatsexamen all den höheren Kram möglichst rasch zu vergessen. Der dritte Weg, den Stoff in der fremden Form zu übernehmen, führt zu einer geistigen Degeneration, die Sie einem Studenten heutzutage nicht gut zumuten können und wohl auch nicht wollen.

Die Möglichkeit aber, daß Sie den mathematischen Kern ohne eigene nationale Färbung Ihren Hörern vermitteln, besteht so wenig, als es sicher ist, daß ein Gerippe ohne Fleisch nicht läuft, sondern zusammensackt und verwittert.

Aus dieser meiner Einstellung folgt auch, daß wenig dagegen einzuwenden wäre, wenn Sie höhere Vorlesungen, die auf vorhandener Geisteseinstellung aufbauend für Anwendung oder Erkenntnis wichtige mathematische Tatsachen erarbeiten, nach wie vor im besten Einvernehmen mit den Studenten an unserer Landesuniversität halten wollen. Dies ist eine Ansicht, der sich nur wenige meiner Kameraden angeschlossen haben. Die überwiegende Mehrzahl steht auf dem Standpunkt, eine Vorlesungstätigkeit Ihrerseits sei schlechthin untragbar. Diese Stellungnahme kann auch ich mir nur aus Antisemitismus entstanden denken. Der Unterschied zwischen beiden Meinungen ist natürlich für den Augenblick vollkommen belanglos. Ich stelle ausdrücklich fest, daß auf keinen Fall von einer Spaltung in „Radikale" und „Gemäßigte" gesprochen werden kann. Wir haben alle ein Programm und sind gute Kameraden, nur über die rein theoretische Frage, ob die gestrige Aktion antisemitischen oder progermanischen Charakter hatte, haben wir, bis von berufener Seite eine Entscheidung erfolgt, verschiedene Ansicht.

Um so einiger waren und sind wir alle über den Zweck der Aktion. Es handelt sich darum, im wesentlichen den Zustand des vorigen Semesters wiederherzustellen. Herr Dr. Weber ist bereit, Sie in Vorlesungen und Übungen zu vertreten. Da nicht mehr die Ungewißheit des vorigen Semesters besteht, wäre es nicht notwendig, daß Sie wieder jede einzelne Stunde mit ihm durchsprächen, sondern er würde die Vorlesung ganz oder doch in den einzelnen Teilen selbständig halten. Das wäre auch uns lieber. In Anbetracht dessen, daß der einzige, der bei der ganzen Sache wirklich ein Opfer bringt, Herr Dr. Weber ist, der im Interesse der jüngeren Kommilitonen seine Arbeit verdoppelt, während Sie bloß der Vorlesung fernzubleiben brauchten, ohne irgendwelchen pekuniären oder sonstigen Nachteil zu haben, glaube ich, Ihnen einen wirklich leicht anzunehmenden Vorschlag gemacht zu haben.

Hochachtungsvoll
gez. Unterschrift

Zweiter Brief: O. Teichmüller an A. Bruns [Auszug]

Handschriftlicher Brief an den ehemaligen (mathematisch jüngeren) Göttinger Kommilitonen Adolf Bruns, der dort seit Sommer 1934 studiert hatte, allerdings zum Zeitpunkt des Briefes schon im Schuldienst war und daher die im Brief enthaltenen mathematischen Vorschläge nicht mehr aufnehmen konnte. Schreibweise und Bemerkungen in runden Klammern wie im Original, Zeichensetzung angepaßt, Anmerkungen des Herausgebers (E. S.) in eckigen Klammern. Herrn A. Bruns möchte ich an dieser Stelle für die Überlassung dieses Briefes O. Teichmüllers danken.

Berlin, den 7. 12. 1938.

Lieber Adolf!

Es gab einmal eine Theorie, Ihr wolltet mir von Heinz [...?] Examen Nachricht geben. Was ist daraus bloß geworden? Es hat sogar noch eine Theorie gegeben von wegen zu der Zeit in der [Göttinger Mathematischen] Gesellschaft reden und mitfeiern und so, aber daß daraus nichts geworden ist, ist viel erklärlicher, obwohl Schnapsideen grundsätzlich dazu da sind, durchgeführt zu werden. Und so sitze ich in der fremden Stadt, integriere über die verrücktesten Kurvenscharen dieser Welt und kann nur im Düsteren tappend raten, was wohl in Göttingen los sein könnte. Es existiert aber noch eine Schnapsidee – vielleicht die einzige, die ich wirklich mit einigem Recht dem Schnapse zuschreiben darf – des Inhalts, Böckling und ich werden demnächst mal über Sonnabend/Sonntag in Göttingen aufkreuzen. Denn ich habe hier immer mal wieder das Gefühl, es sei doch rechter Unsinn, sich über das Gedränge in der U.-Bahn zu ärgern und die Zeit mit Variationsrechnung totzuschlagen; was dann aber anderswo kein Unsinn sein sollte, weiß ich beim besten Willen nicht zu sagen. Es bleibt eben tatsächlich die einzige Möglichkeit, möglichst viel nichttrivialen Unsinn aufzustellen. [...]

Aber um wieder auf ernsthaftere Dinge zu kommen: Ihr habt ja Stöhr eine Weile da gehabt. Daß der dort nicht Hilfsassistent geworden ist, freut mich: zwar liegt kein Grund zum Haß gegen Stöhr vor, aber der Verlauf der Angelegenheit dürfte beweisen, daß in Bezug auf Euer Institut doch einiger Optimismus am Platze ist, daß Göttingen sich nicht zum Mülleimer Berlins degradieren läßt.[68]) Eine Zeitlang war ja durch den regen Austausch fast eine Frontbildung eingeleitet: es schien, daß eine Einigkeit der beiden Institute im Innern mit Feindschaft gegeneinander erkauft werden sollte. Diese Trennung war aber durchaus unerwünscht, es wäre zu bloßer unsachlicher Rivalität ohne jeden tieferen Sinn gekommen. Nun ist Stöhr, dessen mathematische Begabung feststeht, in Göttingen nicht Hilfsassistent geworden, obwohl er von Berlin abgelehnt wurde, voraussichtlich sogar deswegen bzw. aus denselben Gründen. Es wäre ideal, wenn überhaupt die zweifellos bestehenden und in kurzer Zeit nicht zu beseitigenden weltanschaulichen Gegensätze unter den Mathematikern Deutschlands ohne persönliche Gehässigkeit, ohne geheimen Terror und ohne engstirnigen Lokalpatriotismus ausgetragen würden. Dazu gehört allerdings auf allen Seiten viel guter Wille. Man braucht ja nur das Wort DMV in den Mund zu nehmen, da fühlt sich jeder einzelne angegriffen, der an der Leitung beteiligt ist. Aber es läßt sich doch nicht verheimlichen, daß in ihr bisher praktisch alles beim alten geblieben ist. Menschen stellen sich nämlich ganz allgemein immer noch leichter um als Vereine. Vielleicht kommt doch einmal die Zeit, wo wie 1933/34 die Vertreter der verschiedenen Auffassungen von unserer Wissenschaft fast gleichmäßig über Deutschland verteilt sind. Das wäre m. E. die für den Angriff geeignetste Ausgangsstellung. Soviel an uns liegt, soll dieser Angriff ausschließlich auf weltanschaulicher Grundlage vor sich gehen, hoffentlich wird sich das durchführen lassen. Jedenfalls kann uns eine schematische und sture Abgrenzung im voraus nur schaden.

Das mit der Dissertation habe ich mir noch mal überlegt: das Thema ist doch vielleicht zu schwer. Es genügt durchaus, wenn Du den Fall endlich vieler Randpunkte des Einheitskreises ganz exakt, kurz und verständlich durchführst. Meinetwegen kannst Du auch endlich viele Innenpunkte hinzunehmen, auch in ihnen hat $R(z)$ dann Pole höchstens erster Ordnung. Aber das ist nicht nötig. Viele Dissertationen sind unlesbar, weil sie mit unwesentlichen Verallgemeinerungen vollgestopft sind; hüte Dich vor dem Fehler! Und gib Dir ja keine große Mühe mit dem Niederschreiben: es kommt wirklich nur auf den einwandfreien Beweis an. Wenn Du zum Schluß die Frage nach möglichst konformer Abbildung bei gegebener Randzuordnung noch aufwirfst und einige Rechnungen durch-

[redacted]

Bieberbach für die Deutsche Mathematik zu geben. Nun grüß die Institutsgenossen, und laßt auch mal etwas von Euch hören!

Heil Hitler!

Dein Oswald.

[Beiblatt mit Erläuterungen zum Dissertationsthema]

Auf der Peripherie des Einheitskreises seien $n > 3$ (versch.) Punkte $a_1 \dots a_n$ markiert, die in dieser Reihenfolge in positivem Sinne aufeinander folgen sollen. $\mathscr{A} = (a_1 \dots a_n)$ und $\mathscr{B} = (b_1 \dots b_n)$ werden gleich gesetzt, wenn eine lineare Transformation $|z| < 1$ in sich und a_i in b_i überführt (so kann man z. B. immer $a_1 = 1, a_2 = i, a_3 = -1$ normieren). Die $\mathscr{A}$ bilden dann eine einfach zusammenhängende $(n-3)$-dimensionale Mannigfaltigkeit R^{n-3}. Zwei Elemente $\mathscr{A} = (a_1 \dots a_n)$ und $\mathscr{B} = (b_1 \dots b_n)$ dieses R^{n-3} seien gegeben. Man bilde $|z| < 1$ quasikonform auf $|w| < 1$ ab, bestimme das Maximum des Dilatationsquotienten und ordne $\mathscr{A}$ und $\mathscr{B}$ als „Abstand" den Logarithmus der unteren Grenze all dieser Maxima zu, wobei alle Abbildungen zu berücksichtigen sind, die a_i in b_i überführen. Die Aufgabe lautet: man soll die möglichst konforme Abbildung finden, d. h. diejenige Abbildung, für die das Maximum des Dilatationsquotienten möglichst klein wird und die a_i in b_i überführt. Wenn diese Aufgabe lösbar ist, sind oben die 3 Abstandsaxiome erfüllt.

Im Rahmen allgemeinerer Untersuchungen[70]) bin ich auf heuristischem Wege zu der folgenden Lösung gekommen. Für $D \geqslant 1$ bedeute T_D die affine Abbildung $T_D(s) = D \cdot \mathrm{Re}(s) + i \cdot \mathrm{Im}(s)$. Man wähle von $\mathscr{A} = (a_1 \dots a_n)$ ausgehend eine rationale Funktion $R(z)$, die in $|z| < 1$ regulär ist, auf $|z| = 1$ auch regulär ist mit Ausnahme höchstens einfacher Pole bei $a_1 \dots a_n$ und für die $R(z) dz^2$ längs des Einheitskreises (d. h. für $|z| = 1$ und $|z + dz| = 1$) reell ist. Nach dem Spiegelungsprinzip hat R bei ∞ höchstens einen einfachen Pol. Durch

$\lim_{(D \to 1, D > 1)} \dfrac{(\mathscr{B} - \mathscr{A})}{\log D}\Bigg)$. Dabei wird man, um differenzieren zu können, etwa $a_1 = b_1 = 1, a_2 = b_2 = i, a_3 = b_3 = -1$ normieren (vielleicht kommst Du auch ohne Normierung aus). Auf einen positiven konstanten Faktor bei $R(z)$ kommt es nicht an, und $R(z)$ ist linear mit $n-3$ reellen Konstanten $c_1 \cdot R_1(z) + \ldots + c_{n-3} \cdot R_{n-3}(z)$ aufgebaut (Bew.!); man betrachte die Abbildung

$$\frac{c_i}{\sqrt{\sum c_i^2}} \to \frac{d\mathscr{A}}{|d\mathscr{A}|}$$

von einer Einheitskugel des $(n-3)$-dim Vektorraumes auf eine andere. Versuche zu zeigen, daß diese Abbildung stetig und eineindeutig ist; dann ist sie auch rückwärts stetig und $\dfrac{d\mathscr{A}}{|d\mathscr{A}|}$ durchläuft seine ganze Kugel (Sperner Hamb. Abh. 6)[71]). Zu jedem $d\mathscr{A}$ gibt es dann auch umgekehrt ein $R(z)$, das nur bis auf einen positiven konstanten Faktor bestimmt

⟨12⟩ Der Elementarteilersatz für nichtkommutative Ringe. Sitzungsber. Preuß. Akad. Wiss. math. nat. Kl. 1937, 169–177
⟨13⟩ Untersuchungen über konforme und quasikonforme Abbildung. Deutsche Math. **3** (1938) 621–678
⟨14⟩ Ungleichungen zwischen den Koeffizienten schlichter Funktionen. Sitzungsber. Preuß. Akad. Wiss. math. nat. Kl. (1938) 363–375
⟨15⟩ Eine Verschärfung des Dreikreisesatzes. Deutsche Math. **4** (1939) 16–22
⟨16⟩ Über den Begriff des partiellen Differentialquotienten und die Operationen der Vektoranalysis. Deutsche Math. **4** (1939) 131–133
⟨17⟩ Vermutungen und Sätze über die Werteverteilung gebrochener Funktionen endlicher Ordnung. Deutsche Math. **4** (1939) 161–190
⟨18⟩ Erreichbare Randpunkte. Deutsche Math. **4** (1939) 455–461
⟨19⟩ Braucht der Algebraiker das Auswahlaxiom? Deutsche Math. **4** (1939) 567–577
⟨20⟩ Extremale quasikonforme Abbildungen und quadratische Differentiale. Abh. Preuß. Akad. Wiss., math. nat. Kl. **22** (1939) 197 Seiten
⟨21⟩ Genauere Ausführungen über den Begriff des partiellen Differentialquotienten und die Operationen der Vektoranalysis. Deutsche Math. **5** (1940) 64–72
⟨22⟩ Über die sogenannte nichtkommutative Galoissche Theorie und die Relation $\xi_{\lambda,\mu,\nu}\xi_{\lambda,\mu\nu,\pi}\xi^{\lambda}_{\mu,\nu,\pi}=\xi_{\lambda,\mu,\nu\pi}\xi_{\lambda\mu,\nu,\pi}$. Deutsche Math. **5** (1940) 138–149
⟨23⟩ Über Extremalprobleme der konformen Geometrie. Deutsche Math. **6** (1941) 50–77
⟨24⟩ Vollständige Lösung einer Extremalaufgabe der quasikonformen Abbildung. Abh. Preuß. Akad. Wiss., math. nat. Kl. **5** (1941) 18 Seiten
⟨25⟩ Skizze einer Begründung der algebraischen Funktionentheorie durch Uniformisierung. Deutsche Math. **6** (1942) 257–265
⟨26⟩ Berichtigung zu der Arbeit „Genauere Ausführungen über den Begriff des partiellen Differentialquotienten und die Operationen der Vektoranalysis". Deutsche Math. **6** (1942) 281–282
⟨27⟩ Drei Vermutungen über algebraische Funktionenkörper. J. reine angew. Math. **185** (1943) 1–11
⟨28⟩ Ein neuer Beweis für die Funktionalgleichung der L-Reihen. Abh. math. Sem. Hansische Univ. **15** (1943) 85–96 (mit H. L. Schmid)
⟨29⟩ Bestimmung der extremalen quasikonformen Abbildungen bei geschlossenen orientierten Riemannschen Flächen. Abh. Preuß. Akad. Wiss., math. nat. Kl. **4** (1943) 42 Seiten
⟨30⟩ Beweis der analytischen Abhängigkeit des konformen Moduls einer analytischen Ringflächenschar von den Parametern. Deutsche Math. **7** (1944) 309–336
⟨31⟩ Ein Verschiebungssatz der quasikonformen Abbildung. Deutsche Math. **7** (1944) 336–343
⟨32⟩ Veränderliche Riemannsche Flächen. Deutsche Math. **7** (1944) 344–359
⟨33⟩ Einfache Beispiele zur Werteverteilungslehre. Deutsche Math. **7** (1944) 360–368
⟨34⟩ Über die partielle Differentiation algebraischer Funktionen nach einem Parameter und die Invarianz einer gewissen Hauptteilsystemklasse. J. reine angew. Math. **186** (1944) 49–57

Quellen

Benutzte Siglen

KUB Kuratorialakten der (Humboldt-) Universität Berlin, Personalakte Teichmüller (Auszüge); Mitteilung R. Siegmund-Schultzes vom 29. 1. 1985 an E. Scholz
MI Akten des Mathematischen Instituts der Universität Göttingen, dortselbst aufbewahrt
UAG Universitätsarchiv Göttingen
UBG Handschriftenabteilung der Universitätsbibliothek Göttingen

Briefe im Privatbesitz sind im folgenden gekennzeichnet durch „(Absender) (Datum) an (Empfänger)". Kopien befinden sich z. Zt. mindestens in den Händen von W. Abikoff, H. Mehrtens, N. Schappacher, E. Scholz.

W. Blume 22. 10. 1936, Beurteilung Teichmüllers durch den NS-Dozentenbund, UAG Kuratorialakte III D335 (52) II
R. Courant 1. 3. 1933, Gutachten zur Aufnahme Teichmüllers in die Studienstiftung, MI
R. Courant 12. 1. 1934 an Weyl, ETH Zürich, Wiss. hist. Sammlung, Hs 91
Deutsches Rotes Kreuz 16. 10. 1972, Suchbericht Truppenteil 355, Infanterie-Division, vermißt seit September 1943; Suchdienst München
M. Eichler 6. 8 .1985, Gespräch mit N. Schappacher, Tonbandprotokoll
W. Fenchel 1. 12. 1982 an W. Abikoff (Storrs, Connecticut)
H. Hasse 19. 10. 1936, Stellungnahme zur Entlassung Teichmüllers als Assistent am Mathematischen Institut Göttingen, MI
G. Herglotz 2. 1. 1934 an E. Kamke
H. Kleinsorge (und A. Bruns) 2. 3. 1985, Gespräch mit E. Scholz, Tonbandprotokoll
O. Neugebauer 3. 3. 1933, Gutachten zur Aufnahme Teichmüllers in die Studienstiftung, MI
NSDAP Ortsgruppe Göttingen 10. 10. 1938, Politische Beurteilung Teichmüllers, Berlin Document Center
Gertrud Teichmüller 20. 11. 1948 an H. Kleinsorge
Gertrud Teichmüller 3. 12. 1949 an H. P. Künzi
Gertrud Teichmüller 10. 1. 1951 an H. P. Künzi
Gertrud Teichmüller 15. 2. 1951 an H. P. Künzi
O. Teichmüller 3. 11. 1933 an E. Landau (siehe Anhang)
O. Teichmüller 14. 6. 1935, Lebenslauf, UAG Promotionsakte No. 247/1753
O. Teichmüller 7. 12. 1938 an A. Bruns (siehe Anhang)
O. Teichmüller 15. 6. 1940 an E. Ullrich
Th. Vahlen 6. 11. 1936 an Math. Nat. Fak. Universität Berlin, Abschrift Hasse, MI
Werner Weber 3. 3. 1933, Gutachten zur Aufnahme Teichmüllers in die Studienstiftung, MI
Werner Weber 1940, Ursachen und Verlauf meiner Auseinandersetzung mit Prof. Hasse. Januar 1940. Bundesarchiv, R21, Abt. Wissenschaft, Personalia
H. Wittich 22. 9. 1982 an L. V. Ahlfors
H. Wittich 2. 6. 1983 an W. Abikoff

Literatur

Abikoff, W. (1986): Oswald Teichmüller. Math. Intelligencer **8**, 8–16/33
Ahlfors, L. (1953/54): On quasiconformal mappings. J. d'Analyse Math. **3**, 1–58
Ahlfors, L. (1960): The complex analytic structure of the space of closed Riemann surfaces. In: Analytic Functions. Princeton 1960
Artin, E.; Tate, J. (1967): Class field theory. Benjamin

Bernays, P. (1942): A system of axiomatic set theory III. J. Symb. Logic **7**, 65–89

Bers, L. (1958): Spaces of Riemann surfaces. In: Proc. Int. Congr. Math. Edinburgh 1958, 349–361

Bigalke, H.-G. (1988): Heinrich Heesch – Kristallgeometrie, Parkettierungen, Vierfarbenforschung. Vita Math. 3. Basel – Boston – Berlin: Birkhäuser

Dahms, H. (1965): Geschichte des zweiten Weltkrieges, Bd. 2. Tübingen

Deligne, P. (1980): Les conjectures de Weil II. Publ. Math. IHES **52**, 137–252

Deligne, P.; Mumford, D. (1969): The irreducibility of the space of curves of a given genus. Publ. Math. IHES **36**, 75–109

Deuring, M. (1936): Einbettung von Algebren in Algebren mit kleinerem Zentrum. J. reine angew. Math. **175**, 124–128

Dickson, L. E. (1926): New division algebras. Trans. AMS **28**, 207–234

Eichler, M. (1943): Bemerkungen zu den vorstehenden Vermutungen von Teichmüller. J. reine angew. Math. **185**, 12–13

Eilenberg, S.; MacLane, S. (1948): Cohomology and Galois theory. I. Normality of [illegible]

algebras and Teichmüller's cocycle. Trans AMS **64**, 1–20

Fathi, F.; Laudenbach, F.; Poénaru, V. (1979): Travaux de Thurston sur les surfaces. Astérisque **66–67**

Finkelstein, D.; Jauch, J. M.; Schirminovich, S.; Speiser, D. (1962): Foundations of Quaternion Quantum Mechanics. J. Math. Physics **3**, 207–220

Fontaine, J. M. (1982): Sur certains types de représentations *p*-adiques du groupe de Galois d'un corps local. Construction d'un anneau de Barsotti-Tate. Annals of Math. **115**, 529–577

Fulton, W. (1969): Hurwitz schemes and irreducibility of moduli of algebraic curves. Ann. Math. **90** (1969), 542–575

Gerritzen, L.; Herrlich, F. (1988): The extended Schottky space. J. reine angew. Math. **389**, 190–208

Giraud, J. (1971): Cohomologie non abélienne. Springer Verlag

Gretschko, A. A.; Solowiow, B. G., et al. (1976/79): Geschichte des zweiten Weltkrieges

Hürlimann, W. (1983): A modern approach to the Brauer group of a global field, unveröffentlichtes Manuskript

Jacobsen, N. (1943): The Theory of Rings. Math. Surveys II. AMS

Janusz, G. J. (1978): Automorphism groups of simple algebras and group algebras. In: R. Gordon (ed.): Representation theory of algebras. New York: M. Dekker, 381–388

Jauch, J. M. (1968): Projective representation of the Poincaré group in a quaternionic Hilbert space. In: E. M. Loebl (ed.): Group theory and its applications. Acad. Press, 131–182

Jech, T. (1966): Interdependence of weakened forms of the axiom of choice. Comment. Math. Univ. Carolinae **7**, 359–371

Jech, T.; Sochor, A.: (1966): On the θ model of set theory; applications of the θ model. Bull. Acad. Polon. Sci., Sér. Math. **14**, 297–303 und 351–355

Jost, J. (199●): Harmonic maps and Curvature Computations in Teichmüller Theory; *to appear in* Annales Acad. Fenn.

Kahn, D. (1967): The Codebreakers. New York

Knobloch, H. W. (1951/52): Verschränkte Produkte aus galoisschen Algebren und ihren Gruppen; und: Zur Kennzeichnung galoisscher Algebren mit vorgegebener Galoisgruppe. Math. Nachr. **6**, 11–20 und 21–44

Lang, S. (1990): Cycotomic fields (second edition, I + II). Springer GTM 121

Läuchli, H. (1963): Auswahlaxiom in der Algebra. Comment. Math. Helv. **37**, 1–18

Lehto, O. (1987): Univalent functions and Teichmüller spaces. Springer GTM **109**

Levy, A. (1964): The interdependence of certain consequences of the axiom of choice. Fund. Math. **54**, 135–151

Lindner, H. (1980): „Deutsche“ und „gegentypische“ Mathematik – Zur Begründung einer „arteigenen“ Mathematik im Dritten Reich durch Ludwig Bieberbach. In: H. Mehrtens; S. Richter (Hrsg.): Naturwissenschaft, Technik und NS-Ideologie. Frankfurt 1980, 88–115

Maas, Chr. (1990): Das mathematische Seminar der Hamburger Universität in der Zeit des Nationalsozialismus. In: Hochschulalltag im Dritten Reich. Die Hamburger Universität 1933–1945; Hamb. Beitr. z. Wiss.gesch. **3** (in drei Bänden), Berlin – Hamburg: Reimer, 1075–1095

Mehrtens, H. (1983): Naturwissenschaften und Nationalsozialismus. TU Journal Berlin **4**, Heft 1

Mehrtens, H. (1985): Die „Gleichschaltung“ der mathematischen Gesellschaften im nationalsozialistischen Deutschland. Jahrbuch Überblicke der Mathematik. Mannheim, 83–103

Mehrtens, H. (1987): Ludwig Bieberbach and „Deutsche Mathematik“. In: E. R. Phillips (ed.): Studies in the History of Mathematics. Studies in Mathematics 26. Math. Assoc. America, 195–241

Mumford, D. (1965): Geometric Invariant Theory. Springer

Mumford, D. (1983): Towards an enumerative geometry of the moduli space of curves. In: Arithmetic and Geometry, vol II. Birkhäuser PM **36**, 271–328

Mumford, D.; Harris, J. (1982): On the Kodaira dimension of the moduli space of curves. Invent. math. **67**, 23–86

Nag, S. (1988): The complex analytic theory of Teichmüller spaces. Wiley

Noether, E. (1984): Gesammelte Abhandlungen * Collected Papers. Hrsg. N. Jacobson. Springer Verlag

Pinl, M.; Furtmüller, L. (1973): Mathematicians under Hitler. Leo Baeck Year Book XVIII, 129–182

Powers, N. C. (1973): Real-linear operators on quaternionic Hilbert space. Proc. AMS **40**, 1–8

Rauch, H. (1988): The singularities of the modulus space. Bull. AMS **68**, 390–394

Reid, C. (1979): Courant in Göttingen and New York. The Story of an Improbable Mathematician, Springer 1976; deutsch von J. Zehnder-Reitinger: Courant in Göttingen und New York, Springer Verlag

Rowe, D. (1986): „Jewish Mathematics" at Göttingen in the era of Felix Klein. Isis **77**, 422–449

Royden, H. L. (1971): Automorphisms and isometries of Teichmüller space. In: Advances in the theory of Riemann surfaces. Ann. Math. Studies **66**, 369–383

Schappacher, N. (1985): Max-Planck-Institut für Mathematik. Historical Notes on the New Research Institute at Bonn. Math. Intelligencer **7**, 41–52

Schappacher, N. (1987): Das Mathematische Institut der Universität Göttingen 1929–1950. In: Becker, Dahms, Wegeler (Hrsg.): Die Universität Göttingen unter dem Nationalsozialismus. München: K. G. Saur, 345–373

Schappacher, N., unter Mitwirkung von Kneser, M. (1990): Fachverband – Institut – Staat. Streiflichter auf das Verhältnis von Mathematik zu Gesellschaft und Politik in Deutschland seit 1890 unter besonderer Berücksichtigung der Zeit des Nationalsozialismus. In: Ein Jahrhundert Mathematik 1890–1990. Festschrift zum Jubiläum der DMV, herausgegeben von G. Fischer, F. Hirzebruch, W. Scharlau, W. Törnig. Braunschweig: Vieweg, 1–82

Scholz, E. (1985): Teichmüller, Paul Julius Oswald. Manuskript für: Dictionary of Scientific Biography, Supplement II. New York

Schumacher, G. (1990): The Theory of Teichmüller spaces. A view towards moduli spaces of Kähler manifolds. In: Several Complex Variables VI, Encyclop. of Math. Sciences, vol. **69**, 251–310

Serre, J.-P. (1968): Corps Locaux. Paris: Hermann

Tate, J. (1967): Global class field theory. In: J. W. S. Cassels, A. Fröhlich (eds.): Algebraic Number Theory. Acad. Press, 162–203

Teichmüller, O. (1939): Cauchy, Riemann, Weierstraß und die Anfänge der Funktionentheorie. In: Berichte über das erste deutsche Mathematikerlager, Ützdorf 1. bis 3. Juli 1938. Deutsche Math. **4**, 115f.

Teichmüller, O. (1982): Gesammelte Abhandlungen * Collected Papers. Hrsg. L. V. Ahlfors, F. W. Gehring. Springer Verlag

Tukey, J. W. (1940): Convergence and uniformity in topology. Ann. Math. Studies **2**, Princ. Univ. Press

Weil, A. (1979): Oeuvres Scientifiques * Collected Papers. Springer Verlag

Weissinger, J. (1938): Theorie der Divisorenkongruenzen. Abh. Math. Sem. Hbg. **12**, 115–126

Wolf, M. (1989): The Teichmüller theory of harmonic maps. J. Diff. Geom. **29**, 449–479

Wolpert, S. (1983): On the homology of the moduli space of stable curves. Ann. Math. **118**, 491–523

Wolpert, S. (1985): On the Weil-Petersson geometry of the moduli space of curves. Ann. J. Math. **107**, 969–997

Zermelo, E. (1904): Beweis, daß jede Menge wohlgeordnet werden kann. Math. Ann. **59**, 514–516

Norbert Schappacher
U.F.R. de Mathématique
et Informatique
ULP
7, rue René Descartes
F-67084 Strasbourg Cedex
Frankreich

Erhard Scholz
Bergische Universität
Gesamthochschule Wuppertal
Fachbereich 7 Mathematik
Gauß-Straße 20
5600 Wuppertal 1

Kai Hauser
Department of Mathematics
University of California
Berkeley, CA 94720, USA

Frank Herrlich
Universität (TH) Karlsruhe
Mathematisches Institut II
Englerstr. 2
7500 Karlsruhe

Martin Kneser
Universität Göttingen
Mathematisches Institut
Bunsenstr. 3–5
3400 Göttingen

Hans Opolka
Technische Universität Braunschweig
Institut für Algebra und Zahlentheorie
Pockelsstr. 14
3300 Braunschweig

(*Eingegangen: 9. 9. 1991*)

Jber. d. Dt. Math.-Verein. 94 (1992) 40–62
AMS subject classification: 90 C 25, 65 D 05, 65 D 10, 65 K 10, 41 A 15

Dual Algorithms for Solving Convex Partially Separable Optimization Problems*)

J. W. Schmidt, Dresden

1 Introduction

Because of their practical applications, optimization problems with a partially separable structure have received considerable attention during the last years. The partial separability has been used to accelerate the computational processes in treating the programs, and if the problems are large they can, in general, only be solved by exploitation of their special structure.

In utilizing structural features, dualization has played a dominant part. While in general dual programs are not easier to solve than primals, the partially separable programs constitute an important exception to the rule. The dual objective function can be evaluated by solving a number of parallel low-dimensional subprograms. Moreover, there is a wide class of partially separable problems for which the duals become unconstrained. Thus we have the great advantage that then the effective techniques of unconstrained optimization can be used.

Partially separable programs treated in this paper are as follows.

Program P:

$$\text{(1.1)}\qquad \text{Minimize } \sum_{i=1}^{N} F_i(A_i u)$$

$$\text{s.t. } \sum_{i=1}^{N} B_i A_i u = b, \qquad A_i u \in W_i, \quad i = 1(1)N.$$

Here the functions $F_i : \mathbb{R}^{l_i} \to \mathbb{R}$ are assumed to be convex and the sets $W_i \subset \mathbb{R}^{l_i}$ to be convex and closed but not necessarily compact. Further let the $(l_i, n+1)$-matrices A_i with $l_i \in \{1, \ldots, n+1\}$ be given as well as the (m, l_i)-matrices B_i and the vector $b \in \mathbb{R}^m$ where $m \in \{1, 2, \ldots\}$. The problem is to find a vector $u = (u_0, u_1, \ldots, u_n)^T \in \mathbb{R}^{n+1}$.

---

*) Invited lecture, Jahrestagung der Deutschen Mathematiker-Vereinigung, Bielefeld 1991.

The components of u may be vectors themselves, and their dimensions may be different. For simplicity this more general situation is not reflected by our notation. But the extension is immediate. Further, sometimes the constraints in program P should be generalized by

$$(1.2) \quad \sum_{i=1}^{N} G_i(A_i u) \leqslant 0, \qquad A_i u \in W_i, \quad i = 1(1)N$$

with convex functions $G_i: \mathbb{R}^{l_i} \to \mathbb{R}^m$.

Let the matrices A_i be defined by

$$(1.3) \quad A_i = (e_{i+1}^T), \qquad i = 1(1)n$$

where $e_i \in \mathbb{R}^{n+1}$ denotes the i-th unit vector, and where $l_i = 1$. This choice leads to the separable program

$$(1.4) \quad \text{minimize} \sum_{i=1}^{n} F_i(u_i)$$

$$\text{s.t.} \sum_{i=1}^{n} B_i u_i = b, \qquad u_i \in W_i, \quad i = 1(1)n$$

being considered in several papers. We refer to the earlier ones [E63], [Fa67], [La69], [U69] as well as to [F79], [ScF80], [FB86], [BL87], [LR88], [D89], [L90]. In the latters diverse applications from fields of mechanical, electrical, and aeronautical engineering can be found.

If with $l_i = 2$ the matrices A_i are chosen to be

$$(1.5) \quad A_i = \begin{pmatrix} e_i^T \\ e_{i+1}^T \end{pmatrix}, \qquad i = 1(1)n,$$

program P reduces to

$$(1.6) \quad \text{minimize} \sum_{i=1}^{n} F_i(u_{i-1}, u_i)$$

$$\text{s.t.} \sum_{i=1}^{n} (B_i u_{i-1} + C_i u_i) = b, \qquad (u_{i-1}, u_i)^T \in W_i, \quad i = 1(1)n.$$

Programs of this kind occur in various applications like shape preserving spline approximation, discrete variational problems with obstacles, or in tridiagonal linear complementary problems; see [BHS85], [DS85], [S87], [S87a], [K89], [S90], [Oe91]. Because the Hessian of the objective function is tridiagonal, programm (1.6) is called tridiagonally separable. Further examples for programs P can be found in [S87b], [K89], [SS90].

Also in the related field of unconstrained optimization a growing interest in methods for partially separable problems is observed. Here reference is made to [GT82], [GT84], [T86]. The notation of partial separability seems to be introduced in these references.

In the present paper, we first derive a dual program to P. Then duality statements here of importance are proved. Finally we sketch several applications followed by computational comments. The main purpose is to give a unified representation of recent developments in partially separable programming.

2 Dualization of Program P

On the basis of the Lagrange theory the partially separable program P is dualized. The method is to introduce auxiliary variables $v_i \in \mathbb{R}^{l_i}$ and to write P as

$$(2.1)\quad \text{minimize } \sum_{i=1}^{N} F_i(v_i)$$

$$\text{s.t. } \sum_{i=1}^{N} B_i v_i = b, \qquad v_i = A_i u, \quad v_i \in W_i, \quad i = 1(1)N$$

or more compactly as

$$(2.2)\quad \text{minimize } F(v) = \sum_{i=1}^{N} H_i(v_i)$$

$$\text{s.t. } \sum_{i=1}^{N} B_i v_i = b, \qquad v_i = A_i u, \quad i = 1(1)N,$$

with functions $H_i: \mathbb{R}^{l_i} \to \mathbb{R} \cup \{+\infty\}$ defined by

$$(2.3)\quad H_i(v_i) = \begin{cases} F_i(v_i) & \text{for} \quad v_i \in W_i, \\ +\infty & \text{for} \quad v_i \notin W_i, \quad i = 1(1)N. \end{cases}$$

The vector of variables is abbreviated by $v = (u, v_1, \ldots, v_N)^T \in \mathbb{R}^k$, $k = n + 1 + l_1 + \ldots + l_N$. Now, the Lagrangian to problem (2.2) reads

$$(2.4)\quad L(v, v^*) = \sum_{i=1}^{N} \{H_i(v_i) + (A_i u - v_i)^T v_i^* - (B_i v_i)^T v_{N+1}^*\} + b^T v_{N+1}^*,$$

where $v_i^* \in \mathbb{R}^{l_i}$, $i = 1(1)N$ and $v_{N+1}^* \in \mathbb{R}^m$ are the vectors of Lagrange multipliers, and $v^* = (v_1^*, \ldots, v_{N+1}^*)^T \in \mathbb{R}^l$, $l = l_1 + \ldots + l_N + m$. The multiplier vector v^* is characterized as a solution of the dual program

$$(2.5)\quad \text{maximize } H(v^*) = \inf\{L(v, v^*): v \in \mathbb{R}^k\}$$

$$= -\sum_{i=1}^{N} \sup\{v_i^T(v_i^* + B_i^T v_{N+1}^*) - H_i(v_i): v_i \in \mathbb{R}^{l_i}\}$$

$$+ \inf\left\{u^T \sum_{i=1}^{N} A_i^T v_i^*: u \in \mathbb{R}^{n+1}\right\} + b^T v_{N+1}^*.$$

Thus, in view of

$$\inf\left\{u^T \sum_{i=1}^{N} A_i^T v_i^*: u \in \mathbb{R}^{n+1}\right\} = \begin{cases} 0 & \text{for} \quad \sum_{i=1}^{N} A_i^T v_i^* = 0 \\ -\infty & \text{otherwise} \end{cases}$$

it is immediate to see that the dual to P can be written as

program D:

(2.6) maximize $\displaystyle -\sum_{i=1}^{N} H_i^*(v_i^* + B_i^T v_{N+1}^*) + b^T v_{N+1}^*$

s.t. $\displaystyle \sum_{i=1}^{N} A_i^T v_i^* = 0,$

if $H_i^*: \mathbb{R}^{l_i} \to \mathbb{R} \cup \{+\infty\}$ denotes the *Fenchel conjugate* to F_i and W_i,

(2.7) $H_i^*(\xi) = \sup\{x^T\xi - F_i(x): x \in W_i\}, \qquad i = 1(1)N.$

Notice that program D is concave. Further, if an optimal multiplier vector v^*, i.e. a solution of program D exists and is known, an optimal vector u to program P can be computed by

(2.8) $A_i u \in \partial H_i^*(v_i^* + B_i^T v_{N+1}^*), \qquad i = 1(1)N$

where, as usual, ∂ denotes the subdifferential. A proof for (2.8) is given in part 3 of this paper.

Next let the constraints in program P be substituted by (1.2). In the same way as before, we are in the position to formulate a dual program. But it seems to be impossible to use again the concept of conjugate functions. The result is the following dual program

(2.9) maximize $\displaystyle -\sum_{i=1}^{N} J_i^*(v_i^*, v_{N+1}^*)$

s.t. $\displaystyle \sum_{i=1}^{N} A_i^T v_i^* = 0, \qquad v_{n+1}^* \geqslant 0$

where for $\eta \geqslant 0$ we have to define

(2.10) $J_i^*(\xi, \eta) = \sup\{x^T\xi - G_i(x)^T\eta - F_i(x): x \in W_i\}, \qquad i = 1(1)N.$

If we denote the set of maximizers of program (2.10) by $X_i(\xi, \eta)$, formula (2.8) is to replace by

(2.11) $A_i u \in X_i(v_i^*, v_{N+1}^*), \qquad i = 1(1)N.$

3 Duality Statements

In the following theorems the solvability of the programs P and D is shown to depend essentially on properties of the low-dimensional programs (2.7) for computing the conjugates. This implies an important simplification in testing the existence conditions. The proofs follow mainly the lines of reference [DS89] where a special case of program P is treated; compare also with [SS90].

Theorem 1. *Assume that* $\partial H_i^*(\xi) \neq \emptyset$ *for* $\xi \in \mathbb{R}^{l_i}$, $i = 1(1)N$. *Then, the feasible domain of program P is nonempty if and only if the optimal value* $\sup D < +\infty$. *Further, feasible programs P are solvable, and*

(3.1) $\quad \min P = \sup D.$

Remark. The condition $\partial H_i^*(\xi) \neq \emptyset$ for $\xi \in \mathbb{R}^{l_i}$ is equivalent to $X_i(\xi) \neq \emptyset$ for $\xi \in \mathbb{R}^{l_i}$, where $X_i(\xi)$ denotes the set of maximizers of program (2.7) for computing the conjugate $H_i^*(\xi)$. The uniform convexity of F_i is sufficient for $X_i(\xi) \neq \emptyset$, $\xi \in \mathbb{R}^{l_i}$ and thus for the property that H_i^* is real-valued on $\mathbb{R}^{l_i}$. Moreover, $X_i(\xi)$ then

Proof of theorem 1: For abbreviation let the feasible domain of P be denoted by

$$(3.2) \qquad W = \left\{ u \in \mathbb{R}^{n+1} : \sum_{i=1}^{N} B_i A_i u = b,\ A_i u \in W_i,\ i = 1(1)N \right\}.$$

First we assume $W \neq \emptyset$, and choose $\tilde{u} \in W$. To $\tilde{u}$ a vektor $\tilde{v}$ can be found using the multiplier vectors $v_i \in \mathbb{R}^{l_i}$, $i = 1(1)N$ and $u \in \mathbb{R}^{n+1}$, the dual in question reads

$$\text{maximize inf}\left\{\sum_{i=1}^{N} [H_i^*(u_i^*) + v_i^T(v_i^* + B_i^T v_{N+1}^* - u_i^*) - u^T A_i^T v_i^*] - b^T v_{N+1}^* : u_i^*, i = 1(1)N, v_i^*, i = 1(1)N+1\right\}$$

$$= \sum_{i=1}^{N} \inf\{H_i^*(u_i^*) - v_i^T u_i^* : u_i^* \in \mathbb{R}^{l_i}\}$$

$$+ \inf\left\{\left(\sum_{i=1}^{N} B_i v_i - b\right)^T v_{N+1}^* : v_{N+1}^* \in \mathbb{R}^m\right\}$$

$$+ \sum_{i=1}^{N} \inf\{(v_i - A_i u)^T v_i^* : v_i^* \in \mathbb{R}^{l_i}\},$$

or reformulated

$$\text{(3.4)} \quad \text{maximize} \quad -\sum_{i=1}^{N} \sup\{v_i^T u_i^* - H_i^*(u_i^*) \colon u_i^* \in \mathbb{R}^{l_i}\} = -\sum_{i=1}^{N} H_i^{**}(v_i)$$

$$\text{s.t.} \sum_{i=1}^{N} B_i v_i = b, \qquad v_i = A_i u, \quad i = 1(1)N.$$

Now, because the functions H_i defined by (2.3) are closed, we have $H_i^{**} = H_i$. Hence program (3.4) is equivalent to program P. Thus, $\sup D < +\infty$ implies the solvability of P what includes $W \neq \emptyset$, and

$$\min P = -\max(3.4) = -\inf(3.3) = \sup D.$$

From these considerations both parts of theorem 1 follow immediately.

The next existence theorem ensures the solvability of the dual program, too.

Theorem 2. *Assume that* $\partial H_i^*(\xi) \neq \emptyset$ *for* $\xi \in \mathbb{R}^{l_i}$, $i = 1(1)N$. *If*

$$\text{(3.5)} \quad V = \left\{u \in \mathbb{R}^{n+1}\colon \sum_{i=1}^{N} B_i A_i u = b, A_i u \in \text{ri } W_i, i = 1(1)N\right\} \neq \emptyset$$

then both programs P and D are solvable, and

$$\text{(3.6)} \quad \min P = \max D.$$

The same conclusions hold true if the feasible domain W of P is nonempty and polyhedral.

Here, as usual, *ri* denotes the relative interior of a set.

Proof of the first part: Because of $V \subset W$ we have $W \neq \emptyset$. Hence, theorem 1 ensures P to be solvable, and $\min P > -\infty$. Next choose $\tilde{u} \in V$ and set $\tilde{v}_i = A_i \tilde{u}$, $i = 1(1)N$ and $\tilde{v} = (\tilde{u}, \tilde{v}_1, \ldots, \tilde{v}_N)^T \in \mathbb{R}^k$. Then it follows

$$(3.7) \quad \tilde{v} \in \mathbb{R}^{n+1} \times \operatorname{ri} W_1 \times \ldots \times \operatorname{ri} W_N = \operatorname{ri} Y \text{ with } Y = \mathbb{R}^{n+1} \times W_1 \times \ldots \times W_N \subset \mathbb{R}^k$$

$$\text{and} \quad \tilde{v} \in Z = \left\{ v \in \mathbb{R}^k \colon \sum_{i=1}^{N} B_i v_i = b,\, v_i = A_i u,\, i = 1(1)N \right\},$$

i.e. $\tilde{v} \in \operatorname{ri} Y \cap Z$. Thus by well-known duality results, program D turns out to be solvable as well as (3.6) to be valid; see e.g. [ERS77], p.175.

Proof of the second part: Since W is polyhedral there are (n_i, l_i)-matrices D_i and vectors $d_i \in \mathbb{R}^{n_i}$ such that

$$W_i = \{v_i \in \mathbb{R}^{l_i} \colon D_i v_i + d_i \leqslant 0\}, \qquad i = 1(1)N,$$

and program P can be formulated as

$$(3.8) \quad \text{minimize } F(v) = \sum_{i=1}^{N} F_i(v_i)$$

$$\text{s.t. } g(v) = 0, \qquad h(v) \leqslant 0,$$

where $h(v) = (h_1(v), \ldots, h_N(v))^T$, $h_i(v) = D_i v_i + d_i$ while the affine linear equality-constraints

$$v_i = A_i u, \quad i = 1(1)N, \qquad \sum_{i=1}^{N} B_i v_i = b$$

are collected to $g(v) = 0$. In view of theorem 1, $W \neq \emptyset$ implies P to be solvable, and thus also (3.8). Further we have $\min P = \sup D$. Now, the above mentioned duality theorem from [ERS77] ensures the solvability of the program dual to (3.8), and $\alpha = \min P$ for the optimal value of this dual. Let now $(\tilde{v}^*, \tilde{y}^*)^T$ with $\tilde{y}^* \geqslant 0$ be an optimal vector for the dual program to (3.8). Then, using the notations (3.7) and (2.5), we get

$$\begin{aligned} \alpha &= \inf\{F(v) + g(v)^T \tilde{v}^* + h(v)^{\mathrm{T}} \tilde{y}^* \colon v \in \mathbb{R}^k\} \\ &\leqslant \inf\{F(v) + g(v)^T \tilde{v}^* + h(v)^{\mathrm{T}} \tilde{y}^* \colon v \in Y\} \\ &\leqslant \inf\{F(v) + g(v)^T \tilde{v}^* \colon v \in Y\} \\ &= H(\tilde{v}^*) \leqslant \sup D = \min P = \alpha. \end{aligned}$$

This implies $\tilde{v}^*$ to be optimal for the dual program D. Thus, theorem 2 is completely proved.

Next, the important formula (2.8) is verified. For this characterization of optimal vectors of program P by means of those of the dual D, mainly assumptions on the low-dimensional programs (2.7) for computing the conjugates are needed.

Theorem 3. *Let $\partial H_i^*(\xi) \neq \emptyset$ for $\xi \in \mathbb{R}^{l_i}$, $i = 1(1)N$, and let program D be solvable, say by $v^* = (v_1^*, \ldots, v_{N+1}^*)^T \in \mathbb{R}^l$. Then all solutions $u \in \mathbb{R}^{n+1}$ of program P*

are given by the return-formula (2.8), *i.e. by*

(3.9) $A_i u \in \partial H_i^*(v_i^* + B_i^T v_{N+1}^*), \qquad i = 1(1)N.$

Proof: Because of $\max D < +\infty$, theorem 1 assures program P to be

[illegible]

feasible vector for the equivalent program (2.1). Now, a well-known characterization theorem says that v is optimal if and only if with the Lagrangian L

(3.10) $L(v, v^*) = \min \{L(v, v^*) \colon v \in Y \cap Z\}$

holds true; see e.g. [ERS77], p.185. In view of (2.5), (2.6), equality (3.10) is equivalent to

$$\sum_{i=1}^{N} \{v_i^T(v_i^* + B_i^T v_{N+1}^*) - F_i(v_i)\} = \sum_{i=1}^{N} H_i^*(v_i^* + B_i^T v_{N+1}^*).$$

This relation anew is valid if and only if

(3.11) $v_i^T(v_i^* + B_i^T v_{N+1}^*) - F_i(v_i) = H_i^*(v_i^* + B_i^T v_{N+1}^*), \qquad i = 1(1)N.$

Hence $v_i = A_i u$ is proved to be a maximizer of program (2.7) for computing $H_i^*(v_i^* + B_i^T v_{N+1}^*)$. On the other hand, this is possible if and only if v_i belongs to the subdifferential of $H_i^*(v_i^* + B_i^T v_{N+1}^*)$. Thus theorem 3 is verified.

In all known examples of practical interest, the matrices A_i defining the structure of the partially separable program P are composed by unit vectors only. In this case each component of the vectors $v_i^* \in \mathbb{R}^{l_i}$ occurs in exactly one of the $n+1$ linear equations

$$\sum_{i=1}^{N} A_i^T v_i^* = 0$$

Step 3. Determine the solution of program P by means of the explicit return-formula (3.12).

4 Separable Programs

For the separable program (1.4)

$$\text{(4.1)} \quad \text{minimize } \sum_{i=1}^{n} F_i(u_i)$$

$$\text{s.t. } \sum_{i=1}^{n} B_i u_i = b, \qquad u_i \in W_i, \quad i = 1(1)n$$

the dual program D reduces to the following program in the variable $v_{n+1}^* \in \mathbb{R}^m$ only:

$$\text{(4.2)} \quad \text{maximize } \; -\sum_{i=1}^{n} H_i^*(B_i^T v_{n+1}^*) + b^T v_{n+1}^*;$$

compare with [U69]. The conjugates $H_1^*, \dots, H_n^*$ therein are given by (2.7), and the essential return-formula (3.12) reads now

$$\text{(4.3)} \quad u_i = \operatorname{grad} H_i^*(B_i^T v_{n+1}^*), \qquad i = 1(1)n.$$

4.1. In [BL87] a static dispatch problem from the field of electrical engineering is analyzed which can be written as a quadratic knapsack problem

$$\text{(4.4)} \quad \text{minimize } \sum_{i=1}^{n} (a_i u_i^2 + b_i u_i)$$

$$\text{s.t. } \sum_{i=1}^{n} u_i = b, \qquad c_i \leqslant u_i \leqslant d_i, \quad i = 1(1)n$$

in the real variables $u_1, \dots, u_n$; see also [L90]. The assumption $a_i > 0$, $i = 1(1)n$ assures the functions $F_i(u_i) = a_i u_i^2 + b_i u_i$ to be uniformly convex; further set $W_i = \{u_i \in \mathbb{R}\colon c_i \leqslant u_i \leqslant d_i\}$. Obviously, the feasible domain is nonempty exactly for

$$\sum_{i=1}^{n} c_i \leqslant b \leqslant \sum_{i=1}^{n} d_i.$$

The conjugates (2.7) are easily computed. We get

$$\text{(4.5)} \quad H_i^*(\xi) = \begin{cases} \dfrac{1}{4a_i}(\xi - b_i)^2 & \text{for} \quad 2a_i c_i + b_i \leqslant \xi \leqslant 2a_i d_i + b_i \\ c_i \xi - a_i c_i^2 - b_i c_i & \text{for} \quad \xi \leqslant 2a_i c_i + b_i \\ d_i \xi - a_i d_i^2 - b_i d_i & \text{for} \quad \xi \geqslant 2a_i d_i + b_i. \end{cases}$$

Indeed, $H_1^*, \ldots, H_n^*$ are $C^1(\mathbb{R})$-functions. The unconstrained dual program (4.2) is scalar and piecewise quadratic. We recommend to solve (4.2) by Newton's method combined with bisection for supplying sufficiently good starting values. In the paper [BL87] a closely related dual algorithm is proposed which, however, does not use the concept of conjugate functions explicitly. There have been carried out several computational experiments. Here we reproduce the following table containing the execution times (in milliseconds on an Andahl V7B) for the dual algorithm (DA) as well as for Rosen's gradient-projection method (GP):

n	5	10	25	50	100	300
GP	3	13	210	1998	–	–
DA	0.15	0.3	0.8	1.6	3.5	13

Observe that the dual algorithm solves large problems with hundreds of variables while the gradient-projection method fails.

Finally, notice that for $a_i = 0$ the function F_i is convex, but not uniformly. Now the conjugate

$$(4.6) \quad H_i^*(\xi) = \begin{cases} (\xi - b_i)d_i & \text{for} \quad \xi \geqslant b_i \\ (\xi - b_i)c_i & \text{for} \quad \xi \leqslant b_i \end{cases}$$

is only a $C^0(\mathbb{R})$-function implying considerable difficulties in solving the dual (4.2).

4.2. The references [F79], [ScF80], [FB86] are concerned with structural design problems in mechanical engineering. These are leading to separable programs e.g. of the form

$$(4.7) \quad \text{minimize} \sum_{i=1}^{n} \frac{a_i}{u_i}$$

$$\text{s.t.} \sum_{i=1}^{n} b_{ij} u_i = b_j, \qquad j = 1(1)m, \quad 0 < c_i \leqslant \frac{1}{u_i} \leqslant d_i, \quad i = 1(1)n$$

where $a_i > 0$ for $i = 1(1)n$. In [D89] it is found under comparable conditions that also here the dual problem is much easier to solve numerically than the primal program. In the case (4.7) the conjugates are immediately computed to be

$$(4.8) \quad H_i^*(\xi) = \begin{cases} -2\sqrt{-a_i\xi} & \text{for} \quad -a_i d_i^2 \leqslant \xi \leqslant -a_i c_i^2 \\ \dfrac{\xi}{d_i} - a_i d_i & \text{for} \quad \xi \leqslant -a_i d_i^2 \\ \dfrac{\xi}{c_i} - a_i c_i & \text{for} \quad \xi \geqslant -a_i c_i^2. \end{cases}$$

Notice that $H_i^* \in C^1(\mathbb{R})$. The dual program (4.2) is formulated by setting $B_i = (b_{i1}, \ldots, b_{im})^T \in \mathbb{R}^m$, $i = 1(1)n$ and $b = (b_1, \ldots, b_m) \in \mathbb{R}^m$; the variables are the m components of the vector v_{n+1}^*.

5 Tridiagonally Separable Programs

Next we deal with the tridiagonally separable program (1.6)

(5.1) $$\text{minimize} \sum_{i=1}^{n} F_i(u_{i-1}, u_i)$$

$$\text{s.t.} \sum_{i=1}^{n} (B_i u_{i-1} + C_i u_i) = b, \qquad (u_{i-1}, u_i)^T \in W_i, \quad i = 1(1)n.$$

The corresponding dual program D is easily seen to be

(5.2) $$\text{maximize} \quad -\sum_{i=1}^{n} H_i^*(v_{i-1}^* + B_i^T v_{n+1}^*, -v_i^* + C_i^T v_{n+1}^*) + b^T v_{n+1}^*$$

with $v_0^* = 0$, $v_n^* = 0$, and the return-formula (3.12) is now

(5.3) $$(u_{i-1}, u_i)^T = \text{grad}\, H_i^*(v_{i-1}^* + B_i^T v_{n+1}^*, -v_i^* + C_i^T v_{n+1}^*), \qquad i = 1(1)n.$$

Here the conjugates are to be computed according to

(5.4) $$H_i^*(\xi, \eta) = \sup\{x^T\xi + y^T\eta - F_i(x, y) : (x, y)^T \in W_i\}, \qquad i = 1(1)n.$$

For the special case $B_i = 0$, $C_i = 0$, $i = 1(1)n$, $b = 0$ this dualization approach was first described in [DS85]; the following feasibility test goes back to [CM84], [SH84], [C86].

Theorem 4. *There are vectors* $u_0, \ldots, u_n \in \mathbb{R}^l$ *with*

(5.5) $$(u_{i-1}, u_i)^T \in W_i \subset \mathbb{R}^l \times \mathbb{R}^l, \qquad i = 1(1)n$$

if and only if

(5.6) $$P_i \neq \emptyset, \qquad i = 1(1)n,$$

where the projections $P_0, \ldots, P_n$ *are recursively defined by* $P_0 = \mathbb{R}^l$,

(5.7) $$P_i = \{y \in \mathbb{R}^l : \text{there exists } x \in P_{i-1} \text{ with } (x, y)^T \in W_i\}, \qquad i = 1(1)n.$$

There are various problems having a tridiagonally separable structure. Some of these now are described.

5.1 Convex Interpolation with Cubic C^1-Splines

Let (x_i, y_i), $i = 0(1)n$ be given data points whose abscissas may define a partition $\Delta = \{x_0 < x_1 < \ldots < x_n\}$. A cubic spline s on Δ can be given for $x \in [x_{i-1}, x_i]$ by

$$(5.8) \quad s(x) = y_{i-1} + m_{i-1}(x - x_{i-1}) + \left(3\,\frac{y_i - y_{i-1}}{h_i} - 2m_{i-1} - m_i\right)\frac{(x - x_{i-1})^2}{h_i} + \left(m_{i-1} + m_i - 2\,\frac{y_i - y_{i-1}}{h_i}\right)\frac{(x - x_{i-1})^3}{h_i^2}$$

with $h_i = x_i - x_{i-1}$, where $i = 1(1)n$. It follows $s \in C^1[x_0, x_n]$, and

$$(5.9) \quad s(x_i) = y_i, \qquad s'(x_i) = m_i, \qquad i = 0(1)n.$$

Therefore the given points are interpolated by the spline s for all values of $m_0, m_1, \ldots, m_n$. Further, s is easily proved to be convex on $[x_0, x_n]$ if and only if

$$(5.10) \quad 2m_{i-1} + m_i \leqslant 3\,\frac{y_i - y_{i-1}}{h_i} \leqslant m_{i-1} + 2m_i, \qquad i = 1(1)n;$$

see [N78]. Hence, the convexity of s leads to a problem (5.5) with

$$(5.11) \quad W_i = \left\{(x, y)^T \in \mathbb{R}^2\colon 2x + y \leqslant 3\,\frac{y_i - y_{i-1}}{h_i} \leqslant x + 2y\right\}.$$

Applying theorem 4 we get the following existence criterion which is due to [SH84].

Proposition 5. *There are convex cubic C^1-spline interpolants if and only if*

$$(5.12) \quad a_i \leqslant b_i, \qquad i = 1(1)n,$$

where $a_0 = -\infty$, $b_0 = +\infty$ and for $i = 1(1)n$:

$$(5.13) \quad a_i = \max\left\{\frac{y_i - y_{i-1}}{h_i}, \frac{1}{2}\left(3\,\frac{y_i - y_{i-1}}{h_i} - b_{i-1}\right)\right\},$$

$$b_i = 3\,\frac{y_i - y_{i-1}}{h_i} - 2a_{i-1}.$$

Notice that the computational complexity of this test is only $O(n)$. If (5.12) is satisfied, in general an infinite number of convex interpolating splines exist. In order to select one of them a choice function is necessary. It makes sense to minimize the mean curvature

$$(5.14) \quad \int_{x_0}^{x_n} s''(x)^2 \mathrm{d}x = \sum_{i=1}^{n} F_i(m_{i-1}, m_i)$$

where with (5.8)

$$(5.15) \quad F_i(x, y) = \frac{4}{h_i}\left\{x^2 + xy + y^2 - 3\,\frac{y_i - y_{i-1}}{h_i}(x + y) + 3\left(\frac{y_i - y_{i-1}}{h_i}\right)^2\right\}$$

Thus, a tridiagonally separable program (5.1) with $B_i=0$, $C_i=0$, $b=0$ arises which was first dualized in [BHS85]. The conjugates belonging to (5.11), (5.15) turn out to be

$$(5.16)\quad H_i^*(\xi,\eta)=\frac{y_i-y_{i-1}}{h_i}(\xi+\eta)+\frac{h_i}{12}R(\xi,\eta)$$

with

$$(5.17)\quad R(\xi,\eta)=\begin{cases}\xi^2-\xi\eta+\eta^2 & \text{for} \quad \xi\leqslant 0,\eta\geqslant 0\\ (\xi/2-\eta)^2 & \text{for} \quad 0\leqslant\xi\leqslant 2\eta\\ (\xi-\eta/2)^2 & \text{for} \quad 2\xi\leqslant\eta\leqslant 0\\ 0 & \text{for} \quad \xi\geqslant 2\eta, 2\xi\geqslant\eta.\end{cases}$$

For solving the described problem of convex interpolation, in [BHS85] Newton's method was applied to the unconstrained dual program (5.2), (5.16). In the following table the average number of Newton steps (ANS) is collected which are needed when using the starting values

$$v_i^*=\frac{y_i-y_{i-1}}{h_i}-\frac{y_{i+1}-y_i}{h_{i+1}},\qquad i=1(1)n-1$$

for data point chosen at random:

n	4	6	10	20	50	100
ANS	2.4	2.6	3.1	3.3	3.9	4.2

Further, it is noticed that in convex interpolation with cubic C^1-splines instable problems may occur. Obviously, the set D of data points (x_i,y_i), $i=0(1)n$ for which the convexity test (5.12) holds true is closed. Thus, for data sets from the boundary of D, rounding errors in the numerical process for solving the dual (5.2), (5.16) may falsify the test (5.12). Then the feasible domain W of the primal program (5.1), (5.11), (5.15) becomes empty. In view of theorem 1, this implies the optimal value of the dual program to tend to infinity.

Of course, the instability of a problem cannot be compensated by numerical methods.

The conjugates $H_1^*,\ldots,H_n^*$ are also kown for some other typs of constrained interpolation and histopolation with cubic C^1-splines; see [DS85], [HS86], [SH88], [SH89], [S91a]. Here also constraints like monotonicity or positivity are considered.

5.2 Convex Data Smoothing with Cubic C^1-Splines

One should change from interpolation to fitting when the data set (x_i,z_i), $i=0(1)n$ given on the partition $\Delta=\{x_0<x_1<\ldots<x_n\}$, is the result of measuring. In this case, Schoenberg's functional [Sh64]

$$(5.18)\quad Sh(s)=l\int_{x_0}^{x_n}s''(x)^2dx+\sum_{i=1}^{n}\{p_{i-1}(s(x_{i-1})-z_{i-1})^2+p_i(s(x_i)-z_i)^2\}$$

is a suitable objective function. Here $l > 0$ is a parameter belancing smoothness versus goodness of fit. This parameter as well as the positive correlation coefficients $p_0, \ldots, p_n$ are supposed to be given. In order to get a smooth convex approximation function to the data set, the functional Sh can be minimized subject to convex splines (5.8); see [S87]. The result is a tridiagonally separable program (5.1) with $B_i = 0$, $C_i = 0$, $b = 0$. Now the variables are vectors $u_i = (y_i, m_i)^T$ where y_i and m_i have the geometrical meaning (5.9). The functions $F_i \colon \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}$ are to be defined by

$$(5.19)\quad F_i(f, x, g, y) = p_{i-1}(f - z_{i-1})^2 + p_i(g - z_i)^2 + \frac{4l}{h_i}\left\{x^2 + xy + y^2 - 3\,\frac{g-f}{h_i}(x+y) + 3\left(\frac{g-f}{h_i}\right)^2\right\},$$

while

$$(5.20)\quad W_i = \{(f, x, g, y)^T \in \mathbb{R}^4 \colon 2x + y \leqslant 3\,\frac{g-f}{h_i} \leqslant x + 2y\}, \qquad i = 1(1)n;$$

compare with (5.15) and (5.11).

The problem (5.1), (5.19), (5.20) of convex smoothing is uniquely solvable for all data sets, and the solution can be computed effectively via the unconstrained functional

$$(5.22)\quad S(s) = l \int_{x_0}^{x_n} s'(x)^2 \mathrm{d}x + \sum_{i=1}^{n} p_i \left(f_i - \frac{1}{h_i} \int_{x_{i-1}}^{x_i} s(x)\mathrm{d}x \right)^2,$$

which can be considered as an adaption of the Schoenberg functional (5.18) to the histogram problem of area matching. For an interpretation of the positive parameters l and $p_1, \ldots, p_n$ see part 5.2.

Now, quadratic splines s on Δ are considered which are given for $x_{i-1} \leqslant x \leqslant x_i$ by

$$(5.23)\quad s(x) = y_{i-1} + m_{i-1}(x - x_{i-1}) + \left(\frac{y_i - y_{i-1}}{h_i} - m_{i-1} \right) \frac{(x - x_{i-1})^2}{h_i}$$

where $i = 1(1)n$. We have $s \in C^1[x_0, x_n]$ if and only if

$$(5.24)\quad m_{i-1} + m_i = 2\,\frac{y_i - y_{i-1}}{h_i}, \qquad i = 1(1)n-1$$

and for convenience we define m_n by (5.24) for $i = n$. Again, (5.9) holds true. Finally, convexity is equivalent to

$$(5.25)\quad m_{i-1} \leqslant m_i, \qquad i = 1(1)n.$$

Thus, the minimization of S subject to convex quadratic C^1-splines leads to a tridiagonally separable program (5.1) with $B_i = 0$, $C_i = 0$, $b = 0$, and with

$$(5.26)\quad F_i(f, x, g, y) = \frac{lh_i}{3}(x^2 + xy + y^2) + \frac{p_i}{36}(6f_i - 4f - 2g - h_i x)^2,$$

$$(5.27)\quad W_i = \left\{ (f, x, g, y)^T \in \mathbb{R}^4 \colon x + y = 2\,\frac{g - f}{h_i},\ x \leqslant y \right\}, \qquad i = 1(1)n.$$

For all histograms F, the problem (5.1), (5.26), (5.27) of convex smoothing is uniquely solvable. Again it is recommended to determine the solution via dualization. The conjugates needed for formulating the dual (5.2) as well as the return-formula (5.3) now are

$$(5.28)\quad H_i^*(\varrho, \xi, \sigma, \eta) = f_i(\varrho + \sigma) + \frac{(\varrho + \sigma)^2}{4p_i} + \frac{h_i(\varrho^2 - \varrho\sigma + \sigma^2)}{12l} + \frac{\eta\sigma - \xi\varrho}{2l}$$
$$+ \frac{\xi^2 - \xi\eta + \eta^2}{lh_i} - \frac{lh_i}{12}\left(\left(-\frac{\varrho + \sigma}{2l} - \frac{3(\xi - \eta)}{lh_i} \right)_+ \right)^2,$$
$$i = 1(1)n;$$

see [S92]. As usual, $z_+ = z$ for $z \geqslant 0$ and $z_+ = 0$ for $z \leqslant 0$.

Analogous results for monotone histogram smoothing can be found again in [S92]. There are also two-sided constraints like $\delta(x) \leqslant s''(x) \leqslant \varepsilon(x)$ or $\delta(x) \leqslant s'(x) \leqslant \varepsilon(x)$ on $[x_0, x_n]$ where δ and ε are given functions, not necessary of equal sign on $[x_0, x_n]$.

On the basis of the described results, several computer tests have been performed in reference [G91]. For solving the dual program (5.2), (5.28), in all examples only a small number of Newton steps (NS) are needed although the initial vector was $v_i^* = 0, i = 1(1)n-1$. By means of the following figures the dependence of the spline approximants on the parameters l and $p_1, \ldots, p_n$ shall be demonstrated.

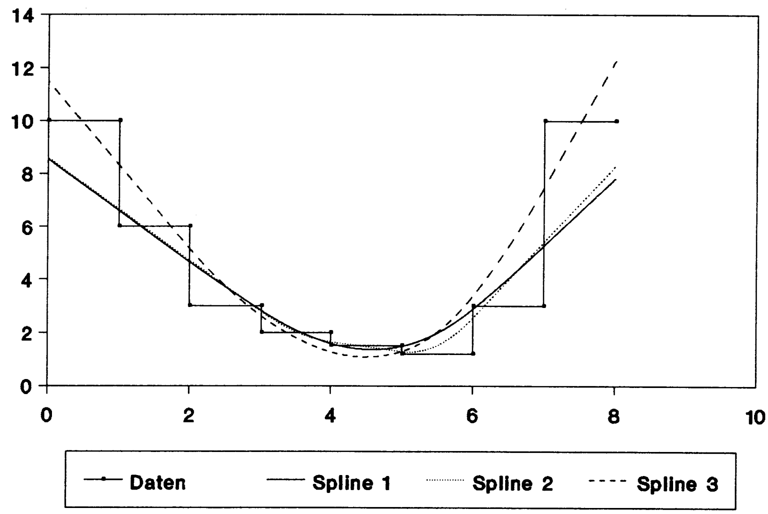

Figure 1

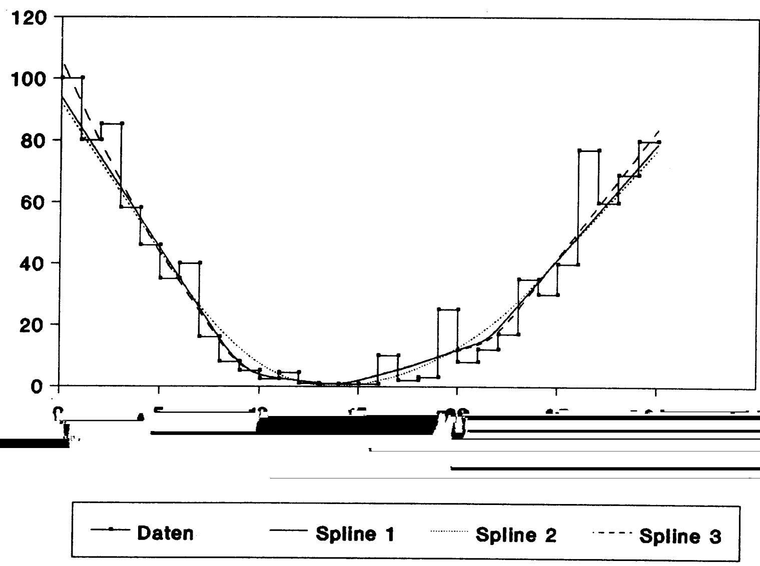

Figure 2

The splines in figure 1 are computed by setting

	l	p_i	NS
spline 1	100	$p_i = 1, \quad i = 1(1)8$	3
spline 2	0.1	$p_i = 1, \quad i = 1(1)8$	5
spline 3	100	$p_1 = p_8 = 100, \quad p_i = 1, \quad i = 2(1)7$	3

In figure 2 the splines are obtained by choosing

	l	p_i	NS
spline 1	1	$p_i = 1, \quad i = 1(1)30$	8
spline 2	1000	$p_i = 1, \quad i = 1(1)30$	4
spline 3	1	$p_1 = p_{30} = 100, \quad p_2 = p_{29} = 10,$ $p_i = 1, \quad i = 3(1)28$	7

Figure 3 shows a histogram of dimension $n = 60$ which is concave in the main. Thus, under convexity constraints the result is a straightline. In this example, Newton's method has terminated after NS $= 2$ steps.

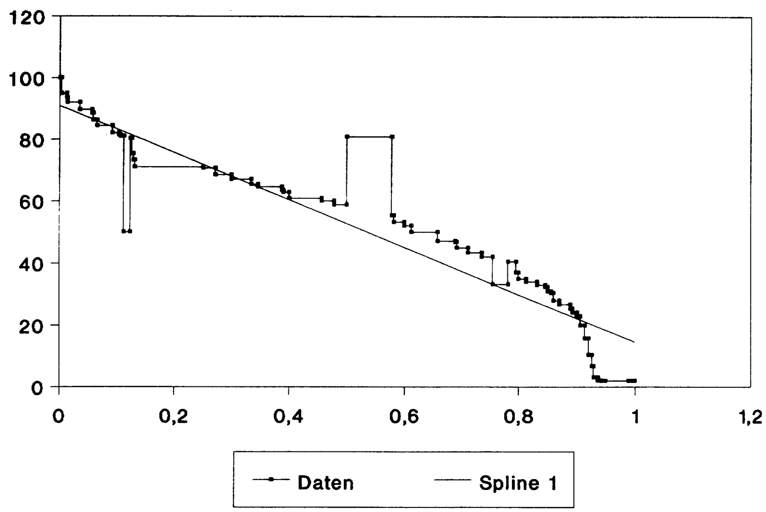

Figure 3

5.4 Tridiagonal Linear Complementarity and Obstacle Problems

A linear complementarity problem is that of finding a vector $u = (u_0, \ldots, u_n)^T \in \mathbb{R}^{n+1}$ such that

$$(5.29) \quad Au + b \geqslant 0, \; u \geqslant c, \qquad (u - c)^T (Au + b) = 0$$

holds, where the $(n+1, n+1)$-matrix A and the vectors $b, c \in \mathbb{R}^{n+1}$ are given. If A is assumed to be symmetric positive definite, (5.29) is equivalent to

$$(5.30) \quad \text{minimize } f(u) = u^T A u + 2b^T u \qquad \text{s.t. } u \geqslant c.$$

Now, let A in addition be tridiagonal. Then program (5.30) can be transformed into a tridiagonally separable one; see [S87a]. E.g., if

$$L = \begin{pmatrix} l_0 & & & 0 \\ k_0 & l_1 & & \\ & \ddots & \ddots & \\ 0 & & k_{n-1} & l_n \end{pmatrix}$$

with $l_0 > 0, \ldots, l_n > 0$ is the Cholesky factor to A, it follows with parameters $\varepsilon_1, \ldots, \varepsilon_{n-1}$

$$\begin{aligned}(5.31)\quad f(u) &= u^T L L^T u + 2b^T u \\ &= (l_0 u_0 + k_0 u_1)^2 + \varepsilon_1 u_1^2 + 2b_0 u_0 \\ &\quad + \sum_{i=2}^{n-1} \{(l_{i-1} u_{i-1} + k_{i-1} u_i)^2 - \varepsilon_{i-1} u_{i-1}^2 + \varepsilon_i u_i^2 + 2b_{i-1} u_{i-1}\} \\ &\quad + (l_{n-1} u_{n-1} + k_{n-1} u_n)^2 - \varepsilon_{n-1} u_{n-1}^2 + l_n^2 u_n^2 + 2b_{n-1} u_{n-1} + 2b_n u_n.\end{aligned}$$

Thus, f is written as

$$f(u) = \sum_{i=1}^{n} F_i(u_{i-1}, u_i).$$

If the numbers $\varepsilon_1, \ldots, \varepsilon_{n-1}$ are chosen according to $\varepsilon_n = l_n^2$ and

$$(5.32)\quad 0 < \varepsilon_{i-1} < \frac{l_{i-1}^2 \varepsilon_i}{k_{i-1}^2 + \varepsilon_i}, \qquad i = n(-1)2,$$

it is easily seen that then the Hessians of $F_1, \ldots, F_n$ become positive definite. Finally the sets W_i may be defined by

$$(5.33)\quad W_i = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \colon x \geqslant c_{i-1}, y \geqslant c_i\}, \qquad i = 1(1)n.$$

Because the corresponding conjugates are straightforwardly computed, the described dualization procedure applies immediately to tridiagonal linear complementarity problems. For numerical examples see [S87a].

In [K89] the transformation of (5.30) into a tridiagonally separable one is shown also to be possible if A is a H-matrix. Further results in this direction are offered in [GT84].

Finally, we remember obstacle problems like

$$(5.34)\quad \text{minimize} \int_0^1 \{u'(x)^2 + q(x)u(x)^2 - 2f(x)u(x)\}\,\mathrm{d}x$$

$$\text{s.t. } u(x) \geqslant c(x), \qquad 0 \leqslant x \leqslant 1, \quad u(0) = \alpha, \quad u(1) = \beta,$$

where $q(x) \geqslant 0$ for $0 \leqslant x \leqslant 1$. Discretizations of (5.34) by means of linear finite elements or finite differences yield a program (5.30) with a matrix A being symmetric positive definite and tridiagonal. Thus, discretized obstacle problems can be dualized on the lines just described. Some numerical examples are given in [S87a], [K89].

6 Further Partially Separable Programs of Practical Interest

Here, in addition to separable and tridiagonally separable programs, we describe further special cases of the partially separable program P which have appeared in applications.

6.1. First we mention the programm

$$\text{(6.1)} \quad \text{minimize} \sum_{i=1}^{n} F_i(u_{i-1}, u_i, v_i)$$

$$\text{s.t.} \sum_{i=1}^{n} (B_i u_{i-1} + C_i u_i + D_i v_i) = b, \qquad (u_{i-1}, u_i, v_i)^T \in W_i, \quad \mathrm{i} = 1(1)n,$$

for which the dual program D reduces to

$$\text{(6.2)} \quad \text{maximize} \quad -\sum_{i=1}^{n} H_i^*(v_{i-1}^* + B_i^T v_{n+1}^*, -v_i^* + C_i^T v_{n+1}^*, D_i^T v_{n+1}^*) + b^T v_{n+1}^*$$

with $v_0^* = 0$, $v_n^* = 0$. The return-formula (3.12) reads now

$$\text{(6.3)} \quad (u_{i-1}, u_i, v_i)^T = \operatorname{grad} H_i^*(v_{i-1}^* + B_i^T v_{n+1}^*, -v_i^* + C_i^T v_{n+1}^*, D_i^T v_{n+1}^*),$$
$$i = 1(1)n.$$

Programs (6.1) arise, e.g., when discretizing obstacle problems (5.34) by quadratic finite elements; see [K89]. In this paper, numerical tests have been performed with $f(x) = 16\pi^2 \sin(4\pi x)$, $q(x) = c(x) = 0$ for $0 \leqslant x \leqslant 1$, and $\alpha = \beta = 0$ in (5.34). Newton's method applied to the unconstrained dual (6.2), for different step-sizes $h = 1/n$ stops after a finite number of steps (NS). Some of them are collected in the following table:

n	8	16	32	64	128	256	512
NS: linear FE	2	5	6	10	16	20	21
NS: quadratic FE	1	1	2	2	1	2	1

In the case of linear finite elements the rough starting vector $v_i^* = 0$, $i = 1(1)n - 1$ has been taken, whereas for quadratic finite element functions the solutions from the linear case are used for starting Newton's method. Therefore, in the quadratic case good starting vectors are available, and the numbers of Newton steps turn out to be very small.

6.2. Further, programs of the type

$$(6.4)\quad \text{minimize} \sum_{i=1}^{n-1} F_i(u_{i-1}, u_i, u_{i+1})$$

$$\text{s.t.} \sum_{i=1}^{n-1} (B_i u_{i-1} + C_i u_i + D_i u_{i+1}) = b, \qquad (u_{i-1}, u_i, u_{i+1})^T \in W_i, \quad i = 1(1)n$$

are of interest. The corresponding dual program D reads

$$(6.5)\quad \text{maximize} \quad -\sum_{i=1}^{n-1} H_i^*(v_{i-1}^* + B_i^T v_n^*, -v_i^* - w_i^* + C_i^T v_n^*, w_{i+1}^* + D_i^T v_n^*) + b^T v_n^*$$

with $v_0^* = 0$, $w_1^* = 0$, $v_{n-1}^* = 0$, $w_n^* = 0$. The return-formula (5.12) now yields

$$(6.6)\quad (u_{i-1}, u_i, u_{i+1})^T = \operatorname{grad} H_i^*(v_{i-1}^* + B_i^T v_n^*, -v_i^* - w_i^* + C_i^T v_n^*, w_{i+1}^* + D_i^T v_n^*), \quad i = 1(1)n-1.$$

Examples of programs (6.4) occur in the constrained data smoothing using cubic C^2-splines and in linear complementarity problems with 5-diagonal matrices; see [SS90], [S90a].

6.3. The next example of a program P can be illustrated by means of a triangularization of a two-dimensional polygonal domain. Let I be the set of all triangles, and the vertices may be labelled by $0, 1, \ldots, n$. Let the triangle with the vertices i, j and k, where $i < j < k$, be denoted by (i, j, k). If to each vertex i a variable u_i is attached, we are led to the program

$$(6.7)\quad \text{minimize} \sum_{(i,j,k) \in I} F_{ijk}(u_i, u_j, u_k)$$

$$\text{s.t.} \sum_{(i,j,k) \in I} (B_i u_i + C_j u_j + D_k u_k) = b, \qquad (u_i, u_j, u_k)^T \in W_{ijk}, \quad (i, j, k) \in I.$$

The dual D belonging to (6.7) can be written as

$$(6.8)\quad \text{maximize} \quad -\sum_{(i,j,k) \in I} H_{ijk}^*(v_{ijk}^* + B_i^T v_{n+1}^*, v_{jki}^* + C_j^T v_{n+1}^*, v_{kij}^* + D_k^T v_{n+1}^*) + b^T v_{n+1}^*$$

$$\text{s.t.} \sum_{(j,k) \in I_i} v_{ijk}^* = 0, \qquad i = 0(1)n,$$

where $I_i = \{(j,k) : (i,j,k) \in I \text{ or } (j,k,i) \in I \text{ or } (k,i,j) \in I\}$ is the set of all triangles having i as a vertex. The constraints in (6.8) can be taken into account by eliminating $n+1$ of the variables v_{ijk}^*. Further, in the present case the return-formula (5.12) is given by

$$(6.9)\quad (u_i, u_j, u_k)^T = \operatorname{grad} H_{ijk}^*(v_{ijk}^* + B_i^T v_{n+1}^*, v_{jki}^* + C_j^T v_{n+1}^*, v_{kij}^* + D_k^T v_{n+1}^*), \quad (i, j, k) \in I.$$

Concrete programs (6.7) arise in two-dimensional obstacle problems after discretization on triangular or rectangular grids; see [K89], [S90a]. For details in performing the numerical process as well as for results of numerical tests, we can again refer to the paper [K89].

7 Concluding Remarks

The dualization technique presented above assumes the primal convex program to be of a partially separable form. Indeed, there are various applications which can be directly modelled by a program of this type. In other cases, it may be possible to construct a partially separable program after some computations; compare with the complementarity problems handled above.

For stating the dual program as well as the return-formula, the conjugate functions are to be computed. It is of importance that this can be done simultaneously by solving a possibly larger number of low-dimensional programs. Therefore, the described dual approach possesses remarkable benefits for parallel processing. As it is seen above, frequently the conjugates are determined explicitly. But in general, also at this place iterative methods must be used. Thus, on these lines we are led to a two-level approach. The lower level consists in the determination of the conjugates and their derivatives for the actual iterates from the first level, i.e. from the main process for solving the dual program.

There are partially separable programs (1.1) having convex inequality constraints (1.2) instead of the assumed linear equality constraints. Therefore, also for these programs the dualization approach should be founded by theoretical results on the level of the theorems 1–3. Difficulties in extending the theorems mainly arise because now the concept of conjugate functions is not applicable.

Finally, we mention that there is a real interest to make the dualization technique accessible to further applications. E.g., in shape preserving spline approximation two-dimensional problems should be included. But there are several questions more or less open until now. For instance, it is to find out how the discretization (5.10) of the convexity reads for bivariate splines, or which functional should then be taken instead of the mean curvature (5.14). Another example are the two-dimensional obstacle problems where dualization is worth to be treated more thoroughly.

References

[BL87] Van den Bosch, P. P. J.; Lootsma, F. A.: Scheduling of Power Generation via Large-Scale Nonlinear Optimization. J. Optim. Theory Appl. **55** (1987) 313–326

[BHS85] Burmeister, W.; Heß, W.; Schmidt, J. W.: Convex Spline Interpolants with Minimal Curvature. Computing **35** (1985) 219–229

[C86] Costantini, P.: On Monotone and Convex Spline Interpolation. Math. Comp. **46** (1986) 203–214

[CM84] Costantini, P.; Morandi, E.: Monotone and Convex Cubic Spline Interpolation. Calcolo **21** (1984) 281–294

[D89] Dayde, M.: Parallel Algorithms for Nonlinear Programming Problems. J. Optim. Theory Appl. **61** (1989) 23–46

[DS85] Dietze, S.; Schmidt, J. W.: Determination of Shape Preserving Spline Interpolants with Minimal Curvature via Dual Programs. TU Dresden Preprint 07–06–85 (1985) and J. Approx. Theory **52** (1988) 43–57

[DS89] Dietze, S.; Schmidt, J. W.: Unconstrained Dual Programs for Partially Separable Constrained Optimization Problems. TU Dresden Preprint 07–10–89 (1989)

[ERS77] Elster, K.-H.; Reinhardt, R.; Schäuble, M.; Donath, G.: Einführung in die Nichtlineare Optimierung. Leipzig: Teubner-Verlag 1977

[E63] Everett, H.: Generalized Lagrange Multiplier Method for Solving Problems of Optimal Allocation of Resources. Operations Res. **11** (1963) 399–417

[Fa67] Falk, J. E.: Lagrange Multipliers and Nonlinear Programming. J. Math. Anal. Appl. **19** (1967) 141–159

[F79] Fleury, C.: Structural Weight Optimization by Dual Methods of Convex Programming. Internat. J. Numer. Methods Engrg. **14** (1979) 1761–1783

[FB86] Fleury, C.; Braibant, V.: Structural Optimization. A New Dual Method using Mixed Variables. Internat. J. Numer. Methods Engrg. **23** (1986) 409–428

[G91] Gemmer, C.: Konvexes Ausgleichen von Histogrammen mit quadratischen Splines. Praktikumsarbeit TU Dresden 1991

[GT82] Griewank, A.; Toint, Ph. L.: On the Unconstrained Optimization of Partially Separable Functions. In: M. J. D. Powell (ed.), Nonlinear Optimization 1991. New York: Academic Press 1982, 301–312

[GT84] Griewank, A.; Toint, Ph. L.: On the Existence of Convex Decompositions of Partially Separable Functions. Math. Programming **28** (1984) 25–49

[H90] Hertzschuch, A.: Monotone Datenglättung mit quadratischen Splines unter Verwendung eines vergröberten Spline-Gitters. Diplomarbeit TU Dresden 1990

[HS86] Heß, W.; Schmidt, J. W.: Convexity Preserving Interpolation with Exponential Splines. Computing **36** (1986) 335–342

[K89] Krätzschmar, M.: A Decomposition-Dualization Approach for Solving Constrained Convex Minimization Problems with Applications to Discretized Obstacle Problems. Numer. Math. **54** (1989) 507–531

[La68] Lasdon, L. S.: Duality and Decomposition in Mathematical Programming. IEEE Trans. Syst. Sci. Cybernet. **4** (1968) 86–99

[L90] Lootsma, F. A.: Exploitation of Structure in Nonlinear Optimization. In: D. J. Evans, G. R. Joubert, J. J. Peters (eds.), Parallel Computing 89, North-Holland 1990, 31–45

[LR88] Lootsma, F. A.; Ragsdell, K. M.: State-of-the-Art in Parallel Nonlinear Optimization. Parallel Computing **6** (1988) 133–155

[N78] Neuman, E.: Uniform Approximation by Some Hermite Interpolating Splines. J. Comput. Appl. Math. **4** (1978) 7–9

[Oe91] Oettli, W.: The Polarization Principle in Dynamic Optimization. Abstract: 13th IMACS World Congress on Computational and Applied Mathematics, Dublin 1991

[OR70] Ortega, J. M.; Rheinboldt, W. C.: Iterative Solution of Nonlinear Equations in Several Variables. New York: Academic Press 1970

[S87] Schmidt, J. W.: An Unconstrained Dual Program for Computing Convex C^1-Spline Approximants. Computing **39** (1987) 133–140

[S87a] Schmidt, J. W.: On Tridiagonal Linear Complementarity Problems. Numer. Math. **51** (1987) 11–21

[S87b] Schmidt, J. W.: Specially Structured Convex Optimization Problems: Computational Aspects and Applications. In: D. Greenspan, P. Rózsa (eds.), Numerical Methods, Colloquia Math. Societatis Janós Bolyai vol. 50, North-Holland 1987, 565–579

[S90] Schmidt, J. W.: Monotone Data Smoothing by Quadratic Splines via Dualization. Z. Angew. Math. Mech. **70** (1990) 299–307

[S90a] Schmidt, J. W.: Numerical Solution of Some Classes of Complementarity and Variational Problems via Dualization. In: A. Wakulicz (ed.), Numerical Analysis and Mathematical Modelling, Banach Center Publ. vol. 24, Warsaw: Polish Scientific Publishers 1990, 165–179

[S91] Schmidt, J. W.: Convex Interval Interpolation with Cubic Splines, II. BIT **31** (1991) 328–340

[S91a] Schmidt, J. W.: Beiträge zur konvexen Interpolation, Histopolation und Approximation durch Spline-Funktionen. Mitt. Math. Gesellsch. Hamburg **12** (1991)

[S92] Schmidt, J. W.: Constrained Smoothing of Histograms by Quadratic Splines. Computing **47** (1992)

[SH84] Schmidt, J. W.; Heß, W.: Schwach verkoppelte Ungleichungssysteme und konvexe Spline-Interpolation. Elem. Math. **39** (1984) 85–95

[SH88] Schmidt, J. W.; Heß, W.: Positivity of Cubic Polynomials on Intervals and Positive Spline Interpolation. BIT **28** (1988) 340–352

[SH89] Schmidt, J. W.; Heß, W.: Spline Interpolation under Two-Sided Restrictions on the Derivatives. Z. Angew. Math. Mech. **69** (1989) 353–365

[SS90] Schmidt, J. W.; Scholz, I.: A Dual Algorithm for Convex-Concave Data Smoothing by Cubic C^2-Splines. Numer. Math. **57** (1990) 333–350

[ScF80] Schmit, L. A.; Fleury, C.: Structural Synthesis by Combining Approximation Concepts and Dual Methods. Amer. Inst. Aeronautics and Astronautics **18** (1980) 1252–1260

[Sh64] Schoenberg, I. J.: Spline Functions and the Problem of Graduation. Proc. Nat. Acad. Sci. USA **52** (1964) 947–950

[T86] Toint, Ph. L.: Global Convergence of the Partioned BFGS Algorithm for Convex Partially Separable Optimization. Math. Programming **16** (1986) 290–306

[U69] Ulm, S.: On Two-Level Optimization. Eesti NSV Tead. Akad. Toimetised Füüs.-Mat. **18** (1969) 3–13

Prof. Dr. Jochen W. Schmidt
Institut für Numerische Mathematik
Technische Universität Dresden
Mommsenstraße 13
D-O-8027 Dresden

(*Eingegangen: 21.9.1991*)

Buchbesprechungen

Cohen, D. W., An Introduction to Hilbert Space and Quantum Logic (Problem Books in Mathematics), Berlin u. a.: Springer 1989, xii + 149 pp., Hardcover, DM 79,–

Erfahrungsgemäß bereitet die Quantenmechanik dem Studierenden besondere Schwierigkeiten. Ein Grund hierfür ist der gegenüber der klassischen Mechanik neuartige Formalismus (Hilbertraumformalismus), dessen sich die Theorie bedient. Ein anderer Grund, der gerade nachdenklichen Studenten (und nicht nur Studenten) den Zugang erschwert, liegt in den ungewohnten und nicht trivialen Fragen der physikalischen Interpretation des Formalismus.

Die Kursvorlesungen zur Quantenmechanik und die begleitende Literatur dazu bevorzugen eine pragmatische Präsentation des Stoffes. Zu Recht wird großer Wert auf die Erlernung des Formalismus gelegt, womit der Studierende in die Lage versetzt werden soll, konkrete Probleme (etwa die Berechnung von Energiespektren, Streuamplituden, Spinwechselwirkungen, usw.) zu bewältigen. Einen breiten Raum nehmen dabei die für die rechnerische Behandlung der Probleme unerläßlichen Approximationstechniken (wie etwa die Störungstheorien und Feymandiagramme) ein. Diese Methoden, weiterentwickelt und ergänzt, bilden das Rüstzeug für jeden theoretischen Physiker, der quantenmechanische

Berechnungen durchführt.

Die oben erwähnten konzeptionellen und interpretatorischen Fragen der Quantenmechanik spielen hierbei eine geringe Rolle. Sie sind jedoch bekanntlich seit den Anfängen der Theorie der Ausgangspunkt vieler grundsätzlicher Diskussionen zur Quantenphysik gewesen und geben auch heute noch Anlaß zu aktueller und fruchtbarer Forschung. Im

Besonderes Gewicht legt der Autor auf die Erläuterung des Begriffes des Erwartungswerts einer Observablen bei vorgegebenem Zustand des Quantensystems. Im letzten Kapitel des Buches findet sich eine prägnante und schön herausgearbeitete Darstellung des EPR-Paradoxons nach N. D. Mermin. Hier gelingt es dem Autor auch, das Interesse des Lesers für die eingangs erwähnte aktuelle Grundlagenforschung zur Quantentheorie zu wecken.

An mathematischen Kenntnissen werden für die Lektüre des Buches lediglich der Stoff einer Anfängervorlesung in Analysis und Lineare Algebra vorausgesetzt. Selbst die Diagonalisierbarkeit hermitescher Matrizen braucht dem Leser nicht bekannt zu sein, da sie im Kapitel 7 (Spectrality) vorgeführt wird. Physikalische Kenntnisse werden nicht erwartet. Das Buch kommt allerdings kaum über den genannten Stoff aus der Mathematik hinaus. Auf schmaler Basis wird etwas Integrationstheorie und Hilbertraumtheorie betrieben. Der Autor begnügt sich mit Erläuterungen der Aussagen zentraler Sätze. Wegen seiner Absicht, ein für Leser mit geringen Vorkenntnissen zugängliches Buch geringen Umfangs zu schreiben, erscheint dies legitim. Doch ergeben sich daraus zwei schwerwiegende Mängel. Der Stoff wird zu kursorisch präsentiert, als daß ein darauf Aufbauen für den Studierenden möglich wäre. Und es fehlen zu viele Verbindungsstücke zwischen der allgemein verbandstheoretischen Formulierung der Aussagenlogik und deren spezieller Hilbertraumrealisierung in der konventionellen Quantenmechanik, als daß der in dem Buch propagierte Zugang zur Quantenmechanik nicht zu weit hergeholt und wenig zwingend erschiene. Schließlich fallen unsaubere Formulierungen, mehrere Fehler und einige falsche Behauptungen besonders negativ ins Gewicht, weil sie den Leser mit geringen Vorkenntnissen verwirren und falsch informieren müssen.

Das Buch bietet viele Anregungen. Für ein Studium der Materie ist man jedoch auf die zitierte Literatur angewiesen.

München D. P. L. Castrigiano

Borgwardt, K. H., The Simplex Method, A Probabilistic Analysis (Algorithms and Combinatorics), Berlin u. a.: Springer-Verlag 1987, 42 figs. 268 pp., Softcover, DM 79,–

G.B. Dantzig's Simplex-Methode zur Lösung linearer Optimierungsprobleme ist vermutlich der Algorithmus, dem die Rechnerwelt die meiste Rechenzeit zur Verfügung gestellt hat. Er und einige seiner Varianten sind erfahrungsgemäß effizienter als alle anderen bekannten Verfahren, doch hat sich die Polynomialität seiner Rechenzeit bisher nicht beweisen lassen; worst-case-Analysen führten zu Nicht-Polynomialitäts-Entdeckungen im engsten Umfeld des Simplex-Algorithmus. Der 1979 von L. G. Khachian publizierte Algorithmus ist polynomial, hat aber in der Praxis den Simplex-Algorithmus bisher nicht aus dem Felde geschlagen. Es liegt daher nahe, den worst-case-Analysen eine stochastische Analyse gegenüberzustellen, in der Hoffnung, Polynomialität des *Erwartungswerts* der nunmehr zufälligen Anzahl der Rechenschritte zu erreichen. Wesentliche Impulse verdanken diese Forschungen zwei Abhandlungen von S. Smale 1982/83. Ein entscheidendes Polynomialitätsresultat für Erwartungswerte von Rechenzeiten erreichte K. Borgwardt 1981/82 mit einer Variante des Simplex-Algorithmus. In dies Ergebnis gehen Symmetrie-Voraussetzungen über die Verteilungen der Problemparameter wesentlich ein. – Die sorgfältig geschriebene, ausgiebig illustrierte schlanke Monographie stellt die inzwischen verbesserten Ergebnisse des Autors in die allgemeine Entwicklung hinein, über die eine ausführliche Einleitung informiert. Diese Einleitung ist für jeden Mathematiker lesenswert. Die den eigentlichen Bestand des Textes ausmachenden Kapitel (1. The shadow-vertex algorithm, 2. The average number of Pivot steps, 3. The polynomiality of the expected number of steps, 4. Asymptotic results, 5. Problems with nonnegativity constraints, 6. Appendix) sind harte Arbeit: Pflichtlektüre für Spezialisten.

Erlangen K. Jacobs