

94. Band Heft 4  
ausgegeben am 26. 10. 1992

**DMV**

# Jahresbericht

der Deutschen Mathematiker-Vereinigung

Herausgegeben von W.-D. Geyer  
unter Mitwirkung von  
P. L. Butzer, U. Felgner,  
K.-H. Hoffmann, H. Kurzweil



**B. G. Teubner Stuttgart 1992**

# Jahresbericht

der Deutschen Mathematiker-Vereinigung

Der „Jahresbericht“ ist das offizielle Veröffentlichungsorgan der Deutschen Mathematiker-Vereinigung, für dessen inhaltliche Gestaltung im Auftrag des Präsidiums der jeweilige Herausgeber zuständig ist. Im „Jahresbericht“ sollen vornehmlich Überblicksartikel über Teilgebiete der reinen und angewandten Mathematik, Nachrufe sowie historische Artikel und Buchbesprechungen veröffentlicht werden.

## Manuskripte

Alle für die Schriftleitung des Jahresberichts bestimmten Sendungen (Briefe, Manuskripte, Ankündigung von neuerscheinenden Büchern) sind an Prof. Dr. W. D. Geyer zu richten. Bücher

von denen eine Besprechung erfolgen soll, werden bei den Verlagen angefordert. Die Autoren werden gebeten, bei der Vorbereitung ihrer Manuskripte die „Hinweise für Autoren“ zu beachten.

Grundsätzlich sollen nur solche Manuskripte eingereicht werden, die nicht gleichzeitig an anderer Stelle zur Veröffentlichung eingereicht oder bereits veröffentlicht worden sind. Mit der Annahme zur Veröffentlichung erwirbt der Verlag das Verlagsrecht zur Vervielfältigung und Verbreitung sowie das Recht der Übersetzung in andere Sprachen.

## Bezugsinformationen

Jährlich wird ein Band veröffentlicht, bestehend aus 4 Heften, die vierteljährlich erscheinen. Der Bezug ist nur bandweise möglich.

Der im voraus zahlbare Bezugspreis pro Band beträgt DM 128,— einschließlich Versand. Bestellungen nehmen jede Buchhandlung oder der Verlag entgegen.

Für Mitglieder der DMV ist der Bezug des Jahresberichts im Mitgliedsbeitrag enthalten.

Verlag:

B. G. Teubner, Industriestr. 15, Postfach 801069  
D-7000 Stuttgart 80, Tel. (0711) 78901-0, Telefax 78901-10

# Jahresbericht

der Deutschen Mathematiker-Vereinigung

Herausgegeben von W.-D. Geyer  
unter Mitwirkung von  
P. L. Butzer, U. Felgner,  
K.-H. Hoffmann, H. Kurzweil

94. Band



B. G. Teubner Stuttgart 1992

Das Werk ist urheberrechtlich geschützt. Die dadurch begründeten Rechte, besonders die der Übersetzung, des Nachdrucks, der Bildentnahme, der Funksendung, der Wiedergabe auf photomechanischem oder ähnlichem Wege, der Speicherung und Auswertung in Datenverarbeitungsanlagen, bleiben, auch bei Verwertung von Teilen des Werkes, dem Verlag vorbehalten.

Bei gewerblichen Zwecken dienender Vervielfältigung ist an die Verwertungsgesellschaft Wort, Abteilung Wissenschaft, Goethestraße 49 D-8000 München 2 gemäß § 54 UrhG eine Vergütung zu

---

---

---

---

zahlen, deren Höhe mit der VG Wort zu vereinbaren ist.

Copying in the USA: Authorization to photocopy items for internal or personal use, or the internal or personal use of specific clients, is granted by B. G. Teubner, Stuttgart, for libraries and other users registered with the Copyright Clearance Center (CCC) Transactional Reporting Service, provided that the base fee of \$ 1.00 per copy, plus 0.20 per page is paid directly to CCC, 21 Congress Str., Salem, MA 01970.0012-0456/83 \$ 01.00+.20.

© B. G. Teubner Stuttgart 1992 – Verlagsnummern 2907/1, 2907/2, 2907/3, 2907/4  
Printed in Germany – ISSN 0012-0456

# Inhalt

## 1. Abteilung

E. Kunz: Über den $n$ -dimensionalen Residuensatz .....	170
H. Külshammer: Offene Probleme in der Darstellungstheorie endlicher Gruppen ...	98
H. Leichtweiß: Karl Strubecker zum Gedenken .....	105
H. M. Edwards: Kronecker's Arithmetical Theory of Algebraic Quantities .....	130
J. W. Schmidt: Dual Algorithms for Solving Convex Partially Separable Optimization Problems .....	40
N. Schannacher, E. Scholz (Hrsg): Oswald Teichmüller – Leben und Werk .....	1

R. Kühnau: Einige neuere Entwicklungen bei quasikonformen Abbildungen .....	141
R. Racke: Zur Existenz globaler Lösungen nichtlinearer Wellengleichungen .....	63
W. Barthel, H.-J. Vollrath: Otto Volk 1892–1989 .....	118

## 2. Abteilung

### Buchbesprechungen

Anderson, I., Combinatorial designs: Construction methods ( <i>D. Jungnickel</i> ) .....	6
Apostol, T. M., Modular Functions and Dirichlet Series in Number Theory ( <i>H. G. Zimmer</i> ) .....	35
Appel, K., Haken, W., Every planar map is four colorable ( <i>U. Schmidt</i> ) .....	31
Aubin, J.-P., Frankowska, H., Set-Valued Analysis ( <i>F. Zanetti</i> ) .....	22

Bebernes, J., Eberly, D., Mathematical Problems from Combustion Theory ( <i>U. Hornung</i> ) .....	64
Borgwardt, K. H., The Simplex Method, A Probabilistic Analysis ( <i>K. Jacobs</i> ) ...	2
Bosch, S., Lütkebohmert, W., Raynaud, M., Néron models ( <i>M. van der Put</i> ) ...	55
Brouwer, A. E., Cohen, A. M., Neumaier, A., Distance-regular graphs .....	1

IV Inhalt

Leibniz, G. W., Werke III.2 und VII.1 ( <i>C. J. Scriba</i> ) .....	25
Lorenz, F., Einführung in die Algebra ( <i>J. Köhn</i> ) .....	32
Lubinsky, D. S., Strong Asymptotics for Extremal Errors and Polynomials Associated with Erdős-type Weights ( <i>H. Stahl</i> ) .....	40
Mazja, W. G., Nasarow, S. A., Plamenewski, B. A., Asymptotische Theorie elliptischer Randwertaufgaben in singular gestörten Gebieten I ( <i>A.-M. Sändig</i> ) .....	50
Mecke, J., Schneider, R., Stoyan, D., Weil, W., Stochastische Geometrie ( <i>J. Möller</i> ) .....	49
Nürnberg, G., Approximation by Spline Functions ( <i>H. Strauß</i> ) .....	47
Narkiewicz, W., Elementary and Analytic Theory of Algebraic Numbers ( <i>Halter-Koch</i> ) .....	58
Nguyen, H. T., Rogers, G. S., Fundamentals of Mathematical Statistic, Vol. 1, 2 ( <i>D. W. Müller</i> ) .....	18
Pareigis, B., Analytische und projektive Geometrie in der Computergraphik ( <i>J. Lang</i> ) .....	67
Peckhaus, V., Hilbertprogramm und Kritische Philosophie ( <i>K. Jacobs</i> ) .....	53
Pieper, H. (Hrsg.), Briefwechsel zwischen Alexander von Humboldt und C. G. Jacob Jacobi ( <i>E. Knobloch</i> ) .....	27
Pinkus, A., On $L^1$ -Approximation ( <i>H. Strauß</i> ) .....	12
Pour El, M. B., Richards, J. I., Computability in Analysis and Physics ( <i>G. Kreisel</i> )	53
Protter, Ph., Stochastic Integration and Differential Equations: A New Approach ( <i>W. Kliemann</i> ) .....	7
Pruscha, H., Angewandte Methoden der Mathematischen Statistik ( <i>F. Pukelsheim</i> )	21
Reichardt, H. (Hrsg.), Nachrufe auf Berliner Mathematiker des 19. Jahrhunderts ( <i>H. Mehrtens</i> ) .....	25
Reiss, R. D., Approximate Distributions of Order Statistics ( <i>E. Häusler</i> ) .....	19
<hr/>	
Turán, P., Collected Papers ( <i>P. Bundschuh</i> ) .....	3
Zavialov, O. I., Renormalized Quantum Field Theory ( <i>D. Maison</i> ) .....	22
Zohar, J., The Physical Basis of the Direction of Time ( <i>K. Jacobs</i> ) .....	20

## Inhalt Band 94, Heft 4

### 1. Abteilung

R. Kühnau: Einige neuere Entwicklungen bei quasikonformen Abbildungen .....	141
E. Kunz: Über den $n$ -dimensionalen Residuensatz .....	170

### 2. Abteilung

Peckhaus, V., Hilbertprogramm und Kritische Philosophie ( <i>K. Jacobs</i> ) .....	53
Pour El, M. B., Richards, J. I., Computability in Analysis and Physics ( <i>G. Kreisel</i> ) ..	53

---

---

Bosch, S., Lütkebohmert, W., Raynaud, M., Néron models ( <i>M. van der Put</i> ) .....	55
Knebusch, M., Scheiderer, C., Einführung in die reelle Algebra ( <i>L. Bröcker</i> ) .....	56
Narkiewicz, W., Elementary and Analytic Theory of Algebraic Numbers ( <i>F. Halter-Koch</i> ) .....	58
Freitag, E., Hilbert Modular Forms ( <i>R. Pink</i> ) .....	59
Aubin, J.-P., Frankowska, H., Set-Valued Analysis ( <i>F. Lempio</i> ) .....	60
Kushner, H. J., Weak Convergence Methods and Singularly Perturbed Stochastic Control and Filtering Problems ( <i>M. Kohlmann</i> ) .....	61
Hackbusch, W., Iterative Lösung großer schwachbesetzter Gleichungssysteme ( <i>H. Yserentant</i> ) .....	62
Crouzeix, M., Rappaz, J., Approximation in bifurcation theory ( <i>T. Küpper</i> ) .....	63
Bebernes, J., Eberly, D., Mathematical Problems from Combustion Theory ( <i>U. Hornung</i> ) .....	64
Brouwer, A. E., Cohen, A. M., Neumaier, A., Distance-regular graphs ( <i>W. Mader</i> ) ..	66
Pareigis, B., Analytische und projektive Geometrie in der Computergraphik ( <i>J. Lang</i> ) .....	67

### **In den nächsten Heften erscheinende Arbeiten:**

**J. Cuntz:** A Survey of Some Aspects of Non-Commutative Geometry

**S. K. Donaldson:** On the Work of Andreas Floer

**U. Hamenstädt:** Starrheitseigenschaften kompakter Mannigfaltigkeiten negativer Krümmung

**A. Krieg, H. P. Petersson:** Max Koecher zum Gedächtnis

**B. Rauhut:** Rudolf Henn: Eine Bilanz

**L. Stammler, W. Vogel:** Ott-Heinrich Keller

**K. Stein:** Zur Abbildungstheorie in der komplexen Analysis

**H. Strade:** Die Klassifikation der einfachen Lie-Algebren über Körpern mit positiver Charakteristik: Methoden und Resultate

---

### **Anschriften der Herausgeber**

Prof. Dr. W.-D. Geyer, Bismarckstr. 1½, 8520 Erlangen

Prof. Dr. P. L. Butzer, Templergraben 55, 5100 Aachen

Prof. Dr. U. Felgner, Auf der Morgenstelle 10, 7400 Tübingen

Prof. Dr. K.-H. Hoffmann, Memminger Str. 6, 8900 Augsburg

Prof. Dr. H. Kurzweil, Bismarckstr. 1½, 8520 Erlangen

### **Bezugshinweis**

Früher erschienene Bände (ab Band 68) des „Jahresberichts der Deutschen Mathematiker-Vereinigung“ können durch den Buchhandel oder den Verlag bezogen werden.

Nachdruck der Bände 1 bis 40 liefert: Johnson Reprint Corp., 111 Fifth Avenue, New York, N.Y. 10003

Nachdruck der Bände 41 bis 67 liefert: Swets & Zeitlinger, Heereweg 347b, POB 810, NL-2160 SZ Lisse/Holland



## Einige neuere Entwicklungen bei quasikonformen Abbildungen<sup>1)</sup>

R. Kühnau, Halle an der Saale

- 1 Einleitung
  - 2 Die Grundaufgabe
  - 3 Allgemeinere Extremalprobleme, quadratische Differentiale
  - 4 Allgemeine Definition der quasikonformen Abbildungen, Ränderzuordnung
  - 5 Ortsabhängige Dilatationsbeschränkung
  - 6 Methoden bei Extremalproblemen
  - 7 Allgemeine Strukturformel für Extremalfunktionen der Klasse  $\Sigma(Q)$
  - 8 Das Fortsetzungsproblem
  - 9 Möglichst konforme Abbildungen
  - 10 Möglichst konforme Spiegelung an Jordankurven
  - 11 Möglichst konforme Spiegelung an einer halben Lemniskate
  - 12 Möglichst konforme Spiegelung an einem Jordanbogen
  - 13 Dilatationsbeschränkung im Mittel
  - 14 Geometrische Anwendung: Möglichst kreisnahe Jordankurve durch  $n$  Punkte
  - 15 Physikalische Anwendung: Elektrostatik in inhomogenen Medien
  - 16 Quasikonforme Abbildungen durch elliptische Systeme
  - 17  $p_0$ -analytische Normalabbildungen
- Literatur

### 1 Einleitung

Wir wollen uns hier vollständig auf Abbildungen in der komplexen Zahlenebene beschränken, da sich die Theorie bei räumlichen Abbildungen doch ziemlich andersartig entwickelt hat. Wir setzen die Abbildungen also an in der Form

$$(1) \quad w = f(z) = u(x, y) + iv(x, y) \quad \text{mit} \quad z = x + iy.$$

Setzt man die Abbildung als stetig differenzierbar mit positiver Funktionaldeterminante voraus, dann läßt sie sich in 1. Näherung (man schreibe zur Präzisierung einfach das vollständige Differential an) als affine Abbildung betrachten. Die Gaußsche Charakterisierung der konformen Abbildungen als „in den kleinsten

Teilen ähnlich“ meint, daß diese „Näherungsaffinität“ eine Ähnlichkeitstranformation ist. Analytisch bedeutet dies bekanntlich, daß  $u(x, y)$  und  $v(x, y)$  durch die Cauchy-Riemannschen Differentialgleichungen verknüpft sind.

Im allgemeinen Falle von solchen Abbildungen (1) geht bei der zugehörigen Näherungsaffinität ein Kreis in eine Ellipse über. Deren Achsenverhältnis  $p \geq 1$  ist dann eine Funktion von  $z$ , also  $p = p(z)$ . Dieses  $p(z)$  wird Dilatation der Abbildung im Punkte  $z$  genannt. Eine Abbildung nennt man heute  $Q$ -quasikonform im Sinne von H. Grötzsch, wenn die Dilatation  $p(z)$  nach oben durch  $Q$  beschränkt ist:

$$(2) \quad p(z) \leq Q.$$

Die kleinste Schranke  $Q$  heißt „Maximaldilatation“ der Abbildung (im Gegensatz zur „örtlichen Dilatation“  $p(z)$ ). Wenn die Dilatationsschranke  $Q$  keine Rolle spielt, spricht man kurz von quasikonformen Abbildungen.

Abbildungen dieser Art wurden ab 1928 beginnend mit [G1] von H. Grötzsch betrachtet, das Wort „quasikonform“ allerdings erst später von L. V. Ahlfors eingeführt.

Nach dieser Definition ist natürlich die Frage: Wozu ist das gut? Das Ganze bekommt erst Sinn, wenn dies zu „interessanten“ Resultaten führt, oder – um wieder mit Gauß zu reden – wenn es sinnreiche Ideenverbindungen zu anderen mathematischen Fragen bzw. Disziplinen gibt. Darüber wird also im folgenden zu berichten sein. Zunächst hat es den Anschein, als ob man durch diese Definition der Quasikonformität die klassische Funktionentheorie vollständig verläßt. Das ist aber überraschenderweise nicht so. Insbesondere in der Theorie der Extremalprobleme, die im folgenden vorzugsweise beleuchtet werden soll, ergeben sich intensive Verknüpfungen mit der Theorie der analytischen Funktionen.

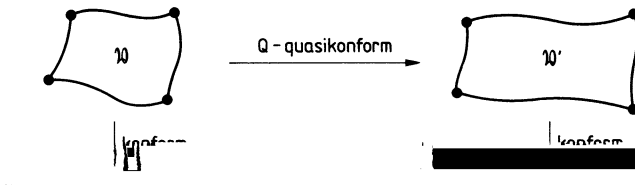
Zunächst sei aber erst gesagt, daß neben der eben gegebenen mehr geometrisch orientierten Betrachtungsweise nach H. Grötzsch analog wie schon bei konformen Abbildungen die ganze Situation auch mehr analytisch gesehen werden kann. Am Schluß werden wir kurz noch auf diese von M. A. Lavrent'ev 1935 begründete Richtung eingehen, wobei quasikonforme Abbildungen als Lösungen von elliptischen Differentialgleichungssystemen gesehen werden, die die Cauchy-Riemannschen Differentialgleichungen verallgemeinern.

Noch eine historische Bemerkung. Natürlich treten nichtkonforme Abbildungen schon früher in der klassischen Differentialgeometrie der Flächen auf, insbesondere – sozusagen gezwungenermaßen – in der Kartographie der Erde. In diesem Zusammenhange der Abbildung eines Teiles der Erdoberfläche auf ein ebenes Flächenstück nannte man die infinitesimalen Ellipsen, die als Bilder infinitesimaler Kreise auftreten, jeweils „Tissotsche Indikatrix“.

Von großer praktischer Wichtigkeit ist noch folgender unmittelbar an den zugehörigen Näherungsaffinitäten zu sehender Sachverhalt: Wird an eine  $Q_1$ -quasikonforme Abbildung eine  $Q_2$ -quasikonforme Abbildung angeschlossen, entsteht durch Zusammensetzung eine  $Q_1 \cdot Q_2$ -quasikonforme Abbildung. Insbesondere entsteht aus einer  $Q$ -quasikonformen Abbildung durch Vor- oder Nachschalten einer konformen Abbildung, die jetzt als 1-quasikonforme Abbildung aufzufassen ist, wieder eine  $Q$ -quasikonforme Abbildung.

## 2 Die Grundaufgabe

Der glückliche Gedanke von H. Grötzsch war, zu fragen, wie sich die einfachste konforme Invariante, der konforme Modul eines Vierecks, bei  $Q$ -quasikonformer Abbildung ändern kann. Dabei versteht man unter einem Viereck  $\mathfrak{B}$  ein von einer geschlossenen Jordankurve berandetes einfach zusammenhängendes Gebiet mit vier markierten Randpunkten, und der konforme Modul ist das Seitenverhältnis eines bei konformer Abbildung entstehenden Rechtecks, wobei die Ecken des Vierecks in die Ecken des Rechtecks übergehen. Dazu gehört noch eine Orientierung des Vierecks – bei Umorientierung geht der Modul in den reziproken Wert über. Elementare funktionentheoretische Überlegung zeigt, daß durch  $\mathfrak{B}$  (mit Orientierung versehen) der Modul von  $\mathfrak{B}$  eindeutig bestimmt ist, weil nämlich die eckpunkt-treue konforme Abbildung zweier (orientierter) Rechtecke aufeinander eine Ähnlichkeit sein muß (man wende das Spiegelungsprinzip wiederholt an). Das bedeutet dann insbesondere auch, daß bei eckpunkt-treuer konformer Abbildung von  $\mathfrak{B}$  auf ein anderes Viereck  $\mathfrak{B}'$  sich der konforme Modul nicht ändert, also eine konforme Invariante ist.



Anschreiben des Flächeninhaltes von  $\mathfrak{X}'$  als Doppelintegral der Funktionaldeterminante über  $\mathfrak{X}$  und Abschätzung der Längen der Bilder von  $x = \text{const}$  bzw.  $y = \text{const}$  mit Verwendung der Cauchy-Schwarzschen Ungleichung. Wegen besagter konformer Invarianz bedeutet dies im Ergebnis

$$(4) \quad \frac{1}{Q} \cdot \text{Modul}(\mathfrak{B}) \leq \text{Modul}(\mathfrak{B}') \leq Q \cdot \text{Modul}(\mathfrak{B}).$$

Während bei den Extremalfunktionen zu (3) die Hauptverzerrungsrichtung der Abbildung (charakterisiert durch die großen Achsen der infinitesimalen Ellipsen, die Bilder infinitesimaler Kreise sind) der Richtung der reellen Achse bzw. imaginären Achse entsprechen, liefern die Linienelemente dieser Hauptverzerrungsrichtungen durch konforme Überpflanzung in  $\mathfrak{B}'$  gewisse Linien (in diesem Zusammenhange „Modullinien“ genannt), verlaufend von einer Seite von  $\mathfrak{B}'$  zur gegenüberliegenden.

### 3 Allgemeine Extremalprobleme, quadratische Differentiale

H. Grötzsch erkannte nun das Verblüffende, daß auf diese einfache Grundaufgabe von § 2 mit Lösung (4) wesentlich kompliziertere Extremalprobleme zurückführbar sind, indem man die Bildgebiete geeignet in Vierecke zerschneidet („Flächenstreifenmethode“). Dazu ein einfaches Beispiel.

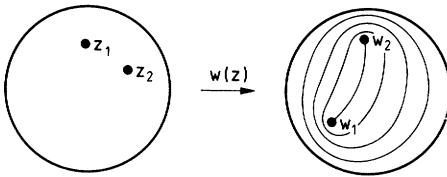


Fig. 2

In  $|z| < 1$  seien zwei verschiedene Punkte  $z_1$  und  $z_2$  fixiert. Betrachtet werden alle  $Q$ -quasikonformen Abbildungen  $w = w(z)$  von  $|z| < 1$  auf in  $|w| < 1$  liegende Gebiete. Wann wird der hyperbolische Abstand zwischen  $w_1 = w(z_1)$  und  $w_2 = w(z_2)$  maximal? Lösung: Dieser Abstand ist genau dann maximal (insbesondere gibt es nichttriviale Schranken), wenn  $p(z) = Q$  und die Hauptverzerrungsrichtungen sich anordnen auf der Schar der zu  $w_1$  und  $w_2$  konfokalen Ellipsen der hyperbolischen Geometrie (in Fig. 2 angedeutet) und das Bildgebiet ganz  $|w| < 1$  ausmacht. Dies gilt übrigens auch, wenn man die (hier an sich sonst generell vorausgesetzte) Schlichtheit (= Eineindeutigkeit) der Abbildungen fallen läßt. Für  $Q = 1$  erkennt man das Schwarzsche Lemma in der Pickschen invarianten Formulierung wieder. Aber: Durch Betrachtung quasikonformer Abbildungen zeigt sich, daß in der ganzen Sache noch mehr hyperbolische Geometrie steckt (nämlich in Gestalt der Hauptverzerrungsrichtungen bei den Extremalfunktionen), als im klassischen konformen Falle sichtbar ist.

Die bei diesen Extremalproblemen auftretenden Hauptverzerrungsrichtungen

Geometrie im „Konformmodell“ in [Kü6]) durch

$$(5) \quad - \frac{dw^2}{(w - w_1)(w - w_2)(1 - \bar{w}_1 w)(1 - \bar{w}_2 w)} > 0$$

charakterisieren. Dies ist so zu verstehen. Zu gegebener komplexer Zahl  $w$  charakterisiert (5) im betreffenden Punkte  $w$  das Argument von  $dw \bmod \pi$ , also eine Richtung, und das ist gerade die betreffende Hauptverzerrungsrichtung. (5) ist auch längs der Einheitskreislinie  $|w|=1$  erfüllt. Und wenn man nicht die Einheitskreisscheibe  $|z| < 1$  (schlicht) abbilden würde, sondern ein beliebiges endlich vielfach zusammenhängendes Gebiet auf ein Teilgebiet der Einheitskreisscheibe  $|w| < 1$ , dann wäre auf den Bildrandkomponenten bei einer Extremalabbildung ebenfalls (5) erfüllt, wobei die inneren Bildrandkomponenten Schlitze sind.

Durch Betrachtung dieses u. ä. Beispiele von H. Grötzsch [G2] hat O. Teichmüller [T] ein allgemeines Prinzip herausdestilliert. Danach sind für eine große Klasse von Extremalproblemen, bei denen die Funktionale von Funktionswerten abhängen, die Extremalfunktionen durch ein „quadratisches Differential“

$$(6) \quad \mathcal{Q}(w)dw^2 > 0$$

charakterisiert. (Diese Charakterisierung durch quadratische Differentiale stellt gewissermaßen eine Analogie zur Eulerschen Differentialgleichung in der klassischen Variationsrechnung dar.) Dabei gilt im Innern des Extremal-Bildgebietes für die Hauptverzerrungsrichtungen (6), und (6) charakterisiert auch den Rand.  $\mathcal{Q}(w)$  hat dabei i. allg. einfache Pole in den ins Funktional eingehenden Funktionswerten. Es können Nullstellen auftreten (fehlen im Beispiel (5)), die dann zu Singularitäten bei der Schar der Hauptverzerrungslinien Anlaß geben. In dem einfachsten Falle, es wird alles auf der Zahlenkugel betrachtet, ist  $\mathcal{Q}(w)$  eine rationale Funktion. (Der Gesichtspunkt des „Differentials“, nämlich zusätzlich das Transformationsgesetz bei Übergang zu einer anderen Ortsuniformisierenden, wird eigentlich erst wirklich notwendig bzw. sinnvoll, wenn man alles auf einer Riemannschen Fläche betrachtet.)

Dieses Auftreten der quadratischen Differentiale (6) ist der schon in der Einleitung genannte Punkt, daß die Theorie der quasikonformen Abbildungen doch wieder intensiv mit der klassischen Funktionentheorie verwoben ist.

#### 4 Allgemeine Definition der quasikonformen Abbildungen, Ränderzuordnung

Aus der klassischen Funktionentheorie kennt man das Häufungsprinzip, das garantiert, daß gewisse Klassen geeignet normierter konformer Abbildungen kompakt sind. Die praktisch äußerst wichtige Folge ist, daß in solchen Abbildungsklassen Extremalprobleme (bei naheliegenden Voraussetzungen) eine Lösung haben müssen, also a priori eine Extremalabbildung existieren muß. Etwas Ähnliches ist bei Klassen quasikonformer Abbildungen grundsätzlich nicht möglich, wenn man obige Definition von H. Grötzsch zugrunde legt. Die Forderung der Differenzierbarkeit ist zu hart. Da hilft es auch nichts, wenn man

die Differenzierbarkeit der Abbildungen nur stückweise fordert (d. h. endlich viele Ausnahmelinien und -punkte zuläßt): Ganz elementare Beispiele zeigen, daß Folgen solcher Abbildungen gegen Abbildungen lokal gleichmäßig konvergieren können, die nicht wieder von dieser Art sind.

Dieser Übelstand wurde durch allgemeinere Definitionen nach L. V. Ahlfors, L. Bers, F. W. Gehring, O. Lehto, A. Pfluger u. a. vollständig beseitigt, so daß wieder das Häufungsprinzip mit allen Weiterungen analog wie bei konformen Abbildungen zur Verfügung steht.

Am schnellsten ist die sog. „geometrische Definition“ zu erklären. Danach heißt ein orientierungserhaltender Homöomorphismus  $Q$ -quasikonform, wenn er stets (4) erfüllt, d. h. für jedes im betreffenden Gebiet liegende Viereck  $\mathfrak{B}$  und sein Bild  $\mathfrak{B}'$ . Genaueres vgl. hierzu in [A], [Le/V].

Allerdings ist es dann doch wieder so, daß bei Extremalproblemen des in § 3 angedeuteten Typs die Extremalabbildungen im wesentlichen glatt sind, sogar reell-analytisch bis auf Ausnahmepunkte (in denen auch noch „ziemlich vernünftiges“ Verhalten vorliegt). Der Grund dafür liegt in der Charakterisierung der Extremalabbildungen durch die quadratischen Differentiale.

Noch in anderem Zusammenhange soll hier die Bedeutung der Modulungsgleichung (4) hervorgehoben werden. Es zeigte sich nämlich, daß sich aus (4) ergibt, daß die Theorie der Ränderzuordnung bei quasikonformen Abbildungen praktisch in den wesentlichen Gesichtspunkten unverändert wie bei konformen Abbildungen gilt. Das wurde schon von H. Grötzsch in seiner ersten Arbeit [G 1] über quasikonforme Abbildungen sehr knapp bemerkt (und dadurch später von fast allen übersehen). So läßt sich z. B. jede quasikonforme Abbildung zweier von geschlossenen Jordankurven berandeter einfach zusammenhängender Gebiete aufeinander auf den Rand homöomorph fortsetzen.

Von H. Grötzsch wurde auch schon bemerkt, daß eine punktförmige Randkomponente niemals in eine nichtpunktförmige übergehen kann. Dieser Umstand spielte die entscheidende Rolle bei der Behandlung des sog. Typenproblems einfach zusammenhängender Riemannscher Flächen durch quasikonforme Abbildungen.

## 5 Ortsabhängige Dilatationsbeschränkung

Schon O. Teichmüller [T] (später in Unkenntnis hiervon nochmals B. W. Schabat) wies darauf hin, daß es sinnvoll und wünschenswert ist, die primitive Dilatationsbeschränkung (2) durch eine allgemeinere, nämlich ortsabhängige zu ersetzen:

$$(7) \quad p(z) \leq p_0(z) \quad (p_0(z) \geq 1).$$

Wir sprechen dann zweckmäßig von  $p_0(z)$ -quasikonformen Abbildungen. (Dabei sei  $p_0(z)$  eine beschränkte, z. B. stückweise glatte Funktion; das läßt sich – ebenso wie die Glattheit der Abbildungen – abschwächen). Solche ortsabhängige Dilatationsbeschränkungen sind vor allem interessant im Zusammenhang mit Extremalproblemen. Wenn man nämlich in einem Teilgebiet des abzubildenden Gebietes

$p_0(z) \equiv 1$  setzt, wird dort Konformität erzwungen, so daß sich also auf diese Weise konforme Abbildungen mit  $Q$ -quasikonformer Fortsetzung studieren lassen, wenn man im Rest des Gebietes noch  $p_0(z) \equiv Q$  setzt. In den einfachsten und interessantesten Fällen kommen wir zu folgenden Abbildungsklassen.

Die Klasse  $\Sigma(Q)$  bestehe aus den schlichten konformen Abbildungen

$$(8) \quad w = w(z) = z + \frac{A_1}{z} + \frac{A_2}{z^2} + \dots$$

von  $|z| > 1$ , die eine (immer stetig gemeinte)  $Q$ -quasikonforme Fortsetzung nach  $|z| < 1$  gestatten. Hier ist also das abzubildende Gebiet die ganze  $z$ -Zahlenkugel, und es wird gesetzt

$$p_0(z) \equiv 1 \quad \text{für} \quad |z| > 1, \quad p_0(z) \equiv Q \quad \text{für} \quad |z| < 1.$$

Die Klasse  $S(Q)$  bestehe aus allen schlichten konformen Abbildungen

$$(9) \quad w = w(z) = z + a_2 z^2 + a_3 z^3 + \dots$$

von  $|z| < 1$ , die eine  $Q$ -quasikonforme Fortsetzung nach  $|z| > 1$  mit  $w(\infty) = \infty$  gestatten. Hier ist wieder das abzubildende Gebiet die ganze  $z$ -Zahlenkugel, aber es ist jetzt

$$p_0(z) \equiv 1 \quad \text{für} \quad |z| < 1, \quad p_0(z) \equiv Q \quad \text{für} \quad |z| > 1.$$

Zunächst soll nun also die Grundaufgabe von § 2 bei Ersetzung von  $Q$ -Quasikonformität durch  $p_0(z)$ -Quasikonformität betrachtet werden. Man vgl. wieder das Schema von Fig. 1, in dem aber jetzt die Abbildungen von  $\mathfrak{K}$  auf  $\mathfrak{K}'$  allgemeiner  $p_0(z)$ -quasikonform sein sollen (das entspricht einer gewissen ortsab-

Es zeigt sich, daß man wie im Spezialfalle  $p_0(z) \equiv Q$  wieder allgemeinere Extremalprobleme auf die eben betrachtete Grundaufgabe zurückführen kann. Wieder stellen sich zur Beschreibung der Extremalabbildungen die gleichen quadratischen Differentiale ein. Man kann in Analogie zum sog. General Coefficient Theorem von J. A. Jenkins, das dieser – eine allgemeine Vermutung von O. Teichmüller in einer großen Klasse von Fällen beweisend – für konforme Abbildungen aufgestellt hatte, wohl wieder einen allgemeinen Satz gewinnen. Allerdings hat bisher noch keiner die Mühsal der Durchführung auf sich genommen.

nämlich ein endlich vielfach zusammenhängendes Gebiet  $\mathfrak{G}$  der  $z$ -Ebene mit  $z = \infty$  als innerem Punkt gegeben und darin die Dilatationsschranke  $p_0(z)$  definiert, wobei  $p_0(z) \equiv 1$  sei in einer Umgebung von  $z = \infty$ . Betrachtet werden alle  $p_0(z)$ -quasikonformen Abbildungen von  $\mathfrak{G}$  (die also in besagter Umgebung von  $z = \infty$  konform sein müssen), die in  $z = \infty$  in Form von (8), wie man sagt, „hydrodynamisch normiert“ sind. Das Extremalproblem laute

$$(11) \quad \Re A_1 \rightarrow \max.$$

Ergebnis: Es gibt genau eine Extremalabbildung. Unter allen betrachteten Abbildungen ist genau diese  $(1/p_0)$ -analytisch, wobei die Randkomponenten von  $\mathfrak{G}$  in zur reellen Achse parallele Strecken übergehen. Übrigens läßt sich die Voraussetzung  $p_0(z) \equiv 1$  in Umgebung von  $z = \infty$  abschwächen – vgl. z. B. [Schi/Scho].

In Gestalt dieser  $(1/p_0)$ -analytischen Parallelschlitzabbildung erhalten wir also eine Verallgemeinerung der klassischen Parallelschlitzabbildung der Theorie der konformen Abbildung, welche auf F. Schottky, F. Cecioni, D. Hilbert zurück-



Ungleichungen in die für die Klasse  $\Sigma$  über. Der Grund ist einfach der, daß für  $Q \rightarrow \infty$  die Dilatationseinschränkung an die Abbildungen immer schwächer wird und sich im Grenzfalle „verflüchtigt“ hat. Das sieht man auch z. B. am „Flächensatz“ [Kü4], [Le]

$$(14) \quad \sum_{k=1}^{\infty} k|A_k|^2 \leq q^2 \quad \text{für} \quad w(z) \in \Sigma(Q).$$

Der Name „Flächensatz“ ist allerdings streng genommen nicht so angemessen. Anders als im klassischen Falle ( $Q \rightarrow \infty$ ), wo (14) tatsächlich einfach aus der Positivität eines Flächeninhaltes folgt, tritt hier die Positivität eines Dirichletintegrals auf. Weiteres hierzu vgl. in [Ho 1]; anders als im klassischen Falle gibt es in der Klasse  $\Sigma(Q)$  verschiedene Möglichkeiten, zu einem Flächensatz zu kommen.

An dieser Stelle sei noch ein duales Gegenstück [Kü5] zu (14) eingeflochten, das zunächst als Kuriosum erscheinen mag, aber vielleicht eine gewisse – noch nicht ausgelotete – Bedeutung für die Teichmüller-Theorie haben kann. Wir betrachten dazu die für alle  $z$  stetigen Funktionen  $w(z)$ , die für  $|z| > 1$  regulär sind bis auf den einfachen Pol  $z = \infty$ , wo wieder die Normierung (8) vorliegt.

und die für  $|z| < 1$  schlicht sind, wobei  $\overline{w(z)}$  dort  $Q$ -quasikonform ist. (Diese Funktionen können für  $|z| > 1$  nicht schlicht sein; für  $|z| < 1$  ist also  $w(z)$  selbst orientierungsumkehrend.) Dann gilt

$$(15) \quad \sum_{k=1}^{\infty} k|A_k|^2 \geq q^{*2} \quad \text{mit} \quad q^* = \frac{Q+1}{Q-1} > 1.$$

Wir wollen nun zu Koeffizientenproblemen in der Klasse  $S(Q)$  überwechseln. Für die gemäß (9) entwickelten  $w(z) \in S(Q)$  gilt jetzt die scharfe Abschätzung

$$(16) \quad |a_2| \leq 2q.$$

Allgemeiner kann man mit einem Satze (Majorantenprinzip) von O. Lehto (vgl. z. B. [Be])

$$(17) \quad |a_n| \leq q^n$$

zeigen, wenn man die ja jetzt durch L. de Branges bewiesene Bieberbachsche Vermutung benutzt. Es gilt nach diesem Majorantenprinzip: Bei einer großen Klasse von Extremalproblemen ist zu dem in der Klasse  $S$  auftretenden maximalen Funktionale einfach der Faktor  $q$  hinzuzunehmen, wenn man zur Klasse  $S(Q)$  übergeht.

Allerdings ist (17) nicht mehr scharf für  $n \geq 3$ . Es wurde nämlich bewiesen (vgl. z. B. [Kr/Kü], S. 115)

$$(18) \quad |a_n| \leq \frac{2}{n-1} q + O(q^2)$$

mit  $O$  = Landau-Symbol (hier außer von  $q$  noch von  $n$  abhängig, aber nicht von der speziellen Abbildung). Kürzlich konnte S. L. Krushkal' [Kr2] mit tiefliegenden Methoden der Teichmüller-Theorie folgendes bemerkenswerte Resultat erzielen.

Es gilt sogar

$$(19) \quad |a_n| \leq \frac{2}{n-1} q$$

für  $q \leq q_n$  (= Konstante, deren genauer Wert  $< 1$  noch unbekannt ist). Die Einfachheit dieser (scharfen!) Ungleichung läßt die vorsichtige Hoffnung zu, daß man zumindest für kleine  $q$  noch Genaueres über den vollständigen „Koeffizientenkörper“, d. h. die Gesamtheit der komplexen Vektoren  $(a_2, a_3, a_4, \dots)$  für die Klasse  $S(Q)$ , bekommen kann. Für große  $q$  ist das sicher vorerst aussichtslos, wie schon im Falle der Klasse  $S$ .

## 6 Methoden bei Extremalproblemen

Es gibt in der Theorie der konformen Abbildungen verschiedene Methoden, um Extremalprobleme zu behandeln, einmal allgemeine Variationsmethoden und dann Methoden des „direkten Vergleichs“. Beides läßt sich auf die Theorie der quasikonformen Abbildungen bei entsprechenden neuen Zurüstungen verallgemeinern. Aber es gibt daneben auch neue Methoden.

Zeitlich zuerst gab es da die von H. Grötzsch 1928 eingeführte „Flächenstreifenmethode“, die auf der in § 2 beschriebenen Grundaufgabe fußt und über deren Ergebnisse in § 3 kurz berichtet wurde. Äquivalent dazu ist in diesem Zusammenhange die Methode der „extremalen Länge“ nach L. V. Ahlfors und A. Beurling. Die Übertragung dieser Methode auf den Fall ortsabhängiger Dilatationsbeschränkung geschah in [Kü 1] und in Arbeiten von C. Andreian Cazacu (vgl. z. B. [An]).

Die Übertragung der Methode der Randintegration, von H. Grunsky zuerst bei konformen Abbildungen angewandt, erfolgte in [Kü 7]. Dabei geht es um eine „geschickte“ Anwendung der Greenschen Formeln und Abschätzungen von Dirichlet-Integralen.

Die Methode der Flächensätze (vgl. schon § 5), zuerst im konformen Falle von T. H. Gronwall und L. Bieberbach in Form des berühmten Flächensatzes benutzt, ist in der Tendenz ziemlich ähnlich, wird aber in der Durchführung im einzelnen doch etwas anders gewendet und führt auch zu etwas anderen Ergebnissen. Sie wurde bei quasikonformen Abbildungen zuerst von O. Lehto [Le] praktiziert, anschließend von V. Ja. Gutljanskij (vgl. [Kr 1], Kap IV, § 5), ausgiebig in anderen Varianten von E. Hoy [Ho 1], auch von Chr. Pommerenke [Pom] (S. 289 ff.).

Die von K. Löwner für konforme Abbildungen entwickelte und nach ihm benannte Methode der Parameterdarstellung spielt eine eigentümliche, fast mysteriöse Sonderrolle. Sie hat bekanntlich zum Beweis der Bieberbachschen Vermutung durch L. de Branges geführt. Sie ist bisher bei quasikonformen Abbildungen noch nicht in gleichem Maße studiert worden (ähnlich wie auch z. B. Symmetrisierungen), abgesehen von einem Ansatz von Shah Dao-shing [Sh] für  $Q$ -quasikonformen Abbildungen.

Variationsmethoden, die die Randvariationsmethode bei konformen Abbildungen im Inneren des Gebietes ergänzen, wurden von P. P. Belinskij [Bel], S. L. Krushkal' (vgl. [Kr1]) und M. Schiffer entwickelt, wobei letztere eine Modifizierung erforderte, die von H. Renelt (vgl. [Re2]) gegeben wurde (vgl. auch [Scho]). Man kann die Extremalaufgaben auch als Steuerprobleme deuten, wobei der Beltrami-Koeffizient als Steuerfunktion fungiert. Diese Auffassung – ebenfalls eine Variationsmethode dieses Typs – wurde von B. Dittmar [D] verfolgt.

Eine Variationsmethode in den Klassen  $\Sigma(Q)$  und  $S(Q)$ , die man im Zusammenhange mit der Methode der inneren Variation bei konformen Abbildungen (der Klassen  $\Sigma$  und  $S$ ) sehen kann, wurde von V. Ja. Gutljanskij [Gu] entwickelt.

Eine interessante neue Methode zum Behandeln von Extremalproblemen in den Klassen  $\Sigma(Q)$  und  $S(Q)$ , die für konforme Abbildungen gegenstandslos ist, vielmehr die entsprechenden Resultate bei konformen Abbildungen voraussetzt, wurde von O. Lehto (vgl. [Be]) angegeben; Verallgemeinerungen durch S. L. Krushkal' (vgl. [Kr/Kü], S. 29 ff.) Der Grundgedanke ist ganz einfach: Anwendung des Schwarzschen Lemmas auf das betreffende Funktional, aufgefaßt als analytische Funktion.

Kürzlich wurden durch S. L. Krushkal' [Kr2] durch Teichmüllerraum-Methoden neuartige Koeffizientenabschätzungen (vgl. (19)) gewonnen, zu deren Herleitung die bisherigen Methoden anscheinend versagen.

## 7 Allgemeine Strukturformel für Extremalfunktionen der Klasse $\Sigma(Q)$

Nachdem ein Extremalproblem insoweit gelöst ist, als das die Extremalfunktionen charakterisierende quadratische Differential (6) bestimmt ist, entsteht die weitergehende Aufgabe, nun diese Extremalfunktionen wirklich zu bestimmen (und damit die genauen Schranken für das betreffende Funktional). Das ist nun i. allg. noch erheblich schwieriger als schon bei konformen Abbildungen. Immerhin existiert eine „Strukturformel“ für diese Extremalfunktionen im Falle der Klasse  $\Sigma(Q)$ . Es gilt nämlich (vgl. [Kr/Kü], S. 119 ff.) folgendes.

Die Extremalfunktionen  $w = w(z)$  ergeben sich durch Elimination von  $w$  aus

$$(20) \quad \int \sqrt{2(w)} dw = \begin{cases} F(z) & \text{für } |z| \geq 1, \\ \frac{1}{1-q^2} [G(1/\bar{z}) + qG(1/z)] & \text{für } |z| \leq 1, \end{cases}$$

wobei  $F(z) = -\frac{1}{\sqrt{1-q^2}} \int \sqrt{h} \sin \left( \sqrt{1-q^2} \int \frac{k}{h} dz \right) dz,$

$$G(z) = \int \sqrt{h} \cos \left( \sqrt{1-q^2} \int \frac{k}{h} dz \right) dz$$

ist mit gewissen rationalen Funktionen  $h$  und  $k^2$ . Die in diese rationalen Funktionen i. allg. in großer Zahl eingehenden Parameter erschweren jedoch sehr

eine konkrete Durchführung. Es liegt hier eine gewisse Analogie zu den bekannten Schwarz-Christoffelschen Formeln zur Polygonabbildung vor. In [Kr/Kü], S. 119 ff. finden sich einige mit erträglichem Aufwand durchrechenbare Fälle.

Ganz erheblich einfacher gestaltet sich die ganze Prozedur zur Bestimmung der Extremalfunktionen im Falle, das quadratische Differential (6) ist ein vollständiges Quadrat, d. h.  $\mathcal{Q}(w)$  ist das Quadrat einer rationalen Funktion. Ein solcher Fall kommt z. B. im folgenden Abschnitt vor, nämlich beim Funktional in (22).

## 8 Das Fortsetzungsproblem

Gegeben sei eine schlichte konforme Abbildung  $w(z)$  der Klasse  $\Sigma$ , die also zunächst nur für  $|z| > 1$  erklärt ist und die Entwicklung (8) besitzt. Wie kann man der Funktion  $w(z)$ , also z. B. den Koeffizienten ansehen, daß  $w(z)$  sogar zur Klasse  $\Sigma(Q)$  gehört, also eine  $Q$ -quasikonforme Fortsetzung nach  $|z| < 1$  existiert? Gefragt sind also Bedingungen, die notwendig und hinreichend dafür sind, daß  $w(z) \in \Sigma$  nach  $|z| < 1$  noch  $Q$ -quasikonform fortsetzbar ist. Um es gleich zu sagen: Das Problem ist in dieser strengen Form bisher ungelöst. Es existieren bis anhin nur notwendige Bedingungen und daneben hinreichende Bedingungen, und dazwischen klafft sozusagen eine Lücke.

Jede für die Klasse  $\Sigma(Q)$  gefundene Ungleichung, z. B. (13), stellt natürlich eine notwendige Bedingung für  $Q$ -quasikonforme Fortsetzbarkeit dar. Eine besonders große und nützliche Gruppe von Ungleichungen speziell für Koeffizienten erhält man so. Ist  $w(z) \in \Sigma$  und werden hieraus durch die Entwicklung

$$(21) \quad -\log \frac{w(z) - w(\zeta)}{z - \zeta} = \sum_{k,l=1}^{\infty} \frac{a_{kl}}{z^k \zeta^l} \quad \text{für } |z| > 1, |\zeta| > 1$$

die „Grunsky-Koeffizienten“  $a_{kl}$  gebildet, dann gilt – falls sogar  $w(z) \in \Sigma(Q)$  – für jedes endliche System komplexer Zahlen  $x_k$  die Ungleichung (also notwendige Bedingung für  $w(z) \in \Sigma(Q)$ )

$$(22) \quad \left| \sum_{k,l=1}^n a_{kl} x_k x_l \right| \leq q \sum_{k=1}^n \frac{|x_k|^2}{k};$$

vgl. z. B. [Kr/Kü], S. 111. Es stellte sich dann leider heraus, daß – entgegen ursprünglich geäußerter Vermutung – dieses Ungleichungssystem jedoch nicht hinreichend für  $w(z) \in \Sigma(Q)$  ist. Immerhin konnte Chr. Pommerenke [Pom] (S. 292) zeigen, daß (22) wenigstens hinreichend dafür ist, daß überhaupt eine quasikonforme Fortsetzung existiert. Auch kann man sagen: Wenn man in (22) den verschärfenden Faktor  $1/3$  hinzufügt, dann gilt  $w(z) \in \Sigma(Q)$ . Diese Phänomen hat man öfter: Zahlreiche notwendige Bedingungen werden zu hinreichenden, wenn man in der entsprechenden Ungleichung einen verschärfenden Faktor hinzufügt. Ein Überblick zu diesen hinreichenden Bedingungen wurde in [Be] gegeben, so daß wir das hier nicht weiter verfolgen wollen.

## 9 Möglichst konforme Abbildungen

Sind zwei Gebiete (oder allgemeiner Riemannsche Flächen) topologisch, aber nicht konform aufeinander abbildbar, so entsteht die Frage, ob es wenigstens eine quasikonforme Abbildung hierzu gibt. (Dabei können ggf. noch weitere Nebenbedingungen hinzutreten.) Und wenn eine quasikonforme Abbildung existiert: Gibt es dann unter allen diesen quasikonformen Abbildungen eine solche mit kleinster Maximaldilatation? Im Falle der Existenz (welche mit Hilfe der in § 4 erwähnten Kompaktheitsprinzipien verhältnismäßig leicht i. allg. gezeigt werden kann) heißt diese dann eine „möglichst konforme Abbildung“ (in der betreffenden Abbildungsklasse) nach H. Grötzsch, der diese so ungemein trüchtige Frage zuerst [G3] betrachtete. Später hat diesen Problemkreis ausgiebig O. Teichmüller [T] studiert und bekannt gemacht, dabei die (m. E. weniger suggestive) Bezeichnung „extremal quasikonforme Abbildung“ verwendet.

Am schnellsten versteht man die Sache im Zusammenhang mit der Grundaufgabe von § 2. Diese sehen wir jetzt sozusagen in der Umkehrung an. Es werden jetzt also Vierecke  $\mathfrak{B}$  und  $\mathfrak{B}'$  fest vorgegeben, oder – äquivalent dazu gemäß dem Schema von Fig. 1 – Rechtecke  $\mathfrak{K}$  und  $\mathfrak{K}'$ , d. h. die Größen  $h$  und  $h'$ . Dabei können wir o.E.d.A.  $h' > h$  vorgeben (sonst Vertauschung von  $\mathfrak{K}$  und  $\mathfrak{K}'$ ). Die Frage lautet jetzt: Für welche eckpunktstreuen quasikonformen Abbildungen  $\mathfrak{B} \rightarrow \mathfrak{B}'$  bzw.  $\mathfrak{K} \rightarrow \mathfrak{K}'$  wird die Maximaldilatation minimal? Die Betrachtung im Zusammenhange mit (3) zeigt sofort: Es gibt genau eine möglichst konforme unter diesen Abbildungen, und diese ist die Affinität  $u = x, v = (h'/h)y$ .

## 10 Möglichst konforme Spiegelung an Jordankurven

Von eigenem Reiz wird die Frage nach möglichst konformen Abbildungen im Zusammenhange mit Spiegelungen an einer geschlossenen Jordankurve  $\mathfrak{C}$ . Eine quasikonforme Spiegelung an  $\mathfrak{C}$  ist eine orientierungsumkehrende Abbildung der Zahlenkugel auf sich, bei der die Punkte von  $\mathfrak{C}$  alle fest bleiben und die beiden von  $\mathfrak{C}$  berandeten einfach zusammenhängenden Gebiete vertauscht werden (und die natürlich quasikonform sein soll, genauer gesagt bei Nachschalten einer Spiegelung an der reellen Achse, die die Orientierung wieder herstellt). Falls eine solche Spiegelung existiert, heißt  $\mathfrak{C}$  „Quasikreis“. Diese Fragestellung wurde von L. V. Ahlfors angestoßen. Eine Übersicht hierzu und die Zusammenhänge mit anderen Fragen kann man in [Ge] lesen. Die Maximaldilatation der möglichst konformen Spiegelungen an dem Quasikreis  $\mathfrak{C}$  heiße „Spiegelungskoeffizient“  $Q_{\mathfrak{C}}$ . Dazu setzen wir

$$q_{\mathfrak{C}} = \frac{Q_{\mathfrak{C}} - 1}{Q_{\mathfrak{C}} + 1}$$

(und nennen auch dies ggf. Spiegelungskoeffizient).

Es besteht ein einfacher Zusammenhang mit der in § 9 genannten Aufgabe der möglichst konformen Abbildung der Einheitskreisscheibe auf sich bei fest gegebenen Randwerten. Dazu werden einfach die beiden von  $\mathfrak{C}$  berandeten einfach zusammenhängenden Gebiete auf je eine Einheitskreisscheibe konform abgebildet. Unsere Aufgabe überträgt sich damit auf diese beiden Scheiben mit der durch  $\mathfrak{C}$  induzierten Randabbildung. Auch in der umgekehrten Richtung gilt entsprechendes. Genauer es hierzu (z. B. auch zum Zusammenhang mit der Frage der möglichst konformen Fortsetzung der Riemannschen Abbildungsfunktion zum Inneren von  $\mathfrak{C}$ ) findet man in [Kü 10]. Dort auch der Zusammenhang zwischen  $q_{\mathfrak{C}}$  und dem sog. Fredholmschen Eigenwert. Auch ist dort näher dargestellt, daß  $Q_{\mathfrak{C}}$  ein Maß für die Abweichung von  $\mathfrak{C}$  von einer Kreislinie darstellt. (Es ist in elementarer funktionentheoretischer Schlußweise  $Q_{\mathfrak{C}} = 1$  genau dann, wenn  $\mathfrak{C}$  eine Kreislinie auf der Zahlenkugel ist, und kleine, d. h. nahe bei 1 gelegene Werte von  $Q_{\mathfrak{C}}$  bedingen, daß  $\mathfrak{C} \neq \infty$  in einem Kreisring beliebig kleinen Radienverhältnisses liegt.)

Man kann auch durch den Spiegelungskoeffizienten die Hausdorff-Dimension von  $\mathfrak{C}$  abschätzen – vgl. [Be/Pom].

Wir wollen es uns nun nicht versagen, noch ein instruktives Beispiel zur möglichst konformen Spiegelung zu betrachten.

## 11 Möglichst konforme Spiegelung an einer halben Lemniskate

Dieses Beispiel illustriert sehr gut die auftretenden Phänomene. Wir können ohne zusätzliche Komplikationen gleich  $\mathfrak{C}$  etwas allgemeiner annehmen, nämlich als Bild von  $|\zeta - 1| = 1$  bei der Abbildung durch  $\mathfrak{w} = \zeta^{\alpha}$  ( $0 < \alpha < 1$ ) mit der Zweigwahl  $\mathfrak{w}(1) = 1$ . Speziell für  $\alpha = 1/2$  erhalten wir die rechte Hälfte der Lemniskate mit den Grundpunkten  $\mathfrak{w} = \pm 1$ .

Wir wollen nun zeigen: Die möglichst konforme Spiegelung an  $\mathcal{C}$  ist nicht eindeutig bestimmt, es gibt sogar unendlich viele möglichst konforme Spiegelungen [Kü 10]. Über [Kü 10] hinausgehend existieren unter diesen sogar solche, deren Dilatation überall  $< Q = \frac{2}{\alpha} - 1 = \text{Maximaldilatation}$  ist, außer in dem Knickpunkt  $w=0$ . Dieser „wesentliche Punkt“ spielt also in ganz eigentümlicher Weise die entscheidende Rolle. Die folgende Betrachtung ist geometrisch-anschaulich, eigentlich elementar\*).

Die ganze Betrachtung beginnt mit der Konstruktion einer möglichst konformen Fortsetzung der konformen Abbildung  $w = \zeta^\alpha$  von  $|\zeta - 1| < 1$  auf's Innere von  $\mathcal{C}$ . Dies geschieht in der Logarithmusebene, wozu man Fig. 3 vergleichen wolle; dort auch Erklärung der Bezeichnungen.

Zunächst wird die Fortsetzung in der logarithmischen Hilfsebene dadurch konstruiert, daß man im Streifen  $\pi/2 \leq y \leq 3\pi/2$  die Affinität

$$(23) \quad u = \alpha x, \quad v = (2 - \alpha)y - (1 - \alpha)\pi$$

mit der (konstanten) Dilatation  $Q = \frac{2}{\alpha} - 1$  anschreibt. Dies paßt sich obiger

konformer Abbildung, die in der logarithmischen Ebene lautet  $w = \alpha z$ , längs des Randes des Streifens stetig an. Damit haben wir sogar eine Fortsetzung obiger Abbildung von  $|\zeta - 1| < 1$  auf's Innere von  $\mathcal{C}$  konstruiert, die auch noch konform ist etwas außerhalb des Kreises  $|\zeta - 1| = 1$ . Dies wird jetzt bei der folgenden Modifizierung der Abbildung wesentlich ausgenutzt. Diese Abbildung wird nämlich nun dadurch modifiziert, daß in der  $w$ -Ebene die Gerade  $\Im w = \pi\alpha/2$  geeignet etwas „verbogen und hochgedrückt“ wird, symmetrisch dazu die Gerade  $\Im w = \pi \left( 2 - \frac{\alpha}{2} \right)$  nach unten gedrückt. Dies in der Hoffnung, die Dilatation im

schraffierten Bereiche der  $w$ -Ebene etwas zu verringern, da ja dort aus infinitesimalen Kreisen der  $z$ -Ebene infinitesimale Ellipsen der  $w$ -Ebene entstanden sind, deren große Achsen die Richtung der imaginären Achse haben. Dies funktioniert tatsächlich – wie jetzt gezeigt werden soll – deshalb, weil durch die Konformität der Abbildung im Streifen  $|\Im z| < \pi/2$  auch außerhalb des Bildes von  $|\zeta - 1| = 1$  noch ein gewisser „Spielraum“ für Abänderung besteht.

Dieses Bild von  $|\zeta - 1| = 1$  ist in der oberen Hälfte eine gewisse Kurve  $y = f(x), x \leq \log 2$ . Sie bzw. ihr Bild in der  $w$ -Ebene soll zunächst genauer untersucht werden, indem wir ansetzen

$$\zeta = 1 - e^{-i\varphi}, \quad 0 < \varphi \leq \pi.$$

Man errechnet elementar

$$z = \frac{\pi}{2}i + \log \varphi - \frac{i}{2} \varphi + \dots, \quad u = \alpha \log \varphi + \dots \varphi^2 + \dots, \quad v = \frac{\pi\alpha}{2} - \frac{\alpha}{2} \varphi + \dots$$

\*) Ein mehr analytisch konstruiertes Beispiel wird in [Kr 3] angegeben. Im Zusammenhange mit den möglichst konformen Abbildungen mit festen Randwerten wird dieses Phänomen, daß die Dilatation im Innern stets  $< \text{Maximaldilatation}$  ist, z. B. schon in [R/St] an einem Beispiel beobachtet.

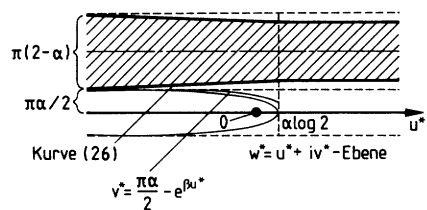
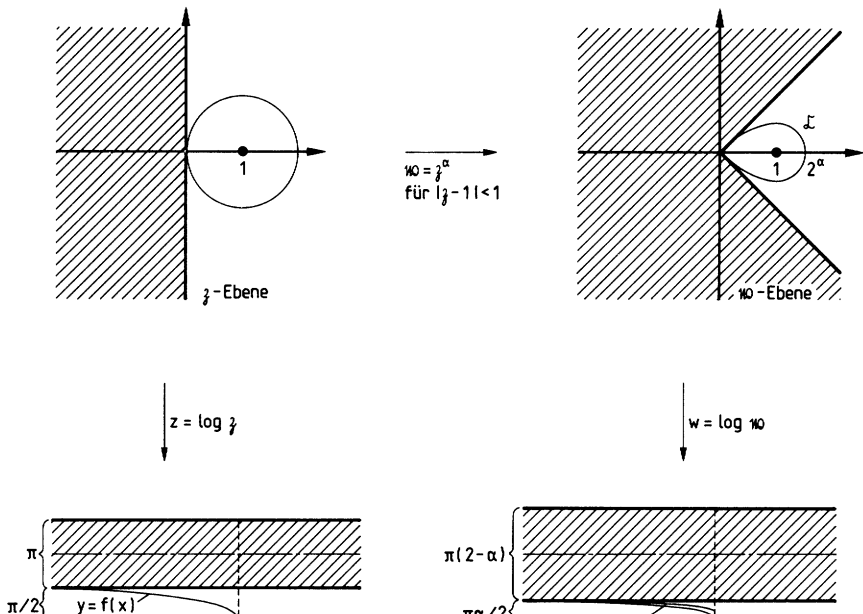


Fig. 3

(Potenzreihen in  $\varphi$  mit reellen Koeffizienten). Es entsteht also das Bild von  $y = f(x)$  in der  $w$ -Ebene in der Form



Die angekündigte Abänderung obiger Abbildung  $w(z)$  zu  $w^*(z) = u^* + iv^*$  wird nun mit zunächst noch nicht festgelegtem, jedenfalls hinreichend kleinem  $\gamma > 0$  angesetzt in Form von

$$(24) \quad \begin{aligned} u^* &= \alpha x \\ v^* &= (2 - \alpha)(y - \pi)(1 - \gamma e^{\alpha\beta x}) + \pi \end{aligned} \quad \text{im Halbstreifen} \quad \begin{aligned} \frac{\pi}{2} &\leq y \leq \pi, \\ x &\leq \log 2 \end{aligned}$$

mit symmetrischer Fortsetzung in den Halbstreifen  $\pi \leq y \leq 3\pi/2$ ,  $x \leq \log 2$ . Die Symmetriegerade  $y = \pi$  geht in die Symmetriegerade  $v^* = \pi$  über.

Man errechnet für die Dilatation  $p^* > 1$  dieser Abbildung mit der Jacobischen Determinante  $J^* > 0$

$$(25) \quad \begin{aligned} p^* + \frac{1}{p^*} &= \frac{u_x^{*2} + u_y^{*2} + v_x^{*2} + v_y^{*2}}{J^*} \\ &= \left\{ \frac{1}{Q} + Q[1 - 2\gamma e^{\alpha\beta x} + \gamma^2 e^{2\alpha\beta x} + \alpha^2 \beta^2 \gamma^2 (y - \pi)^2 e^{2\alpha\beta x}] \right\} / (1 - \gamma e^{\alpha\beta x}). \end{aligned}$$

Man sieht, daß dies tatsächlich  $< Q + 1/Q$  ist für hinreichend kleine  $\gamma$ , wie wir erhofft hatten.

Es entsteht bei (24) als Bild von  $y = \pi/2$  bzw.  $v = \pi\alpha/2$  die Kurve

$$(26) \quad v^* = \frac{\pi\alpha}{2} + (2 - \alpha)\frac{\pi}{2} \gamma e^{\beta u^*}, \quad u^* \leq \alpha \log 2.$$

In dem Halbstreifen  $\frac{\pi}{2} \leq y \leq \pi$ ,  $\log 2 \leq x$  wird die Abbildung

$$(27) \quad u^* = \alpha x, \quad v^* = (2 - \alpha)(y - \pi)(1 - \gamma e^{\alpha\beta \log 2}) + \pi$$

stetig an (24) angeschlossen, wobei man genauso eine Dilatation  $< Q$  errechnet für kleine  $\gamma$ .

Nun wird noch der Übergang  $w \rightarrow w^*$  im Streifen  $|v| \leq \pi\alpha/2$  betrachtet (wo  $w(z)$  konform war). Für  $|v| \leq \frac{\pi\alpha}{2} - e^{\beta u}$ ,  $u \leq \alpha \log 2$  setzen wir  $w^* = w$ . Für  $\frac{\pi\alpha}{2} - e^{\beta u} \leq v \leq \frac{\pi\alpha}{2}$ ,  $u \leq \alpha \log 2$  sei dagegen

$$(28) \quad \begin{aligned} u^* &= u, \\ v^* &= \left( 1 + (2 - \alpha)\frac{\pi}{2} \gamma \right) \left( v - \frac{\pi\alpha}{2} \right) + \frac{\pi\alpha}{2} + (2 - \alpha)\frac{\pi}{2} \gamma e^{\beta u}. \end{aligned}$$

Diese Abbildung schließt sich stetig an die eben genannte Abbildung  $w^* = w$  für  $v = \frac{\pi\alpha}{2} - e^{\beta u}$  an und stetig an (24) für  $v = \pi\alpha/2$ . Hier errechnet man, daß die Dilatation beliebig nahe bei 1 liegt für kleine  $\gamma$ , also jedenfalls  $< Q$  ist.

Endlich wird noch im Halbstreifen  $|v| \leq \pi\alpha/2$ ,  $\alpha \log 2 \leq u$  die Abbildung – wie im darüber liegenden Halbstreifen – in der Form  $u^* = u$ ,  $v^* = F(v)$  mit solchem  $F$  angesetzt, daß wieder links stetiger Anschluß vorliegt. Wieder liegt die Dilatation beliebig nahe bei 1 für kleine  $\gamma$ .

Nachdem man die Abbildung noch zur reellen Achse symmetrisch fortgesetzt hat, ergibt sich durch den Übergang  $w^* = e^{w^*}$  insgesamt tatsächlich in Form von  $w^* = w^*(z)$  eine schlichte Abbildung der Vollebene, die für  $|z - 1| < 1$  konform ist und außerhalb dieses Kreises quasikonform, wobei die Dilatation überall  $< Q$  ist außer im Punkte  $z = 0$ .

In bekannter Weise [Kü 10] ergibt sich daraus dann auch eine quasikonforme Spiegelung an der Kurve  $\mathcal{C}$  der  $w$ -Ebene, deren Dilatation überall, außer in der Ecke  $w = 0$ , stets  $< Q = \text{Maximaldilatation}$  ist.

Daß diese Spiegelung möglichst konform ist folgt daraus, daß durch den Knickwinkel bei  $\mathcal{C}$  niemals die Maximaldilatation  $< Q$  sein kann bei einer quasikonformen Spiegelung.

Durch diese Betrachtung wird sinnfällig zum Ausdruck gebracht, welche große Rolle bei gewissen Kurven  $\mathcal{C}$  evtl. vorhandene Ecken bei der quasikonformen Spiegelung spielen. Dies ist allerdings nicht immer so, wie sich z. B. aus [Kü 10] für den Fall ergibt,  $\mathcal{C}$  ist eine langgestreckte Rechtecklinie.

Im Anschluß an dieses Beispiel (aber nicht nur hier) drängen sich z. B.

$z_0 \in \epsilon$  halbiert wird. Dann gilt für  $\epsilon \rightarrow 0$

$$(29) \quad q_\epsilon = \frac{1}{12} \left| \frac{dk}{ds} \right| \cdot \epsilon^2 + O(\epsilon^3),$$

wobei  $dk/ds$  die Ableitung der Krümmung  $k$  nach der Bogenlänge  $s$  im Punkte  $z_0$  ist.

Diese asymptotische Darstellung des Spiegelungskoeffizienten zeigt, daß dieser etwas mit Krümmung zu tun hat, allerdings nicht mit der Krümmung selbst, sondern mit der Ableitung hiervon. (In diesem Zusammenhange: Der Spiegelungskoeffizient bleibt invariant bei linearer Transformation, insbesondere bei Ähnlichkeitstransformation, was aber die Krümmung verändert.)

Wenn bei den Spiegelungen die Nebenbedingung  $\infty \rightarrow \infty$  hinzugefordert wird, hat man statt (29)

$$(30) \quad q_\epsilon = \frac{1}{4} k\epsilon + O(\epsilon^2).$$

Man kann nun mathematisch allgemein die Frage stellen, an welchen Mengen  $\mathfrak{M}$  man quasikonform spiegeln kann, d. h.: Zu welchen  $\mathfrak{M}$  existiert eine orientierungsumkehrende quasikonforme Abbildung der Vollkugel auf sich, die sämtliche Punkte von  $\mathfrak{M}$  festläßt? Eine vollständige Charakterisierung dieser  $\mathfrak{M}$  ist ein offenes Problem. Klar ist, daß an einer nur aus endlich vielen Punkten bestehenden Menge  $\mathfrak{M}$  quasikonform gespiegelt werden kann. Und klar ist natürlich, daß dies nicht geht, wenn  $\mathfrak{M}$  einen inneren Punkt hat.

### 13 Dilatationsbeschränkung im Mittel

Es liegt eigentlich sehr nahe, neben ortsabhängigen Dilatationsbeschränkungen der Form (7) auch Dilatationsbeschränkungen im Mittel der Form

$$(31) \quad \iint_{\mathfrak{G}'} \Phi(p(z), z) dx dy \leq C = \text{const}$$

zu betrachten. Dazu wird eine reell-wertige „Mittlungsfunktion“  $\Phi(p, z)$  fest vorgegeben. Diese hängt im einfachsten Falle nur von der Dilatation  $p$  ab, kann aber natürlich noch von  $z$  abhängen. Wir setzen gleich der Einfachheit halber voraus, daß  $\Phi$  zu jedem  $z$  nach  $p$  zweimal stetig differenzierbar ist mit  $\Phi_p > 0$ . Außerdem erweist es sich als naturgemäß, Konvexität  $\Phi_{pp} > 0$  anzunehmen. Die Integration in (31) erfolge über ein Teilgebiet  $\mathfrak{G}'$  des abzubildenden Gebietes  $\mathfrak{G}$ . Und die Konstante  $C$  in (31) muß natürlich hinreichend groß (fest) vorgegeben werden, damit die Bedingung (31) von mindestens einer Abbildung erfüllt werden kann.

Es ist in vielen Zusammenhängen – in der Mathematik allgemein gesprochen – einfacher (d. h. einfacher handhabbar und mit einfacheren Ergebnissen), mit Beschränkungen im Mittel zu arbeiten statt mit Beschränkungen des Supremums. Hier ist dies jedoch nicht so. Wir wollen skizzieren, daß die Mittelbeschränkungen (31) zu nichtlinearen Gleichungssystemen für die Ableitungen der

Extremalabbildungen führen, während die ortsabhängigen Beschränkungen der Form (7) zum linearen Differentialgleichungssystem (10) führten.

Schauen wir uns als Beispiel wieder das Extremalproblem (11) an, jetzt in der Klasse aller quasikonformen Abbildungen eines endlich vielfach zusammenhängenden Gebietes  $\mathfrak{G} \ni \infty$ , wobei diese Abbildungen in einer festen Umgebung von  $z = \infty$  konform sein sollen mit der Entwicklung (8) und im Rest  $\mathfrak{G}'$  des Gebietes (31) erfüllen. Falls  $g(z)$  eine Extremalabbildung ist mit der Dilatation  $\mathfrak{p}(z) \geq 1$  und der Jacobischen Determinante  $\mathcal{J}$ , dann gilt notwendig:  $g(z) = u + iv$  ist  $(1/\mathfrak{p})$ -analytisch, erfüllt also

$$(32) \quad u_x = \mathfrak{p}v_y, \quad u_y = -\mathfrak{p}v_x,$$

in (31) steht das Gleichheitszeichen, und dazu gilt noch – das ist das entscheidend Neue –

$$(33) \quad \mathcal{J} = c\mathfrak{p}\Phi_p, \quad \text{falls } \mathfrak{p} \neq 1,$$

$$(34) \quad \mathcal{J} \leq c\mathfrak{p}\Phi_p, \quad \text{falls } \mathfrak{p} = 1$$

mit einer Konstanten  $c > 0$ . Die Bildrandkomponenten sind zur reellen Achse parallele Strecken. Diese notwendige Bindung wird sogar hinreichend, falls noch  $\Phi_{pp} > 0$  gilt für ein die bisherigen Bedingungen erfüllendes  $g(z)$ .

In (32), (33) steckt das schon angekündigte nichtlineare Differentialgleichungssystem. Das zu sehen, setzen wir  $V^2 = u_x^2 + u_y^2$ . Man errechnet

$$(35) \quad V^2 = \mathfrak{p}\mathcal{J} = c\mathfrak{p}^2\Phi_p.$$

Dies läßt sich als funktionelle Abhängigkeit zwischen  $V^2$  und  $\mathfrak{p}$  auffassen, die sich auflösen läßt nach  $\mathfrak{p}$  zu  $\mathfrak{p} = P(V^2)$  mit einer gewissen Funktion  $P$  (zu jedem festen  $z$ ). Das gibt dann tatsächlich das nichtlineare System

$$(36) \quad u_x = P(u_x^2 + u_y^2) \cdot v_y, \quad u_y = -P(u_x^2 + u_y^2) \cdot v_x.$$

Dieses System spielt in der Gasdynamik (stationäre, reibungs- und wirbelfreie Unterschallströmungen eines kompressiblen Gases) die zentrale Rolle (s. u.). Der Beweis der Existenz von Lösungen von (36) wäre wie in der Gasdynamik zu führen, wobei allerdings noch der Möglichkeit (34) Rechnung zu tragen ist, was erhebliche zusätzliche Komplikationen verursacht. Eine systematische Durchführung dieses Existenzbeweises steht noch aus.

In diesem Zusammenhange ist noch auf folgenden komplizierenden Umstand hinzuweisen. Die Existenz von Extremalfunktionen bei ortsabhängiger Dilatationsbeschränkung der Form (7) ergibt sich unmittelbar wegen der in § 4 erwähnten Kompaktheit der entsprechenden Abbildungsklassen. Diese Kompaktheit liegt natürlich – wie man ganz elementar sieht – bei der Dilatationsbeschränkung (31) nicht vor. Tatsächlich ist es dadurch bis heute nicht gelungen, *a priori* die Existenz von Extremalfunktionen bei Dilatationsbeschränkungen im Mittel nachzuweisen. Wenn dies gelänge, hätte man übrigens die Möglichkeit, in ganz neuer Weise die Existenz gasdynamischer Strömungen nachzuweisen.

Wir heben noch zwei besonders interessante Mittelungsfunktionen  $\Phi$  hervor.

Setzt man

$$(37) \quad \Phi(p) = \frac{1}{p} + \frac{p}{\alpha^2} \quad (0 < \alpha \leq 1)$$

an ( $\Phi$  also nur von  $p$  abhängig, nicht explizit von  $z$ ), dann ergibt sich aus (36), daß  $U = c^{-1/2} \cdot \Re \varphi$  die Minimalflächengleichung

$$(38) \quad (1 + U_y^2)U_{xx} - 2U_x U_y U_{xy} + (1 + U_x^2)U_{yy} = 0$$

erfüllt. Das sollte einmal näher studiert werden, da die hier auftretenden Randaufgaben nicht dem gängigen Schema entsprechen.

Nochmals konkret zur schon genannten Gasdynamik. Gegeben sei eine

über die Bernoullische Gleichung zwischen Geschwindigkeitsquadrat  $V^2$  und  $p$  und damit  $\varrho$  eine Beziehung, so daß

$$(39) \quad \Phi = p + \frac{1}{2} \varrho V^2$$

eine reine Funktion von  $\varrho$  wird. Setzt man noch  $p = \alpha/\varrho$  ( $\alpha > 0$ ), wird endlich  $\Phi$  eine Funktion von  $p$ , und diese Funktion wird als Mittelungsfunktion in (31) gewählt. Damit läßt sich dann das komplexe Potential  $\varphi = u + iv$  zu einer gasdynamischen Umströmung als Extremale in einer Klasse quasikonformer Abbildungen charakterisieren.

Näheres zu diesem Teilthema vgl. in [Kr/Kü].

## 14 Geometrische Anwendung: Möglichst kreisnahe Jordankurve durch $n$ Punkte

Auf der komplexen Zahlenkugel seien  $n \geq 4$  verschiedene Punkte  $z_1, \dots, z_n$  gegeben. Betrachtet werden alle geschlossenen Jordankurven  $\mathcal{C}$ , die durch diese



Fig. 4

analytisch und besitzt überraschenderweise immer Knicke, und zwar nicht nur in den  $z_k$ , sondern u. U. auch – scheinbar völlig unmotiviert – in weiteren Punkten. Das hängt damit zusammen, daß das beschreibende quadratische Differential in den  $z_k$  einfache Pole bekommt (falls der betreffende Punkt nicht „überflüssig“ ist), aber dazu noch u. U. Nullstellen.

Man kann alles explizit mit elliptischen Funktionen und Integralen ausrechnen [Kü 14] im einfachsten nichttrivialen Falle  $n = 4$ . In Fig. 4 sind zwei Beispiele einer solchen möglichst kreisnahen Jordankurve durch vier Punkte gezeichnet.

### 15 Physikalische Anwendung: Elektrostatik in inhomogenen Medien

Wir betrachten ebene Elektrostatik in der  $z$ -Ebene, wobei das Dielektrikum inhomogen, teilweise sogar anisotrop sein darf. Mathematisch ähnliche Probleme treten auf in der (ebenen) Magnetostatik, bei stationären elektrischen Strömen in inhomogenen Medien sowie bei Temperaturfeldern bei ortsabhängiger Wärmeleitfähigkeit und bei stationären Grundwasserströmungen in porösen Medien.

Für Feldstärke  $\mathfrak{E}$  und dielektrische Erregung  $\mathfrak{D}$  ergibt sich aus den Maxwell'schen Gleichungen  $\text{rot } \mathfrak{E} = 0, \text{div } \mathfrak{D} = 0$ , woraus bei ebenen Problemen die Existenz zweier Funktionen  $U$  und  $V$  ( $V$  evtl. mehrdeutig) folgt, für die

$$\mathfrak{E} = - \text{grad } U, \quad \mathfrak{D} = \begin{pmatrix} -V_y \\ V_x \end{pmatrix}$$

gilt. Die Potential- bzw. Feldlinien von  $\mathfrak{D}$  haben dann die Gleichung  $U = \text{const}$  bzw.  $V = \text{const}$ . Der Fluß des Vektors  $\mathfrak{D}$  durch eine Kurve ist gleich der Differenz der  $V$ -Werte der Endpunkte. Wird nun im zunächst anisotropen allgemeinen Falle eine Beziehung

$$\mathfrak{D} = (\varepsilon_{ij}) \cdot \mathfrak{E}, \quad (\varepsilon_{ij}) = \begin{pmatrix} \varepsilon_{11} & \varepsilon_{12} \\ \varepsilon_{21} & \varepsilon_{22} \end{pmatrix}, \quad \varepsilon_{ij} = \varepsilon_{ij}(x, y),$$

zwischen den Spaltenvektoren  $\mathfrak{E}$  und  $\mathfrak{D}$  angenommen, so erfüllt das „komplexe Potential“  $f = U + iV$  das System

$$(40) \quad V_y = \varepsilon_{11} U_x + \varepsilon_{12} U_y, \quad -V_x = \varepsilon_{21} U_x + \varepsilon_{22} U_y,$$

das sich bei isotropen Medien mit  $\varepsilon_{11} = \varepsilon_{22} = \varepsilon$ ,  $\varepsilon_{12} = \varepsilon_{21} = 0$  zu

$$(41) \quad U_x = \frac{1}{\varepsilon} V_y, \quad U_y = -\frac{1}{\varepsilon} V_x \quad \text{mit} \quad \varepsilon = \varepsilon(x, y)$$

spezialisiert. Das komplexe Potential stellt also bei isotropen Medien eine  $\varepsilon$ -

ten wie bei homogenen Medien. (Üblicherweise charakterisiert bzw. berechnet man bei z. B. stückweise konstanter Dielektrizitätskonstante die zugehörigen reellen Potentiale durch Forderung der Stetigkeit dieser reellen Potentiale nebst einer Übergangsbedingung bei der Normalableitung; in der hier geübten Auffassung wird praktisch letztere Forderung ersetzt durch die der Stetigkeit einer zum reellen Potential konjugierten Funktion, was gewisse theoretische Vorteile bietet.). Es wird z. B. die Überlagerung des zweifach zusammenhängenden Feldgebietes zwischen zwei Leitern durch das komplexe Potential auf einen Parallelstreifen in Richtung der imaginären Achse abgebildet.

Der anisotrope Fall läßt sich in dem hier betrachteten ebenen Fall immer auf den isotropen Fall durch eine über eine Beltramigleichung (vgl. § 16) definierte quasikonforme Abbildung zurückführen [Kü2b].

Das Auftreten des Differentialgleichungssystems (41) ist der Grund dafür

## 16 Quasikonforme Abbildungen durch elliptische Systeme

Aus der klassischen Theorie der konformen Abbildungen kennt man sog. Normalabbildungen. Danach ist z. B. (Riemannscher Abbildungssatz) jedes einfach zusammenhängende Gebiet mit mindestens zwei Randpunkten auf die Einheitskreisscheibe schlicht konform abbildbar (bei gewissen Nebenbedingungen ist diese Abbildung eindeutig bestimmt). Oder jedes zweifach zusammenhängende Gebiet mit zwei nichtpunktförmigen Randkomponenten ist auf einen konzentrischen Kreisring schlicht konform abbildbar. Insbesondere von P. Koebe und intensiv später durch H. Grötzsch sind dann noch zahlreiche Abbildungssätze für mehrfach zusammenhängende Gebiete gewonnen worden. Danach ist jedes  $n$ -fach zusammenhängende Gebiet z. B. auf ein von lauter Kreislinien berandetes Gebiet abbildbar (Koebesches Kreisnormierungsprinzip), oder auf ein von lauter zur reellen Achse parallelen Strecken berandetes Gebiet (Parallelschlitztheorem), oder allgemeiner auf ein von Strecken vorgegebener Neigung berandetes Gebiet (Koebesches Geradenschlitztheorem). Dabei kann noch gefordert werden, daß ein vorgegebener innerer Punkt in den unendlich fernen Punkt übergeht mit einer Normierung ähnlich zu (8); dann ist die Abbildung jeweils eindeutig bestimmt.

Es zeigte sich, daß diese Abbildungssätze im wesentlichen bei naheliegenden Modifizierungen richtig bleiben, wenn man nicht speziell das bei konformen Abbildungen zugrunde liegende Cauchy-Riemannsche Differentialgleichungssystem fordert, sondern allgemeiner ein lineares elliptisches Differentialgleichungssystem

$$(42) \quad v_y = au_x + bu_y, \quad -v_x = cu_x + dv_y,$$

wobei  $a, b, c, d$  im betrachteten Gebiet reellwertige (und z. B. meßbare) Funktionen von  $x$  und  $y$  seien und die gleichmäßige Elliptizitätsbedingung

$$a > 0 \quad \text{und} \quad 4ad - (b + c)^2 \geq \text{const} > 0$$

erfüllt sei.

Es ist für viele Zwecke äußerst günstig, dieses System komplex zu schreiben. Wenn wir setzen  $z = x + iy$ ,  $w = u + iv$  und die „komplexen Ableitungen“

$$(43) \quad w_z = \frac{1}{2}(w_x - iw_y), \quad w_{\bar{z}} = \frac{1}{2}(w_x + iw_y)$$

einführen, ist das System (42) aus zwei reellen Differentialgleichungen äquivalent zu der einen komplexen Differentialgleichung

$$(44) \quad w_{\bar{z}} = vw_z + \mu \overline{w_z},$$

wobei einfache Umrechnungsformeln zwischen den reellen Koeffizienten  $a, b, c, d$  einerseits und den komplexen Größen  $v, \mu$  andererseits bestehen [Re2].

Es sind in der Literatur neben den Systemen (42) bzw. (44) noch andere Systeme betrachtet worden, z. B. die Systeme von I. N. Vekua. Aber für Abbildungszwecke spielt (42), (44) eine besonders günstige Rolle. Das hängt damit zusammen, daß die Lösungen von (42), (44) ähnlich wie im Cauchy-Riemannschen



Spezialfalle, d. h. ähnlich wie analytische Funktionen auf Riemannsche Flächen abbilden gemäß dem sog. Darstellungstheorem [Re2]. Es können also – anschaulich gesprochen – durch die Lösungen von (42), (44) keine mehrblättrigen Flächenstücke mit Falten entstehen.

Ein herausragender Sonderfall des Systems (42), (44) ist das sog. Beltrami-system  $\mu = 0$ , das auch zuerst betrachtet wurde: [L], [A/B] – vgl. auch [A], [Le/V], [Re2].

Das System (42), (44) läßt sich dadurch geometrisch charakterisieren, daß bei einer schlichten Lösung jeweils zum Punkte  $z$  konzentrische infinitesimale Ellipsen einer bestimmten Orientierung und eines bestimmten Achsenverhältnisses (beides läßt sich aus  $a, b, c, d$  errechnen) in zu  $w = w(z)$  konzentrische infinitesimale Ellipsen einer bestimmten Orientierung und eines bestimmten Achsenverhältnisses (wieder aus  $a, b, c, d$  berechenbar) übergehen. Beim Beltrami-system sind letztere Ellipsen einfach Kreise. Über den Spezialfall (10) hatten wir schon das Entsprechende gesagt. Dieser Spezialfall stellt sozusagen eine Brücke dar zwischen der oben dargestellten geometrischen Richtung in der Theorie der quasikonformen Abbildungen und der jetzt erörterten mehr analytischen, an ein Differentialgleichungssystem gebundenen Richtung. Dieser Spezialfall spielt – wie in § 15 angedeutet – auch in der mathematischen Physik eine besondere Rolle.

Durch diese geometrische Interpretation des Systems (42), (44) ergeben sich übrigens auch geometrisch sofort Regeln dafür, welches Differentialgleichungssystem erfüllt wird für die Hintereinanderausführung zweier Abbildungen, für die jeweils ein Differentialgleichungssystem erfüllt ist. Diese Regeln ergeben sich rechnerisch wesentlich mühseliger.

Es ist nach diesen Zusammensetzungsregeln z. B. so, daß bei anschließender Ausführung einer konformen Abbildung aus einer Lösung eines Beltrami-systems wieder eine Lösung des gleichen Beltrami-systems entsteht. Da man die Existenz der Lösung des Beltrami-systems nach [A/B] für die Vollebene heute (unter schwachen Voraussetzungen an die Koeffizienten) kennt, kann man also durch „Nachschalten“ einer konformen Abbildung z. B. jedes einfach zusammenhängende Gebiet (mindestens zwei Randpunkte) auf die Einheitskreisscheibe abbilden auch durch eine Lösung eines vorgegebenen Beltrami-systems. Und entsprechend erhält man durch Anwendung des ganzen Arsenal der oben genannten konformen Normalabbildungen sofort auch entsprechende Beltrami-Normalabbildungen.

Schwieriger ist diese Frage nach Normalabbildungen im Falle des allgemeinen Systems (42), (44) zu erledigen. Nach Spezialfällen, behandelt durch Z. Schapiro, F. G. Dressel & J. J. Gergen u. a., wurde diese Frage am allgemeinsten durch S. V. Parter [P] behandelt; später noch einige speziellere russisch-sprachige Arbeiten.

Auch nichtlineare Systeme sind abbildungsmäßig betrachtet worden: M. A. Lavrent'ev, B. W. Bojarski.

In der Theorie der konformen Abbildungen kann man die durch die Abbildungssätze theoretisch als existent nachgewiesenen Abbildungen zumindest in wichtigen Spezialfällen auch explizit formelmäßig konstruieren. Man denke z. B. an die Schwarz-Christoffelschen Formeln zur Polygonabbildung. Etwas ähnliches gibt es bei den Abbildungssätzen bezüglich des allgemeinen elliptischen

Systems (42), (44) praktisch kaum. Lediglich beim Beltramisystem gibt es einige wenige „geschlossene Lösungen“ – vgl. z. B. in [Kü3] den Fall, der „Beltrami-Koeffizient“  $\nu$  ist dreiecksweis konstant.

Noch ein besonderes Teilthema sei hier besonders bedacht. Eine interessante Frage ist die nach der Lösung eines Extremalproblems in Klassen von

Abbildungen, die ein festes elliptisches System (42), (44) erfüllen. Wenn es sich um ein Beltramisystem handelt, ist die Sache trivial bzw. sofort nach obigen Bemerkungen auf den klassischen konformen Fall zurückführbar. Sonst aber treten sofort ganz beträchtliche Schwierigkeiten auf. Diese sind in [Re 1] mit Hilfe einer Variationsmethode überwunden worden. Es konnte gezeigt werden, daß sich die Lösungen von Extremalproblemen durch gewisse „verallgemeinerte quadratische Differentiale“ beschreiben lassen, wenn im entsprechenden klassischen Falle quadratische Differential auftreten. Es scheint schwierig zu sein, Beispiele von elliptischen Systemen anzugeben, in denen man alles „ausrechnen“ kann, so daß man das betrachtete Extremalproblem bis zur Aufstellung einer expliziten Ungleichung behandeln kann.

## 17 $p_0$ -analytische Normalabbildungen

Unter den elliptischen Systemen (42), (44) spielt das spezielle System (10) nun einmal eine besondere Rolle, einmal für Extremalprobleme bei quasikonformen Abbildungen mit ortsabhängiger Dilatationsbeschränkung, wie in § 5 aufgezeigt, und dann zur Beschreibung physikalischer Felder, wie aus § 15 hervorgeht. Dementsprechend spielen auch die an das System (10) gekoppelten Normalabbildungen eine besondere Rolle. Die Situation ist hier analog zu einem Phänomen bei konformen Abbildungen: Z. B. spielt das Parallelschlitztheorem eine besondere Rolle innerhalb des Koebeschen Geradenschlitztheorems (vgl. Anfang von § 16). Letzteres ist zwar wesentlich allgemeiner, tritt aber eben nicht so häufig auf.

Betrachten wir z. B. noch einmal genauer die Extremalfunktionen zum Extremalproblem (11) bzw. – die dortige Sonderrolle von  $z = \infty$  aufhebend – gleich etwas allgemeiner die folgenden Funktionen  $g_\vartheta(z, a)$ . Diese werden zu dem (z. B. stückweis analytisch berandeten) Gebiet  $\mathfrak{G}$  mit darin erklärtem (z. B. stückweis glattem) reellen  $p_0(z)$  bzw.

$$\mu(z) = \frac{p_0(z) - 1}{p_0(z) + 1}$$

so definiert. Es ist  $g_\vartheta(z, a)$  schlicht in  $\mathfrak{G}$  und in  $z = a$  durch die Entwicklung

Wir definieren noch

$$(45) \quad M(z, a) = \frac{1}{2} (g_0(z, a) - g_{\pi/2}(z, a)), \quad N(z, a) = \frac{1}{2} (g_0(z, a) + g_{\pi/2}(z, a)).$$

Man erkennt diese Funktionen  $g_\vartheta(z, a)$  als eine Art komplexe Grundlösung zur Differentialgleichung (44) (mit  $\nu \equiv 0$ ), und zwar mit dipolartiger Singularität im „Aufpunkt“  $z = a$ . Es gibt nun ein umfangreiches System von eigentümlichen Identitäten [Kü8], z. B.

$$(46) \quad g_\vartheta(z, a) = e^{i\vartheta} [g_0(z, a) \cdot \cos \vartheta - i \cdot g_{\pi/2}(z, a) \cdot \sin \vartheta],$$

$$(47) \quad M_{\bar{z}} = \mu \overline{N_z}, \quad N_{\bar{z}} = \mu \overline{M_z},$$

$$(48) \quad (1 - \mu^2(b)) \cdot M_z(b, a) = (1 - \mu^2(a)) \cdot \overline{M_z(a, b)},$$

dazu Verknüpfungen mit noch anderen Normalabbildungen bzw. Grundlösungen. Diese Identitäten verallgemeinern entsprechende, wie sie aus der Theorie der konformen Abbildungen durch klassische Untersuchungen von P. R. Garabedian und M. Schiffer bekannt sind.

Diese Eigentümlichkeiten der Funktionen  $g_\vartheta(z, a)$  können auch in verschiedenen Verfahren zu ihrer effektiven Konstruktion ausgenutzt werden. Am einfachsten wird das im Falle,  $\mu(z)$  ist stückweis konstant. Dann gibt es z. B. Integralgleichungsverfahren. Besonders interessant ist dann folgendes Verfahren der „Kernfunktion“, da es wieder den intensiven Zusammenhang der ganzen Theorie mit der klassischen Funktionentheorie aufzeigt. Dabei wird  $g_\vartheta(z, a)$  in eine Orthonormalreihe entwickelt, wie man das aus der Theorie der konformen Abbildungen bei der Riemannschen Abbildungsfunktion, bei der Parallelschlitzabbildung u. ä. kennt. Das Entscheidende hierbei ist, einen geeigneten Hilbertraum, d. h. vor allem ein „passendes“ Skalarprodukt zu finden.

Wir erläutern in einem Spezialfall [Kü9]. Sei  $\mu(z) \equiv 0$  in dem Gebiet  $G \ni \infty$  (z. B. von stückweis analytischen Jordankurven berandet, Gesamtrand sei  $\mathfrak{C}$ ),  $\mu(z) \equiv q$  im Komplement. (Das abzubildende Gebiet  $\mathfrak{G}$  ist also die ganze  $z$ -Ebene.) Dann bedeutet die Konstruktion der Abbildung  $g_\vartheta$  bei Aufpunkt  $z = \infty$ , eine funktionentheoretische Randwertaufgabe zu lösen. Es ist nämlich zu der in  $G$  analytischen Funktion  $g_\vartheta$  im Komplement von  $G$  ein System analytischer Funktionen zu bestimmen, die aus  $g_\vartheta$  durch eine Affinität in der Bildebene entstehen, wobei längs  $\mathfrak{C}$  aus der Stetigkeit von  $g_\vartheta$  eine Übergangsbedingung für die analytischen Funktionen entsteht.

Man betrachte die Gesamtheit  $\mathfrak{h}$  aller  $F'(z)$ , für die  $F(z)$  in  $G$  analytisch und eindeutig ist mit  $F(\infty) = 0$  und endlichem Dirichlet-Integral über  $G$ . Jedem  $F'$  wird

$$(49) \quad F^*(z) = q \overline{F(z)} + q \frac{1}{\pi} \iint_G \frac{\overline{F'(\zeta)}}{\zeta - z} d\xi d\eta, \quad \zeta = \xi + i\eta$$

zugeordnet und dann das Skalarprodukt

$$(50) \quad (F', H') = \iint_G (F'H' - F''H'') dx dy$$

angeschrieben für  $F', H' \in \mathfrak{H}$ . Dann stellt  $\mathfrak{H}$  einen Hilbertraum dar, und man kann tatsächlich Orthonormalsysteme und daraus  $g_{\mathfrak{H}}$  konstruieren unter wesentlicher Ausnutzung der genannten Übergangsbedingung längs  $\mathfrak{E}$ . Weitere Untersuchungen hierzu: Vgl. [Ho2].

## Literatur

- [A] Ahlfors, L. V.: Lectures on quasiconformal mappings. Princeton, N. J. 1966 (Nachdruck 1987)
- [A/B] Ahlfors, L.; Bers, L.: Riemann's mapping theorem for variable metrics. *Ann. of Math.* **72** (1960) 385–404
- [An] Andreian Cazacu, C.: Une propriété caractéristique des représentations quasiconformes extrémales. *Rev. Roum. Math. Pures Appl.* **12** (1967) 167–176
- [Be] Becker, J.: Conformal mappings with quasiconformal extensions. In: *Aspects of Contemporary Complex Analysis*. London 1980, 37–77
- [Be/Pom] Becker, J.; Pommerenke, Chr.: On the Hausdorff dimension of quasicircles. *Ann. Acad. Sci. Fenn. A. I. Math.* **12** (1987) 329–333
- [Bel] Belinskij, P. P.: Allgemeine Eigenschaften quasikonformer Abbildungen. Novosibirsk 1974 [Russ.]
- [D] Dittmar, B.: Extremalprobleme quasikonformer Abbildungen als Steuerprobleme. *Z. Anal. Anwend.* **5** (1986) 563–573
- [Ge] Gehring, F. W.: Characteristic properties of quasidisks. Montréal 1982
- [G1] Grötzsch, H.: Über die Verzerrung bei schlichten nichtkonformen Abbildungen und über eine damit zusammenhängende Erweiterung des Picardschen Satzes. *Ber. Math.-phys. Kl. Sächs. Akad. Wiss. Leipzig* **80** (1928) 503–507
- [G2] Grötzsch, H.: Über die Verzerrung bei nichtkonformen schlichten Abbildungen mehrfach zusammenhängender schlichter Bereiche. *Ber. Math.-phys. Kl. Sächs. Akad. Wiss. Leipzig* **82** (1930) 69–80
- [G3] Grötzsch, H.: Über möglichst konforme Abbildungen von schlichten Bereichen. *Ber. Math.-phys. Kl. Sächs. Akad. Wiss. Leipzig* **84** (1932) 114–120
- [Gu] Gutljanskij, V. Ja.: Über die Variationsmethode für schlichte analytische Funktionen mit quasikonformer Fortsetzung. *Sibirsk. Mat. Zurn.* **21** (1980) 61–78 [Russ.] – Engl. Übers.: *Sibir. Math. J.* **21** (1980) 190–204
- [Ho1] Hoy, E.: Flächensätze für quasikonform fortsetzbare Abbildungen mit ortsabhängiger Dilatationsbeschränkung. *Math. Nachr.* **121** (1985) 147–161
- [Ho2] Hoy, E.: Variationscharakterisierungen für gewisse quasikonforme Abbildungen. *Z. Anal. Anwend.* **8** (1989) 463–472
- [Ki] Kirsch, S.: Lageabschätzung für einen Kondensator minimaler Kapazität. *Z. Anal. Anwend.* **3** (1984) 119–131
- [Kr1] Krushkal', S. L.: Quasiconformal mappings and Riemann surfaces. Washington 1979
- [Kr2] Krushkal', S. L.: Coefficient problem for univalent functions with quasiconformal extension. *Sibir. Math. J.* **28** (1987) 599–608
- [Kr3] Krushkal', S. L.: Quasiconformal extremals of non-regular functionals. *Ann. Acad. Sci. Fenn. A. I. Math.*
- [Kr/Kü] Kruschkal, S. L.; Kühnau, R.: Quasikonforme Abbildungen – neue Methoden und Anwendungen. Leipzig 1983
- [Kü1] Kühnau, R.: Über gewisse Extremalprobleme der quasikonformen Abbildung. *Wiss. Z. Martin-Luther-Univ. Halle-Wittenberg, Math.-Nat. Reihe* **13** (1964) 35–39
- [Kü2] Kühnau, R.: Quasikonforme Abbildungen und Extremalprobleme bei Feldern in inhomogenen Medien I, II. *J. reine angew. Math.* **231** (1968) 101–113, **238** (1969) 61–66
- [Kü3] Kühnau, R.: Triangulierte Riemannsche Mannigfaltigkeiten mit ganz-linearen Bezugssubstitutionen und quasikonforme Abbildungen mit stückweise konstanter komplexer Dilatation. *Math. Nachr.* **46** (1970) 243–261

- [Kü4] Kühnau, R.: Verzerrungssätze und Koeffizientenbedingungen vom Grunskyschen Typ für quasikonforme Abbildungen. *Math. Nachr.* **48** (1971) 77–105
- [Kü5] Kühnau, R.: Eine Klasse nichtschlichter konformer Abbildungen mit einer schlichten quasikonformen Fortsetzung. *Math. Nachr.* **59** (1974) 261–263
- [Kü6] Kühnau, R.: Geometrie der konformen Abbildung auf der hyperbolischen und der elliptischen Ebene. Berlin 1974
- [Kü7] Kühnau, R.: Zur Methode der Randintegration bei quasikonformen Abbildungen. *Ann. Polon. Math.* **31** (1976) 269–289
- [Kü8] Kühnau, R.: Identitäten bei quasikonformen Normalabbildungen und eine hiermit zusammenhängende Kernfunktion. *Math. Nachr.* **73** (1976) 73–106
- [Kü9] Kühnau, R.: Eine Kernfunktion zur Konstruktion gewisser quasikonformer Normalabbildungen. *Math. Nachr.* **95** (1980) 229–235
- [Kü10] Kühnau, R.: Möglichst konforme Spiegelung an einer Jordankurve. *Jber. d. Dt. Math.-Verein.* **90** (1988) 90–109
- [Kü11] Kühnau, R.: Möglichst konforme Spiegelung an einem Jordanbogen auf der Zahlenkugel. In: *Complex Analysis (Pfluger-Festband)*. Basel 1988, 139–156
- [Kü12] Kühnau, R.: Möglichst konforme Spiegelung an einem Jordanbogen auf der Zahlenebene. *Ann. Acad. Sci. Fenn. A. I. Math.* **14** (1989) 357–367
- [Kü13] Kühnau, R. (Kjunau, R.): Interpolation durch möglichst konforme Jordankurven. *Sibirsk. Math. Zurn.* **32** (1991) 94–103 [Russ.] – Engl. Übers.: *Sibir. Math. J.* **32** (1991) 257–264
- [Kü14] Kühnau, R.: Möglichst konforme Jordankurven durch vier Punkte. *Rev. Roum. Math. Pures Appl.* **36** (1991) 383–393
- [L] Lavrentieff, M. A. (Lavrent'ev, M. A.): Sur une classe de représentations continues. *Rec. Math.* **48** (1935) 407–423
- [Le] Lehto, O.: Schlicht functions with a quasiconformal extension. *Ann. Acad. Sci. Fenn. A. I. Math.*, No 500 (1971) 3–10
- [Le/V] Lehto, O.; Virtanen, K. I.: *Quasikonforme Abbildungen*. Berlin – Heidelberg – New York 1965 (Engl. Übers. 1973)
- [P] Parter, S. V.: On mappings of multiply connected domains by solutions of partial differential equations. *Comm. Pure Appl. Math.* **13** (1960) 167–182
- [Pol] Polozij, G. N.: *Theorie und Anwendung  $p$ -analytischer und  $(p, q)$ -analytischer Funktionen*. 2. Aufl. Kiev 1973 [Russ.]
- [Pom] Pommerenke, Chr.: *Univalent functions*. Göttingen 1975
- [R/St] Reich, E.; Strebel, K.: On the extremality of certain Teichmüller mappings. *Comm. Math. Helv.* **45** (1970) 353–362
- [Re1] Renelt, H.: Über Extremalprobleme für schlichte Lösungen elliptischer Differentialgleichungssysteme. *Comm. Math. Helv.* **54** (1979) 17–41
- [Re2] Renelt, H.: Quasikonforme Abbildungen und elliptische Systeme erster Ordnung in der Ebene. Leipzig 1982 (Engl. Übers. Chichester etc. 1988)
- [Schi/Scho] Schiffer, M.; Schober, G.: Representation of fundamental solutions for generalized Cauchy-Riemann equations by quasiconformal mappings. *Ann. Acad. Sci. Fenn. A. I. Math.* **2** (1976) 501–531
- [Scho] Schober, G.: *Univalent functions – Selected topics*. Berlin – Heidelberg – New York 1975
- [Sh] Shah Dao-shing: Parametric representation of quasiconformal mappings. *Science Record* **3** (1959) 400–407 [Russ.]
- [St] Strebel, K.: Extremal quasiconformal mappings. *Results in Math.* **10** (1986) 168–209
- [T] Teichmüller, O.: Extremale quasikonforme Abbildungen und quadratische Differentiale. *Abh. Preuss. Akad. Wiss., math.-naturw. Kl.* **22** (1939) 1–197 (1940). Auch in: *Gesammelte Abhandlungen*, Berlin – Heidelberg – New York 1982

## Über den $n$ -dimensionalen Residuensatz

E. Kunz, Regensburg

### 1 Formulierung des Residuensatzes

Es handelt sich um den Residuensatz auf dem  $n$ -dimensionalen affinen Raum  $\mathbb{A}_K^n$  über einem algebraisch abgeschlossenen Körper  $K$  oder (je nach Betrachtungsweise) auf dem projektiven Raum  $\mathbb{P}_K^n$ . In diesem Übersichtsartikel sollen geometrische Anwendungen des Residuensatzes angegeben werden und es soll insbesondere gezeigt werden, daß viele schöne klassische Sätze Folgerungen aus dem Residuensatz sind.

Die Polynomalgebra  $K[X_1, \dots, X_n] =: K[X]$  trage die durch  $\deg X_i = \alpha_i \in \mathbb{N}_+$  ( $i = 1, \dots, n$ ) gegebene Graduierung. Ist  $\alpha_1 = \dots = \alpha_n = 1$ , so sprechen wir von der *Standardgraduierung*. Für  $f \in K[X]$  bezeichne  $Gf$  die *Gradform* von  $f$ , d. h. die homogene Komponente höchsten Grades bei der gegebenen Graduierung.

Sei  $f := (f_1, \dots, f_n)$  eine Folge von Polynomen aus  $K[X]$ , für welche die Gradformen eine reguläre Folge  $Gf := (Gf_1, \dots, Gf_n)$  bilden. Dann ist auch  $f$  eine reguläre Folge und es gilt

$$(1) \quad \dim_K K[X]/(f) = \dim_K K[X]/(Gf) = \prod_{i=1}^n \frac{\deg f_i}{\alpha_i}$$

(vgl. [KK], 1.9 und 1.13b). Insbesondere ist die Nullstellenmenge  $\mathcal{V}(f)$  der  $f_i$  in  $\mathbb{A}_K^n$  eine endliche Menge abgeschlossener Punkte. Im Fall der Standardgraduierung ist  $Gf$  genau dann eine reguläre Folge, wenn die Hyperflächen  $f_i = 0$  keine gemeinsamen unendlich fernen Punkte besitzen.

Sei nun  $\omega = h dX_1 \cdots dX_n$  ( $h \in K[X]$ ) eine Differentialform  $n$ -ter Stufe ( $n$ -Form). Dann ist für jedes  $P \in \mathcal{V}(f)$  das Grothendiecksche Residuum

$$\text{Res}_P \begin{bmatrix} \omega \\ f \end{bmatrix}$$

definiert, dessen Theorie in Hartshorne [RD], pp. 195–199 skizziert ist. Die Residuen sind Invarianten des Schnitts der Hyperflächen  $f_i = 0$  im Punkt  $P$ , die in Abhängigkeit von  $\omega$  Informationen über das Schnittverhalten der Hyperflächen in  $P$  liefern. Wir wollen uns hier auf die elementare Konstruktion des Residuums nach Scheja-Storch ([SS<sub>1</sub>], [SS<sub>2</sub>]) stützen, welche nur Hilfsmittel aus der kommutativen Algebra benutzt, und auf die in [K<sub>1</sub>], appendix F und [KK] angegebenen

Ergänzungen zum Residuenkalkül. In der Notation von [KK] und analog zu [SS<sub>2</sub>] ist

$$\text{Res}_P \begin{bmatrix} \omega \\ f \end{bmatrix} = \tau_f^x(\bar{h})$$

wobei  $\bar{h}$  die Restklasse von  $h$  in  $\mathcal{O}_P/(f)$  bezeichnet und  $\tau_f^x$  die in [KK] diskutierte „Spur“. Im Fall  $K = \mathbb{C}$  stimmen diese Residuen mit den durch Integration gewonnenen analytischen Residuen ([GH], Chap. V, p. 649) überein. Ein anderer Zugang zur algebraischen Residuentheorie auf homologischer Grundlage wurde von Lipman [L] gegeben.

Der *Residuenkalkül* ist ein System von Regeln, Formeln und Sätzen über Residuen; einer der wichtigsten davon ist der Residuensatz. Wir setzen

$\text{Res}_P \begin{bmatrix} \omega \\ f \end{bmatrix} = 0$  für  $P \notin \mathcal{V}(f)$ . Ferner bezeichne  $O$  den Ursprung von  $\mathbb{A}_K^n$ . Für  $\omega = h dX_1 \cdots dX_n$  ( $h \in K[X]$ ) sei  $G\omega := Gh \cdot dX_1 \cdots dX_n$  und  $\deg \omega := \deg h + \sum_{i=1}^n \alpha_i$ . Dann gilt:

**1.1 Residuensatz.** *Ist  $\deg \omega \leq \sum_{i=1}^n \deg f_i$ , so ist*

$$\sum_{P \in \mathbb{A}_K^n} \text{Res}_P \begin{bmatrix} \omega \\ f \end{bmatrix} = \text{Res}_O \begin{bmatrix} G\omega \\ Gf \end{bmatrix}$$

Die rechte Seite verschwindet, wenn  $\deg \omega < \sum_{i=1}^n \deg f_i$ , denn die Resi-

duenabbildung ist homogen vom Grad 0 ([KK], 2.7). Im Fall der Standardgraduierung ergibt sich, daß die linke Seite der Gleichung nur von den unendlich fernen Punkten der Hyperflächen  $h=0$ ,  $f_i=0$  ( $i=1, \dots, n$ ) abhängt. Hierauf beruhen zahlreiche geometrische Anwendungen des Residuensatzes. Für ein

beliebiges  $\omega^* \in \Omega_{K[X]/K}^n$  gibt es immer ein  $\omega \in \Omega_{K[X]/K}^n$  mit  $\deg \omega \leq \sum_{i=1}^n \deg f_i$  und

$\omega^* - \omega \in (f) \Omega_{K[X]/K}^n$ . Auf der linken Seite der Residuenformel kann man also beliebige  $\omega^*$  wählen, während rechts das entsprechende  $\omega$  zu nehmen ist.

Einen elementaren Beweis des Satzes 1.1 im Rahmen der Theorie von Scheja und Storch kann man [KK], 4.8a) entnehmen. Der Beweis beruht auf der Verträglichkeit der Spuren mit Basiswechsel und Lokalisation. Satz 1.1 kann auch

als ein Spezialfall des Residuensatzes für projektive Morphismen ([HK]) gewonnen werden, der seinerseits enthalten ist im Residuensatz für eigentliche Morphismen nach Hübl-Sastry ([HS]). Diese Sätze gestatten direkte Herleitungen, können aber auch als Interpretationen von Aussagen der allgemeinen Dualitätstheorie ([RD]) von Grothendieck verstanden werden. Obwohl nur ein enger Spezialfall allgemeinerer Residuensätze, enthält 1.1 doch berühmte klassische Sätze als Korollare.

Bei den Anwendungen des Residuensatzes auf die Schnitt-Theorie von Hyperflächen in  $\mathbb{A}_K^n$  kommt es darauf an, die Differentialform  $\omega$  in 1.1 jeweils so zu wählen, daß die entsprechenden Residuen eine geometrische Interpretation gestatten.

Wir beginnen mit einem Spezialfall, der den Residuensatz noch nicht direkt benötigt, der aber das Modell für die Aussagen abgibt, um deren Verallgemeinerung es später gehen wird.

## 2 Schnitt einer Hyperfläche mit einer Geraden

Es sei  $L/K$  eine Körpererweiterung, wobei  $K$  ein beliebiger und  $L$  ein algebraisch abgeschlossener Körper ist.  $H \subset \mathbf{A}_L^n$  sei eine  $K$ -Hyperfläche, definiert durch ein Polynom  $f \in K[X_1, \dots, X_n]$  vom Grad  $d$ , und  $g$  sei eine über  $K$  definierte Gerade, welche  $H$  in  $d$  verschiedenen  $K$ -rationalen Punkten  $P_k$  ( $k=1, \dots, d$ ) schneidet. Nach einer über  $K$  definierten affinen Koordinatentransformation können wir annehmen, daß  $g$  die  $X_n$ -Achse  $X_1 = \dots = X_{n-1} = 0$  ist. Es ist dann  $P_k = (0, \dots, 0, p_k)$  ( $k=1, \dots, d; p_k \in K$ ) mit  $p_k \neq p_l$  für  $k \neq l$ . Ferner ist  $\frac{\partial f}{\partial X_n}(P_k) \neq 0$  für  $k=1, \dots, d$ , weil das Polynom  $f(0, \dots, 0, X_n)$   $d$  verschiedene Nullstellen besitzt. Nach einer algebraischen Version des Hauptsatzes für implizite Funktionen gibt es formale Potenzreihen  $\varphi_k \in K[[X_1, \dots, X_{n-1}]]$  mit

$$\varphi_k(0) = p_k \quad \text{und} \quad f(X_1, \dots, X_{n-1}, \varphi_k) = 0 \quad (k=1, \dots, d)$$

Schreibe

$$f = a_0 X_n^d + a_1 X_n^{d-1} + \dots + a_d$$

( $a_i \in K[[X_1, \dots, X_{n-1}]]$ ,  $\deg a_i \leq i$ ). Da die  $X_n$ -Achse  $H$  in  $d$  verschiedenen Punkten schneidet, ist  $a_0 \in K^*$ , und man kann  $a_0 = 1$  annehmen. Sei  $a_1 = \alpha_0 + \sum_{i=1}^{n-1} \alpha_i X_i$ ,  $\varphi_k = \sum c_{v_1 \dots v_{n-1}}^{(k)} X_1^{v_1} \dots X_{n-1}^{v_{n-1}}$  ( $\alpha_i, c_{v_1 \dots v_{n-1}}^{(k)} \in K$ ). Da  $\varphi_1, \dots, \varphi_d$  die Nullstellen von  $f$  als Polynom in  $K[[X_1, \dots, X_{n-1}]][[X_n]]$  sind, gilt

$$(1) \quad -a_1 = \sum_{k=1}^d \varphi_k$$

und man erhält durch Koeffizientenvergleich die Formeln

$$(2) \quad -(0, \dots, 0, \alpha_0) = \sum_{k=1}^d P_k$$

wobei die Summe die Vektorsumme in  $K^n$  ist, ferner mit  $\text{grad } \varphi_k := \left( \frac{\partial \varphi}{\partial X_1}, \dots, \frac{\partial \varphi}{\partial X_{n-1}} \right)$

$$(3) \quad -(\alpha_1, \dots, \alpha_{n-1}) = \sum_{k=1}^d (\text{grad } \varphi_k)(0)$$

$$\text{und} \quad 0 = \sum_{k=1}^d c_{v_1 \dots v_{n-1}}^{(k)} \quad \text{für} \quad v_1 + \dots + v_{n-1} \geq 2$$

insbesondere

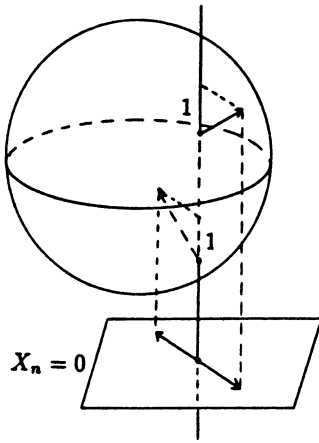
$$(4) \quad 0 = \sum_{k=1}^d \frac{\partial^s \varphi_k}{\partial X_{i_1} \dots \partial X_{i_s}}(0) \quad \text{für} \quad i_1, \dots, i_s \in \{1, \dots, n-1\}, s \geq 2$$



Wird  $d$  nicht von Char  $K$  geteilt, so können wir  $\sum (g \cap H) := \frac{1}{d} \sum_{k=1}^d P_k$ , den Schwerpunkt von  $g \cap H$ , bilden und  $\frac{1}{d} \sum_{k=1}^d (\text{grad } \varphi_k)(0)$ , die durchschnittliche Steigung (relativ zur Hyperebene  $X_n=0$ ) von  $H$  in den Punkten von  $g \cap H$ . Es ist

$$(\text{grad } \varphi_k)(0) = - \frac{1}{f_{X_n}(P_k)} (f_{X_1}(P_k), \dots, f_{X_{n-1}}(P_k))$$

die Projektion längs  $g$  des „Normalenvektors“  $-\frac{1}{f_{X_n}(P_k)} (\text{grad } f)(P_k)$  in die Hyperebene  $X_n=0$ . Hier wird wie auch später abkürzend  $f_{X_k}$  für  $\partial f / \partial X_k$  gesetzt.



Sei nun  $g': X_i = b_i$  ( $i=1, \dots, n-1, b_i \in K$ ) eine zu  $g$  parallele Gerade. Im Koordinatensystem  $X'_i := X_i - b_i$  ( $i=1, \dots, n-1$ ),  $X'_n = X_n$  schreibt sich  $f$  in der Form

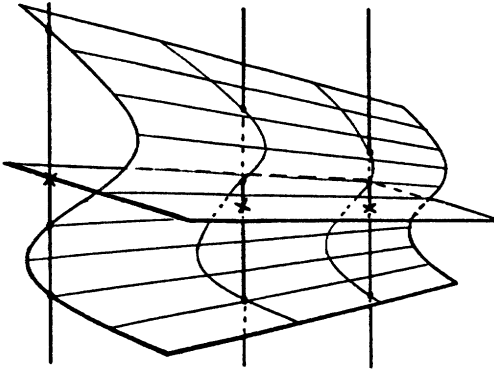
$$(5) \quad f = X_n'^d + \left( \alpha_0 + \sum_{i=1}^{n-1} \alpha_i b_i + \sum_{i=1}^{n-1} \alpha_i X'_i \right) X_n'^{d-1} + \dots$$

Sind  $P'_1, \dots, P'_d$  die Punkte von  $g' \cap H$ , die wieder als paarweise verschieden angenommen werden sollen, so ergibt sich (in  $X$ -Koordinaten)

$$\frac{1}{d} \sum_{k=1}^d P'_k = \left( b_1, \dots, b_{n-1}, \frac{1}{d} \left( \sum_{i=1}^{n-1} \alpha_i b_i + \alpha_0 \right) \right)$$

d. h.  $\sum (g' \cap H)$  liegt auf der  $K$ -Hyperebene  $X_n = \frac{1}{d} \left( \sum_{i=1}^{n-1} \alpha_i X_i + \alpha_0 \right)$ . Damit ist gezeigt

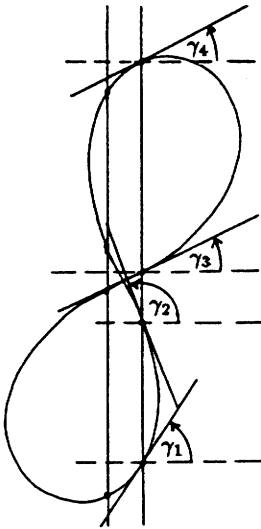
**2.1 Satz von Newton.** Ist  $\{g_\lambda\}$  eine Familie paralleler  $K$ -Geraden, welche  $H$  in jeweils  $d$  verschiedenen  $K$ -rationalen Punkten schneiden, dann liegen die Schwerpunkte  $\sum (g_\lambda \cap H)$  auf einer  $K$ -Hyperebene.



Der Satz wurde von Newton 1710 für den Schnitt kubischer Kurven in  $\mathbb{R}^2$  mit einer Schar paralleler Geraden ausgesprochen [N]. In diesem Fall liegen die Schwerpunkte auf einer Geraden. Solche Geraden nennt Newton „Durchmesser“ der Kurve in Analogie zu den Durchmessern von Kreisen.

Die Formeln (3) und (5) zeigen

**2.2 Satz.** *Die durchschnittliche Steigung einer Hyperfläche in den Schnittpunkten mit einer Geraden (bezogen auf eine zu der Geraden transversale Hyperebene) ändert sich bei einer Parallelverschiebung der Geraden nicht.*



Im Falle des Schnitts einer reellen ebenen Kurve  $f(X, Y) = 0$  mit der  $Y$ -Achse ist  $\frac{\partial \varphi_k}{\partial X}(0) = \varphi'_k(0) = \tan \gamma_k$  die übliche Steigung der Kurve im Punkt  $P_k$ , d. h. der Tangens des orientierten Winkels  $\gamma_k$  mit einer Parallelen zur  $X$ -Achse durch  $P_k$ .

**2.3 Korollar.**  $\sum_{k=1}^d \tan \gamma_k$  ist unabhängig von der Wahl einer Parallelen zur  $Y$ -Achse.

Dies ist ein Spezialfall eines Satzes von Humbert (1885). Der eigentliche Satz von Humbert bezieht sich auf den Schnitt zweier beliebiger ebener algebraischer Kurven (s. 4.3).

In der Situation der Formel (1) sei nun  $H_{\varphi_k} := \left[ \frac{\partial^2 \varphi_k}{\partial X_i \partial X_j} \right]_{i,j=1, \dots, n-1}$  die Hessematrix der Potenzreihe  $\varphi_k$ . Bekanntlich beschreibt  $H_{\varphi_k}(0)$  im Reellen das Krümmungsverhalten von  $H$  in  $P_k$ . Aus (4) ergibt sich insbesondere

**2.4 Satz.**  $\sum_{k=1}^d H_{\varphi_k}(0) = 0.$

Für eine reelle ebene Kurve  $C : f(X, Y) = 0$  lautet diese Relation

$$\sum_{k=1}^d \varphi_k''(0) = 0$$

und nach einer Formel der elementaren Differentialgeometrie gilt

(6)  $\varphi_k''(0) = \frac{\kappa_{P_k}(C)}{\cos^3 \gamma_k}$

wobei  $\kappa_{P_k}(C)$  die Krümmung von  $C$  in  $P_k$  ist und  $\gamma_k$  der (orientierte) Winkel zwischen der Kurve und einer Parallelen zur  $X$ -Achse durch  $P_k$ .

Man erhält somit

**2.5 Formel von Reiss (1837)**

$$\sum_{k=1}^d \frac{\kappa_{P_k}(C)}{\cos^3 \gamma_k} = 0.$$

Satz 2.4 (wie im Spezialfall auch 2.5) zeigt, daß das Krümmungsverhalten einer Hyperfläche in einen Punkt  $P$  von dem in den übrigen Schnittpunkten mit einer Geraden durch  $P$  abhängt. Sind z. B. zwei Schnittpunkte einer Geraden mit einer ebenen kubischen Kurve Wendepunkte der Kurve, so ist es auch der dritte.

Wir betrachten nun das Problem, eine Hyperfläche vom Grad  $d$  zu konstruieren, welche die  $X_n$ -Achse in  $d$  verschiedenen Punkten  $P_k = (0, \dots, 0, p_k)$  ( $k = 1, \dots, d$ ) schneidet und deren „quadratische Approximationen“ in den  $P_k$  vorgeschrieben sind. Hierfür gilt

**2.6 Satz.** Sei  $\text{Char } K \neq 2$  und seien Polynome  $\psi_k \in K[X_1, \dots, X_{n-1}]$  mit  $\deg \psi_k \leq 2$  und  $\psi_k(0) = p_k$  ( $k = 1, \dots, d$ ) gegeben. Genau dann existiert ein Polynom  $f \in K[X_1, \dots, X_n]$  vom Grad  $d$  mit

(7)  $f(X_1, \dots, X_{n-1}, \psi_k(X_1, \dots, X_{n-1})) \equiv 0 \pmod{(X_1, \dots, X_{n-1})^3} \quad (k = 1, \dots, d)$

wenn

$$(8) \quad \sum_{k=1}^d H_{\psi_k}(0) = 0$$

Beweis: Die Formeln (7) implizieren

- a)  $f(0, \psi_k(0)) = 0$  ( $k = 1, \dots, d$ )  
 b)  $f_{X_r}(0, \psi_k(0)) + f_{X_n}(0, \psi_k(0)) \cdot (\psi_k)_{X_r}(0) = 0$  ( $k = 1, \dots, d; r = 1, \dots, n-1$ )  
 c)  $f_{X_r X_s} + f_{X_r X_n} \cdot (\psi_k)_{X_s} + f_{X_s X_n} \cdot (\psi_k)_{X_r} + f_{X_n X_n} \cdot (\psi_k)_{X_r} \cdot (\psi_k)_{X_s} + f_{X_n} \cdot (\psi_k)_{X_r X_s} = 0$   
 ( $r, s = 1, \dots, n-1$ ), wobei auch in c) alle Variablen  $= 0$  zu setzen sind.

Hierdurch sind die  $\psi_k$  eindeutig bestimmt (Char  $K \neq 2$ ). Existiert  $f$  mit den im Satz gewünschten Eigenschaften und sind  $\varphi_1, \dots, \varphi_d$  die früher verwendeten Potenzreihen, so ist  $\psi_k$  das Polynom, das man erhält, wenn man  $\varphi_k$  nach den quadratischen Termen abbricht. Nach 2.4 gilt dann (8).

Um umgekehrt  $f$  zu konstruieren, macht man den Ansatz

$$f = \sum_{\substack{v_1 + \dots + v_n \leq d \\ v_1 + \dots + v_{n-1} \leq 2}} u_{v_1 \dots v_n} X_1^{v_1} \cdots X_n^{v_n}$$

mit unbestimmten Koeffizienten  $u_{v_1 \dots v_n}$ . Die obigen Bedingungen a)-c) liefern  $n \cdot d + \binom{n}{2} d$  homogene lineare Gleichungen für die  $d \cdot n + (d-1) \binom{n}{2} + 1$  Unbekannten  $u_{v_1 \dots v_n}$ . Läßt man in c) die  $\binom{n}{2}$  Gleichungen mit  $k = d$  und  $r, s = 1, \dots, n-1$  zunächst weg, so hat das Restsystem eine nichttriviale Lösung  $f$ . Es sind dann die Relationen (7) jedenfalls für  $\psi_1, \dots, \psi_{d-1}$  erfüllt.

Sind  $\varphi_1, \dots, \varphi_d$  die  $f$  wie früher zugeordneten Potenzreihen, so gilt  $\psi_k \equiv \varphi_k \pmod{(X_1, \dots, X_{n-1})^3}$  für  $k = 1, \dots, d-1$  sowie  $\psi_d(0) = \varphi_d(0)$ . Aus b) folgt  $(\psi_d)_{X_r}(0) = (\varphi_d)_{X_r}(0)$  ( $r = 1, \dots, n-1$ ). Die Relation (8) gilt für die  $\varphi_k$  wie (nach Voraussetzung) für  $\psi_k$ . Aus ihr ergibt sich  $(\psi_d)_{X_r X_s}(0) = (\varphi_d)_{X_r X_s}(0)$ , ( $r, s = 1, \dots, n-1$ ), somit  $\psi_d \equiv \varphi_d \pmod{(X_1, \dots, X_{n-1})^3}$  und (7) ist für  $k = 1, \dots, d$  erfüllt, q.e.d.

Es stellt sich die Frage, ob die Aussagen dieses Abschnitts Analoga besitzen im Fall des Schnitts von Hyperflächen mit beliebigen algebraischen Kurven (anstelle von Geraden). Der Residuensatz wird zeigen, daß dies der Fall ist. Er übernimmt im allgemeinen Fall die Rolle der Formel (1).

Die Sätze dieses Abschnitts lassen sich für den reellen Grundkörper ohne weiteres in einer Analysis-II-Vorlesung beweisen. Als wesentliches Hilfsmittel hat man den Hauptsatz für implizite Funktionen in seiner üblichen Form an Stelle der hier verwendeten algebraischen Version zu benutzen.

### 3 Verallgemeinerung des Satzes von Newton

Unter den Voraussetzungen von Abschnitt 1 sei  $P = (a_1, \dots, a_n) \in \mathbb{A}_K^n$  und es bezeichne  $\mathcal{O}_P$  den lokalen Ring von  $P$  in  $\mathbb{A}_K^n$ . Ferner sei  $\mu_P(f_1, \dots, f_n)$  die Schnittmultiplizität der Hyperflächen  $f_i = 0$  in  $P$ . Für  $\omega := df_1 \cdots df_n = \partial(f_1, \dots, f_n)$  hat man die Residuenformel (vgl. etwa

$$\text{Res}_P \begin{bmatrix} \omega \\ f \end{bmatrix} = \tau_P^{\bar{J}}(\bar{J}) = (\dim_K \mathcal{O}_P/(f)) \cdot 1_K = \mu_P(f_1, \dots, f_n) \cdot 1_K$$

$$\text{Res}_O \begin{bmatrix} G\omega \\ Gf \end{bmatrix} = \dim_K(K[X_1, \dots, X_n]/(Gf)) \cdot 1_K = \left( \prod_{i=1}^n \frac{\deg f_i}{\alpha_i} \right) \cdot 1_K$$

Der Residuensatz liefert in diesem Fall die Formel

$$(9) \quad \sum_P \mu_P(f_1, \dots, f_n) \equiv \prod_{i=1}^n \frac{\deg f_i}{\alpha_i} \pmod{\text{Char } K}$$

also eine (für  $\text{Char } K > 0$  abgeschwächte) Form der Bézoutschen Formel im quasihomogenen Fall.

Im folgenden sei  $N := \prod_{i=1}^n \frac{\deg f_i}{\alpha_i}$  die Zahl der Punkte des Schnittschemas  $\mathcal{V}(f)$ , mit ihren Vielfachheiten gezählt. Falls  $\text{Char } K$  kein Teiler von  $N$  ist, was wir jetzt voraussetzen wollen, sei analog wie in Abschnitt 2

$$\sum (f) := \frac{1}{N} \sum_{P \in \mathcal{V}(f)} \mu_P(f) \cdot P$$

den Schwerpunkt des Schnittschemas. Aus

mit (quasi-)homogenen Polynomen  $f_{jk}$  vom Grad  $k$ , wobei  $d_j := \deg f_j$  ist und  $f_{jd_j} = Gf_j$ , so hat man nach Euler

$$\sum_{i=1}^n \alpha_i X_i (f_j)_{X_i} - d_j f_j = -f_{jd_j-1} - 2f_{jd_j-2} - \dots - d_j f_{j0}$$

und daher

$$\alpha_i X_i \frac{\partial (f_1, \dots, f_n)}{\partial (X_1, \dots, X_n)} = \begin{vmatrix} (f_1)_{X_1} & \dots & \overbrace{d_1 f_1 - f_{1,d_1-1} - \varphi_1}^{i\text{-te Spalte}} & \dots & (f_1)_{X_n} \\ \vdots & & \vdots & & \vdots \\ (f_n)_{X_1} & \dots & d_n f_n - f_{n,d_n-1} - \varphi_n & \dots & (f_n)_{X_n} \end{vmatrix}$$

mit Polynomen  $\varphi_j$  vom Grad  $\leq d_j - 2$  ( $j = 1, \dots, n$ ). Aus dem Residuensatz ergibt sich, falls  $\text{Char } K$  kein  $\alpha_i$  teilt

$$\sum_P \frac{1}{\alpha_i} \cdot \text{Res}_P \begin{bmatrix} \alpha_i X_i df \\ f \end{bmatrix} = \frac{1}{\alpha_i} \text{Res}_O \begin{bmatrix} Gh_i dX \\ Gf \end{bmatrix}$$

mit  $Gh_i := \begin{vmatrix} (Gf_1)_{X_1} & \dots & -f_{1,d_1-1} & \dots & (Gf_1)_{X_n} \\ \vdots & & \vdots & & \vdots \\ (Gf_n)_{X_1} & \dots & -f_{n,d_n-1} & \dots & (Gf_n)_{X_n} \end{vmatrix}$

und somit

$$(11) \quad \sum (f) = \frac{1}{N} \cdot \left( \frac{1}{\alpha_1} \text{Res}_O \begin{bmatrix} Gh_1 dX \\ Gf \end{bmatrix}, \dots, \frac{1}{\alpha_n} \text{Res}_O \begin{bmatrix} Gh_n dX \\ Gf \end{bmatrix} \right)$$

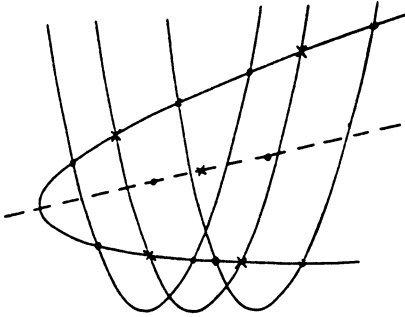
Insbesondere ist gezeigt:

**3.1 Satz.** *Unter den obigen Voraussetzungen hängt  $\sum (f)$  nur ab von den Gewichten  $\alpha_j$  ( $j = 1, \dots, n$ ) und den Formen höchsten und zweithöchsten Grades der Polynome  $f_1, \dots, f_n$ .*

Die folgenden Ausführungen beziehen sich auf die Standardgraduierung, es ist also insbesondere vorausgesetzt, daß die Hyperflächen  $f_i = 0$  keine gemeinsamen unendlich fernen Punkte besitzen. Wir unterwerfen  $H_1 : f_1 = 0$  den Translationen  $t_\lambda$  ( $\lambda \in K$ ) mit

$$t_\lambda(x_1, \dots, x_n) = (x_1, \dots, x_n) + \lambda(y_1, \dots, y_n)$$

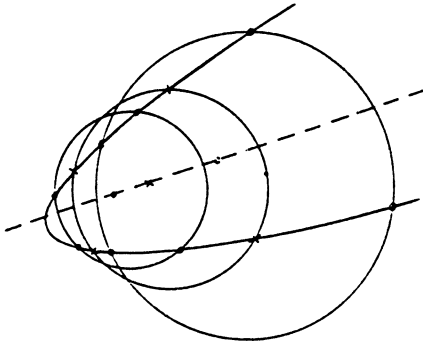
mit einem festen Vektor  $(y_1, \dots, y_n) \in K^n$  und lassen die übrigen Hyperflächen  $H_i : f_i = 0$  ( $i = 2, \dots, n$ ) fest. Sei  $\sum_\lambda$  der Schwerpunkt des Schnittschemas von  $t_\lambda(H_1)$  mit  $H_2, \dots, H_n$ . Dann kann man aus (11) leicht ableiten, daß die  $\sum_\lambda$  auf einer  $K$ -Geraden liegen. Die folgende Zeichnung illustriert diese Situation:



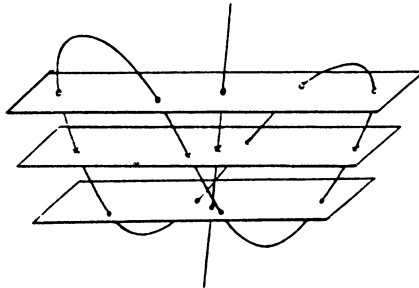
Entsprechendes gilt, wenn wir  $H_1$  den Dilatationen  $\delta_\lambda$  mit

$$\delta_\lambda(x_1, \dots, x_n) = \lambda(x_1, \dots, x_n) \quad (\lambda \in K)$$

unterwerfen und  $H_2, \dots, H_n$  festlassen (vgl. [K<sub>2</sub>]).



Im Fall, daß  $H_1$  eine Schar paralleler Hyperebenen durchläuft, kann man die Gerade der Schwerpunkte der Schnittschemata in der Anlehnung an Newton als einen „Durchmesser“ der Kurve  $C := H_2 \cap \dots \cap H_n$  bezeichnen.



#### 4 Transversale vollständige Durchschnitte

Wie oben bezeichne  $J := \frac{\partial(f_1, \dots, f_n)}{\partial(X_1, \dots, X_n)}$  die Jacobi-Determinante des Systems  $f$ . Wir betrachten einen Punkt  $P \in \mathbb{A}_K^n$ , in dem sich die Hyperflächen  $f_i = 0$  transversal schneiden, d. h. für den  $\mu_P(f) = 1$  ist. Äquivalent hierzu ist, daß  $J(P) \neq 0$

ist, oder auch, wenn nach einer Koordinatenverschiebung  $P=0$  angenommen wird, daß für die Potenzreihenalgebra gilt

$$K[[X_1, \dots, X_n]] = K[[f_1, \dots, f_n]]$$

Um für  $\varrho \in \mathbb{N}$  die Residuen

$$\text{Res}_P \left[ \begin{array}{c} h dX_1 \cdots dX_n \\ f_1, \dots, f_{n-1}, f_n^{\varrho+1} \end{array} \right] = \text{Res}_P \left[ \begin{array}{c} \frac{h}{J} df_1 \cdots df_n \\ f_1, \dots, f_{n-1}, f_n^{\varrho+1} \end{array} \right]$$

zu berechnen, beachten wir, daß mit der Restklasse  $\bar{f}_n$  von  $f_n$

$$K[[X_1, \dots, X_n]]/(f_1, \dots, f_{n-1}, f_n^{\varrho+1}) = K \oplus K\bar{f}_n \oplus \cdots \oplus K\bar{f}_n^{\varrho}$$

gilt. Schreibt man

$$\frac{h}{J} \equiv a_0 + a_1 \bar{f}_n + \cdots + a_{\varrho} \bar{f}_n^{\varrho} \pmod{(f_1, \dots, f_{n-1}, f_n^{\varrho+1})}$$

mit  $a_0, \dots, a_{\varrho} \in K$  und setzt  $g := \frac{h}{J}$ , so ergibt sich mittels der Definition des Residuums durch die Spur  $\tau_{\varrho}^{\chi}$ , (falls  $\text{Char } K \neq \varrho!$ )

$$\begin{aligned} a_{\varrho} &= \text{Res}_P \left[ \begin{array}{c} h dX_1 \cdots dX_n \\ f_1, \dots, f_{n-1}, f_n^{\varrho+1} \end{array} \right] \equiv \frac{1}{\varrho!} \frac{\partial^{\varrho} g}{\partial f_n^{\varrho}} \pmod{(f_1, \dots, f_n)} \\ &\equiv \frac{1}{\varrho!} \frac{\partial}{\partial f_n} \left( \frac{\partial^{\varrho-1} g}{\partial f_n^{\varrho-1}} \right) \pmod{(f_1, \dots, f_n)} \end{aligned}$$

Allgemein folgt aus der Kettenregel

$$\frac{\partial g}{\partial f_n} = J^{-1} \cdot \frac{\partial(f_1, \dots, f_{n-1}, g)}{\partial(X_1, \dots, X_n)}$$

Wir setzen nun  $R_0 := \frac{h}{J}$  und für  $\varrho > 0$

$$R_{\varrho} := \frac{1}{\varrho} \cdot J^{-1} \cdot \frac{\partial(f_1, \dots, f_{n-1}, R_{\varrho-1})}{\partial(X_1, \dots, X_n)}$$

Dann gilt für alle  $\varrho \in \mathbb{N}$  mit  $\text{Char } K \neq \varrho!$

$$(13) \quad \text{Res}_P \left[ \begin{array}{c} h dX_1 \cdots dX_n \\ f_1, \dots, f_{n-1}, f_n^{\varrho+1} \end{array} \right] = R_{\varrho}(P)$$

Speziell für  $\varrho=0$  hat man

$$\text{Res}_P \left[ \begin{array}{c} h dX_1 \cdots dX_n \\ f_1, \dots, f_n \end{array} \right] = \frac{h(P)}{J(P)}$$



und für  $\varrho = 1$

$$\begin{aligned} \operatorname{Res}_P \left[ \frac{hdX_1 \cdots dX_n}{f_1, \dots, f_{n-1}, f_n^2} \right] &= J(P)^{-1} \cdot \frac{\partial \left( f_1, \dots, f_{n-1}, \frac{h}{J} \right)}{\partial (X_1, \dots, X_n)} (P) \\ &= J(P)^{-3} \left( J(P) \frac{\partial (f_1, \dots, f_{n-1}, h)}{\partial (X_1, \dots, X_n)} (P) - h(P) \frac{\partial (f_1, \dots, f_{n-1}, J)}{\partial (X_1, \dots, X_n)} (P) \right) \end{aligned}$$

In diesen Fällen liefert der Residuensatz

**4.1 Satz. a)** *Ist  $\deg h \leq \sum_{i=1}^n (\deg f_i - \alpha_i)$ , so gilt*

$$\sum_{P \in \mathcal{V}(f)} \frac{h(P)}{J(P)} = \operatorname{Res}_O \left[ \begin{array}{c} Gh dX_1 \cdots dX_n \\ Gf_1, \dots, Gf_n \end{array} \right]$$

*Ist  $\deg h < \sum_{i=1}^n (\deg f_i - \alpha_i)$ , so verschwindet die Summe (Formel von Jacobi [J], 1835).*

**b)** *Ist  $\deg h \leq \sum_{i=1}^{n-1} (\deg f_i - \alpha_i) + 2 \deg f_n - \alpha_n$ , so gilt (falls  $\operatorname{Char} K \neq 2$ )*

$$\sum_{P \in \mathcal{V}(f)} J(P)^{-1} \cdot \frac{\partial \left( f_1, \dots, f_{n-1}, \frac{h}{J} \right)}{\partial (X_1, \dots, X_n)} (P) = \operatorname{Res}_O \left[ \begin{array}{c} Gh dX_1 \cdots dX_n \\ Gf_1, \dots, Gf_{n-1}, (Gf_n)^2 \end{array} \right]$$

*Ist  $\deg h < \sum_{i=1}^{n-1} (\deg f_i - \alpha_i) + 2 \deg f_n - \alpha_n$ , so verschwindet die Summe (Segre [S<sub>2</sub>], 1947).*

Wir wollen diesen Satz auf den Schnitt der Kurve  $C: f_1 = \dots = f_{n-1} = 0$  mit der Hyperfläche  $H: f_n = 0$  anwenden. Sei jetzt  $K[X_1, \dots, X_n]$  mit der Standardgraduierung versehen. Es werden folgende Bezeichnungen verwendet:

$$J_i := \det (\operatorname{grad} f_1, \dots, \operatorname{grad} f_{n-1}, e_i) \quad (i = 1, \dots, n)$$

mit  $e_i := (0, \dots, \underset{i}{1}, \dots, 0)$ ,

$$T := (J_1, \dots, J_n)$$

$$T_i := (0, \dots, (f_n)_{X_n}, \dots, 0, -(f_n)_{X_i}) \quad (i = 1, \dots, n-1)$$

$$h_i := \det (\operatorname{grad} f_1, \dots, \operatorname{grad} f_{n-1}, T_i) \quad (i = 1, \dots, n-1)$$

Ferner bezeichne  $\langle \cdot, \cdot \rangle$  das Standardskalarprodukt auf  $K^n$ .

Wir können  $\operatorname{grad} f_n$  als „Normalenfeld“ auf  $H$  ansehen, die  $T_i$  als „tangente Vektorfelder“ auf  $H$  und  $T$  als ein „tangentes Vektorfeld“ auf  $C$ . Für  $P \in \mathcal{V}(f) = H \cap C$  ist

$$T_P = (J_1(P), \dots, J_n(P))$$

ein Tangentenvektor von  $C$  mit  $\langle J(P)^{-1} \cdot T_P, (\operatorname{grad} f_n)(P) \rangle = 1$ .

Wenn wir 4.1 a) mit  $h = h_i$  anwenden, erhalten wir

**4.2 Satz.** Für  $i = 1, \dots, n - 1$  gilt: Die Summe

$$\sum_P J(P)^{-1} \langle T_i, T \rangle|_P = \text{Res}_O \left[ \begin{array}{c} Gh_i dX_1 \cdots dX_n \\ Gf_1, \dots, Gf_n \end{array} \right]$$

hängt nur von den Gradformen  $Gf_j$  ( $j = 1, \dots, n$ ) ab.

Beweis: Man hat nur noch zu beachten, das entweder  $\deg h_i < \sum_{j=1}^n \deg f_j - n$  gilt oder

$$Gh_i = \begin{vmatrix} 0, & \dots, & (Gf_1)_{X_n}, & \dots, & -(Gf_1)_{X_i} \\ (Gf_2)_{X_1}, & \dots, & (Gf_2)_{X_i}, & \dots, & (Gf_2)_{X_n} \\ \vdots & & \vdots & & \vdots \\ (Gf_n)_{X_1}, & \dots, & (Gf_n)_{X_i}, & \dots, & (Gf_n)_{X_n} \end{vmatrix}$$

Im Fall  $n = 2$  setzen wir  $f_1 =: f, f_2 =: g$ . Dann ist  $T = (f_{X_2}, -f_{X_1})$ ,  $T_1 = (g_{X_2}, -g_{X_1})$  und

$$J^{-1}(P) \cdot \langle T_1, T \rangle|_P = \frac{f_{X_1}g_{X_1} + f_{X_2}g_{X_2}}{f_{X_1}g_{X_2} - f_{X_2}g_{X_1}} \Big|_P$$

Wir bezeichnen diese Schnittinvariante der Kurven  $C_1 : f = 0, C_2 : g = 0$  mit  $a_P(C_1, C_2)$ . Ist im Reellen  $\alpha_P$  der orientierte Winkel zwischen den Tangenten an die beiden Kurven im Punkt  $P \in C_1 \cap C_2$ , so ist

$$a_P(C_1, C_2) = \frac{\cos \alpha_P}{\sin \alpha_P} = \cotan \alpha_P$$

Aus 4.2 erhält man

$$(14) \quad \sum_P a_P(C_1, C_2) = \text{Res}_O \left[ \begin{array}{c} (Gf)_{X_1}(Gg)_{X_1} + (Gf)_{X_2}(Gg)_{X_2} dX_1 dX_2 \\ Gf, Gg \end{array} \right]$$

Die Polynome  $Gf$  und  $Gg$  zerfallen in homogene Linearfaktoren  $bX_1 - aX_2$ , welche den unendlich fernen Punkten  $\langle 0, a, b \rangle$  von  $C_1$  bzw.  $C_2$  entsprechen. Die Gerade  $bX_1 - aX_2 = 0$  geht durch den affinen Ursprung und hat den unendlich fernen Punkt  $\langle 0, a, b \rangle$ . Seien  $t_1, \dots, t_r$  diese Geraden für  $C_1$  ( $r := \deg f$ ) und  $t'_1, \dots, t'_s$  die entsprechenden für  $C_2$  ( $s := \deg g$ ). Da  $C_1$  und  $C_2$  keine unendlich fernen Punkte gemeinsam haben, ist  $t_i \neq t'_j$  für  $i = 1, \dots, r, j = 1, \dots, s$ . Wendet man die Residuenformel (vgl. [SS2], 4.3)

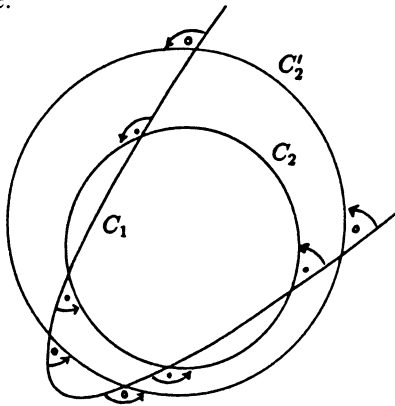
$$\begin{aligned} & \text{Res}_O \left[ \begin{array}{c} ((\varphi_1 \varphi_2)_{X_1} \psi_{X_1} + (\varphi_1 \varphi_2)_{X_2} \psi_{X_2}) dX_1 dX_2 \\ \varphi_1 \varphi_2, \psi \end{array} \right] \\ &= \sum_{i=1}^2 \text{Res}_O \left[ \begin{array}{c} (\varphi_i)_{X_1} \psi_{X_1} + (\varphi_i)_{X_2} (\psi)_{X_2} dX_1 dX_2 \\ \varphi_i, \psi \end{array} \right] \end{aligned}$$

mehrfach an, so ergibt sich aus (14)

**4.3 Satz von Humbert (1885)**

$$\sum_P a_P(C_1, C_2) = \sum_{\substack{j=1, \dots, r \\ j=1, \dots, s}} a_O(t_i, t'_j)$$

Insbesondere ändert sich die linke Seite (im Reellen: die Summe der Kotangenten der orientierten Schnittwinkel) nicht bei Parallelverschiebung einer der beiden Kurven oder, wenn man eine der Kurven einer Dilatation unterwirft. Beispielsweise erhält man immer dieselbe Summe, wenn  $C_1$  eine feste Kurve ist und  $C_2$  ein beliebiger Kreis, denn alle Kreise haben die gleichen unendlich fernen Punkte.



Aus 4.1 b) erhält man mit  $h = X_i J$  oder aus 4.1 a) mit  $h = J_i$  wegen

$$\text{Res}_P \begin{bmatrix} X_i dX_1 \cdots dX_n \\ f_1, \dots, f_{n-1}, f_n^2 \end{bmatrix} = J^{-1}(P) \frac{\partial(f_1, \dots, f_{n-1}, X_i)}{\partial(X_1, \dots, X_n)}(P) = \frac{J_i(P)}{J(P)}$$

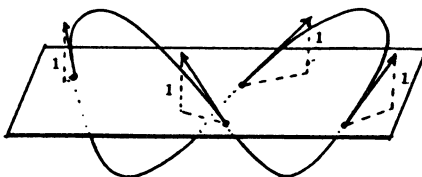
das folgende höherdimensionale Analogon des Satzes von Humbert, auf das mich Herr R. Hübl hingewiesen hat.

**4.4 Satz.** a) *Ist  $H$  keine Hyperebene, so gilt*

$$\sum_P J(P)^{-1} \cdot T_P = 0$$

b) *Ist  $H$  eine Hyperebene, so hängt  $\sum_P J(P)^{-1} \cdot T_P$  nur von den unendlich fernen Punkten der Hyperflächen  $f_j = 0$  ab ( $j = 1, \dots, n$ ).*

Insbesondere ändert sich im zweiten Fall die Summe bei einer Parallelverschiebung der Hyperebene nicht. Diese Situation ist im folgenden Bild skizziert. Eine zu 4.4 analoge Aussage im quasihomogenen Fall ist natürlich auch richtig.



Im Fall  $n=2$ ,  $f_1=f$ ,  $f_2=:g$  hat Segre [S<sub>2</sub>] die Formel 4.1b) mit  $h := [g \cdot g_{X_2 X_2} - g_{X_2}^2] \cdot f_{X_2}$  angewendet. Die Berechnung der Residuen liefert in diesem Fall die Gleichung

$$\sum_P \frac{1}{\left(\frac{f_{X_1}}{f_{X_2}} - \frac{g_{X_1}}{g_{X_2}}\right)^3} \left[ \frac{g_{X_2}^2 g_{X_1 X_1} - 2g_{X_1} g_{X_2} g_{X_1 X_2} + g_{X_1}^2 g_{X_2 X_2}}{g_{X_2}^2} - \frac{f_{X_2}^2 f_{X_1 X_1} - 2f_{X_1} f_{X_2} f_{X_1 X_2} + f_{X_1}^2 f_{X_2 X_2}}{f_{X_2}^2} \right]_P = 0$$

Das Koordinatensystem sei so gewählt, daß keine Tangente der Kurven  $C_1 : f=0$  und  $C_2 : g=0$  in den Schnittpunkten von  $C_1$  und  $C_2$  parallel zur  $X_2$ -Achse ist. Sind  $P_i = (a_i, b_i)$  ( $i = 1, \dots, N$ ) diese Schnittpunkte, so kann man Polynome  $\varphi_i, \psi_i \in K[X_1]$  vom Grad  $\leq 2$  finden mit  $\varphi_i(a_i) = \psi_i(a_i) = b_i$  und

$$f(X_1, \varphi_i(X_1)) \equiv g(X_1, \psi_i(X_1)) \equiv 0 \pmod{(X_1 - a_i)^3}$$

für  $i = 1, \dots, N$ . Die obige Formel läßt sich dann umschreiben und man erhält

$$(15) \quad \sum_{i=1}^N \frac{\psi_i''(a_i) - \varphi_i''(a_i)}{(\psi_i'(a_i) - \varphi_i'(a_i))^3} = 0$$

Im Reellen, wenn auch alle  $P_i$  reelle Koordinaten haben, lassen sich hieraus Relationen zwischen den Krümmungen  $\kappa_{P_i}(C_j)$  der Kurven in den  $P_i$  herleiten. Sind  $\alpha_i$  (bzw.  $\beta_i$ ) die orientierten Winkel zwischen  $C_1$  (bzw.  $C_2$ ) mit einer Parallelen zur  $X_1$ -Achse durch  $P_i$ , dann gilt

**4.6 Verallgemeinerte Reiss-Relationen** (nach Segre [S<sub>2</sub>]). Für  $r = 0, 1, 2, 3$  ist

$$\sum_{i=1}^N \frac{\kappa_{P_i}(C_1) \cdot \cos^r \alpha_i \cdot \sin^{3-r} \alpha_i - \kappa_{P_i}(C_2) \cdot \cos^r \beta_i \cdot \sin^{3-r} \beta_i}{\sin^3(\alpha_i - \beta_i)} = 0$$

weil: Die Formel für  $r = 2$  ergibt sich aus (15), wenn man die ersten

### 5 Der Satz von Humbert für die 2-Sphäre

Sei  $\text{Char } K \neq 2$ . Unter der 2-Sphäre verstehen wir das affine Schema

$$S_K^2 := \text{Spec } K[X, Y, Z]/(X^2 + Y^2 + Z^2 - 1)$$

Setze  $s := X^2 + Y^2 + Z^2 - 1$ . Ist  $f \in K[X, Y, Z]$  nicht konstant und  $s \nmid f$ , so bezeichnen wir die Kurve

$$\text{Spec } K[X, Y, Z]/(s, f)$$

wieder mit  $f$ .

Ist für den Moment  $K$  ein beliebiger Körper der  $\text{Char} \neq 2$ , so ist  $K[X, Y, Z]/(s)$  genau dann faktoriell, wenn  $\sqrt{-1} \notin K$  (Samuel [S], Prop. 9), also etwa für  $K = \mathbb{R}$ . In diesem Fall sind die über  $K$  definierten Kurven auf  $S^2$  in der Tat durch die nicht konstanten Polynome  $f \in K[X, Y, Z]$  mit  $s \nmid f$  gegeben.

Wieder für algebraisch abgeschlossenes  $K$  bezeichne für einen abgeschlossenen Punkt  $P = (x, y, z) \in S_K^2$  der Vektor  $N := (x, y, z)$  die „Einheitsnormale“ von  $S_K^2$  und  $\nabla f := (f_x, f_y, f_z)$  den „Gradienten“ von  $f$  im Punkt  $P$ . Ist die Kurve  $f$  im Punkte  $P$  glatt, so ist

$$T_f := N \times \nabla f = (yf_z - zf_y, zf_x - xf_z, xf_y - yf_x)$$

eine Tangente  $\neq 0$  an  $f$  in  $P$ .

Sei  $g$  eine weitere Kurve auf  $S_K^2$ , welche  $f$  in  $P$  transversal schneidet, d. h. es ist auch  $g$  glatt in  $P$  und  $T_f, T_g$  sind linear unabhängig. Setze

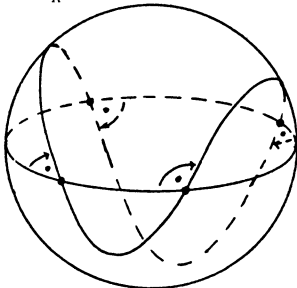
$$a_P(f, g) := \frac{\langle T_f, T_g \rangle}{\det(N, T_f, T_g)}$$

Im Reellen ist  $a_P(f, g)$  gerade wieder der Kotangens des orientierten Winkels zwischen  $f$  und  $g$  in  $P$ . Wir setzen  $a_P(f, g) = 0$ , wenn  $P$  kein Schnittpunkt von  $f$  und  $g$  ist.

Der folgende Satz wurde von Segre [S<sub>1</sub>], [S<sub>3</sub>] für reelle Kurven auf der 2-Sphäre mit einer anderen Methode bewiesen.

**5.1 Satz von Humbert-Segre.** *Die Kurven  $f$  und  $g$  mögen sich überall transversal schneiden und die Flächen  $f=0, g=0$  und  $S_K^2$  aus  $\mathbb{A}_K^3$  mögen keine unendlich fernen Punkte gemeinsam haben. Ferner seien  $\text{deg } f$  und  $\text{deg } g$  in  $K$  invertierbar (etwa  $\text{Char } K = 0$ ). Dann gilt*

$$\sum_{P \in S_K^2} a_P(f, g) = 0$$



Beweis: Es ist

$$\begin{aligned} \langle T_f, T_g \rangle &= \langle N \times \nabla f, N \times \nabla g \rangle = \langle N, N \rangle \cdot \langle \nabla f, \nabla g \rangle - \langle N, \nabla f \rangle \cdot \langle N, \nabla g \rangle \\ &= f_x g_x + f_y g_y + f_z g_z - (x f_x + y f_y + z f_z)(x g_x + y g_y + z g_z) \end{aligned}$$

und  $\det(N, T_f, T_g) = \det(N, \nabla f, \nabla g) = \frac{1}{2} J$

wobei  $J$  die Jacobideterminante des Systems  $(f, g, s)$  ist. Daher gilt

$$a_P(f, g) = 2 \operatorname{Res}_P \left[ \begin{array}{c} \omega \\ f, g, s \end{array} \right]$$

mit  $\omega := (f_x g_x + f_y g_y + f_z g_z - (X f_x + Y f_y + Z f_z)(X g_x + Y g_y + Z g_z)) dX dY dZ$

Nach Euler ist

$$\varphi := X f_x + Y f_y + Z f_z - \frac{1}{\deg f} \cdot f$$

ein Polynom mit  $\deg \varphi < \deg f$  und für

$$\psi := X g_x + Y g_y + Z f_z - \frac{1}{\deg g} \cdot g$$

gilt entsprechend  $\deg \psi < \deg g$ . Es folgt

$$a_P(f, g) = 2 \operatorname{Res}_P \left[ \begin{array}{c} (f_x g_x + f_y g_y + f_z g_z - \varphi \psi) dX dY dZ \\ f, g, s \end{array} \right]$$

wobei das Polynom im Zähler vom Grad  $\leq \deg f + \deg g - 2 = \deg f + \deg g + \deg s - 4$  ist. Die Anwendung des Residuensatzes liefert die Behauptung.

## 6 Weitere klassische Sätze, die aus der Formel von Jacobi folgen

Wir begeben uns noch einmal in die Situation von Satz 4.1a). Wie früher sei  $N := \prod_{i=1}^n \frac{\deg f_i}{\alpha_i}$ . Ist  $\deg h < \sum_{i=1}^n (\deg f_i - \alpha_i)$ , so gilt nach Jacobi  $\sum_{P \in \mathcal{V}(f)} \frac{h(P)}{J(P)} = 0$  und es folgt sofort eine quasihomogene Version des Satzes von Cayley-Bacharach (1886):

**6.1 Satz.** *Enthält eine Hyperfläche  $h=0$  mit  $\deg h < \sum_{i=1}^n (\deg f_i - \alpha_i)$  alle bis auf einen der  $N$  Schnittpunkte der Hyperflächen  $f_i=0$ , so enthält sie alle  $N$  Schnittpunkte.*

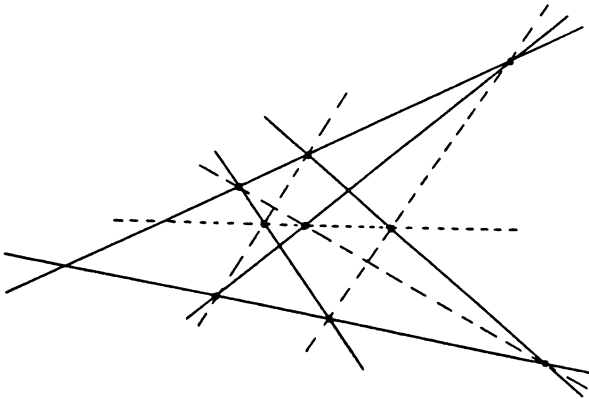
Ein Spezialfall ist die bekannte Aussage (Euler-Cramer-Paradox 1748): Wenn sich zwei ebene kubische Kurven (hier bzgl. der Standardgraduierung) in genau 9 Punkten schneiden und eine weitere kubische Kurve 8 von diesen enthält, dann geht sie auch durch den neunten.

Der *Satz von Pascal* (1639) ist hiervon eine unmittelbare Konsequenz ([GH], p. 673), wie man aus dem folgenden Bild abliest.



Pascal soll aus seinem Satz über 400 Korollare hergeleitet haben, die somit auch Korollare des Residuensatzes sind. Ein Spezialfall des Satzes von Pascal ist der *Satz*

*von Pappus* (~320 n. Chr.). So läßt sich die Residuentheorie, wenn man will, bis ins Altertum zurückverfolgen.



## Literatur

- [GH] Griffiths, P.; Harris, J.: Principles of Algebraic Geometry. New York: John Wiley and Sons 1978
- [H] Humbert, G.: Application géométrique d'un théorème de Jacobi. J. Math. (4) I (1885) 347–356
- [HK] Hübl, R.; Kunz, E.: Regular Differential Forms and Duality for Projective Morphisms. J. reine angew. Math. **410** (1990) 84–108
- [HS] Hübl, R.; Sastry, P.: Regular Differential Forms and Relative Duality. Erscheint im Amer. J. Math.
- [J] Jacobi, K. G.: Theoremata nova algebraica circa systema duarum aequationem inter duas variables propositarium. J. reine angew. Math. **14** (1835) 281–288
- [K<sub>1</sub>] Kunz, E.: Kähler Differentials. Advanced Lectures in Math. Braunschweig: Vieweg 1986
- [K<sub>2</sub>] –: Verallgemeinerung eines Satzes von Newton. Sitz.-Ber. Bayer. Akad. Wiss., Math.-naturw. Klasse, 3. Abh. (1989)
- [KK] Kreuzer, M.; Kunz, E.: Traces in Strict Frobenius Algebras and Strict Complete

- [L] Lipman, J.: Residues and Traces of Differential Forms via Hochschild Homology. *Contemp. Math.* **61** (1987)
- [N] Newton, I.: Curves. In: *Lexicon Technicum*, Vol. 2. London 1710. Siehe auch: *The Mathematical Works of Isaac Newton*, New York – London 1967
- [RD] Hartshorne, R.: Residues and Duality. *Lect. Notes in Math.* **20** (1966)
- [S] Samuel, P.: Sur les anneaux factoriels. *Bull. Soc. math. France* **89** (1961) 155–173
- [S<sub>1</sub>] Segre, B.: Una teorema sopra le superficie algebriche con due fasci unisecanti, ed una relazione fra gli angoli sotto cui si incontrano due curve algebriche tracciata su di una sfera. *Boll. Un. Mat. Ital.* **15** (1936) 169–172
- [S<sub>2</sub>] –: Sui teoremi di Bézout, Jacobi et Reiss. *Ann. di Mat.* **26** (1947) 1–26
- [S<sub>3</sub>] –: Some Properties of Differential Varieties and Transformations. With Special Reference to the Analytic and Algebraic Cases. *Ergebnisse der Math. u. ihrer Grenzgebiete*. Berlin – Göttingen – Heidelberg 1957
- [SS<sub>1</sub>] Scheja, G.; Storch, U.: Über Spurfunktionen bei vollständigen Durchschnitten. *J. reine angew. Math.* **278/279** (1975) 174–190
- [SS<sub>2</sub>] –: Residuen bei vollständigen Durchschnitten. *Math. Nachr.* **91** (1979) 157–170

Prof. Dr. Ernst Kunz  
Universität Regensburg  
Fak. f. Mathematik  
Universitätsstr. 31  
8400 Regensburg

*(Eingegangen 25. 2. 1992)*



## Buchbesprechungen

**Peckhaus, V., Hilbertprogramm und Kritische Philosophie**, Das Göttinger Modell interdisziplinärer Zusammenarbeit zwischen Mathematik und Philosophie, Göttingen: Vandenhoeck & Ruprecht 1990, 291 S., 13 Abb., kart., DM 78,-

Der vorliegende 7. Band der bemerkenswerten Monographien-Reihe „Studien zur Wissenschafts-, Sozial- und Bildungsgeschichte der Mathematik“ ist die Druckfassung der bei Chr. Thiel (Erlangen) erarbeiteten logikhistorischen Dissertation des Verfassers. David Hilbert (1862–1943) wird hier aufgrund umfassender Archivstudien (Nachlaß Hilbert, Nachlaß Nelson, ...) in seiner Rolle als Anreger, Förderer und Mitgestalter bedeutender Entwicklungen gezeigt, die man heute der Wissenschaftstheorie zuordnen würde. Sie betrafen damals vor allem das Verhältnis der Mathematiker und Naturwissenschaftler zu ihren Philosophen-Kollegen innerhalb derselben Fakultät. – Mathematiker, die bereits Einblick in die Göttinger Wechselwirkungen zwischen Husserl, Nelson, Weyl und Hilbert gewonnen haben, finden hier ein fabelhaft detailliert ausgearbeitetes Gemälde der Göttinger Gesamtsituation, in dem gerade die Einzelpersonen eingehend nach Biographie und Werk gewürdigt werden und mit ausführlichen Zitaten selbst zu Wort kommen.

Eine ausführliche Einleitung erläutert die der Arbeit zugrunde liegenden methodologischen Prinzipien. Es folgt eine Darstellung von Hilberts Grundlagenbemühungen für die Disziplinen Geometrie und Arithmetik, mit besonderer Würdigung seiner Auseinandersetzung mit Gottlob Frege (1841–1925). – Ausführlich wird sodann die Rolle von Zermelo (1871–1953) in Göttingen (1897–1910) geschildert; er erhielt 1907 auf Betreiben Hilberts einen Lehrauftrag für „mathematische Logik“ – vermutlich weltweit die erste Etablierung dieses Fachs an einer Universität. Fast die ganze zweite Hälfte des Buchs ist dem Göttinger Wirken des Philosophen Fries'scher Schule Leonard Nelson (1882–1927) gewidmet, das in den zwanziger Jahren zu einem lebendigen und fruchtbaren, gelegentlich auch kämpferischen, Gedankenaustausch zwischen Philosophie, Mathematik und Physik (u. a. Born) führte. Die Berufung Nelsons auf ein Extraordinariat (1918) wurde von Hilbert und anderen Naturwissenschaftlern mit heftigem Engagement gegen die Vertreter einer in ihren Augen verkalkten traditionellen Philosophie durchgesetzt. – Viele der Akteure auf Peckhaus' Bühne sind mir bisher höchstens dem Namen nach bekannt gewesen. Besonders gefreut haben mich die Informationen über Geometer Gerhard Hessenberg (1874–1925) und Alexander Rüstow (1885–1963), der mit einer Arbeit über das Lügner-Paradoxon 1908 in Göttingen promovierte und nach einem bewegten Leben (u. a. Emigration 1933–1949) zuletzt als Ordinarius für Wirtschafts- und Sozialwissenschaften in Heidelberg gewirkt hat. – Ich wünsche dem Buch viele Leser.

Erlangen

K. Jacobs

---

**Pour El. M. B., Richards, J. I., Computability in Analysis and Physics** (Perspectives in

---

Mathematical Logic), Berlin, u. a.: Springer-Verlag 1989, 206 S., DM 128,-

Für logisch gebildete Leser sind die Hauptergebnisse durchaus befriedigend. Diese betreffen vor allem (im logischen Sinn) berechenbar präsentierte Operatoren  $O$  in fürs Rechnen geeignet strukturierten Banachschen Räumen. Z. B. ordnet  $O$  jedem berechenbaren Element ein solches zu genau dann, wenn  $O$  beschränkt ist. Dieser Satz ersetzt oder ergänzt viele verstreute Bemerkungen und Sätzchen in der logischen Literatur, z. B. betr. berechenbare Bäume  $B$  mit (un)beschränkter Verzweigung: Hat  $B$  genau einen unendlichen

Pfad, so ist dieser (nicht) *ipso facto* berechenbar. Ähnlich befriedigende Ergebnisse betreffen die Berechenbarkeit von (Folgen von) Eigenwerten. Die behäbige Darstellung der analytischen Details ist sicher für manche der erwähnten Leser angemessen.

Ebenso behäbig ist die Darstellung formaler Eigenschaften der logischen Begriffe, insbesondere von Varianten der in der Logik üblichen Idealisierungen – kurz: von logischen Aspekten – des Rechnens. Dies soll, nach Meinung der Autoren, logisch ungebildeten Lesern nützen, erweckt aber vor allem Mißtrauen in wissenschaftlich reifen Lesern, die sich vergleichbar oberflächliche Idealisierungen überlegt haben, u. zw. wie folgt.

Jene logischen Aspekte sind oberflächlich, indem sie nur das bloße *Ausrechnen* von mathematisch bestimmten Daten betreffen; nicht z. B. deren angemessene Auswahl und andere, meistens anspruchsvollere Parameter, von welchen weitere Verfeinerungen der logischen Parameter ablenken. Auch Nichtberechenbarkeit ist oft von wissenschaftlich beschränktem Interesse, da (spätere) Beweise durch (inzwischen vollzogene) Akzentverschiebungen zu Daten und Fragen, die fürs Rechnen geeigneter sind, eskontiert wurden. Zur Erinnerung: Siegel ersetzte 1929 die plumpe Frage: Hat die binäre diophantische Gleichung  $D$  überhaupt eine Lösung in  $\mathbb{Z}$ ? durch: Hat  $D$  unendlich viele Lösungen? Diese Frage wird durch ein auch sonst aufschlußreiches, nicht nur „prinzipiell“ berechenbares Kriterium, in welches das Geschlecht von  $D$  eingeht, beantwortet.

Mathematikern drängt sich der Vergleich mit oberflächlichen Idealisierungen der Hydrodynamik auf: die Potentiale von 2-dimensionalen Strömungen idealer Flüssigkeiten werden durch Funktionen einer komplexen Variable bestimmt; genauer, mit Hilfe der Gleichungen von Cauchy-Riemann (oder Varianten). Aber diese Richtung erreicht bald den Punkt vom abnehmenden Ertrag; nicht nur für die Hydrodynamik, sondern auch bei elektrischen Ladungen, auf welche die Idealisierung tatsächlich besser paßt. Für mathematische Untersuchungen jener Funktionenklasse sind meistens ganz andere Beschreibungen ergiebiger, z. B. geometrische (konforme Abbildungen) oder analytische (Potenzreihen). So gesehen drängt sich die Frage auf, ob etwa der Satz von Higman [H] eine mathematisch geeignete(re) Beschreibung der logischen Berechenbarkeit liefert: „meilenweit“ entfernt von der erwähnten behäbigen Darstellung.

Theoretische Physiker haben ein anderes Unbehagen. Natürlich kommen manche der betrachteten Operatoren in der theoretischen Physik vor. Aber nicht alle ihre formalen Eigenschaften haben eine physikalisch vernünftige Interpretation! (Gemeint sind mathematisch einwandfreie Eigenschaften im Gegensatz etwa zu jenen in Diracs Darstellung der  $\delta$ -Funktion, die später mit Hilfe der Distributionen mathematisch uminterpretiert wurde!) Bekanntlich haben *infinitesimale* Eigenschaften wie Irrationalität oder (mehrfache) Differenzierbarkeit keinen Platz in sogenannten phänomenologischen, d. h. ins Auge stechenden, Interpretationen. Nun ist die logische Berechenbarkeit ganz kraß *infinitistisch*: jede endliche Folge von (hereditär endlichen) Daten ist so berechenbar. Dies schließt eine angemessene Interpretation nicht aus, z. B. mit Bezug auf eine geeignete Mikrotheorie, aber die Sache ist anspruchsvoll; vgl. [B] und [B1] betr. infinitesimale Eigenschaften. Vielleicht paßt diese Problematik nicht ins Konzept der Autoren: aber dann paßt das Wort *physics* eben nicht in den Titel.

Wie dem auch sei, die Fragen am Ende des Buches berühren nicht die angedeuteten Sorgen wissenschaftlich reifer Mathematiker und Physiker. Z. B. betrifft (5) auf S. 193 die schlampige Terminologie: *computably open*, also ohne Unterscheidung zwischen *berechenbar aufzählbar offen* (bao) und *berechenbar entscheidbar offen* (beo). Zur Erinnerung (bei Mengen  $O \subseteq \mathbb{R}^n$ ): (1)  $O$  ist bao genau dann, wenn  $O$  die Vereinigung von den elementaren Umgebungen  $U_{v(i)}$  ist, wobei  $v: \omega \rightarrow \omega$  eine geeignete berechenbare Folge ist und die  $U$  (fürs Rechnen) geeignet numeriert sind. Z. B. ist das Komplement  $M'$  der Mandelbrot'schen Menge bao. (2) Seit über 40 Jahren hat sich folgende Präzisierung der groben Erklärung von beo bewährt: für jedes  $U$  ist  $U \subset O$  „beinahe“ entscheidbar. Formal: es gibt ein berechenbares

$\delta: (U, i) \mapsto (U^-, U^+, j)$  derart, daß (a)  $U^- \subset U \subset U^+$  und die Abstände der Ränder von  $U^-$  und  $U^+$  vom Rand von  $U$  kleiner sind als  $i^{-1}$ , (b)  $j=0$  oder  $j=1$ ,  $j=0 \Rightarrow U^- \subset O$  und  $j=1 \Rightarrow U^+ \not\subset O$ . (3) beo  $\Rightarrow$  bao. ( $O$  sei beo. Dann ist  $O$  die Vereinigung jener  $U^-$ , für welche  $\exists i[\delta(U, i) = (U^-, U^+, 0)]$  gilt). Es ist (mir) nicht bekannt, ob  $M'$ , in (1), beo ist. (4) Es besteht zur Zeit weder Anlaß noch Ansatz, die Begriffe  $ba$  und  $be$  für beliebige (auch nichtoffene) Mengen  $\subset \mathbb{R}^n$  zu erklären.

Schließlich sei ausdrücklich betont, daß – zumindest bis jetzt – ein grobes Verständnis von Unterscheidungen (wie oben) betr. Berechenbarkeit fürs Rechnen mit reellen Zahlen, z. B., in der praktischen Informatik ausreicht. Verfeinerungen lenken dann von entscheidenden Parametern, z. B. von der Auswahl angemessener Notationen für die Zahlen oder von Schranken betr. Stetigkeitsmodule für die einschlägigen Operatoren, ab.

- [B] Berry, M. V.: Semiclassically weak reflections about analytic and non-analytic potential barriers. *Journal of Physics A: Mathematical & General*. **15** (1982) 3693–3704  
 [B1] Berry, M. V.: Some quantum-to-classical asymptotics. Pp. 251–303, in: J. Giannoni, A. Voros, J. Zinn-Justin (eds.) *Chaos and quantum physics*. Les Houches LII. 1989. Elsevier 1991  
 [H] Higman, G.: Subgroups of finitely presented groups. *Proc. Roy. Soc. (A)* **262** (1961) 455–475

Oxford

G. Kreisel

**Bosch, S., Lütkebohmert, W., Raynaud, M., Néron models**, Berlin u. a.: Springer Verlag 1990, 325 S., DM 158,-

The main theme of models can be illustrated as follows. Let  $E$  be an elliptic curve over  $\mathbb{Q}$ , given by one homogeneous equation  $F(X_0, X_1, X_2) = 0$  of degree 3 as a closed

Then Néron's measure  $\delta$  for the defect of smoothness is introduced. The smoothening process  $X^{(2)} \rightarrow X$  is a series of blow ups in the special fibres, carefully chosen with the help of  $\delta$ . Let  $X^{(3)}$  denote the smooth part of  $X^{(2)}$ , then  $X^{(3)}(R^{sh}) \rightarrow A(K^{sh})$  is still surjective. This  $X^{(3)}$  is too big.

One chooses a left-invariant  $d$ -form  $\omega \neq 0$  on  $A$  (where  $d = \dim A$ ). For each component  $Z$  of the special fibre one can define  $\text{ord}_Z \omega \in \mathbb{Z}$ . Now  $X^{(4)}$  is obtained from  $X^{(3)}$  by deleting the components  $Z$  of the special fibre with  $\text{ord}_Z \omega$  non-minimal (there is no indication given why this procedure is reasonable). The model  $X^{(4)}$  is too small, but the group law of  $A$  extends to a  $R$ -birational group law on  $X^{(4)}$ . For a strictly Henselian ring  $R$  (i.e.  $R = R^{sh}$ ) Weil's construction of a group law out of a birational group law works. The resulting object is Néron's model. With descent theory one deals with the case  $R \neq R^{sh}$ . Finally the step from local Néron model to global Néron model is rather easy for Abelian varieties (chapter 1).

Chapters 1 to 7 form the core of the book. An attempt has been made to make this part readable for a "beginner". The level of exposition is however much higher than that of the book of Cornell & Silverman. Precise definitions of abelian scheme and elliptic curve are missing. One misses also the Kodaira-Néron classification of Néron models for elliptic curves. Stable reduction for Abelian varieties is not proved in this book. Chapters 8 and 9 give a useful survey of the Picard functor and Jacobians of relative curves. In Chapter 10 one introduces lft-models (locally of finite type). Extensions of an Abelian variety by a torus and some special algebraic groups in characteristic  $p \neq 0$  do admit lft-models. Mumford's lft-models for reductive linear algebraic groups are not mentioned.

For the expert it is a nice thing to have a full proof of Néron's existence theorem as well as a survey of related topics available. For a "beginner" the book is less recommended.

Groningen

M. van der Put

**Knebusch, M., Scheiderer, C., Einführung in die reelle Algebra** (vieweg studium, Bd. 60, Aufbaukurs Mathematik; hrsg. von Gerd Fischer), Braunschweig: Vieweg 1989, V, 184 S., Pb., DM 36,-

Dies ist eine Einführung in ein altes und junges Gebiet der Algebra, dem in den heutzutage gängigen Lehrbüchern meistens nur wenig Raum gewidmet ist, und das in der Algebra-Ausbildung höchstens am Rande betrachtet wird.

Alt ist das Gebiet, da es ja das Studium reeller Wurzeln von Polynomen in einer Variablen einschließt, das im 19. Jahrhundert ein Gegenstand lebhafter Forschung war. In der Tat wird das für die reelle Algebra benötigte kalkulatorische Rüstzeug im wesentlichen schon durch Arbeiten von Sturm, Sylvester, Hermite und anderen alten Meistern bereitgestellt. Beim Übergang zur strukturellen Mathematik geriet der reelle Standpunkt allerdings etwas in Vergessenheit.

Worum geht es? Wir folgen einmal den Autoren und nennen kommutative Algebra den Teil der Algebra, welcher der algebraischen Geometrie zugrundeliegt. Geometrie und Algebra sind verbunden durch den Begriff des Zariski-Spektrums eines Rings. Es gibt klare Auskunft darüber, was man unter einem generischen Punkt zu verstehen hat, nämlich einfach ein Primideal. Im Reellen ist es naheliegend, semialgebraische Geometrie, also das Studium von Systemen reeller polynomialer Gleichungen und Ungleichungen zu betreiben. Was ist nun ein generischer reeller Punkt  $\alpha$ , sagen wir, im Inneren des Einheitskreises? Folgen wir wieder den Autoren und teilen der reellen Algebra die Rolle zu, als Grundlage der semialgebraischen Geometrie zu dienen, so muß sie diese Frage ebenso klar beantworten

Spektrums des Rings  $\mathbb{R}[X_1, X_2]$ , und genauer heißt es in diesem Fall,  $\alpha$  ist eine Anordnung von  $\mathbb{R}(X_1, X_2)$  für die  $X_1^2 + X_2^2 - 1 < 0$  ist. Die Idee, Anordnungen als ideelle Punkte zu betrachten, taucht schon in den Arbeiten von Artin und Schreier (1926–1927) zur Lösung des 17. Hilbertschen Problems auf. Allerdings erfolgte die formale Definition des reellen Spektrums als topologischer Raum erst gegen 1979 durch Coste und Roy. Seit der Zeit wuchs die reelle Algebra zu einem Gebäude mit eigener Struktur. Sie ist, so gesehen, ein junges Gebiet.

Das Buch wird seinem Titel wirklich gerecht. Es ist außerdem nicht nur das erste und einzige Buch auf diesem Gebiet in deutscher Sprache, sondern vielleicht überhaupt das einzige, abgesehen von den entsprechenden Kapiteln in dem Standardwerk „Géométrie Algébrique Réelle“ von Bochnak, Coste und Roy, in dem reelle Algebra von dem oben beschriebenen Standpunkt konsequent entwickelt wird.

Im Gegensatz zum Zariski-Spektrum ist das reelle Spektrum eines Körpers  $K$  im allgemeinen schon sehr reichhaltig: Es besteht aus allen Anordnungen von  $K$ . Diese werden also zunächst mal in Kapitel I studiert. Gleich zu Anfang erfährt der Leser, wie Anordnungen die Struktur des Wittschen Rings  $W(K)$  der symmetrischen Bilinearformen über  $K$  beeinflussen. Die Nachbarschaft zwischen reeller Algebra und der Theorie symmetrischer Bilinearformen wird zu Recht gepflegt. Elegante Spurform-Argumente führen zu den Hauptsätzen der Artin-Schreier-Theorie. Außerdem gibt es einen interessanten Abschnitt über die Bezoutante und ihre Anwendungen. Hier fühlt man sich den Arbeiten aus dem 19. Jahrhundert am nächsten.

Die Anordnungen eines Körpers  $K$  bilden einen topologischen Raum, eben das reelle Spektrum von  $K$ , sie sind aber auch in komplizierter Weise untereinander verheftet. Ursache hierfür ist ein Zusammenwirken von Anordnungen und Bewertungsringen von  $K$ , insbesondere in der Situation, daß letztere konvex bezüglich einer Anordnung sind. Diese Wechselbeziehung, auf die schon Krull in seiner Arbeit zur allgemeinen Bewertungstheorie (1932) hinweist, ist Gegenstand des zweiten Kapitels. Dabei ist es, besonders für die geometrischen Anwendungen, wichtig, daß Bewertungen von beliebigem Rang betrachtet werden. Der Leser braucht hierzu keinerlei Vorkenntnisse mitzubringen. Nach einer eingehenden Beschreibung der Anordnungen von  $R(t)$ ,  $R$  reell abgeschlossen, wird die Lösung des 17. Hilbertschen Problems angestrebt. Die Autoren gehen hier den Weg über den Stellensatz von Artin-Lang, der vielleicht nicht der einfachste ist, der aber die Stärke der entwickelten Methoden sehr schön demonstriert.

In Kapitel III wird schließlich das reelle Spektrum  $\text{Sper}(A)$  eines beliebigen Rings  $A$  (kommutativ mit 1) untersucht. Es setzt sich zusammen aus den reellen Spektren der verschiedenen Restklassenkörper. Ein Element von  $\text{Sper}(A)$  ist also ein Paar, bestehend aus einem Primideal  $\mathfrak{p}$  von  $A$  und einer Anordnung des Restklassenkörpers  $k(\mathfrak{p})$ .  $\text{Sper}(A)$  wird, wie schon erwähnt, mit einer naheliegenden Topologie versehen. Zunächst geht es darum, allgemeine Eigenschaften des Raumes  $\text{Sper}(A)$  zu untersuchen. Ist  $R$  ein reell abgeschlossener Körper und  $A$  eine endlich erzeugte  $R$ -Algebra, so spiegelt  $\text{Sper}(A)$  in besonders schöner Weise die semialgebraische Geometrie auf  $(\text{Spec}(A))(R)$  wieder. In dieser Situation verwenden die Autoren viel Sorgfalt, die Elemente von  $\text{Sper}(A)$  auf  $(\text{Spec}(A))(R)$  sichtbar zu machen. Das Buch schließt mit einer eingehenden Vorführung der verschiedenen reellen Stellensätze und einem kleinen Abschnitt über den reellen Holomorphiering, der z. B. beim Studium von Summen höherer Potenzen eine wichtige Rolle spielt.

Die kommutative Algebra liegt bekanntlich nicht nur der algebraischen Geometrie zugrunde, sondern z. B. auch der analytischen Geometrie. Ebenso verhält es sich mit der reellen Algebra. Ich möchte sogar behaupten, daß sie erst beim Studium semianalytischer Mengen voll zum Zuge kommt. Hier handelt es sich allerdings mehr um die Anwendung des Instrumentariums der kommutativen Algebra für Fragen der reellen Geometrie. Dieser

Stoff, so schreiben die Autoren, muß einem Buch zur höheren reellen Algebra vorbehalten bleiben, ebenso wie das Studium von Garben auf dem reellen Spektrum.

Vielleicht ein Wort zum Aufbau des Buches: Zweifellos gehört Kapitel I an den Anfang, denn ohne den Begriff der Anordnung und des reell abgeschlossenen Körpers kann man nichts erklären. Der Leser mag sich aber wundern, warum die Stellensätze erst ganz am

dem Hilbertschen Nullstellensatz anfängt. Zu einem weiteren Punkt, der auffällt, lasse ich die Autoren sprechen: „Für den Kenner sei angemerkt, daß das Buch durchweg ohne das Tarski-Prinzip auskommt. (Wir hoffen, daß er ein wenig überrascht ist, wieviel reelle Algebra man sinnvoll darstellen kann, ohne dieses Prinzip zu benutzen). Zwar halten wir das

Freitag, E., **Hilbert Modular Forms**, Berlin u. a.: Springer Verlag 1990, 240 S., DM 98,-

Die Kohomologie arithmetischer Gruppen ist von großer Bedeutung für die moderne Zahlentheorie. Je nach Gesichtspunkt kann man sie mit verschiedenen natürlichen Zusatzstrukturen versehen; jede dieser Zusatzstrukturen wirft ihre eigenen Fragen und Probleme auf; und an die Klärung des Zusammenspiels der verschiedenen Aspekte knüpfen sich bedeutende, im allgemeinen größtenteils unbewiesene Vermutungen.

Sei  $G$  eine zusammenhängende halbeinfache algebraische Gruppe über einem Zahlkörper  $K$  und  $\Gamma$  eine arithmetische Untergruppe von  $G(K)$ . Grundlage vieler Überlegungen ist die Tatsache, daß die Kohomologie von  $\Gamma$  kanonisch isomorph ist zu der singulären Kohomologie des topologischen Raumes  $X/\Gamma$ , wobei  $X$  der nicht-kompakte symmetrische Raum ist, welcher der reellen Lie-Gruppe  $G(K \otimes \mathbb{R})$  zugeordnet ist. Diese Kohomologie kann man nun mittels topologischer, analytischer, etc. Methoden untersuchen.

In dem vorliegenden Buch wird eine der Zusatzstrukturen in dem konkreten Fall der Hilbertschen Modulgruppe  $G = SL_{2,K}$  studiert; hier ist  $K$  ein total-reeller Zahlkörper vom Grad  $n$ . Der symmetrische Raum  $X$  ist dann isomorph zu dem  $n$ -fachen Produkt von

bung der reinen Subquotienten der gemischten Hodge-Struktur. Das hat aber zum Beispiel keine Auswirkung auf die Berechnung der Hodge-Zahlen.

In den Anhängen werden die benutzten Tatsachen über algebraische Zahlen, das Lebesgue-Integral, den Differentialformenkalkül und die Hodge-Theorie knapp und übersichtlich dargestellt. Das Buch dürfte somit für Studenten mittleren Semesters mit Kenntnissen der algebraischen Topologie zugänglich sein. Allerdings wäre gerade ein Neuling auf diesem Gebiet dankbar für mehr Motivation und für eine Auflockerung und bessere Strukturierung der technisch komplizierten Passagen. Auch ist es bedauerlich, daß der Verlag nicht mehr Sorgfalt auf den Layout verwandt hat.

Die meisten Ergebnisse des Buches sind bekannt; der Nutzen liegt deshalb vor allem in deren einheitlicher Präsentation. Mit seiner Entscheidung für die elementare Darstellung des engeren Gegenstands verzichtet der Autor bewußt auf Seitenblicke wie auf allgemeine Systematik. Damit kann das Buch zwar das Interesse an anderen Fällen wecken, führt aber nicht auf diese hin. Im ganzen wird das Buch somit seinen eigenen Ansprüchen gerecht.

Bonn

R. Pink

**Aubin, J.-P., Frankowska, H., Set-Valued Analysis** (Systems and Control: Foundations and Applications, Vol. 2), Basel u. a.: Birkhäuser-Verlag, 1990, 461 S., DM 138,00

Jede mengenwertige Abbildung kann man zwar formal als gewöhnliche Abbildung auffassen und von diesem Standpunkt aus untersuchen. Dies wird allerdings der speziellen Struktur solcher Abbildungen nicht gerecht. Erst die gezielte Ausnutzung dieser Struktur hat der mengenwertigen Analysis ihre fundamentale Bedeutung für weite Teile der Mathematik und auch für viele Anwendungsbereiche gebracht. So werden Begriffe und Ergebnisse der mengenwertigen Analysis in der nichtlinearen Optimierung verwendet, hier insbesondere für verschiedenste Ableitungsbegriffe für nicht klassisch differenzierbare Abbildungen und für Stabilitätsuntersuchungen der zulässigen Mengen und der Menge aller Optimallösungen. Aus der modernen Steuerungs- und Regelungstheorie und, eng damit verbunden, aus der Untersuchung von Differentialinklusionen sind die Beweistechniken der mengenwertigen Analysis nicht mehr wegzudenken. Abstrakte Extremalprinzipien und deren Konkretisierung als Variationsungleichungen, Sattelpunkttheoreme und Gleichgewichtssätze schlagen die Brücke von der Optimierung zur Untersuchung der Fixpunkte mengenwertiger Abbildungen und damit wiederum zur mengenwertigen Analysis.

Trotz ihrer großen Bedeutung fehlte bislang eine aktuelle und umfassende Darstellung der theoretischen Grundlagen der mengenwertigen Analysis. Diese Lücke wird durch das vorliegende Buch geschlossen. Die Autoren, die selbst zahlreiche wissenschaftliche Beiträge zu diesem Gebiet beigetragen haben, untersuchen zunächst verschiedene Stetigkeitsbegriffe für mengenwertige Abbildungen. Dann werden die Sätze von der offenen Abbildung, vom abgeschlossenen Graphen und über die gleichmäßige Beschränktheit für abgeschlossene konvexe Prozesse dargestellt. Existenz- und Stabilitätstheorie für Gleichgewichtspunkte werden in engem Zusammenhang mit Fixpunktsätzen für mengenwertige Abbildungen und Sätzen über inverse Funktionen vorgestellt. Breiten Raum nehmen Ableitungsbegriffe für mengenwertige Abbildungen ein, basierend auf verschiedensten Definitionen für Tangentialkegel und den damit gegebenen Approximationen für den Epigraphen reeller Funktionen oder allgemeiner den Graphen mengenwertiger Abbildungen. Die Grundlagen des Differentialkalküls für mengenwertige Abbildungen (Kettenregeln, Sätze über implizite Funktionen, Subdifferenziale, Ableitungen höherer Ordnung) werden mitentwickelt. Konvergenzsätze für mengenwertige Abbildungen im Sinne der Konvergenz von Graphen bzw. Epigraphen, die Integration mengenwertiger Abbildungen



und Selektionssätze werden ebenfalls ausführlich untersucht. Das Buch schließt mit einer Einführung in eines der wichtigsten Anwendungsgebiete für die Begriffsbildungen und Ergebnisse der mengenwertigen Analysis, nämlich in die für die optimalen Steuerungen grundlegende Theorie der Differentialinklusionen.

Das vorliegende Buch ist nicht nur ein wertvolles Nachschlagewerk für die theoretischen Grundlagen der mengenwertigen Analysis. Es strahlt auch etwas aus von der Begeisterung der Autoren für den Stoff und von ihrer Freude an einer anregenden Darstellung. Es kann daher jedem Leser bestens empfohlen werden, der sich für aktuelle und anwendungsrelevante Weiterentwicklungen der klassischen Analysis und Funktionalanalysis interessiert.

Bayreuth

F. Lempio

**Kushner, H. J., Weak Convergence Methods and Singularly Perturbed Stochastic Control and Filtering Problems** (Systems and Control: Foundations and Applications, Vol. 3), Basel u. a.: Birkhäuser Verlag 1990, 233 S., DM 84,-

H. J. Kushner hat in dem vorliegenden Buch hauptsächlich seine eigenen Ergebnisse aus einer Vielzahl von Artikeln der letzten zwanzig Jahre zusammengefaßt und teilweise erweitert. Damit liegt endlich eine in sich geschlossene Darstellung der Anwendung von Methoden schwacher Konvergenz auf Probleme singulärer Kontrolle und Filterung vor.

Das Buch wendet sich wohl hauptsächlich an Leser, die mit der allgemeinen Thematik schon vertraut sind, da aufgrund der Nähe zu den zugrundegelegten Zeitschriftenartikeln trotz einiger einführender Kapitel gute Kenntnisse der Theorie stochastischer Prozesse, der Kontroll- und Filtertheorie vorausgesetzt werden. Die abstrakte Darstellung und der Mangel an konsequent durchgerechneten Beispielen dürfte einerseits wohl den Leserkreis weiter einschränken, andererseits wird dem auf dem Gebiet arbeitenden Experten eine gute Ergänzung zu Kushner's Arbeiten geboten.

Kontrollierte singulär gestörte Systeme lassen sich beschreiben durch ein Gleichungssystem, in dem „langsam“ und „schnell“ sich ändernde Komponenten auftreten. Ein wesentlicher Spezialfall ist beschrieben durch

$$dx^\varepsilon = f(x^\varepsilon, z^\varepsilon, u)dt + \sigma_1 dw,$$

$$\varepsilon dz^\varepsilon = g(x^\varepsilon, z^\varepsilon, u)dt + q(\varepsilon)\sigma_2 dw_1,$$

wo  $\varepsilon$  ein Parameter ist und das Verhalten der Funktion  $q(\varepsilon)$  ( $\varepsilon \rightarrow 0$ ) wesentlich die Eigenschaften des Systems beeinflusst; z. B. für  $q(\varepsilon) = \sqrt{\varepsilon}$  läßt sich offensichtlich die zweite Komponente als schneller bewegt interpretieren. Eine Steuerung  $u$  – bzw. eine verallgemeinerte Kontrolle – für dieses System ist zu finden, die ein Kostenkriterium  $V^\varepsilon$  minimiert.

Da dieses Problem im allgemeinen nicht lösbar sein wird, versucht man das Ausgangsproblem nach Entkopplung der Dynamikgleichungen durch ein „gemittelt System“ zu ersetzen, so daß für  $\varepsilon \rightarrow 0$  das Ausgangsproblem mit dem gemittelten System übereinstimmt. Das gemittelte System ergibt sich durch Ausintegrieren der schnellen Variablen bzgl. des invarianten Maßes zum fixed- $x$ -System aus der Gleichung für die langsame Variable und dem Kostenkriterium, so daß der Parameter der Perturbation nicht mehr auftritt. Die Konvergenz wird mit den in Kapiteln 1–3 zusammengestellten Resultaten zur schwachen Konvergenz untersucht.

Mit wesentlich unterschiedlichen Methoden wird das Problem untersucht für ein zugrundeliegendes endliches Zeitintervall, für ein Durchschnittskostenkriterium und für

das Problem mit pfadweisen Durchschnittskosten. Gerade für dieses Problem wird eine neue Behandlungsweise eingeführt, die auf der Untersuchung von „functional occupation measures“ beruht.

Ab Kapitel 6 wird das Filterproblem zu obigem System betrachtet, worin die Beobachtung geliefert wird durch

$$dy^e = H(x^e, z^e)dt + dw_0$$

Mit den Methoden, die sich bereits bei den Kontrollproblemen als erfolgreich erwiesen, wird die Optimalität des gemittelten Filters für das Ausgangssystem untersucht.

Damit verläßt der Autor das bislang zugrundeliegende Diffusionsmodell, um analoge Probleme für Systeme mit wide bandwidth noise zu untersuchen. Die hier wesentlich benutzte „perturbed test function – direct averaging“-Methode ist schon aus früheren Artikeln des Autors bekannt, wird hier jedoch in wesentlichen Punkten verbessert.

Bei (fast) allen angesprochenen Problemen spielt die Stabilität der Systeme eine wesentliche Rolle. Deshalb erläutert das Kapitel 9 einige der wichtigsten Aspekte der Stabilität, insbesondere werden Lyapunov-Funktionen-Methoden besprochen.

Damit wird die Darstellung in guter Weise abgerundet.

Im letzten Kapitel 10 wird kurz ein Licht geworfen auf das Problem parametrischer Singularitäten. Einige Ergebnisse zur schwachen Konvergenz und Stabilität solcher Systeme werden vorgestellt. Damit gibt H. J. Kushner einen Ausblick auf mögliche weitere Forschungen.

Die Vielzahl der besprochenen Probleme, die allesamt sich aus Anwendungsproblemen ergaben, macht das besprochene Buch zu einem freudigen Ereignis auf dem Büchermarkt, und es wird somit sicherlich nicht nur von Interesse sein „für Büchereien“ (Birkhäuser Pressedienst).

Konstanz

M. Kohlmann

**Hackbusch, W., Iterative Lösung großer schwachbesetzter Gleichungssysteme,** Stuttgart: Teubner-Verlag 1990, 382 S., Kart. DM 42,-

Die Lösung linearer Gleichungssysteme ist zugleich eine einfache und eine schwierige Aufgabe. Jeder kennt das Gaußsche Eliminationsverfahren, mit dem sich im Prinzip jedes lineare Gleichungssystem lösen läßt. Es gibt Varianten dieses Verfahrens, die sich auch auf große Systeme mit zehntausenden von Unbekannten anwenden lassen, und die sehr genau über die Nullelemente in der Ausgangsmatrix und den Zwischenmatrizen Buch führen und so den Aufwand in einigermaßen erträglichem Rahmen halten. Solche Verfahren erfreuen sich unter Ingenieuren einer großen Beliebtheit. Das Problem ist, und darum ist die Lösung linearer Gleichungssysteme eine schwierige Aufgabe, daß bei solchen direkten Verfahren der Aufwand in der Regel stark überproportional zur Anzahl der Unbekannten ansteigt. Damit sind solche Verfahren zur Lösung großer Systeme mit tausenden von Unbekannten aufwendig. Bei Systemen mit hunderttausenden oder gar Millionen von Unbekannten, wie sie bei der Diskretisierung partieller Differentialgleichungen leicht auftreten können, werden sie sehr schnell völlig unbrauchbar.

Um solche großen Probleme erfolgreich angreifen zu können, sind iterative Verfahren erforderlich. Die Geschichte iterativer Verfahren reicht bis zu Gauß zurück, der das heute nach ihm benannte Gauß-Seidel-Verfahren mit großem Erfolg angewendet hat. Einen ersten Höhepunkt bildete in den fünfziger und sechziger Jahren die Entwicklung der SOR- und der ADI-Verfahren. In dieser Zeit sind die bis heute maßgeblichen Monographien von R. S. Varga und D. M. Young entstanden. In den siebziger und achtziger Jahren sind

entscheidende Durchbrüche erzielt worden. In dieser Zeit sind Mehrgitterverfahren und Gebietszerlegungsverfahren verschiedenster Art entwickelt worden, die zur Lösung der Gleichungssysteme dienen, die bei der Diskretisierung partieller Differentialgleichungen entstehen. Typisch für diese Verfahren ist, daß sie eine optimale oder fast optimale Komplexität erreichen. Das heißt, der Rechenzeit- und Speicherplatzaufwand wächst nur mehr proportional zur Größe des Systems an. Mit diesen Verfahren konnte das wissenschaftliche Rechnen in neue Dimensionen vorstoßen, die vorher undenkbar waren. Herr Hackbusch hat diese Entwicklungen selbst mit angestoßen und ganz wesentliche Beiträge zu ihnen geleistet.

Mit dem vorliegenden Buch hat er die Lücke geschlossen, die sich zwischen den Monographien von Varga und Young und dem heutigen Wissen auftut. Das Buch beginnt mit einer breiten und sehr fundierten Einführung in die Grundeigenschaften iterativer Verfahren. Besonderen Wert wird dabei auf die Diskussion von Gleichungssystemen mit symmetrischer und positiv definiter Koeffizientenmatrix gelegt. Diese Klasse von Gleichungssystemen ist in den Anwendungen von besonderer Bedeutung. Die Theorie für 2-zyklische und für  $M$ -Matrizen, die im Prinzip der Gegenstand der Bücher von Varga und Young ist, wird ausführlich dargestellt. Einen besonderen Schwerpunkt des Buches bildet die Diskussion von semiiterativen Verfahren nach Art der Tschebyscheff-Beschleunigung und der Methode der konjugierten Gradienten, mit deren Hilfe sich die Konvergenz von Basisalgorithmen sehr oft erheblich beschleunigen läßt. Ausführlich wird auf die Bedeutung von Vorkonditionierungsmethoden eingegangen, die im Prinzip ein gegebenes Gleichungssystem in ein anderes Gleichungssystem transformieren, das sich besser behandeln läßt. Abschluß und Höhepunkt des Buches bilden zwei lange Kapitel über Mehrgitterverfahren und über Gebietszerlegungsmethoden, die in sich abgeschlossen sind und die den Leser an die aktuelle Forschung heranführen.

Fast alle Verfahren werden durch Pascal-Prozeduren erläutert und illustriert, die vom Autor zusammen mit einer Reihe von Beispielprogrammen auf Diskette erhältlich sind.

Das Buch stellt eine gelungene Mischung zwischen Monographie und Lehrbuch dar und kann sehr gut als Grundlage für eine Vorlesung oder ein Seminar benutzt werden. Es schließt (nicht nur im deutschen Sprachraum) eine bedeutende Lücke in der Literatur. Es sollte im Bücherschrank keines Mathematikers fehlen, der sich für Anwendungen interessiert und mit der Lösung größerer Gleichungssysteme zu tun hat.

Tübingen

H. Yserentant

**Crouzeix, M., Rappaz, J., Approximation in bifurcation theory**, Berlin u. a.: Springer 1990, 165 S., Softcover DM 42,-

Das Anliegen des vorliegenden Buches besteht darin, numerisch verwendbare Approximationen für Verzweigungsprobleme vorzustellen; es ist im wesentlichen auf der Grundlage einer Artikelserie von Brezzi-Raviart-Rappaz entstanden.

Verzweigungsprobleme sind parameterabhängige Gleichungen; besonderes Augenmerk gilt neben der expliziten Berechnung von Lösungen der Bestimmung des Lösungsverhaltens in Abhängigkeit von den Systemparametern.

Die analytische Basis zur Berechnung der regulären Lösungen bildet der Satz über implizite Funktionen; in der Umgebung singulärer Punkte wird (bei den hier behandelten statischen Problemen) auf die Methode von Lyapunov-Schmidt zurückgegriffen, mit deren Hilfe das ursprüngliche Problem auf die äquivalenten „Verzweigungsgleichungen“ reduziert wird.

Zur Motivation werden in Kapitel 1 einige typische Verzweigungsprobleme vorgestellt (darunter das bekannte Bratu-Problem) und eingehend auf ihr Lösungsverhalten hin untersucht.

Darüber hinaus wird anhand dieser Beispiele erläutert, wie man durch (Finite-Differenzen- oder Finite-Element-) Diskretisierung von einem analytisch gegebenen Problem zu numerisch handhabaren Gleichungen kommt. Das Ziel der dann folgenden Kapitel ist die Analyse der Konvergenz der diskreten Approximationen und die Herleitung von Fehlerabschätzungen innerhalb eines abstrakten Formalismus (für Gleichungen in Banachräumen), der auch für andere Probleme geeignet ist.

Da die theoretischen Ergebnisse jeweils anhand der eingangs aufgeführten elliptischen Differentialgleichungen erläutert werden, sind die erforderlichen Grundlagen über lineare elliptische Differentialoperatoren übersichtlich in Kapitel 2 zusammengestellt.

In Kapitel 3 wird die Approximation der nichtlinearen Probleme in regulären Lösungspunkten behandelt, und die Existenz von Lösungen der Hilfsprobleme sowie ihre Konvergenz gegen Lösungen des ursprünglichen Problems gezeigt.

Die Kapitel 4 und 5 beschäftigen sich entsprechend mit einfachen Wendepunkten und einfachen Verzweigungspunkten auf der trivalenten Lösung.

In Kapitel 6 wird ausführlich die Approximation einfacher Verzweigungspunkte dargestellt. Dazu wird hier mit Hilfe einer Hilfsfunktion  $f$  eine zur üblichen Methode von Lyapunov und Schmidt äquivalente Aufspaltung hergeleitet, durch die eine Klassifikation der Verzweigungen gegeben ist. Außerdem enthält Kapitel 6 eine detaillierte Analyse des Verzweigungsverhaltens für den häufig auftretenden Fall einparametrischer Probleme.

In Kapitel 7 schließlich werden drei wichtige Spezialaspekte angesprochen:

- a) die Berücksichtigung von Symmetrien
- b) die Behandlung von Problemen, bei denen die üblichen Glattheitsvoraussetzungen nicht erfüllt sind
- c) die Approximation von Gleichungen über unbeschränkten Gebieten als Prototyp für Probleme, bei denen (für die Konvergenz wichtige) Kompaktheitsbedingungen nicht vorliegen.

Das Buch stellt eine sehr gute Einführung in die für die numerische Behandlung von Verzweigungsproblemen erforderlichen Grundlagen dar. Dazu werden sowohl die theoretischen Aspekte der Verzweigungstheorie wie auch die Approximation durch diskrete Hilfsprobleme sorgfältig und verständlich behandelt. Leider vermißt man Hinweise auf die konkrete Umsetzung der theoretischen Abschätzungen und ihre Anwendung bei numerischen Rechnungen. Außerdem wäre es sicherlich hilfreich gewesen, wenn die Vorteile der modifizierten Lyapunov-Schmidt-Reduktion stärker herausgearbeitet worden wären.

Insgesamt ein empfehlenswertes Werk, das als Grundlage für einen Kurs oder auch für Studenten höherer Semester zum Selbststudium geeignet ist.

Köln

T. Küpper

**Bebernes, J., Eberly, D., Mathematical Problems from Combustion Theory** (Applied Mathematical Sciences, Vol. 83), – Berlin u.a.: Springer-Verlag 1989, 188 S., 21 Fig., DM 68,-

Verbrennung ist ein komplexer Vorgang, dessen wichtigsten Aspekte chemische Reaktionen, Thermodynamik und Strömung sind. Im allgemeinen wird ein derartiger Vorgang durch ein System von  $N + n + 2$  nichtlinearen partiellen Differentialgleichungen beschrieben, wobei  $N$  die Anzahl der beteiligten chemischen Substanzen und  $n$  die

Raumdimension sind. Außerhalb der Komplexität des Problems gibt es hierfür derzeit keine

theoretischen Aussagen. Das vorliegende Buch behandelt daher ein Reihe von Aufgabenstellungen, die durch Vereinfachungen und bestimmte Approximationen entstehen. Für diese enthält es neuere Resultate, hauptsächlich solche, die die Autoren in den letzten Jahren selbst gewonnen haben.

Das oben genannte System enthält als Variablen die Gesamtdichte  $\rho$ , den Geschwindigkeitsvektor  $\vec{u} \in \mathbb{R}^n$ , die Temperatur  $T$ , und die  $N$  Volumenanteile  $y_i$  der beteiligten Substanzen. Kapitel 1 enthält eine kurze Herleitung des allgemeinen nichtlinearen Systems aus den Erhaltungssätzen von Masse, Impuls, Energie und chemischen Spezies. Es wird dann allerdings nur eine chemische Reaktion betrachtet, die so verläuft, daß nur eine der beteiligten Substanzen behandelt zu werden braucht. Der Rest des Buches gliedert sich in zwei Hauptteile: den von Vorgängen mit festem Brennstoff (Kapitel 2 bis 4) und den mit gasförmigem Brennmaterial (Kapitel 5 und 6).

Der wichtigste Aspekt einer sehr schnellen exothermen chemischen Reaktion ist das starke Ansteigen der Temperatur. Dieser Frage sind die Kapitel 2 und 3 des Buches gewidmet. In ihnen wird nur eine skalare Gleichung betrachtet, die die Temperatur  $T$  enthält, nämlich

$$\partial_t T - \Delta T = \delta e^T,$$

das *Feststoff-Zündungsmodell*. Im zweiten Kapitel geht es dabei zunächst um die möglichen stationären Zustände, also um das *Gelfand-Problem*. Im Detail wird der Fall eines kugelförmigen Gebietes und von radialsymmetrischen Lösungen studiert. Dabei ergeben sich scharfe Aussagen über Existenz oder Nicht-Existenz bzw. die Multiplizität von Lösungen, und zwar in Abhängigkeit vom *Frank-Kamenetski-Parameter*  $\delta$ . Das Kapitel 3 benutzt diese Kenntnisse, um die Frage des *blow up* eingehend zu untersuchen: *wann, wo und wie?*

Im Kapitel 4 wird ein Reaktions-Diffusions-Modell betrachtet, dessen zugehöriges System die Temperatur  $T$  und den Volumenanteil  $y$  enthält. Mit den Techniken, die von Nagumo und Westphal stammen, werden Existenz und Vergleichssätze bewiesen.

Als einfachste Gleichung für gasförmigen Brennstoff wird

$$\partial_t T - \Delta T = \delta e^T + \frac{1-\gamma}{\gamma} \frac{1}{\text{vol}(\Omega)} \int_{\Omega} \partial_t T$$

betrachtet, das *reaktiv-diffusive Zündungsmodell* in einem festen Behälter  $\Omega$ , wie es unter Annahme sehr starker Aktivierungsenergie entsteht. Existenz und Invarianzsätze werden unter Verwendung abstrakter Theorie nichtlinearer Halbgruppen gewonnen. Auch hier wird im radialsymmetrischen Fall die Frage des *blow up* behandelt.

Der größte Teil von Kapitel 6 behandelt ein räumlich eindimensionales Problem für eine chemische Substanz, das *volle eindimensionale Gasmodell*. Um hierfür einen globalen Existenzsatz zu beweisen, ist eine Reihe von a-priori Abschätzungen für die Dichte  $\delta$ , die Geschwindigkeit  $u$  und die Temperatur  $T$  nötig.

Im Jahre 1984 habe ich die Vorträge gehört, die Jerrold Bebernes im Rahmen der Sommerschule „Mathematische Physik“ in Ravello, Italien, gehalten hat, und von denen das Buch seinen Ausgang nahm. In den wenigen Jahren seither haben er und seine ehemaligen Studenten David Eberly und Alberto Bressan offenbar eine Reihe von beachtlichen Fortschritten in der Theorie der Verbrennung gemacht. Das Buch behandelt ein Thema im Spannungsfeld zwischen dem in den Anwendungen Erwünschten einerseits und dem mit mathematischen Methoden Machbaren andererseits. Es entspricht der Natur des Problems, daß es in diesem relativ jungen Gebiet bisher nur für bestimmte Spezialfälle befriedigende theoretische Resultate gibt. Man muß aber damit rechnen, daß in naher Zukunft zahlreiche

neue Erkenntnisse gewonnen werden. Es ist daher sehr zu wünschen, daß sich viele interessierte Leser finden, die sich mit diesem für technische Anwendungen wichtigen Thema eingehend befassen wollen.

Neuberg

U. Hornung

**Brouwer, A. E., Cohen, A. M., Neumaier, A., Distance-regular graphs,** Berlin u.a.: Springer-Verlag 1989, 495 S., DM 148,-

Aus der Theorie der distanztransitiven Graphen (d.h. Graphen, bei denen je zwei Paare von Ecken gleichen Abstands durch einen Automorphismus aufeinander abgebildet werden können) entwickelte sich Anfang der siebziger Jahre der Begriff des distanzregulären Graphen. Dies sind zusammenhängende Graphen  $\Gamma$ , bei denen für jedes  $i, j$  die Anzahl der Ecken, die von der Ecke  $x$  den Abstand  $i$  und von der Ecke  $y$  den Abstand  $j$  haben, nur vom Abstand der beiden Ecken  $x$  und  $y$  abhängt. Hierzu genügt es, daß für jedes  $i$  die „Schnittzahlen“  $b_i := |\Gamma_{i+1}(x) \cap \Gamma(y)|$  und  $c_i := |\Gamma_{i-1}(x) \cap \Gamma(y)|$  mit  $y \in \Gamma_i(x)$  unabhängig von der Wahl von  $x$  und  $y \in \Gamma_i(x)$  sind, wobei  $\Gamma_i(x)$  die Menge aller Ecken in  $\Gamma$  vom Abstand  $i$  von  $x$  bezeichne. Das  $2d$ -Tupel  $(b_0, \dots, b_{d-1}; c_1, \dots, c_d)$  heißt „Schnittschema“ des distanzregulären Graphen vom Durchmesser  $d$ . In der vorliegenden Monographie wird zum erstenmal der Versuch unternommen, die umfangreiche Entwicklung der letzten zwanzig Jahre zusammenfassend darzustellen, meist unter Beschränkung auf endliche Graphen. Dabei wird auf eine Einbettung der Theorie der distanzregulären Graphen in die allgemeine Theorie der Assoziationsschemata weitgehend verzichtet und großes Gewicht auf Klassifikationssätze gelegt. Man kann es als Hauptanliegen des Buches betrachten, alle bekannten distanzregulären Graphen zu beschreiben, zu klassifizieren und durch Struktureigenschaften zu charakterisieren. Mit diesem Anliegen befaßt sich direkt etwa die Hälfte des Werkes (Kap. 6 und 8 bis 14), aber auch die Themenwahl der anderen Hälfte geschieht oft mit Blick auf dieses Ziel. So kann das Buch auch als Nachschlagewerk für alle bekannten distanzregulären Graphen dienen, zumal ein Inhaltsverzeichnis aller im Text vorkommenden Schnittschemata aufgenommen wurde.

Ausgehend von verschiedenen Regularitätseigenschaften, wird in Kap. 1 der Begriff des distanzregulären Graphen entwickelt. Distanzreguläre Graphen treten hierbei in natürlicher Weise als Lösungen von Extremalproblemen für Klassen von Graphen mit schwächeren Regularitätseigenschaften auf. Es werden distanzreguläre Graphen eingeführt, die sich aus klassischen kombinatorischen Strukturen ergeben. In Kap. 2 wird die Theorie der Assoziationsschemata nur insoweit entwickelt, als sie für distanzreguläre Graphen von Bedeutung ist. Sie findet aber nur bei speziellen Themen, wie etwa  $Q$ -polynomialen Graphen in Kap. 8, Verwendung. Im Hinblick auf spätere Klassifikationssätze wird in Kap. 3 der Zusammenhang untersucht zwischen den Eigenwerten eines Graphen und seinen Darstellungen im  $n$ -dimensionalen euklidischen Raum durch Punkte, deren euklidische Abstände verschiedenen Bedingungen genügen. Auf diese Weise werden etwa alle distanzregulären Graphen vom Durchmesser 2 (= stark reguläre Graphen) mit kleinstem Eigenwert gleich  $-2$  bestimmt. Diese Theorie der Darstellungen im euklidischen Raum wird z. B. wesentlich in Kap. 4 zur Charakterisierung aller distanzregulären Graphen mit  $c_2 \geq 2$  und zweitgrößtem Eigenwert gleich  $b_1 - 1$  benutzt. Weiterhin finden sich in Kap. 4 die systematische Entwicklung der allgemeinen Theorie der distanzregulären Graphen, Konstruktionsverfahren für neue distanzreguläre Graphen aus gegebenen und Bedingungen für die Existenz gewisser Teilgraphen. Kap. 5 beschäftigt sich mit Beziehungen zwischen den Parametern eines distanzregulären Graphen, und zwar besonders mit der offenen Frage, ob der Durchmesser aller distanzregulären Graphen vom Regularitätsgrad  $k \geq 3$  durch einen Wert

$f(k)$  nach oben beschränkt ist, oder anders ausgedrückt, ob es (bis auf Isomorphie) nur endlich viele distanzreguläre Graphen gegebenen Regularitätsgrades  $k \geq 3$  gibt. Eine solche Abschätzung ist bisher nur unter zusätzlichen Voraussetzungen, wie etwa der Existenz eines Vierecks oder der Bipartition (letzteres hier nicht bewiesen), oder in Abhängigkeit von noch weiteren Parametern, wie etwa der „numerischen Taille“, gelungen. Das analoge Problem für *distanztransitive* Graphen ist aber gelöst: es gibt nur endlich viele distanztransitive Graphen gegebenen Regularitätsgrads  $k \geq 3$ . Während der ursprüngliche Beweis dieses Resultats die Klassifikation aller einfachen endlichen Gruppen benutzte, wird in Kap. 7 ein hiervon unabhängiger Beweis von R. Weiss samt seinen gruppentheoretischen Voraussetzungen vollständig ausgeführt.

In Kap. 6 erfolgt eine Klasseneinteilung der bisher gefundenen distanzregulären Graphen vom Durchmesser  $\geq 3$ . Für jede Klasse werden Eigenschaften hergeleitet und die bekannten Beispiele angegeben. In Kap. 8 werden „ $Q$ -polynomiale“ Graphen untersucht, eine Klasse distanzregulärer Graphen, deren Schnittzahlen einer noch stärkeren Bindung unterworfen sind und nur von fünf Parametern abhängen. Es werden unter allen bekannten distanzregulären Graphen die  $Q$ -polynomialen ermittelt und die Vermutung von E. Bannai erhärtet, daß alle  $Q$ -polynomialen Graphen von großem Durchmesser schon entdeckt sind. Die Kap. 9 bis 13 sind der Charakterisierung von Klassen distanzregulärer Graphen durch arithmetische oder geometrische Eigenschaften gewidmet. In Kap. 9 werden distanzreguläre Graphen mit „klassischen Parametern“ betrachtet, d.h. mit Schnittzahlen, die sich in einfacher Weise aus vier Parametern berechnen lassen. In Kap. 10 werden distanzreguläre Graphen aus Gruppen mit Hilfe von Coxeter- und Titsystemen gewonnen (sie sind dann sogar distanztransitiv), in Kap. 11 aus Codes und Blockplänen und in Kap. 12 aus geometrischen Sachverhalten. In Kap. 13 werden die distanzregulären Graphen beschrieben, die sich nicht in eine unendliche Familie einreihen lassen und ein spezielles Konstruktionsverfahren benötigen. In Kap. 14 werden alle Schnittschemata aufgeführt, die nach dem heutigen Kenntnisstand für distanzreguläre Graphen vom Durchmesser  $\geq 5$  und Eckenzahl  $\leq 4096$  in Frage kommen, und entsprechende distanzreguläre Graphen, soweit bekannt, angegeben. Analog, aber unter weiterer Einschränkung wird auch für Durchmesser 4 und 3 verfahren. – In einem Anhang werden alle benutzten, kombinatorischen und geometrischen Begriffe zusammengestellt. Von großem Wert ist auch das umfangreiche Literaturverzeichnis, das 800 Titel enthält.

Obwohl das Buch recht komprimiert geschrieben ist, konnten einige neuere Resultate nur ohne Beweis erwähnt werden. Vor allem die zweite Hälfte ist schwer zu lesen, da z. B. spezielle Kenntnisse über Gruppen (Chevalleygruppen, Hall-Janko-Gruppe) vorausgesetzt werden. Als Einführung in die algebraische Graphentheorie ist das Buch weder gedacht noch geeignet (aber einige Kapitel als Seminarvorlage), als Synopse des gegenwärtigen Stands der Theorie der distanzregulären Graphen und als Nachschlagewerk für die bekannten distanzregulären Graphen ist es aber von großem Wert.

Hannover

W. Mader

**Pareigis, B., Analytische und projektive Geometrie in der Computergraphik**, Stuttgart: Teubner-Verlag 1990, 303 S., Kart., DM 42,-

Das Werk besteht aus zwei Teilen: A. Projektive Geometrie, B. Computer-Graphik.

Der Abschnitt A bildet schon vom Umfang her den Schwerpunkt des Buches: Nach einer Einführung in die lineare Algebra (Vektorräume und Matrizen, affine Räume, euklidische Räume) wird der Begriff des „*projektiven Raumes*“ über einem Vektorraum

eingeführt. Dadurch, daß der Skalarenkörper stets als kommutativ, meist sogar als reell vorausgesetzt wird, werden viele strukturtheoretische Fragen ausgespart. Dementsprechend wird bei der Beschreibung von Kollineationen das Hauptaugenmerk auf *projektive* Kollineationen gelegt. Abschnitten über *Strecken, Halbräume, Polytope und Sichtbarkeit* folgt eine ausführliche Beschreibung spezieller Beispiele projektiver Abbildungen, welche für die graphische Praxis von Bedeutung sein können (*Spiegelungen, Schiebungen, Drehungen, Streckungen, Scherungen, perspektive Kollineationen* und schließlich *euklidische Normalprojektionen*). Betrachtungen über *Doppelverhältnisse und harmonische Quadrupel* schließen den Abschnitt A ab.

Abschnitt B beschäftigt sich damit, verschiedene Begriffe aus dem ersten Abschnitt an einem Rechner zu implementieren. Dabei wird TURBO PASCAL unter Einschluß objektorientierter Methoden als Programmiersprache verwendet. Der Autor kommt aber auch auf grundsätzliche Fragen der Programmentwicklung zu sprechen. Von einfachen Routinen auf Pixelebene führt der Bogen bis hin zu Konzepten von Graphikpaketen für die konstruktive Geometrie. Dabei erweist es sich als besonders wohltuend, daß nicht ein fertiges Paket präsentiert wird: Vielmehr werden die Grundlagen geschaffen, ein Paket in seinem Aufbau zu verstehen und gegebenenfalls auch in einer Arbeitsgruppe (Seminar) an den Aufbau solcher Pakete heranzugehen. Durch das solide Fundament von Abschnitt A entgeht der Autor jenen Problemen, an denen so manches Werk zur Computergraphik

mangels geometrischen Bodens unter den Füßen leidet. Teil B stellt genau jenes „*missing link*“ dar, das oft zwischen geometrischen Konzepten und einer leistungsfähigen Programmiersprache fehlt.

Diese Buch ist deshalb besonders gelungen, weil ein für Computergraphik wichtiges Gebiet der Mathematik in zielstrebigem, aber mathematisch und methodisch schlüssiger Form aufbereitet und dem an der Computergraphik Interessierten erschlossen wird. Dabei wird die projektive Geometrie zweckmäßigerweise auf den klassischen Fall eingeschränkt, der hier von Interesse ist. Daß fundierte geometrische Kenntnisse, wie sie in Abschnitt A vermittelt werden, in der Praxis der Computergraphik von besonderer Wichtigkeit sind, das zu beweisen gelingt dem Autor mit diesem Werk.

Das Buch kann interessierten Studenten ab dem ersten Studienabschnitt empfohlen werden. Der Mathematiker, der Zugang zur Computergraphik sucht, wird dieses Buch mit Gewinn lesen. Der an Computergraphik Interessierte, der nach einer festen geometrischen Basis sucht, wird sie in diesem Werk auf dem Gebiet der projektiven Geometrie finden.





# Essential Mathematics

## Periodicals from Cambridge

### **The BULLETIN of the London Mathematical Society**

Coverage extends across the whole of pure mathematics together with some more applied areas of analysis and theoretical computing, plus authoritative surveys, research-expository articles and Book Reviews. *Subscriptions £122 for six issues. Volume 24 in 1992. ISSN 0024-6093.*

### **The JOURNAL of the London Mathematical Society**

Longer papers covering all areas of pure mathematics are published, from number theory to functional analysis, from logic and topos theory to the topology of Lie groups. *Subscriptions £252 for six issues.*

### **European Journal of Applied Mathematics**

An outstanding new journal for original work in areas of mathematics in which an understanding of the application requires the use of new and interesting mathematical ideas. *Subscriptions £90 (reduced rates available for individual members of certain Societies) for four issues. Volume 3 in 1992. ISSN 0956-7925.*

### **Mathematical Proceedings of the Cambridge Philosophical Society**

One of the few high-quality journals publishing original research papers that cover the whole range of pure and applied mathematics, theoretical physics and statistics. *Subscriptions £156 for six issues. Volumes*



Walter de Gruyter  
Berlin · New York

*New Series*

## de Gruyter Series in Nonlinear Analysis and Applications

*Editors:* A. Bensoussan, Paris; R. Conti, Florence; A. Friedman, Minneapolis; K.-H. Hoffmann, Munich; M. A. Krasnoselskii, Moscow; L. Nirenberg, New York

*Managing Editors:* J. Appell, Würzburg; V. Lakshmikantham, Melbourne, USA

This series consists of monographs which cover the whole spectrum of current nonlinear analysis and applications in various fields, such as optimization, control theory, systems theory, mechanics, engineering, and other sciences. One of its main objectives is to make available to the professional community expositions of results and foundations of methods that play an important role in both the theory and applications of nonlinear analysis. Contributions which are on the borderline of nonlinear analysis and related fields and which stimulate further research at the crossroads of these areas are particularly welcome.

The publications in this series are intended to be self-contained and comprehensive. They should prove of value not only to the specialist but may also serve as a guide for advanced lectures and seminars.

**Klaus Deimling**, University of Paderborn, Germany

*Volume 1*

## Multivalued Differential Equations

1992. XII, 260 pages, 17 x 24 cm. ISBN 3-11-013212-5

USA, Canada, Mexico · Cloth US \$ 59.00 · All other Countries · Cloth DM 128,-

### Contents:

**Chapter 1. Multis** · § 1 Upper Semicontinuity: Some Basic Notation · Upper Semicontinuity · Properties of Use Multis · Other Tests for Use · Remarks · § 2 Lower Semicontinuity: Lower Semicontinuity · Continuous Selections · Continuity · Locally Lipschitz Approximations of Use Multis · Remarks · § 3 Measurability: Measurable Multis · Measurable Selections · Approximation by Step-Multis · Some Consequences · Multis of Two Variables · Remarks · § 4 Mishmash: Tangency Conditions · Bochner Integrals · Monotone Multis · Accretive Multis · Some Basic Facts about Banach Spaces · Remarks.

**Chapter 2. Existence Theory in Finite Dimensions** · § 5 Upper Semicontinuous Right-Hand Sides: The Use Case · Counter-Examples · The Carathéodory Case · Some Consequences · Remarks · § 6 Lower Semicontinuous Right-Hand Sides: The Lsc Case · The Carathéodory Case · Some Consequences · Remarks.

**Chapter 3. Solution Sets** · § 7 Topological Properties of Solution Sets: Elementary Properties · Invariance · Connectedness in the Use Case · Connectedness in the Lsc Case · Funnels · Remarks · § 8 Comparison of Solutions: Preliminaries · Extremal Solutions I · Extremal Solutions II · Related Problems · Gronwall's Lemma · Convexification · Remarks.

**Chapter 4. Existence Theory in Infinite Dimensions** · § 9 Compactness Conditions: Two Examples · Measures of Noncompactness · The Use Case · The Lsc Case · Remarks · § 10 Noncompactness Conditions: Baire Category · Extreme Points · Proof of Theorem 10.1 · Lipschitz Conditions · Monotonicity · Hyperaccretivity · Remarks.

**Chapter 5. Fixed Points and Qualitative Theory** · § 11 Fixed Points: Some (Geo-)metric Results · Weakly Inward Maps · Set-Contractions · Degree Theory · An Example · Remarks · § 12 Boundary Value Problems: A Comparison Result · Sturm/Liouville Problems · Solutions in Closed Sets · Remarks · § 13 Periodic Solutions: Reduction to the Regular Case · Another Fixed Point Problem · Examples · Remarks · § 14 Stability and Asymptotic Behavior: Stability · Stability Tests · Asymptotic Behavior · Perturbations · Remarks.

**Appendix. Related Topics** · Discontinuous Differential Equations · Implicit Differential Equations · Functional Differential Equations · Perturbations of Dissipative Right-Hand Sides.



**Walter de Gruyter**  
**Berlin · New York**

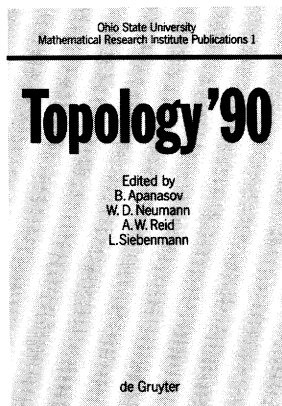
*New Series*

**Ohio State University  
Mathematical Research Institute  
Publications**

*Editors:*

**Gregory R. Baker, Walter D. Neumann, Karl Rubin**  
Columbus, Ohio, USA

This series is devoted to the publication of research monographs, lecture notes, proceedings, and other mathematical works arising from activities of the International Mathematical Research Institute at Ohio State University. The IMRI was founded in 1989 to support a program of visiting research scholars in mathematics at Ohio State and to run Workshops and Special Emphasis Programs on topics of particular importance and timeliness. The Research Semester on Low Dimensional Topology was the first major program of the Institute. In the meantime other programs have been organized and corresponding publications are in preparation.



***Volume 1: Topology '90***

**Proceedings of the Research Semester in Low Dimensional Topology at Ohio State University**

*Editors:* **Boris Apanasov, Walter D. Neumann, Alan W. Reid, Laurent Siebenmann**

1992. XII, 457 pages. 17 x 24 cm. USA, Canada, Mexico. Cloth US\$ 54.95

*All other countries:* Cloth DM 134,- ISBN 3-11-012598-6

This volume consists of contributions from participants in a Research Semester in Low Dimensional Topology which took place under the auspices of the International Mathematical Research Institute at Ohio State University from February through June 1990. The main topics of this volume include: the geometry and topology of 3-manifolds, with particular emphasis on hyperbolic 3-manifolds and their interactions with number theory; the "new" invariants of 3-manifolds related to quantum field theory; plane algebraic curves.

***Volume 2: The Arithmetic of Function Fields***

**Proceedings of the workshop at Ohio State University, June 17-26, 1991**

*Editors:* **David Goss, David Hayes, Michael Rosen**

1992. Approx. 500 pages. 17 x 24 cm. Cloth. ISBN 3-11-013171-4