E 20577 F
96. Band Heft 2
ausgegeben am 25. 4. 1994

DMV

Jahresbericht
der Deutschen Mathematiker-Vereinigung

Herausgegeben von W.-D. Geyer
unter Mitwirkung von
P. L. Butzer, U. Felgner,

Jahresbericht
der Deutschen Mathematiker-Vereinigung

Der „Jahresbericht" ist das offizielle Veröffentlichungsorgan der Deutschen Mathematiker-Vereinigung, für dessen inhaltliche Gestaltung im Auftrag des Präsidiums der jeweilige Herausgeber zuständig ist. Im „Jahresbericht" sollen vornehmlich Überblicksartikel über Teilgebiete der reinen und angewandten Mathematik, Nachrufe sowie historische Artikel und Buchbesprechungen veröffentlicht werden.

Manuskripte

Alle für die Schriftleitung des Jahresberichts bestimmten Sendungen (Briefe, Manuskripte [illegible]

Ankündigung von neuerscheinenden Büchern) sind an Prof. Dr. W.-D. Geyer zu richten. Bücher, von denen eine Besprechung erfolgen soll, werden bei den Verlagen angefordert. Die Autoren werden gebeten, bei der Vorbereitung ihrer Manuskripte die „Hinweise für Autoren" zu beachten.

Grundsätzlich sollen nur solche Manuskripte eingereicht werden, die nicht gleichzeitig an anderer Stelle zur Veröffentlichung eingereicht oder bereits veröffentlicht worden sind. Mit der Annahme zur Veröffentlichung erwirbt der Verlag das Verlagsrecht zur Vervielfältigung und Verbreitung sowie das Recht der Übersetzung in andere Sprachen.

Bezugsinformationen

Jährlich wird ein Band veröffentlicht, bestehend aus 4 Heften, die vierteljährlich erscheinen. Der Bezug ist nur bandweise möglich.

Der im voraus zahlbare Bezugspreis pro Band beträgt zur Zeit DM 128,– einschließlich Versand. Bestellungen nehmen jede Buchhandlung oder der Verlag entgegen.

Für persönliche Mitglieder der DMV, die den Jahresbericht zu beziehen wünschen, ist der zwischen DMV und Verlag vereinbarte Bezugspreis maßgebend, der im Rahmen des Mitgliedsbeitrags erhoben wird.

Verlag:
B. G. Teubner GmbH, Industriestr. 15, D-70565 Stuttgart
Postfach 801069, D-70510 Stuttgart, Tel. (0711) 78901-0, Telefax 78901-10
Verantwortlich für den Anzeigenteil: Albrecht Luscher

Jahresbericht
der Deutschen Mathematiker-Vereinigung

Inhalt Band 96, Heft 2

1. Abteilung

2. Abteilung

In den nächsten Heften erscheinende Arbeiten:

L. Arnold: Zufällige dynamische Systeme
R. Howe: Some simple examples in the representation theory of semisimple groups
M. Struwe: Das Plateausche Problem
K. Wohlfahrt: Hans Petersson zum Gedächtnis

Anschriften der Herausgeber

Prof. Dr. W.-D. Geyer, Bismarckstr. 1½, 91054 Erlangen

Prof. Dr. P. L. Butzer, Templergraben 55, 52062 Aachen
Prof. Dr. U. Felgner, Auf der Morgenstelle 10, 72076 Tübingen
Prof. Dr. K.-H. Hoffmann, Arcisstraße 21, 80333 München 2
Prof. Dr. H. Kurzweil, Bismarckstr. 1½, 91054 Erlangen

Bezugshinweis

Früher erschienene Bände (ab Band 68) des „Jahresberichts der Deutschen Mathematiker-Vereinigung“ können durch den Buchhandel oder den Verlag bezogen werden.

Nachdruck der Bände 1 bis 40 liefert: Johnson Reprint Corp., 111 Fifth Avenue, New York, N.Y. 10003

Nachdruck der Bände 41 bis 67 liefert: Swets & Zeitlinger, Heereweg 347b, POB 810, NL-2160 SZ Lisse/Holland

Jber. d. Dt. Math.-Verein. **96** (1994) 35–55

Galois Cohomology and the Trace Form

E. Bayer-Fluckiger, Besançon

Introduction

Let K be a field of characteristic $\neq 2$, and let $f \in K[X]$ be a separable polynomial. Set $L = K[X]/(f)$. The trace form $q_L : L \to K$, defined by $q_L(x) = Tr_{L/K}(x^2)$ for all $x \in L$, is a non-degenerate quadratic form over the K-vector space L.

Like any quadratic form, the trace form is related to Galois cohomology in two ways. One is via the cohomological invariants mod 2 attached to quadratic forms. On the other hand, quadratic forms are classified by a non-abelian Galois cohomology set. Both points of view offer many interesting problems, and both have benefited from recent progress. The aim of this paper is to give a survery of these.

The contents of this paper are as follows:

The first three sections contain some remarks on the early history of trace forms, as well as some definitions and notations concerning cohomological invariants of quadratic forms.

The results of section 4 are due to Serre [90]. He proved that the *cohomological invariants of étale algebras* can all be deduced from those of the trace form. Moreover, he also proved that these invariants must satisfy certain conditions. This gives some restrictions on the quadratic forms which can occur as trace forms. Section 5 surveys some recent results on the question: *"which quadratic forms are trace forms?"*.

Sections 6, 7 and 8 are devoted to trace forms of Galois

1 The early history of trace forms

In the middle of the nineteenth century three mathematicians, Sylvester, Jacobi and Hermite, were interested in the same problem: determining the number of real roots of square-free polynomials in one variable over the real numbers. Their interest was stimulated by Sturm's theorem. They brought a different point of view, introducing for the first time the trace form.

Let f be a square-free polynomial with real coefficients. Set $L = \mathbb{R}[X]/(f)$, and let q_L be the associated trace form. The result proved by Sylvester, Jacobi and Hermite can be formulated as follows:

Theorem 1. *The number of real roots of f is equal to the signature of the trace form q_L.*

Let us sketch the proof of this theorem. Let r be the number of real roots of f. The polynomial f then decomposes as a product of irreducible polynomials $f = f_1 \dots f_r \cdot f_{r+1} \dots f_s$, where $deg(f_i) = 1$ for $i = 1, \dots, r$ and $deg(f_i) = 2$ for $i = r+1, \dots, s$. Let $L_i = \mathbb{R}[X]/(f_i)$. Then $L = L_1 \times \dots \times L_s$, and the trace form q_L is the orthogonal sum of the q_{L_i}'s, $q_L = q_1 \oplus \dots \oplus q_s$. We have $L_i \simeq \mathbb{R}$ if $i = 1, \dots, r$, and $L_i \simeq \mathbb{C}$ if $i = r+1, \dots, s$. The signature of q_i is 1 in the first case, and 0 in the second. Therefore $sign(q_L) = sign(q_1) + \dots + sign(q_s) = r$.

Sylvester [93] published his result in 1853. According to Borchardt [18], Jacobi proved the above theorem in 1849. However, his letter and notes concerning it were only published after his death, in 1857. Finally, Hermite's articles [47], [48] appeared in 1856 and 1857. In fact, Hermite also determined the number of real roots of f lying in an interval $[a, b]$. This is done by considering scaled trace forms. Surveys of this topic can be found in [58] and [103].

Let X be a real algebraic variety that has only finitely many complex points. The above method has recently been generalized to the computation of the number of real points $X(\mathbb{R})$ of the variety X (cf. [16], [72], [73], [74]).

2 Notations

2.1 Trace forms ([20], [86])

Let K be a field of characteristic $\neq 2$, and let L be a commutative algebra of finite rank n over K. Let us suppose that L *is an étale algebra*, that is, a product of separable extensions L_i of K. We shall denote by q_L the symmetric K-bilinear form

$$q_L : L \times L \to K$$

$$q_L(X, Y) = Tr_{L/K}(XY),$$

as well as the quadratic form $q_L : L \to K$, $q_L(X) = Tr_{L/K}(X^2)$. Both forms are non-degenerate.

It is more natural to work with étale algebras rather than with field extensions. Indeed, the category of étale algebras is stable by extension of scalars.

This is also more consistent with the early history of trace forms. If $f \in K[X]$ is a separable polynomial, then $L = K[X]/(f)$ is an étale algebra: this was the setting considered by Hermite, Jacobi and Sylvester (see section 1).

2.2 Galois cohomology ([84], [85])

Let K_s be a separable closure of K, and let $G_K = \mathrm{Gal}(K_s/K)$. If C is a discrete G_K-*module, then for any integer* $i \geqslant 0$ the Galois cohomology groups $H^i(G_K, C)$ are defined. If C is a non-abelian G_K-group, then $H^i(G_K, C)$ is only defined for $i = 0, 1$. We will use the standard notations $H^i(K, C) = H^i(G_K, C)$, and $H^*(K, C) = \oplus_{i \geqslant 0} H^i(K, C)$.

As the coefficient module will often be $\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$, we will also use the notation $H^i(K) = H^i(K, \mathbb{Z}/2\mathbb{Z})$. Recall that for $i \leqslant 2$, the groups $H^i(K)$ have concrete interpretations. Indeed, $H^0(K) = \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$, $H^1(K)$ can be identified with K^*/K^{*2}, and $H^2(K)$ with $Br_2(K)$, the kernel of the multiplication by 2 in the Brauer group $Br(K)$ of K. If $a \in K^*$, we will denote by (a) the corresponding element of $H^1(K)$. For $a, b \in K^*$, we shall denote by (a, b) the class in $Br_2(K)$ of the quaternion algebra of center K defined by a and b. If $(a_1), \ldots, (a_r) \in H^1(K)$, we shall denote by $(a_1) \ldots (a_r)$ their cup-product in $H^r(K)$. We have $(a_1)(a_2) = (a_1, a_2)$.

3 Cohomological invariants of quadratic forms

Let K be a field of characteristic $\neq 2$, and let V be a finite dimensional K-vector space. Let $q : V \to K$ be a non-degenerate quadratic form. Let $q \simeq \langle a_1, \ldots, a_n \rangle$. One associates to q following classical invariants:

$$n = dim(V) \bmod 2 \in \mathbb{Z}/2\mathbb{Z};$$

$$d = det(q) = a_1 \ldots a_n \in K^*/(K^*)^2;$$

$$w_2(q) = \sum_{i<j} (a_i, a_j) \in Br_2(K).$$

These are called dimension mod 2, determinant and Hasse-Witt invariant, respectively. It is interesting to note that

$$H^0(K) \simeq \mathbb{Z}/2\mathbb{Z};$$

$$H^1(K) \simeq K^*/K^{*2};$$

$$H^2(K) \simeq Br_2(K).$$

Therefore, the above invariants can be viewed as cohomological invariants. It is natural to try to define higher cohomological invariants. This was done by Delzant [26], who defined the *Stiefel-Whitney invariants* of q. For any integer $m \geqslant 0$, set

$$w_m(q) = \sum_{i_1 < i_2 < \ldots < i_m} (a_{i_1}) \ldots (a_{i_m}) \in H^m(K).$$

The determinant coincides with $w_1(q)$, and the Hasse-Witt invariant with the second Stiefel-Whitney invariant. One also defines the total Stiefel-Whitney invariant

$$w(q) = \sum_{m \geqslant 0} w_m(q).$$

These invariants do not suffice to classify quadratic forms over arbitrary fields. W. Scharlau [79] gave examples of fields K and of quadratic forms q and q' in four variables such that $w(q) = w(q')$ but $q \not\simeq q'$.

In order to define a different set of cohomological invariants, let us consider the *Witt ring* $W(K)$ of K (see for instance [64] or [82]. The even dimensional

This construction gives a bijection between the set of isomorphism classes of étale algebras of rank n and the set of conjugacy classes of continuous homomorphisms $G_K \to S_n$ (see for instance [19], 73.). Let us consider S_n as a G_K-module, with trivial G_K-action. The set of conjugacy classes of continuous homomorphisms $G_K \to S_n$ is then equal to $H^1(K, S_n)$. Therefore we obtain a bijection between the set of isomorphism classes of étale algebras of rank n and the set $H^1(K, S_n)$.

4.2 Cohomological invariants

Let $\varkappa$ be a field, and let C be a finite $G_\varkappa$-module of order prime to $char(\varkappa)$. A *cohomological invariant* for $(\varkappa, C)$ is a function

$$a : H^1(K, S_n) \to H^*(K, C)$$

defined for every field extension K of $\varkappa$, and having property (*) below:

(*) *Covariance with respect to base change*
If K'/K is a field extension, the diagram

$$\begin{array}{ccc} H^1(K, S_n) & \to & H^1(K', S_n) \\ \downarrow & & \downarrow \\ H^*(K, C) & \to & H^*(K', C) \end{array}$$

commutes.

Let us denote by $A(\varkappa, n, C)$ the group of cohomological invariants as above. If $a \in A(\varkappa, n, C)$ and if E is an étale algebra, then we shall denote by $a(E)$ the image of E in $H^*(K, C)$.

4.3 A vanishing criterion

Let $a \in A(\varkappa, n, C)$. The main result proved by Serre is:

Theorem 2. *Suppose that $a(L) = 0$ for all étale algebras L that are products of algebras of rank 1 or 2. Then $a(L) = 0$ for any étale algebra L.*

4.4 Cohomological invariants with odd order coefficients

The following results are easy consequences of Theorem 2 (cf. [90]).
Let $L_0 = \varkappa \times \ldots \times \varkappa$ be the split étale algebra of rank n.

Theorem 3. *Let C be an abelian group of odd order, and let $a \in A(\varkappa, n, C)$. Let $\alpha = a(L_0)$. Then $a(L) = \alpha$ for all L.*

Theorem 4. [90] *Let $\phi : G_K \to S_n$ be a homomorphism. Let C be an abelian group of odd order on which S_n acts trivially. Let*

$$\phi^* : H^i(S_n, C) \to H^i(K, C)$$

be the homomorphism induced by ϕ. Let $x \in H^i(C_n, C)$, $i > 0$. Then

$$\phi^*(x) = 0 \in H^i(K, C).$$

4.5 Cohomological invariants with coefficients mod 2

In this paragraph, we consider the case $C=\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$. Set $A(\varkappa,n)=A(\varkappa,n,\mathbb{Z}/2\mathbb{Z})$. Then $A(\varkappa,n)$ has an $H^*(\varkappa)$-module structure given by the cup-product. For all $i\geqslant 0$, we shall denote by w_i the cohomological invariant given by the Stiefel-Whitney classes, i.e. $w_i(L)=w_i(q_L)$.

Let us write n in the form $2m$ or $2m+1$.

Theorem 5. [90] *The $H^*(\varkappa)$-module $A(\varkappa,n)$ is free with basis* $1, w_1, \dots, w_m$.

4.6 A vanishing criterion for Stiefel-Whitney classes

Let L be an étale algebra over K of rank n. Let $m=[n/2]$, as in 4.5.

Theorem 6. [90]

a) $w_i(L)=0$ *in* $H^i(K)$ *for* $i>m+1$.
b) $w_{m+1}(L)=0$ *if m is even, and* $w_{m+1}(L)=(2)\cdot w_m(L)$ *if m is odd.*

This follows immediately from Theorem 2.

Let w_i^{gal} be the Galois Stiefel-Whitney classes (see [86], [54]). With the same method, one obtains the following:

Theorem 7. [90] $w_i^{gal}(L)=0$ *for all* $i>m$.

Let $d=w_1$ be the cohomological invariant given by the *discriminant* of étale algebras. Theorem 2 also gives a new proof of the following result of B. Kahn:

Theorem 8. [54] $w=w^{gal}(1+(2)(d))$.

Taking the homogeneous part of degree 2 of this formula we get an earlier result of Serre:

Theorem 9. [86] $w_2=w_2^{gal}+(2)(d)$.

5 Applications of the formula $w_2=w_2^{gal}+(2)(d)$

The main usefulness of this formula lies in the fact that w_2 is much easier to compute than w_2^{gal}. Indeed, if $L=K[X]/(f)=K(\alpha)$, then it is easy to obtain a matrix of the trace form q_L in a basis consisting of powers of α, in terms of the coefficients of f. This is especially striking when f has only very few non-zero coefficients (cf. [86], appendice 2).

This computational facility can be used in solving certain embedding problems. Let $1\to\{\pm 1\}\to\tilde{S}_n\to S_n\to 1$ be the extension described (for instance) in [86], 1.4. It is characterised by the property that every element the image of which is a transposition (resp. a product of 2 disjoint transpositions) is of order 2 (resp. of order 4). Let s_n be the element of $H^2(S_n)$ corresponding to this extension.

For any subgroup $G\subset S_n$, let us denote by $\tilde{G}$ the inverse image of G under the projection $\pi:\tilde{S}_n\to S_n$.

of a lifting $\varphi : G_K \to \tilde{G}$ (see for instance [86], 3.1.). Theorem 9 shows that the computation of this obstruction reduces to the computation of $w_2(q_L)$.

Example: Assume that $char(K) \neq 3$. Let $f(X) = X^7 + aX + b$ be a polynomial of discriminant 1, and let $L = K[X]/(f)$. Then by direct computation we get $w_2(q_L) = (-3)(-1)$ (cf. [86], Appendice II and 3.3). Therefore the above formula shows that $\phi_L^*(s_7) = (-3)(-1)$. Hence, the embedding problem is solvable if and only if -3 is a sum of two squares in K.

This method has been used in several papers (see for instance [8], [9], [10], [17], [21], [22], [23], [24], [25], [40], [70], [83], [97], [98], [99], [100], [101]) in order to prove that certain finite groups are Galois groups over $\mathbb{Q}(t)$. For instance, we have the following results:

- P. Bayer, P. Llorente and N. Vila [10] proved that $\tilde{M}_{12}$ is the Galois group of an extension of $\mathbb{Q}(t)$.
- J-F. Mestre [70] showed that $\tilde{A}_n$ is the Galois group of an extension of $\mathbb{Q}(t)$.

6 Realisation theorems

The aim of this section is to study the following question: *Which quadratic forms are trace forms?*

6.1 Arbitrary fields

If n is a positive integer, let us write n in dyadic form: $n = 2^{m_1} + \ldots + 2^{m_h}$, with $0 \leqslant m_1 < \ldots < m_h$.

Let us denote by r_n the following quadratic form of dimension h:

$$r_n = \langle 1, 1, \ldots, 1 \rangle \text{ if } \sum_{i=1,\ldots,h} m_i \equiv 0 \bmod 2;$$

$$r_n = \langle 1, 1, \ldots, 2 \rangle \text{ if } \sum_{i=1,\ldots,h} m_i \equiv 0 \bmod 2;$$

Definition. Let q and q' be two quadratic forms over K. We shall say that q *contains* q' if and only if there exists a quadratic form q'' over K such that $q \simeq q' \oplus q''$.

Theorem 10 ([86], appendix 1) *Let L be an étale algebra with trace form q_L. Then the quadratic form q_L contains r_n.*

The following result shows that this necessary condition is also sufficient for $n \leqslant 3$, but not for $n \geqslant 4$.

Theorem 11. (Epkenhans-Krüskemper [33] and Serre (unpublished)) *Let q be a quadratic form of dimension $n \leqslant 5$. There exists an étale algebra L such that $q_L \simeq q$ if and only if*

a) *$n = 1$ and $q \simeq \langle 1 \rangle$;*
b) *$n = 2$ and q contains $\langle 2 \rangle$;*
c) *$n = 3$ and q contains $\langle 1, 2 \rangle$;*
d) *$n = 4$, q contains $\langle 1 \rangle$, and $w_3(q) = 0$;*
e) *$n = 5$, q contains $\langle 1, 1 \rangle$, and $w_3(q) = 0$;*

The necessity of the condition $w_3(q)=0$ for $n=4$ and 5 follows from Theorem 4. In fact, Theorem 8 states that the necessary conditions of Theorems 4 and 7 [illegible]

are also sufficient for $n \leqslant 5$. Serre has shown that this is no longer the case if $n \geqslant 6$.

6.2 Hilbertian fields

In his work on the inverse problem of Galois theory, Mestre [70] found a method of deforming certain étale algebras over hilbertian fields of characteristic 0 into separable field extensions in such a way that the trace form is preserved. Using this method, Epkenhans and Krüskemper [33] prove the following:

Theorem 12. *Let K be a hilbertian field of characteristic* 0. *Let q be a quadratic form of dimension n* $\geqslant 3$. *If q is isometric to the trace form of some étale algebra, then q is isometric to the trace form of a field extension.*

6.3 Number fields

The book of Conner and Perlis [20] is essentially concerned with trace forms of field extensions of number fields. They ask the following question: *Which quadratic forms are Witt-equivalent to the trace form of some field extension?*

They call such quadratic forms *algebraic.*

It follows from Theorem 1 that the signatures of a trace form are $\geqslant 0$. Conner and Perlis conjectured in [20] that a quadratic form is algebraic if and only if it has non-negative signatures. They also proved this conjecture in the case where the base field in $\mathbb{Q}$. For arbitrary number fields, the conjecture was proved by W. Scharlau [81].

Theorem 13. *Let K be a number field. A quadratic form over K is algebraic if and only if its signatures are* $\geqslant 0$.

The question of which quadratic forms over number fields are actually isomorphic to trace forms of field extensions was solved by Epkenhans.

arbitrary fields, not only for Galois extensions but more generally for G-Galois algebras (see 7.2.). This problem is completely solved when G has odd order [13], and when the 2-Sylow-subgroups of G are elementary abelian or quaternionian of order 8 [15].

Let G be a finite group.

7.1 G-forms

A *G-form* will be a pair (V, q), where V is a left $K[G]$-module of finite rank over K, and $q: V \to K$ is a non-degenerate quadratic form such that $q(gv) = q(v)$ for all $v \in V$ and $g \in G$.

Set $V = K[G]$, and let $q_0: V \to K$ be the quadratic form defined by $q_0(g, h) = \delta_{g,h}$. Then (V, q_0) is a G-form, called the *unit G-form*.

7.2 Galois algebras

An étale algebra L on which G acts in such a way that $L \simeq K[G]$ will be called a *G-Galois algebra* (see [15], 1.3. for several equivalent definitions). The trace form q_L of such an algebra is a G-form.

For instance, a Galois extension with group G is a G-Galois algebra.

7.3 Trace forms for algebras of fixed points

Proposition 1. ([15], sect. 1.) *Let L and L' be two G-Galois algebras. Let H be*

The homomorphism ϕ_L induces

$$\phi_L^*: H^n(G) \to H^n(K).$$

We will denote by x_L the image of x.

any G-Galois algebra L, we have $x_L = 0$. This notion was introduced by Serre in [87], see also [15].

For instance, the corollary of Theorem 3 shows that if C is a finite, abelian group of odd order with trivial S_m-action, and $n > 0$ is an integer, then every cohomology class of $H^n(S_m, C)$ is negligible.

The cohomological invariant $e_r(p_L)$ of the Pfister form p_L (cf. section 3) is an invariant of the G-Galois algebra L. The following proposition shows that almost all the cohomology classes in $H^*(G)$ are negligible. Moreover, the only non-zero value of x_L, $x \in H^*(G)$, is determined by the class $e_r(p_L)$.

Let $u = (-1) \in H^1(K)$.

Theorem 20. ([15], 7.5.) *Let L be a G-Galois algebra and let $x \in H^n(G)$, for some $n > 0$. Assume that $x_L \neq 0$. Then $n \geqslant r$, and*

$$x_L = e_r(p_L) \cdot u^{n-r} + u^n.$$

If $r \leqslant 4$, then two r-fold Pfister forms with identical cohomological invariants e_r are isomorphic [4]. This holds without restriction on r if Milnor's conjecture is true for K. Therefore theorems 19 and 20 give a cohomological criterion for the isomorphism of G-trace forms:

Theorem 21. *Let L and L' be two G-Galois algebras. Assume that $r \leqslant 4$, or that Milnor's conjecture holds for K. Then the G-forms q_L and $q_{L'}$ are isomorphic if and only if*

$$x_L = x_{L'} \qquad \forall\, x \in H^r(G).$$

Theorem 20 shows that it is enough to test this for only one, well-chosen element of $H^r(G)$. This element is unique modulo negligible classes. See [15], Section 7 for details.

7.8 Quaternionian 2-Sylow subgroups

In this paragraph, we will assume that the 2-Sylow subgroups of G are quaternionian of order 8. We have $n = 8m$, with m odd. Let S be a 2-Sylow subgroup of G, and let N be the normaliser of S in G. We shall assume that N acts transitively on the elements of order 4 of S, and refer to [15], section 9 for the general case.

Let L be a G-Galois algebra.

Theorem 22. ([15], 6.1.1.) *There exists a quadratic form q_L^1 or rank 8 such that*

$$q_L \simeq m \otimes q_L^1.$$

The form q_L^1 is uniquely determined up to isomorphism.

Theorem 23. ([15], 9.3.1.)

[illegible]

Theorem 24. ([15], 9.4.4.) *Let L and L' be two G-Galois algebras. Then the G-forms q_L and $q_{L'}$ are isomorphic if and only if*

$$(a_L)(-1)(-1) = (a_{L'})(-1)(-1) \in H^3(K).$$

7.9 Examples

The following examples are taken from [15], section 8.

• Let $G = PSL_2(\mathbb{F}_q)$, $q \equiv \pm 1\ (mod 4)$. The 2-Sylow subgroups of G are elementary abelian of type (2, 2). We have $H^2(G) \simeq \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$. Let c be the only non-trivial element of this group. The following is a consequence of theorem 21:

Corollary 1. *Let L and L' be two G-Galois algebras. The G-forms q_L and $q_{L'}$ are isomorphic if and only if $c_L = c_{L'}$.*

Assume that L is a field. The element $c_L \in H^2(K)$ is then also the obstruction to the embedding problem of L into a Galois extension of K with group $\tilde{G} = SL_2(\mathbb{F}_q)$.

Corollary 2. *Let L be a Galois extension of K with group G. The G-forms q_L and q_0 are isomorphic if and only if there exists a Galois extension $\tilde{L}$ of K containing L, such that $Gal(\tilde{L}/K) \simeq \tilde{G}$.*

Remark. The 2-Sylow subgroups of $\tilde{G} = SL_2(\mathbb{F}_q)$ are quaternionian of order 8. Therefore, in the situation of cor. 2, one can choose $\tilde{L}$ in such a way that the $\tilde{G}$-forms $q_{\tilde{L}}$ and q_0 are isomorphic. (cf. [15], 8.1.2.).

• Let $G = J_1$, the first Janko group. Then the 2-Sylow subgroups of G are elementary abelian of order 8. We have $H^3(G) \simeq \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$. Let c be the only non-trivial element of this group. Then by theorem 15, we have

Corollary 3. *Let L and L' be two G-Galois algebras. The G-forms, q_L and $q_{L'}$ are isomorphic if and only if $c_L = c_{L'}$.*

8 Multiples of trace forms

Recall that if q is a quadratic form and m a positive integer, then $m \otimes q$ denotes the orthogonal sum of m copies of q. If q is a G-form, then $m \otimes q$ is also a G-form.

Let L be a G-Galois algebra. The aim of this section is to describe the isomorphism class of the G-form $m \otimes q_L$. The results presented in this section are based on joint papers with J. Morales [14] with J-P. Serre [15], and also on [12].

We will denote by $cd_2(G_K)$ the 2-cohomological dimension of the Galois group G_K (see [85]).

8.1 Preliminary results

The following proposition shows that it suffices to solve the problem in the case where m is a power of 2.

Proposition 2. *Let q and q' be two G-forms, and let m be a odd integer. Suppose that $m \otimes q \simeq m \otimes q'$. Then $q \simeq q'$.*

Indeed, the torsion of the Witt group of G-forms is 2-primary. This can be deduced from [80].

The following is an easy generalisation of Proposition 1:

Proposition 3. *Let L and L' be two G-Galois algebras, and let m be a positive integer. Let H be a subgroup of G, and set $E = L^H$, $E' = L'^H$. If the G-forms $m \otimes q_L$ and $m \otimes q_{L'}$ are isomorphic, then the quadratic forms $m \otimes q_E$ and $m \otimes q_{E'}$ are also isomorphic.*

8.2 2-cohomological dimension $\leqslant 1$

Let K be a field such that $cd_2(G_K) \leqslant 1$.

Theorem 25.

a) *For any G-Galois algebra L, there exists an isomorphism of G-forms*

$$2 \otimes q_L \simeq 2 \otimes q_0.$$

b) *Let L and L' be two G-Galois algebras. Then the G-forms q_L and $q_{L'}$ are isomorphic if and only if*

$$x_L = x_{L'} \qquad \forall\, x \in H^1(G).$$

Part a) is proved in [12], part b) in [15].

8.3 p-adic fields, totally imaginary number fields

Let K be a p-adic field, or a totally imaginary number field.

a) *For any G-Galois algebra L, there exists an isomorphism of G-forms*

$$4 \otimes q_L \simeq 4 \otimes q_0.$$

b) *Let L and L' be two G-Galois algebras. Then, the G-forms $2 \otimes q_L$ and $2 \otimes q_{L'}$ are isomorphic if and only if*

$$(-1)x_L = (-1)x_{L'} \qquad \forall\, x \in H^1(G).$$

Recall that $x_L \in H^1(K)$, and that $(-1)x_L \in H^2(K)$ denotes the cup-product of x_L with the element $(-1) \in H^1(K)$.

Let L be a G-Galois algebra, and let E be a subalgebra of L. Then E is called a *subalgebra of fixed points* if there exists a subgroup H of G such that $E = L^H$.

Corollary. [14] *The G-forms $2 \otimes q_L$ and $2 \otimes q_0$ are isomorphic if and only if the discriminants of all quadratic subalgebras of fixed points of L are sums of two squares.*

If L is a field, Galois extension of K with group G, then all subalgebras are subalgebras of fixed points. Therefore one has:

Corollary. *The G-forms $2 \otimes q_L$ and $2 \otimes q_0$ are isomorphic if and only if the discriminants of all quadratic subalgebras of L are sums of two squares.*

Theorem 27. *Let L be a G-Galois algebra.*

a) *Assume that $H^1(G)=0$. Then there exists an isomorphism of G-forms*

$$2 \otimes q_L \simeq 2 \otimes q_0.$$

b) *Assume that $H^1(G)=H^2(G)=0$. Then there exists an isomorphism of G-forms*

$$q_L \simeq q_0.$$

8.4 Number fields

Let K be an algebraic number field. If K has real places, then the criteria of the preceding paragraph do not apply. However, it is not difficult to modify them in order to cover this situation.

As $\mathrm{Gal}(\mathbb{C}/\mathbb{R}) \simeq \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$, every G-Galois algebra over $\mathbb{R}$ corresponds to an element $\sigma(L)$ of G, well-defined up to conjugation, such that $\sigma(L)^2=1$. Two G-Galois algebras over $\mathbb{R}$ are isomorphic if and only if the corresponding conjugacy classes are equal.

Let L be a G-Galois algebra over K. For every real place v of K, we obtain a G-Galois algebra L_v over the real numbers.

We have $\sigma(L_v)=1$ if and only if v extends to a real place of L.

Theorem 28. [12], [14] *Let L and L′ be two G-Galois algebras.*

a) *The G-forms $4 \otimes q_L$ and $4 \otimes q_{L'}$ are isomorphic if and only if $\sigma(L_v)=\sigma(L'_v)$ for all real places v of K.*

if and only if

$$x_L u^{d-1} = x_{L'} u^{d-1} \in H^d(K), \qquad \forall\, x \in H^1(G)?$$

We have seen that these questions have affirmative answers if $cd_2(K) = 1$, and if K is a p-adic field or a totally imaginary number field (theorems 25 and 26). Moreover, we shall give some partial results which tend to confirm that the answer may be affirmative in general.

The condition of Question 2 is necessary. In other words, we have:

Proposition 4. *Let L and L′ be two G-Galois algebras. Assume that there exists an isomorphism of G-forms*

$$D \otimes q_L \simeq D \otimes q_{L'}.$$

Then

$$x_L u^{d-1} = x_{L'} u^{d-1} \in H^d(K), \qquad \forall\, x \in H^1(G).$$

Indeed, let $x \in H^1(G)$ and let $\chi : G \to \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$ represent x. Let H be the kernel of χ. Set $E = L^H$. The determinant of q_E is equal to x_L. The quadratic form $D \otimes q_E$ belongs to I^d, and $e_d(D \otimes q_E) = x_L u^{d-1}$.

By hypothesis, the G-forms $D \otimes q_L$ and $D \otimes q_{L'}$ are isomorphic. This implies that the quadratic forms $D \otimes q_E$ and $D \otimes q_{E'}$ are also isomorphic (cf. prop. 3). Therefore $e_d(D \otimes q_E) = e_d(D \otimes q_{E'})$, so we have $x_L u^{d-1} = x_{L'} u^{d-1}$.

Moreover, one can also show that if Milnor's conjecture (see sect. 3) holds for K, then the conditions are also sufficient to imply the isomorphism of the *quadratic forms.*

Proposition 5. *Assume that Milnor's conjecture holds for K. Then we have:*

a) *For any étale algebra L, there exists an isomorphism of quadratic forms*

$$2D \otimes q_L \simeq 2D \otimes q_0.$$

b) *Let L and L′ be two G-Galois algebras. Assume that*

$$x_L u^{d-1} = x_{L'} u^{d-1} \in H^d(K), \qquad \forall\, x \in H^1(G).$$

Then there exists an isomorphism of quadratic forms

$$D \otimes q_L \simeq D \otimes q_{L'}.$$

The quadratic form $2D \otimes (q_L \oplus (-q_0))$ belongs to I^{d+1}. But the hypothesis implies that $I^{d+1} = 0$, therefore $2D \otimes (q_L \oplus (-q_0))$ is hyperbolic. This means that $2D \otimes q_L \simeq 2D \otimes q_0$, so a) is proved.

Let n be the order of G, and let $\imath$ be the inclusion $\imath : G \hookrightarrow S_n$. Let $\sigma : S_n \to \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$ be the signature. Set $\chi = \sigma \circ \imath : G \to \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$, and let $x \in H^1(G)$ be the corresponding cohomology class. Then $det(q_L) = x_L$.

If n is odd, then by theorem 16 we have $q_L \simeq q_0$, so there is nothing to prove. Therefore we may assume that n is even. The quadratic form $D \otimes q_L$ then belongs to I^d. We have $e_d(D \otimes q_L) = x_L u^{d-1}$. So we obtain $e_d(D \otimes q_L) = e_d(D \otimes q_{L'})$. This implies that $D \otimes q_L$ and $D \otimes q_{L'}$ are congruent modulo I^{d+1}. But $I^{d+1} = 0$, so we get $D \otimes q_L \simeq D \otimes q_{L'}$. This completes the proof of b).

9 G-trace forms and Galois cohomology of linear algebraic groups

Let U_G be the group of automorphisms of the unit G-form q_0. Recall that we denote by $H^1(K, U_G)$ the first cohomology set $H^1(G_K, U_G(K_s))$. To every G-Galois algebra L, we associate a cohomology class $u(L) \in H^1(K, U_G)$ in such a way that this class determines the isomorphism class of the G-form q_L. This reduces the classification problem of G-trace forms to a problem of non-abelian Galois cohomology. The cohomology set $H^1(K, U_G)$ is not known in general. This section will present some partial results that are used to prove the results of sections 6 and 7.

9.1 The group U_G and the cohomology class $u(L)$

Let G be a finite group, and let $K[G]$ be the group ring. Then $K[G]$ is a

9.3 Some results and conjectures

The following result is due to Steinberg, and used in the proof of theorem 25.

Theorem 31. [92] *Assume that K is a perfect field and that* $cd(G_K) \leqslant 1$. *Let* Γ *be a connected linear algebraic group defined over K. Then* $H^1(K, \Gamma) = 0$.

Theorem 31 has been conjectured by Serre (see [85], III–14, Conjecture I.). He also made a conjecture concerning fields of cohomological dimension $\leqslant 2$ (loc. cit., III–25, Conjecture II.):

Conjecture. [85] *Assume that K is perfect and that* $cd(K) \leqslant 2$. *Let* Γ *be a semi-simple, simply connected linear algebraic group defined over K. Then* $H^1(K, \Gamma) = 0$.

This conjecture is true if K is a p-adic field or a global field of cohomological dimension $\leqslant 2$. (see Kneser [56], [57]; Harder [45], [46] and Chernousov). This is used in the proofs of theorems 26, 27 and 28.

Let q be a non-degenerate quadratic form of dimension $\geqslant 3$. Then $Spin(q)$ is a semi-simple, simply connected linear algebraic group. It is easy to see that Merkurjev's theorem [69] implies that the above conjecture is true for $Spin(q)$:

Proposition 6. *Let K be a perfect field with* $cd(G_K) \leqslant 2$. *Then* $H^1(K, Spin(q)) = 0$.

References

[1] Arason, J.: Cohomologische Invarianten quadratischer Formen. J. Algebra **36** (1975) 448–491

[2] Arason, J.: A proof of Merkurjev's theorem, Canadian Math. Soc. Conference Proceedings **4** (1984) 121–130

[3] Arason, J.; Elman, R.; Jacob, W.: The graded Witt ring and Galois cohomology I. Canadian Math. Soc. Conference Proceedings **4** (1984) 17–50

[4] Arason, J.; Elman, R.; Jacob, W.: Fields of cohomological 2-dimension three. Math. Ann. **274** (1986) 649–657

[5] Arason, J.; Elman, R.; Jacob, W.: On quadratic forms and Galois cohomology. Rocky Mountain J. Math. **19** (1989) 575–588

[6] Arason, J.; Elman, R.; Jacob, W.: The graded Witt ring and Galois cohomology II. Trans. AMS **314** (1989) 745–780

[7] Bachoc, C.; Erez, B.: Forme trace et ramification sauvage. Proc. London Math. Soc. **61** (1990) 209–226

[8] Bayer, P.: Embedding problems with kernel of order two. Séminaire de Théorie des nombres, Paris, 1986–87, Progress in Mathematics **75** (1989) 27–33

[9] Bayer, P.; Frey, G.: Galois representations of octahedral type and 2-converings of elliptic curves. Math. Z. **207** (1991) 395–408

[10] Bayer, P.; Llorente, P.; Vila, N.: $\tilde{M}_{12}$ comme groupe de Galois sur Q. C. R. Acad. Sci. Paris Sér. Math. I. **303** (1986) 277–280

[11] Bayer-Fluckiger, E.: Self-dual normal bases. Indag. Math. **51** (1989) 379–383

[12] Bayer-Fluckiger, E.: In preparation

[13] Bayer-Fluckiger, E.; Lenstra, Jr., H. W.: Forms in odd degree extensions and self-dual normal bases. Amer. J. Math. **112** (1990) 359–373

[14] Bayer-Fluckiger, E.; Morales, J.: Multiples of trace forms in number fields, preprint 1992. Proc. Symp. Pure Math., AMS Summer Institute, Santa Barbara, 1992, to appear

[15] Bayer-Fluckiger, E.; Serre, J-P.: Torsions quadratiques et bases normales autoduales, preprint 1992. Amer. J. Math., to appear

[16] Becker, E.; Wörmann, T.: The trace formula for quadratic forms and some applications. Proc. RAGSQUAD, Berkeley, Contemp. Math., to appear

[17] Böge, S.: Witt-Invariante und ein gewisses Einbettungsproblem. J. reine angew. Math. **410** (1990) 153–159

[18] Borchardt, C. W.: Bemerkung über die beiden vorstehenden Aufsätze. J. reine angew. Math. **53** (1857) 281–283

[19] Bourbaki, N.: *Algébre*, Vol. V, nouvelle édition. Masson 1981

[20] Conner, P. E.; Perlis, R.: A survey of trace forms of algebraic number fields. Singapore: World Scient. Publ. 1984

[21] Crespo, T.: Explicit constructions of $\tilde{A}_n$ type fields. J. Algebra **127** (1989) 452–461

[22] Crespo, T.: Explicit constructions of $2S_n$ Galois extensions. J Algebra **129** (1990) 312–319

[23] Crespo, T.: Explicit solutions to embedding problems associated to orthogonal Galois representations. J. reine angew. Math. **409** (1990) 180–189

[24] Crespo, T.: Embedding Galois problems and reduced norms. Proc. AMS **112** (1991) 637–639

(1992) 625–628

[26] Delzant, A.: Définition des classes de Stiefel-Whitney d'un module quadratique sur un corps caractéristique différente de 2. C. R. Acad. Sci. Paris **255** (1962) 1366–1368

[27] Epkenhans, M.: Spurformen über lokalen Körpern. Schriftenreihe des Mathematischen

[47] Hermite, C.: Extrait d'une lettre de Mr. Ch. Hermite de Paris à Mr. Borchardt de Berlin sur le nombre des racines d'une équation algébrique comprises entre des limites données. J. reine angew. Math. **52** (1856) 39–51

[48] Hermite, C.: Extrait d'une lettre des M. C. Hermite à M. Borchardt sur l'invariabilité du nombre des carrés positifs et des carrés négatifs dans la transformation des polynômes homogènes du second degré. J. reine angew. Math. **53** (1957) 271–274

[49] Jacob, W.; Rost, M.: Degree four cohomological invariants for quadratic forms. Invent. Math. **96** (1989) 551–570

[50] Jacobi, C. G.: Über einen algebraischen Fundamentalsatz und seine Anwendungen (Aus den hinterlassenen Papieren von C. G. J. Jacobi mitgetheilt durch C. W. Borchardt). J. reine angew. Math. **53** (1857) 275–280

[51] Jardine, J. F.: Universal Hasse-Witt classes. Contemp. Math. **83** (1989) 327–347

[52] Jardine, J. F.: Cohomological invariants associated to symmetric bilinear forms. Expo. Math. **10** (1992) 97–134

[53] Kahn, B.: La deuxième classe de Stiefel-Whitney d'une représentation régulière. I. et II. C. R. Acad. Sci. Paris, série I **297** (1983) 313–316 and 573–576

[54] Kahn, B.: Classes de Stiefel-Whitney de formes quadratiques et de représentations galoisiennes réelles. Invent. Math. **78** (1984) 223–256

[55] Kahn, B.: Equivariant Stiefel-Whitney classes, preprint 1993, to appear

[56] Kneser, M.: Galois-Kohomologie halbeinfacher algebraischer Gruppen über p-adischen Körper. Math. Z. **88** (1965) 40–47; **89** (1965) 250–272

[57] Kneser, M.: Lectures on Galois cohomology of classical groups. Tata Lecture Notes **47** (1969)

[58] Krein, M. G.; Naimark, M. A.: The method of symmetric and hermitian forms in the theory of the separation of the roots of algebraic equations. Kharkov 1936 (in Russian). English translation in Lin. Multilin. Algebra **10** (1981) 265–308

[59] Krüskemper, M.: Algebraic systems of quadratic forms of number fields and function fields. Manuscripta Math. **65** (1989) 225–243

[60] Krüskemper, M.: On the scaled trace forms and the transfer of a number field extension. J. Number Theory **40** (1992) 105–119

[61] Krüskemper, M.: Algebraic number field extensions with prescribed trace form. J. Number Theory **40** (1992) 120–124

[62] Krüskemper, M.; Scharlau, W.: On trace forms of hilbertian fields. Comment. Math. Helv. **63** (1988) 296–305

[63] Krüskemper, M.; Scharlau, W.: On positive quadratic forms. Bull. Soc. Math. Belg. **40** (1988) 255–280

[64] Lam, T. Y.: The algebraic theory of quadratic forms. Benjamin, Reading, Mass. 1973

[65] Lawrence, P.: The hermitian structure of principal homogeneous spaces of group schemes. Doctoral thesis, Manchester 1992

[66] Maurer, D.: The trace form of an algebraic number field. J. Number Theory **5** (1973) 379–384

[67] Maurer, D.: Invariants of the trace form of a number field. Lin. Multilin. Alg. **6** (1978/79) 33–36

[68] Merkurjev, A.: On the norm residue symbol of degree 2. Dokladi Akad. Nauk. SSSR **261** (1981) 542–547, English translation: Soviet Math. Dokladi **24** (1981) 546–551

[69] Merkurjev, A.; Suslin, A.: On the norm residue homomorphism of degree three. Izvestiya Akad. Nauk. SSSR **54** (1990), English translation: Math. USSR Izvestiya **36** (1991) 349–367

[70] Mestre, J-F.: Extensions régulières de $Q(t)$ de groupe de Galois $\tilde{A}_n$ J. Algebra **131** (1990) 483–495

[71] Milnor, J.: Algebraic K-theory and quadratic forms. Invent. Math. **9** (1970) 318–344

[72] Pedersen, P.: Generalizing Sturm's theorem to N dimensions. Technical Report, April 1990, New York University, Dept. of Computer Science, Courant Institut of Mathematical Science, New York

[73] Pedersen, P.: Counting Real Zeros. Technical Report, Nov. 1990, New York University, Dept. of Computer-Science, Courant Institute of Mathematical Science, New York

[74] Pedersen, P.; Roy, M-F.; Szpirglas, A.: Counting real zeros in the multivariate case. Proc. of MEGA '92, Birkhäuser Verlag, to appear
[75] Perlis, R.: On the analytic determination of the trace form. Canad. Math. Bull. **28** (1985) 422–430
[76] Perlis, R.: Review of Epkenhans: Trace forms of dyadic number fields. Math. Reviews, **92m** 11134
[77] Prestel, A.: On trace forms of algebraic function fields. Rocky Mountain J. Math. **19** (1989) 897–911
[78] Revoy, Ph.: Remarques sur la forme trace. Linear and Multilinear Alg. **10** (1981) 223–233
[79] Scharlau, W.: Quadratischen Formen und Galois-Cohomologie. Invent. Math. **4** (1967) 238–264
[80] Scharlau, W.: Induction theorems and the structure of the Witt group. Invent. Math. **11** (1970) 37–44
[81] Scharlau, W.: On trace forms of algebraic number fields. Math. Z. **196** (1987) 125–127
[82] Scharlau, W.: Quadratic and hermitian forms. Grundlehren Math. Wiss. 270, Berlin: Springer-Verlag, 1987
[83] Schneps, L.: Explicit construction of extensions of $Q(T)$ of Galois group $\tilde{A}_n$ for n odd. J. Algebra **146** (1992) 117–123
[84] Serre, J-P.: Corps locaux. Paris: Hermann 1968
[85] Serre, J-P.: Cohomologie Galoisienne, 4ème édition. Lecture notes in Mathematics **5**, Springer-Verlag 1973
[86] Serre, J-P.: L'invariant de Witt de la forme $Tr(x^2)$. Comment. Math. Helv. **59** (1984) 651–676
[87] Serre, J-P.: Résumé des cours au Collège de France 1990/1991. Annuaire du Collège de France (1991) 111–121
[88] Serre, J-P.: Topics in Galois theory (notes written by Henri Darmon). Boston: Jones and Bartlett Publ. 1992
[89] Serre, J-P.: Résumé des cours au Collège de France 1991/1992. Annuaire du Collège de France, à paraître
[90] Serre, J-P.: Texts on étale algebras. 1991–92 (unpublished)
[91] Snaith, V.: Stiefel-Whithney classes of symmetric bilinear forms - a formula of Serre. Canad. Bull. Math. (2) **28** (1985) 218–222
[92] Steinberg, R.: Regular elements of semi-simple algebraic groups. Publ. Math. IHES **25** (1965) 49–80
[93] Sylvester, S.: On the theory of syzygetic relations of two rational integral functions, comprising an application to the theory of Sturm's functions, and that of the greatest algebraic common measure. Phil. Trans. of the Royal Society of London **143** (1853) 407–548
[94] Taussky, O.: The discriminant matrices of an algebraic number field. J. London Math. Soc. **43** (1968) 152–154
[95] Taylor, M. J.: Rings of integers and trace forms for tame extensions of odd degree. Math. Z. **202** (1989) 313–341
[96] Taylor, M. J.: The trace form for tame, abelian extensions of number fields, preprint 1992, to appear
[97] Turull, A.; Vila, N.: On rigid equations for alternating groups and their Hasse-Witt invariants. J. Algebra **125** (1989) 431–443
[98] Vila, N.: On central extensions of A_n as Galois group over Q. Arch. Math. **44** (1985) 424–437
[99] Vila, N.: Polyomials over Q solving an embedding problem. Ann. Inst. Fourier **35** (1985) 79–82
[100] Vila, N.: On stem extensions of S_n as Galois group over number fields. J. Algebra **116** (1988) 251–260
[101] Vila, N.: Local Artin root numbers associated to some classical polynomials. J. Algebra **131** (1990) 678–687
[102] Waterhouse, W. C.: Scaled trace forms over number fields. Archiv der Math. **47** (1986) 229–231

[103] Weber, H.: Lehrbuch der Algebra, Band I. New York: Chelsea Publ. Comp. 1894
[104] Witt, E.: Konstruktion von galoischen Körper der Charakteristik p zu vorgegebener Gruppe der Ordnung p^f. J. reine angew. Math. **174** (1936) 237–245

Eva Bayer-Fluckiger
U.R.A. 741 du CNRS
Laboratoire de Mathématiques
Faculté des Sciences
Université de Franche-Comté
16, route de Gray
25030 Besançon
France

(*Eingegangen 18. 2. 1993, revidiert 20. 3. 1993*)

Jber. d. Dt. Math.-Verein.
96 (1994) 56–75
AMS subject classification: 01 A 55, 01 A 70

Karl Weierstraß – Stationen eines Lebens[1])

R. Bölling, Berlin

Meine Damen und Herren!

Während der Vorbereitungen zu dieser Jahresversammlung ist auch darüber nachgedacht worden, welche Symbolik geeignet sein könnte, der Tagung als Signum oder Kennzeichen zu dienen. Mit Berlin als Veranstaltungsort lag es dann ziemlich nahe, den Blick auf jene Blütezeit der Mathematik in dieser Stadt in der zweiten Hälfte des vorigen Jahrhunderts zu richten, jenen Abschnitt, der durch das Wirken von Ernst E. Kummer, Karl Weierstraß und Leopold Kronecker entscheidend geprägt wurde. Weierstraß' akademische Karriere nahm 1856 in Berlin ihren Anfang; hier blieb er bis zum Ende seines Lebens. Zu den vielen Entwicklungen aus jener Zeit gehört auch die Gründung der Theorie der elliptischen Funktionen auf die spezielle Funktion, zu deren Bezeichnung sich Weierstraß jenes eigentümlichen Buchstabens $\wp$ bediente und die seither als Weierstraßsche $\wp$-Funktion wohlbekannt ist. Doch davon später mehr.

Auf der vorangegangenen DMV-Jahrestagung standen gewisse Aspekte in Kroneckers Werk im Mittelpunkt des mathematikhistorischen Hauptvortrages von Herrn H. M. Edwards, der bei einer früheren Gelegenheit seine Zuhörer mit der Feststellung konfrontierte, daß viele wohl mit Kroneckers Namen kaum mehr als das diesbezügliche Delta-Symbol in Verbindung zu bringen wüßten ([8], 28). Nun, eine gar so trostlose Bilanz scheint mir im Falle von Weierstraß nicht angebracht zu sein. Dafür dürften schon in den ersten Semestern im Studium jedes Mathematikers eine mehr oder minder ausgeprägte Epsilontik oder etwa der Satz von Bolzano-Weierstraß, das Weierstraßsche Konvergenzkriterium oder der Weierstraßsche Summensatz, um bei den Elementen der Analysis zu bleiben, das ihre geleistet haben. Was die Person betrifft, wird wohl das eine oder andere Porträt, das den Gelehrten in vorgerücktem Alter zeigt, in Erinnerung geblieben sein. Vielleicht hatte die Betrachtung den Eindruck hervorgerufen, hier einem unzufriedenen, detailbesessenen, durchaus unangenehmen Charakter zu begegnen, was allerdings dann recht gut damit harmonisierte, daß das ja der Mann mit der „Weierstraßschen Strenge“ war. Schließlich haben wir dieser Ansammlung oberflächlicher Eindrücke noch den Namen von Sofja Wassiljewna Kowalewskaja

---

[1]) Für den Druck überarbeitete Fassung eines Vortrages, gehalten auf der Jahrestagung der Deutschen Mathematiker-Vereinigung am 15. September 1992 in Berlin.

(außerhalb Rußlands meistens bekannt mit dem Vornamen Sonja) hinzuzufügen. Dieses Kapitel erfreut sich ungebrochen eines lebhaften Interesses in breiteren, keineswegs auf Fachkollegen beschränkten Kreisen.

Weniger bekannt dürfte die Fotografie sein, deren Reproduktion gerade in einer kleinen Notiz von mir im Journal für die reine und angewandte Mathematik erschienen ist ([5]). Sie ist nach meiner Kenntnis unter den bisher bekannten Aufnahmen wohl die älteste. Weierstraß wirkt konzentriert, in sich gekehrt, womit sich hier nach meinem Eindruck recht charakteristische Persönlichkeitsmerkmale des Gelehrten widerspiegeln.

Älter ist dann nur noch ein in Öl gemaltes Jugendbildnis, das sich im Institut Mittag-Leffler befindet und im 6. Band der gesammelten Werke wiedergegeben ist ([34], ii).

Ich bin nun schon oft gefragt worden, wie man sich denn über die Vita von Weierstraß unterrichten könne.

Es ist immer wieder mit Unverständnis registriert worden, daß es die Berliner Akademie versäumt hat, einem ihrer bedeutendsten Mitglieder einen Nachruf zu widmen, einer Pflicht, die man etwa C. G. J. Jacobi, P. G. L. Dirichlet und Kronecker gegenüber erfüllt hat. In einem Brief G. Mittag-Lefflers, der 1904, kurze Zeit nach dem Tod von Weierstraß' Bruder Peter verfaßt worden ist, habe ich dazu folgende Bemerkung gefunden:

> „Er [gemeint ist H. A. Schwarz] hat von der Akademie der Wissenschaften in Berlin den Auftrag bekommen, Weierstraß' Biographie zu schreiben. Die ganze wissenschaftliche Welt wartet darauf seit 1897 [Weierstraß' Todesjahr] [...] Und sie werden immer warten müssen. Schwarz wird es nie thun. Das ist die einstimmige Meinung seiner Berliner Collegen". ([20].)

Arbeiten, in denen auf einzelne Aspekte von Weierstraß' Biographie eingegangen wird, finden sich verstreut in der Literatur (wir erwähnen als wesentliche Beiträge [3], [4], [7]. Erst 1985 erschien eine umfassende Gesamtdarstellung ([14]) von Weierstraß' Leben und Werk aus der Feder von Frau Kotschina in Moskau, der Mathematikhistorikerin, die auch Biographien von Kowalewskaja und Mittag-Leffler verfaßt hat. Diese russisch geschriebenen Arbeiten bleiben jedoch nach Lage der Dinge einem größeren Leserkreis verschlossen. Selbstredend kann und will die verdienstvolle Arbeit von Frau Kotschina andererseits auch nicht so etwas wie ein – ohnehin unrealisierbares – letztes Wort in Sachen Weierstraß sein. Die Aufarbeitung des in den Archiven vorhandenen Materials hat keineswegs den wünschenswerten Grad an Vollständigkeit erreicht. Über Europa verstreut finden sich Mitschriften bzw. Ausarbeitungen von Vorlesungen, die Weierstraß in Berlin gehalten hat. Insbesondere werden solche im Archiv der Akademie der Wissenschaften in Berlin, in der Humboldt-Universität Berlin und im Institut Mittag-Leffler in Djursholm (im Nordosten Stockholms) aufbewahrt. Obwohl Weierstraß vierzig Jahre ausschließlich in Berlin gewirkt hat, gibt es hier keinen Weierstraß-Nachlaß im eigentlichen Sinne. Es sind verschiedene Gutachten, eine Reihe offizieller Dokumente und der umfangreiche Briefwechsel zwischen Weierstraß und Schwarz vorhanden. Von den bereits erwähnten Vorlesungen einmal abgesehen, ist das, grob gesagt, alles, jedenfalls, was Weierstraß betrifft.

Als wahres Eldorado ist das von Mittag-Leffler in seiner ehemaligen Privatvilla zusammengetragene Material, dem heutigen Institut in Djursholm, anzusehen. Mit Heinrich Behnke möchte ich sagen:

> „Nirgends ist man Weierstraß und seinem Wirkungskreise so nahe wie in seinem [Mittag-Lefflers] Hause, das jetzt Institut und Museum ist und die Zeit von Weierstraß und Henri Poincaré für uns, 100 Jahre später Lebende, eindrucksvoll eingefangen hat. Wer einmal die Geschichte der Mathematik der zweiten Hälfte des 19. Jahrhunderts schreiben will, wird dieses Haus als das große Schatzkästlein für seine Unterlagen ansehen, wie es mit dieser Zielsetzung kein zweites in der Welt gibt." ([2], 13.)[2])

Mittag-Leffler hatte nach erfolgter Promotion 1873 ein Stipendium für einen dreijährigen Studienaufenthalt im Ausland erhalten und ging zunächst nach Paris, wo ihn Ch. Hermite mit den Worten empfing: „Monsieur, Sie haben einen Fehler gemacht. Sie hätten in Berlin die Vorlesungen von Weierstraß besuchen sollen. Er ist unser aller Meister." Im WS 1874/75 und SS 1875 hörte Mittag-Leffler in Berlin Vorlesungen bei Weierstraß und Kronecker. Die Studienzeit in Berlin prägte die weitere Entwicklung des jungen Schweden ganz außerordentlich. In seiner späteren Tätigkeit trägt Mittag-Leffler wesentlich zur Verbreitung der Weierstraßschen Mathematik in Skandinavien bei, empfindet es stets als Verpflichtung und Aufgabe, sich für die Anerkennung des Werkes seines verehrten Lehrers, mit dem er bis zu dessen Tod in ständigem Kontakt bleibt, einzusetzen. Nach Weierstraß' Tod gelingt es ihm schließlich, dank intensiver Bemühungen, Teile des Nachlasses zu erwerben, die sonst sehr wahrscheinlich unwiederbringlich verloren wären (wie die von Peter Weierstraß erhaltenen Stücke).

Nach diesen wenigen Andeutungen zur Quellenlage ist natürlich darauf hinzuweisen, daß trotz mannigfacher Ergebnisse viele wichtige Fragen, gerade auch der Einordnung des Weierstraßschen Werkes in die Entwicklung der Mathematik, trotz des bisher Erreichten der weitergehenden Untersuchung bedürfen, also etwa das Studium der Leistungen von A. L. Cauchy, B. Riemann und Weierstraß bei der Begründung der Funktionentheorie, insbesondere ihrer Wechselbeziehungen, um einen wesentlichen Punkt zu nennen.

Ich möchte einige wenige biographische Angaben folgen lassen, darunter Unbekanntes oder erst durch neuere Arbeiten Bekanntgewordenes, aber auch, um eine allgemeine Orientierung zu erleichtern bzw. zu ermöglichen, wobei mir der gesetzte Zeitrahmen grobe Zäsuren abverlangt.

Es ist vielleicht nicht uninteressant, daß Mittag-Leffler 1904 in einem seiner Briefe mitteilt, daß er damit beschäftigt sei, eine wissenschaftliche Weierstraß-Biographie auszuarbeiten ([21]). In den Jahren 1915, 1916 gab es zwischen Mittag-Leffler und der Akademischen Verlagsgesellschaft Leipzig eine Korrespondenz, die das Projekt einer ausführlichen Weierstraß-Biographie betraf, wie ich entsprechenden Briefen entnehmen konnte. Zweifellos wäre Mittag-Leffler gewissermaßen die „natürliche" Person für ein solches Vorhaben gewesen. Jedenfalls ist es bei ungebrochenem Interesse von Seiten des Verlages (soweit mir die Schriftstücke

---

[2]) Es ist mir ein aufrichtiges Bedürfnis, an dieser Stelle dem Institut Mittag-Leffler für die großzügige Unterstützung meiner Arbeit zu danken.

bekannt sind) nicht dazu gekommen, woran Krieg wie auch die gesundheitliche Verfassung Mittag-Lefflers ihren Anteil haben mögen.

Karl Weierstraß wurde am 31. Oktober 1815 in dem kleinen Dorf Ostenfelde, Kreis Warendorf im Regierungsbezirk Münster geboren. Das war ein Samstag. Karl war in der Nacht zum 1. November um die Mitternachtsstunde geboren worden, wobei die Mutter behauptete, es wären einige Minuten nach 12 Uhr gewesen, damit er ein Sonntagskind sei, wovon jedoch der Vater nichts wissen wollte und den 31. ins Kirchenbuch eintragen ließ. (Zum Vergleich: Kummer wurde 1810, Kronecker 1823 geboren.) Als Beruf seines Vaters, Wilhelm W., ist im Ostenfelder Kirchenbuch „Sekretär beim Bürgermeister" angegeben. Über die Mutter, Theodora W., geb. von der Forst, ist fast nichts bekannt. Dem Erstgeborenen Karl folgten 1820 der bereits erwähnte Bruder Peter, 1823 bzw. 1826 die Schwestern Clara und Elisabeth. Die Mutter starb bald nach Elisabeths Geburt 1827 im Alter von 36 Jahren. 1828 heiratete der Vater zum zweiten Mal. Während seiner Tätigkeit als Beamter im preußischen Steuerdienst mußte die Familie mehrfach den Wohnort wechseln. 1834 verläßt Karl das Theodorianische Gymnasium in Paderborn mit glänzend bestandenem Abitur als „Primus omnium", wozu er überdies 1½ Jahre weniger als vorgesehen benötigte. Das auf Wunsch des Vaters mit dem Ziel der Vorbereitung auf die Laufbahn eines höheren Staatsbeamten aufgenommene Studium der Kameralistik in Bonn wird ohne Examen nach 8 Semestern abgebrochen, wobei er in den letzten vier Semestern überhaupt keine Veranstaltungen belegt hatte. Die in Karl gesetzten hohen Erwartungen des Vaters waren zunichte. Als Ausweg wurde schließlich die Aufnahme des Studiums an der Akademie in Münster ins Auge gefaßt, da sich hier die Möglichkeit bot, in kürzerer Zeit als an einer Universtität, allerdings ohne Promotion, ein Staatsexamen zum Eintritt in den Lehrerberuf ablegen zu können.

Die ältesten handschriftlichen Zeugnisse, die ich habe finden können, insofern eine sichere Datierung gegeben oder möglich ist, reichen bis in jene 30er Jahre zurück. Leider ist nichts Mathematisches darunter. Nach Angaben des Weierstraß-Schülers Ludwig Kiepert hat Weierstraß in Bonn eine mathematische Vorlesung bei Julius Plücker gehört ([12], 57), was ebenfalls aus handschriftlichen Notizen von Schwarz hervorgeht. Allerdings gibt es in der erst unlängst aufgefundenen Bonner Exmatrikel keinen Hinweis auf Plücker ([22], 17, 18–19). Mehr noch: In Münster lehrte Christof Gudermann, bei dem Weierstraß Vorlesungen hörte und sein mathematisches Examen ablegte. Wir kommen gleich auf ihn zurück. Nach Gudermanns Tod im Jahre 1851 hatte man Weierstraß als Nachfolger in Betracht gezogen und Plücker um eine Äußerung zu Weierstraß gebeten. In seiner Antwort heißt es: „Weierstraß ist mir unbekannt, sogar dem Namen nach." ([22], 22).

Zurück zu Gudermann. Er scheint nach Jacobi der erste gewesen zu sein, der Vorlesungen über elliptische Funktionen gehalten hat, jene junge Theorie, die in dem Wettstreit zwischen Abel und Jacobi wenige Jahre zuvor eine gänzliche Umgestaltung erfahren hatte und zu den Forschungsgegenständen zählt, die ein Leben lang im Zentrum des wissenschaftlichen Interesses von Weierstraß stehen sollten. Mit den elliptischen Funktionen war Weierstraß bereits in Bonn durch Jacobis Werk „Fundamenta nova theoriae functionum ellipticarum" von 1829 in

Berührung gekommen. Der Student Weierstraß hatte große Mühe, Jacobis Darlegungen zu verstehen. Erst nachdem ihm eine Nachschrift einer Gudermannschen Vorlesung zur Verfügung stand, ließen sich die Schwierigkeiten beheben. Weierstraß' Handexemplar der „Fundamenta" ist erhalten geblieben und befindet sich im Institut Mittag-Leffler. Leider habe ich auch nicht die geringste Spur einer handschriftlichen Notiz darin finden können.

Lassen Sie mich noch einige Augenblicke bei Gudermann verweilen. Im Unterschied zu früheren Aussagen wissen wir heute, daß Weierstraß in Münster nicht nur *eine* sondern vier, ausschließlich mathematische Vorlesungen bei Gudermann in zwei Semestern ab Herbst 1838 gehört hat, und zwar über „Modular-Functionen" (wie die elliptischen Funktionen bei Gudermann hießen) und über analytische Sphärik ([22], 19–20). Wäre nicht Weierstraß, niemand würde sich an Gudermann erinnern, wird sich bereits der eine oder andere gesagt haben. Dieses Schicksal dürfte ihm dann wohl in der Tat beschieden gewesen sein. Eine solche Sicht indessen wird der historischen Betrachtungsweise nicht gerecht. Interessant ist, um nur einen Punkt zu nennen, daß von Gudermann für spezielle Reihen bereits jene Eigenschaft konstatiert wird, die inhaltlich dem für

Möglicherweise geschieht dies hier zum ersten Mal überhaupt (implizit steckt die Idee schon in Abels Beweis seines Satzes über die Stetigkeit von Potenzreihen). Es geschieht freilich eher beiläufig im Rahmen von Berechnungen der Koeffizienten einer komplexen Zahl“ und das zugehörige Zeichen | | zu, beide treten erst viel später auf (das wird in [24], S. 158, nicht berücksichtigt)).

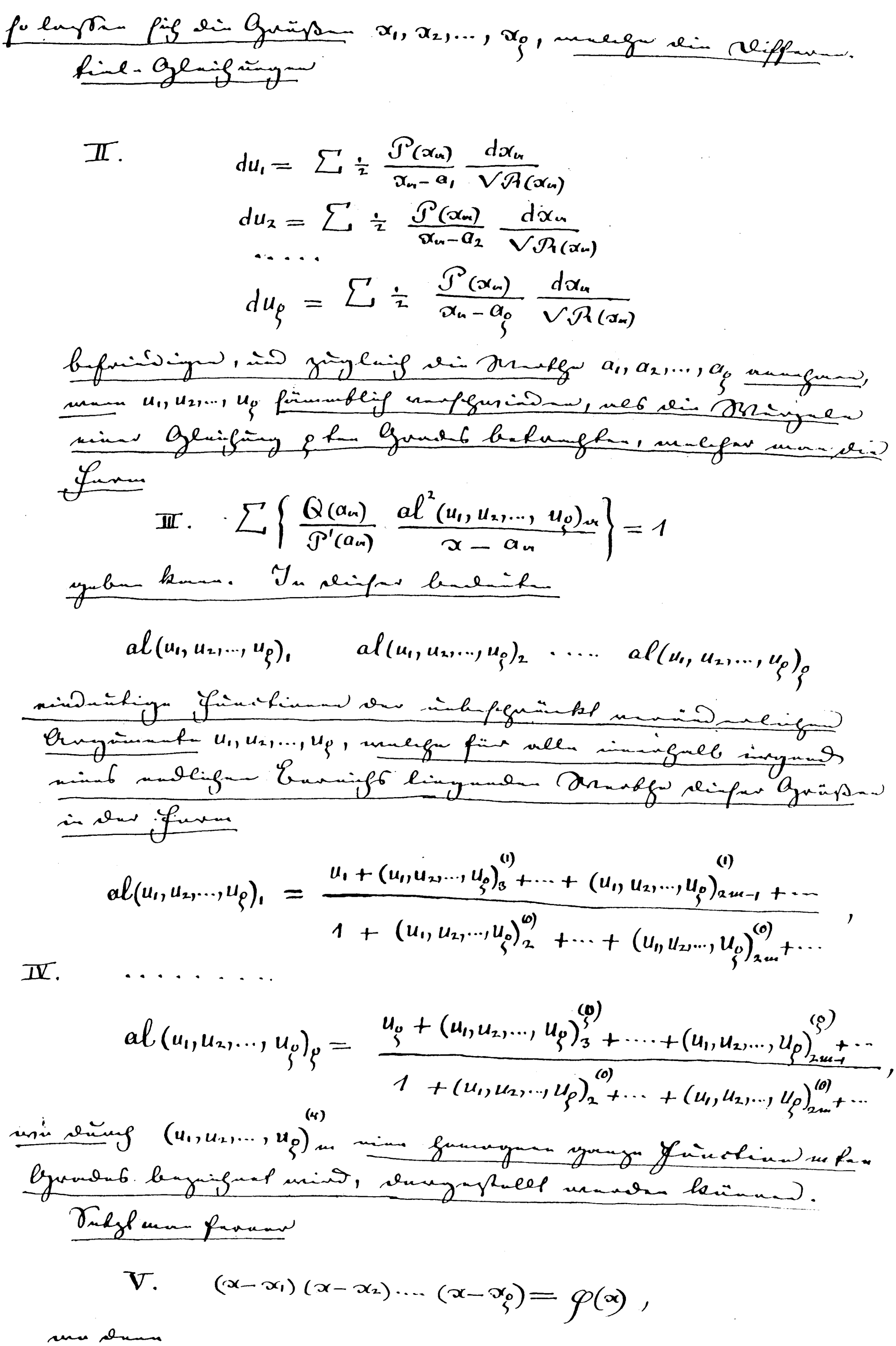
Gudermanns Arbeiten gehören jener Periode an, in der sich Vorstellungen über die Notwendigkeit einer Überprüfung der Grundlagen vermehrt zu artikulieren begannen, deren Realisierung jedoch noch außerhalb der vorhandenen Möglichkeiten lag. Vieles ist an vorbereitender Arbeit in dieser Zeit geleistet worden. Als dann in der zweiten Hälfte des vorigen Jahrhunderts neue allgemeine Theorien Gestalt annahmen, fielen jene vorbereitenden Beiträge der Vergessenheit anheim, so auch die Arbeiten Gudermanns.[3]) Die historische Betrachtung kann sich aber nicht, um ein Bild zu gebrauchen, auf das Anfertigen von Torschützenlisten beschränken.

Weierstraß legt im April 1841 die mündlichen Prüfungen zum Lehrerexamen ab und wäre beinahe durchgefallen! In einem Brief der Münsteraner Prüfungskommission an das Kultusministerium in Berlin vom 15. Mai 1841 heißt es, daß „weniger von einem *Zurücktreten* [...] als vielmehr nur von einem wirklichen Mangel [an naturwissenschaftlicher Bildung] die Rede sein kann“. Man erbittet höhere Weisung aus Berlin. Von dort trifft im Juni 1841 die Entscheidung ein, dem Kandidaten ausnahmsweise die bedingte facultas docendi zu erteilen. ([22], 27–28.)

Bereits während des sich anschließenden Probejahres in Münster entwickelt Weierstraß jene Grundlagen, die das Fundament seiner Funktionentheorie können. Ich habe damit nicht geeilt, weil ich erst zu einem bestimmten Abschluß kommen wollte. Seit einem Jahre habe ich nunmehr das mir zunächst gesteckte Ziel erreicht, und könnte nun mit einer Reihe von Arbeiten auftreten, von denen ich mir sichern Erfolg verspreche, wenn ich zur Redaktion meiner Papiere, die nur für mich verständliche Hieroglyphen en[t]halten, Kraft und Muße finden könnte. [...] Ich trage mich seit einiger Zeit – entre nous – mit dem Gedanken herum, mich um eine Anstellung in Oesterreich zu bewerben. Mir ist die ganze borussische Wirtschaft so im Innersten des Herzens verhaßt und zuwider geworden, daß ich lieber im Reich der Mitte leben möchte, als Beamter sein im Staat der Intelligenz. [...] Vale Karl". ([25].)

Obwohl wir nun nicht mehr werden sagen können, von welchen Arbeiten im einzelnen Weierstraß hier spricht, dürften wir indessen kaum einen Fehler bei der Annahme begehen, daß seine Untersuchungen zum Umkehrproblem für hyperelliptische Integrale darunter gewesen sind. Fernab von den Zentren der mathematischen Forschung war Weierstraß die Lösung des 1832 von Jacobi formulierten Problems gelungen. Als die Hauptergebnisse in einer Art Übersichtsbericht 1854 im Crelleschen Journal erscheinen, ist die Sensation perfekt. Wenn Weierstraß, wie wir gelesen haben, sich von seinen Arbeiten „sichern Erfolg" verspricht, so ist eine solche Äußerung zu diesem Zeitpunkt nicht ganz uninteressant. Man kann einem am 4. Juni 1884, also mehr als 30 Jahre später geschriebenen Brief von Weierstraß an Schwarz entnehmen, daß Weierstraß 1853 bei einem Besuche Münsters erstmals das vollständige Gutachten Gudermanns zur Kenntnis gelangte, das eine hohe Wertschätzung der schriftlichen Prüfungsarbeiten enthielt. Wäre ihm, heißt es weiter bei Weierstraß, dies früher bekannt gewesen, er hätte die Arbeit drucken lassen und sich um eine Stelle an einer Universität beworben. Es mag sein, wie gelegentlich herauszuhören ist, daß Gudermanns Urteil für Weierstraß der Anstoß, sagen wir, der letzte Anstoß, zur besagten Publikation im darauffolgenden Jahr 1854 gewesen war, der uns vorliegende Brief zeigt aber auch, daß Weierstraß einer Ermunterung oder Aufforderung zur Publikation seiner Untersuchungen nicht bedurfte. Was seine Arbeit betraf, so war er sich des Erfolges durchaus sicher.

Nach dem Paukenschlag von 1854 vollzogen sich in Weierstraß' Leben in relativ kurzer Zeit entscheidende Veränderungen: Ehrenpromotion durch die Universität Königsberg, einjährige Freistellung vom Schuldienst zur Fortführung



so lassen sich die Größen $x_1, x_2, \ldots, x_\rho$, welche die Differential-Gleichungen

$$\text{II.}\quad \begin{aligned} du_1 &= \sum \tfrac{1}{2} \frac{P(x_a)}{x_a - a_1} \frac{dx_a}{\sqrt{R(x_a)}} \\ du_2 &= \sum \tfrac{1}{2} \frac{P(x_a)}{x_a - a_2} \frac{dx_a}{\sqrt{R(x_a)}} \\ &\ldots\ldots \\ du_\rho &= \sum \tfrac{1}{2} \frac{P(x_a)}{x_a - a_\rho} \frac{dx_a}{\sqrt{R(x_a)}} \end{aligned}$$

befriedigen, und zugleich die Werthe $a_1, a_2, \ldots, a_\rho$ annehmen, wenn $u_1, u_2, \ldots, u_\rho$ sämmtlich verschwinden, als die Wurzeln einer Gleichung ρten Grades betrachten, welcher man die Form

$$\text{III.}\quad \sum \left\{ \frac{Q(a_a)}{P'(a_a)} \, \frac{al^2(u_1, u_2, \ldots, u_\rho)_a}{x - a_a} \right\} = 1$$

geben kann. In dieser bedeuten

$$al(u_1, u_2, \ldots, u_\rho)_1, \quad al(u_1, u_2, \ldots, u_\rho)_2 \;\ldots\; al(u_1, u_2, \ldots, u_\rho)_\rho$$

eindeutige Functionen der unbeschränkt veränderlichen Argumente $u_1, u_2, \ldots, u_\rho$, welche für alle innerhalb irgend eines endlichen Bereichs liegenden Werthe dieser Größen in der Form

$$\text{IV.}\quad \begin{aligned} al(u_1, u_2, \ldots, u_\rho)_1 &= \frac{u_1 + (u_1, u_2, \ldots, u_\rho)_3^{(1)} + \cdots + (u_1, u_2, \ldots, u_\rho)_{2m-1}^{(1)} + \cdots}{1 + (u_1, u_2, \ldots, u_\rho)_2^{(0)} + \cdots + (u_1, u_2, \ldots, u_\rho)_{2m}^{(0)} + \cdots}, \\ &\ldots\ldots\ldots \\ al(u_1, u_2, \ldots, u_\rho)_\rho &= \frac{u_\rho + (u_1, u_2, \ldots, u_\rho)_3^{(\rho)} + \cdots + (u_1, u_2, \ldots, u_\rho)_{2m-1}^{(\rho)} + \cdots}{1 + (u_1, u_2, \ldots, u_\rho)_2^{(0)} + \cdots + (u_1, u_2, \ldots, u_\rho)_{2m}^{(0)} + \cdots}, \end{aligned}$$

wo durch $(u_1, u_2, \ldots, u_\rho)_m^{(\kappa)}$ eine homogene ganze Function $m$ten Grades bezeichnet wird, dargestellt werden können.

Setzt man ferner

$$\text{V.}\quad (x - x_1)(x - x_2)\cdots(x - x_\rho) = \varphi(x),$$

wo dann

Seite aus K. Weierstraß' Manuskript „Theorie der Abel'schen Functionen" mit dem Satz über die Darstellung der al-Funktionen (ältestes (?) überliefertes mathematisches Manuskript von Weierstraß' Hand (1856 publiziert)) (Institut Mittag-Leffler, Djursholm).

hinzugefügt werden, daß Weierstraß nach dem Sprachgebrauch in unseren Tagen hyperelliptische Funktionen und damit einen speziellen Fall von Abelschen Funktionen im jetzigen Sinne betrachtet. Zum Hauptergebnis gehört die folgende Aussage (Gleichung (IV) im Faksimileabdruck):

„In dieser bedeuten

$$al(u_1, u_2, \ldots, u_\varrho)_1 \quad al(u_1, u_2, \ldots, u_\varrho)_2 \quad \ldots \quad al(u_1, u_2, \ldots, u_\varrho)_\varrho$$

eindeutige Functionen der unbeschränkt veränderlichen Argumente u_1, $u_2, \ldots, u_\varrho$, welche für alle innerhalb irgend eines endlichen Bereichs liegenden Werthe dieser Größen in der Form

$$al(u_1, u_2, \ldots, u_\varrho)_1 = \frac{u_1 + (u_1, u_2, \ldots, u_\varrho)_3^{(1)} + \ldots + (u_1, u_2, \ldots, u_\varrho)_{2\mathfrak{m}-1}^{(1)} + \ldots}{1 + (u_1, u_2, \ldots, u_\varrho)_2^{(0)} + \ldots + (u_1, u_2, \ldots, u_\varrho)_{2\mathfrak{m}}^{(0)} + \ldots},$$

$$\cdots\cdots$$

$$al(u_1, u_2, \ldots, u_\varrho)_\varrho = \frac{u_\varrho + (u_1, u_2, \ldots, u_\varrho)_3^{(\varrho)} + \ldots + (u_1, u_2, \ldots, u_\varrho)_{2\mathfrak{m}-1}^{(\varrho)} + \ldots}{1 + (u_1, u_2, \ldots, u_\varrho)_2^{(0)} + \ldots + (u_1, u_2, \ldots, u_\varrho)_{2\mathfrak{m}}^{(0)} + \ldots},$$

wo durch $(u_1, u_2, \ldots, u_\varrho)_{\mathfrak{m}}^{(\mathfrak{r})}$ eine homogene ganze Function $\mathfrak{m}$-ten Grades bezeichnet wird, dargestellt werden können."[5])

Nach heutigem Sprachgebrauch liegt folgende Situation vor: Betrachten wir eine hyperelliptische Kurve X vom Geschlecht ϱ (alles definiert über den komplexen Zahlen $\mathbb{C}$), betrachten wir die Jacobische Mannigfaltigkeit Jac(X) dieser Kurve. Das ist eine spezielle Abelsche Mannigfaltigkeit der Dimension ϱ; betrachten wir schließlich den Funktionenkörper der Jacobischen Mannigfaltigkeit $\mathbb{C}$(Jac(X)). Die von Weierstraß angeführten ϱ Funktionen al bilden eine Transzendenzbasis dieses Funktionenkörpers, d. h. für jede beliebige Funktion des Funktionenkörpers besteht eine algebraische Relation mit den ϱ Funktionen al (Abhängigkeitssatz für Abelsche Funktionen, hier im Falle hyperelliptischer Funktionen ausgesprochen). Die heute nicht mehr gebräuchliche Bezeichnung soll übrigens an Abel erinnern. Das Hauptproblem für Weierstraß bestand in der Konstruktion einer Darstellung der al-Funktionen. Wir wissen, daß diese Funktionen als Quotienten beständig konvergierender Potenzreihen darstellbar sind. Dies kann Weierstraß zu diesem Zeitpunkt noch nicht beweisen. Er findet freilich solche Darstellungen (es sind die, die in der Gleichung (IV) angegeben sind), sie hängen aber noch von einem vorher zu fixierenden, zwar beliebigen, aber beschränkten Bereich der Variablen u_i ab.

Mit seiner Übersiedlung nach Berlin nahm Weierstraß seine Vorlesungstätigkeit auf, die sich über einen Zeitraum von mehr als 30 Jahren erstrecken sollte. Er begann im WS 1856/57 an der Berliner Universität mit einer Vorlesung über ausgewählte Kapitel der mathematischen Physik.

Werfen wir einmal einen Blick in eine der frühen Weierstraß-Vorlesungen. Es handelt sich hierbei um eine undatierte Ausarbeitung einer Vorlesung über

---

[5]) So auch abgedruckt in: Journal für die reine und angewandte Mathematik 52 (1856) 314–315.

Differentialrechnung (aus dem Institut Mittag-Leffler). Als mögliche Datierung scheint mir vor allem das Jahr 1859 in Betracht zu kommen. Wir finden hier folgende Aussage:

> „Jede Function ist stetig veränderlich, wenn ihr Argument stetig veränderlich ist; und es ist dies folgendermaaßen zu definiren: Wenn man dem Argumente einer Function einen Werth zufügt, der so klein ist, als man ihn nur denken kann, so erleidet die Function eine Änderung welche ebenfalls so klein ist, daß man sie sich kaum vorstellen kann."

Kaum zu glauben, daß dies Weierstraß mit der sprichwörtlichen Strenge sein soll. Vergeblich würden wir nach ε oder δ Ausschau halten. Noch scheint es ein weiter Weg bis zu den uns geläufigen Formulierungen. Schon Cauchy hatte in seinem 1821 erschienenen *Cours d'Analyse* den Stetigkeitsbegriff in dieser Form eingeführt. Natürlich hat man bei solchen Nachschriften stets zu berücksichtigen, daß durch Ungenauigkeiten, Auslassungen, Fehlinterpretationen des Mitschreibers oder desjenigen, der die Ausarbeitung angefertigt hat, zusätzliche Probleme bei der Herstellung eines möglichst authentischen Textes auftreten können.

Wir haben bereits in unserem Beispiel einen solchen Fall vorliegen. Die hier für Funktionen einer reellen Veränderlichen ausgesprochene Eigenschaft trifft gar nicht für *jede* Funktion zu. Es ist auch keineswegs so, daß Weierstraß in dieser Vorlesung die Betrachtungen von vornherein etwa auf *stetige* Funktionen eingeschränkt hätte. Im SS 1874 äußert Weierstraß in seiner Vorlesung einmal:

> „Da ich in früheren Jahren die Erfahrung gemacht habe, daß meine vorgetragenen Sätze entweder gar nicht oder doch nicht richtig aufgefaßt werden, so habe ich mich entschlossen, immer eine Einleitung vorangehen zu lassen, in der die Grundbegriffe der Arithmetik entwickelt werden." (Zit. in [13], 80.)

Von der 1872 durch Ernst Kossak publizierten ersten Darstellung der Weierstraßschen Konstruktion der reellen Zahlen, die sich auf Weierstraß' Vorlesung vom WS 1865/66 über analytische Funktionen stützte, äußerte Weierstraß Mittag-Leffler gegenüber: „Sie wissen, wie meine Einleitung in die Funktionentheorie von Herrn Kossak [...] verhunzt worden ist." (Zit. in [13], 80).[6]) Betrachten wir noch, wie in unserer Ausarbeitung der Begriff der Ableitung eingeführt wird. Für zwei Beispiele von Funktionen $f(x)$ wird für eine Änderung des Argumentes x um h für die entsprechende Änderung der Funktionswerte, d. h. für die Differenz $f(x+h)-f(x)$, gefunden, daß

> „diese Änderung aus zwei Theilen besteht, von denen der erste der Änderung h [...] proportional ist, während der zweite [...] im Verhältnis zum ersten noch ∞ klein ist."

Gemeint ist die Darstellbarkeit als Summe der Form $ch+hh'$, worin c von h unabhängig ist und h' mit h gegen Null konvergiert. Es heißt dann einfach: in der Differentialrechnung wird c als Differentialquotient bezeichnet. Damit dies eine korrekte Definition ist, muß nachgewiesen werden, daß c durch die Zerlegung *eindeutig* bestimmt ist. Weiter heißt es:

---

[6]) Den nach Angaben von K. Kopfermann vom 5. 4. 1895 datierten Weierstraß-Brief habe ich im Institut Mittag-Leffler nicht auffinden können.

„Von einem Differential einer Function kann der Definition gemäß nur dann die Rede sein, wenn die Function stetig ist und sich die betreff[ende] Änderung in 2 Theile zerlegen läßt, wie die bei den 2 angeführten Beispielen betrachteten.“

So weit, so gut. Dann aber heißt es:

„Daß dieses letztere ganz allgemein möglich ist, möge die folgende Betrachtung lehren.“

Hier stutzt man natürlich! Sollte etwa nun der Versuch folgen, zu zeigen, daß jede stetige Funktion differenzierbar ist? Die angekündigte Betrachtung beginnt mit den Worten: „Man denke eine Function durch eine Curve dargestellt [...]“. Anhand von Skizzen folgen geometrische Betrachtungen unter Einbeziehung der Tangente usw. Am Schluß wird noch einmal festgestellt: „Durch diese Betrachtung ist obige Behauptung, daß die besprochene Zerlegung stets möglich ist, gerechtfertigt.“ Andererseits liegt der Vorlesung kein Funktionsbegriff zu Grunde, der in irgendeiner Weise zwingend an bestimmte geometrische Vorstellungen gebunden wäre. Denkbar ist, daß die Menge der Funktionen, die auf die betrachteten Kurven führen, die freilich nicht exakt definiert werden, als *hinreichend allgemeiner* Typ von Funktionen angesehen wird und in diesem Sinne die Formulierung „im allgemeinen“ zu interpretieren ist. Man sieht sich dann aber genötigt, die am Schluß der Betrachtung für die Wiederholung der Behauptung gewählte Formulierung als Schwäche der Ausarbeitung anzusehen.

Mit Blick auf das spätere, so markante Bild der Analysisvorlesungen von Weierstraß stellen wir fest, daß in diesem Stadium die Begriffe Konvergenz und Grenzwert noch nicht auftreten, dafür wird mit dem Terminus „unendlichklein“ operiert. In der Darstellung wird häufig auf die geometrische Anschauung zurückgegriffen, die spätere Klarheit der Ausdrucksweise scheint noch in weiter Ferne zu liegen. Ebensowenig findet man Ansätze einer Theorie der reellen Zahlen, wie sie später zum Standardprogramm im Zyklus der Weierstraßschen Vorlesungen gehört. Man sollte sich, was die Grundlagen der Analysis betraf, vergegenwärtigen, daß noch 1864 kein Geringerer als Joseph Bertrand ein Lehrbuch über Differential- und Integralrechnung veröffentlichte, das einen „Beweis“ der Differenzierbarkeit jeder stetigen Funktion enthielt.[7])

Bereits in der im SS 1861 am Gewerbeinstitut in Berlin gehaltenen Vorlesung über Differentialrechnung verwendet Weierstraß zur Definition „unendlich kleiner Änderungen“ des Arguments bzw. der Funktion δ und ε in der charakteristischen Weise. Es treten zwar weiterhin Formulierungen wie „unendlich klein“ auf, etwa bei der Definition der Stetigkeit. Weierstraß ergänzt sie aber schon übersteigen, $f(h)$ kleiner als δ ist. Dasselbe drückt man bequem auch so aus: $f(h)$ sei für ∞ kleine Werthe von h ebenfalls ∞ klein."[9])

Bei der Behandlung des Problems, unter welchen Bedingungen der Grenzwert einer Reihe von stetigen Funktionen wieder stetig ist, begegnen wir der uns aus Weierstraß' früheren Tagen vertrauten „Konvergenz im gleichen Grade".

An anderer Stelle ([28], 35) heißt es:

„Es gibt nun aber auch Größen, die sich durch die Einheit und Teile der Einheit nicht ausdrücken lassen; bei ihnen wendet man die Form der unendlichen Reihe an".

Diese Äußerung findet sich in einem Abschnitt über Potenzreihenentwicklung von Funktionen, wir dürfen darin aber wohl ein erstes Wetterleuchten der Weierstraßschen Theorie der reellen Zahlen erblicken. Wie weit Weierstraß zu diesem Zeitpunkt seine Theorie entwickelt hat, ist unklar.

Im WS 1863/64 geht Weierstraß zur Vorbereitung auf seine Vorlesung über die Theorie der analytischen Funktionen zum ersten Mal auf den Zahlbegriff ein. Im Unterschied zu G. Cantor und R. Dedekind basiert die Weierstraßsche Theorie auf dem Prinzip der Summenbildung. Dedekind war durch seine Lehrtätigkeit während des ersten Jahres in Zürich veranlaßt worden, über eine akzeptable Einführung von Grundbegriffen der Analysis nachzudenken. Nach seinen eigenen Angaben kam ihm die Idee, die reellen Zahlen durch jene Konstruktion zu beschreiben, die wir als Dedekindschen Schnitt bezeichnen, am 24. November 1858. Jede reelle Zahl zerlegt die Menge der rationalen Zahlen in zwei Teilmengen, diejenigen, die kleiner und diejenigen, die größer als diese Zahl sind. Dedekind stellte nun gewissermaßen diesen Sachverhalt auf den Kopf, indem er eine solche Zerlegung der Menge der rationalen Zahlen als *Definition* einer reellen Zahl nahm. Cantor schließlich geht in seiner Theorie von Fundamentalfolgen rationaler Zahlen aus.

Wie Dedekind scheint auch Weierstraß durch seine Vorlesungstätigkeit den Anstoß zur Ausarbeitung seiner Theorie der reellen Zahlen erhalten zu haben.

Wir sind heute an derartige Konstruktionen gewöhnt. Man hat sich aber zu vergegenwärtigen, wie ungewohnt sie in jener Zeit gewesen sind. So etwa hieß es noch 1889 in einer Arbeit in den *Mathematischen Annalen,* daß sich in die „Theorien" [des Herrn Weierstraß und die des Herrn Cantor] ein eigenartiger Fehler eingeschlichen" habe. Der Haupteinwand wird festgemacht an der Frage:

„Drücken die durch die Weierstrass'-Cantor'sche Theorie eingeführten neuen „Zahlen" in *irgend einer* Weise eine Vielheit oder Quantität aus? Sind sie vielmehr nicht blosse Zeichen für das Gegebensein einer Zahlreihe, so dass Quantitätsbezeichnungen [also „größer" oder „kleiner"] auf sie anzuwenden gar keinen Sinn hat?" ([11], 155, 157.)

Und aus der bejahenden Antwort auf diese Frage wird der Schluß gezogen, daß es nicht gelungen sei, einen allgemeinen Zahlbegriff zu begründen. In der Tat sind die neuen Konstruktionen nicht als Zeichen für bestimmte Quantitäten (d. h.

---

[9]) Da es sich um eine Mitschrift handelt, sind im Original gegenüber dem hier wiedergegebenen Text naturgemäß die einzelnen Wörter oft abgekürzt oder nur angedeutet.

zähl- und meßbare Größen) anzusehen und die eingeführten Begriffe wie „größer als" oder „kleiner als" definieren lediglich eine Ordnung. Die rationalen Zahlen drücken nach erfolgter Einbettung in den neu definierten Bereich keine bestimmten Quantitäten mehr aus, im Unterschied zu ihrer ursprünglichen Rolle.

In dem Zusammenhang ist vielleicht noch interessant, daß Weierstraß ausdrücklich darauf hinweist (besonders deutlich in seiner im SS 1886 gehaltenen Vorlesung über „Ausgewählte Kapitel aus der Funktionentheorie" ([32], 54–55)), daß es einen logischen Fehler darstellen würde, die irrationalen Zahlen als Grenzwert von rationalen Zahlen *definieren* zu wollen. Hiervon könne sinnvoll erst dann die Rede sein, wenn man die reellen Zahlen bereits definiert hat.

Soweit zur ersten Behandlung des Zahlbegriffs durch Weierstraß. In der im WS 1863/64 gehaltenen Vorlesung zur Theorie der analytischen Funktionen bedient sich Weierstraß weiterhin sowohl des Terminus „unendlichklein" als auch der Beschreibung durch ε und δ. Wir begegnen hier außerdem der folgenden Aussage:

> „Gibt es eine ∞ Reihe von Größen, die im endlichen Bereich liegen, so muß es nothwendig mindestens einen Punkt geben, in dessen Umgebung ∞ viele liegen" ([30].)

Der Satz von Bolzano-Weierstraß. Er wird hier, nach meiner Kenntnis des Archivmaterials, zum ersten Mal von Weierstraß in einer Vorlesung angeführt. Zum Beweis wird das uns vertraute Verfahren der Teilung von Quadraten in Teilquadrate verwendet. Interessant ist, daß er diesen „Hülfssatz, den man bei feineren mathematischen Untersuchungen nicht entbehren kann", für Punktmengen in der komplexen Zahlenebene ausspricht und zwar aus dem Grunde, um ihn sogleich zum Beweis des Identitätssatzes für Potenzreihen[10]) verwenden zu können. Bolzano hatte bekanntlich in seiner um 1830 verfaßten aber erst ein Jahrhundert später (1930) veröffentlichten *Functionenlehre* einen entsprechenden Satz, allerdings noch ohne Beweis, benutzt. Beachtung verdient außerdem die Tatsache, daß Weierstraß bereits in dieser Vorlesung darauf hinweist, daß es nicht begründet ist, daß stetige Funktionen notwendig differenzierbar seien. Entsprechende Beweise wären falsch, so etwa sei die Argumentation mit Hilfe von Kurven nicht stichhaltig. Nach Angaben von Schwarz hat sich Weierstraß bereits in seiner 1861 am Gewerbeinstitut gehaltenen Vorlesung über Differential- und Integralrechnung in diesem Sinne geäußert ([23], 252).[11]) Wie bekannt, hält Weierstraß am 18. Juli 1872 in der Berliner Akademie einen Vortrag über eine Funktion, die für alle reellen Zahlen definiert und stetig ist, aber an keiner Stelle differenziert werden kann. Beispiele für stetige Funktionen, die in unendlich vielen Punkten nicht differenzierbar und in unendlich vielen Punkten doch noch differenzierbar waren, kannte Weierstraß nach einer Bemerkung von G. Hettner (später als Mitheraus-

---

[10]) Hier in der Form: Zwei auf einer abgeschlossenen beschränkten Menge M (in $\mathbb{C}$) konvergente Potenzreihen, die in unendlich vielen Punkten übereinstimmen, sind identisch. Der Satz von Bolzano-Weierstraß liefert dann gerade mindestens einen Häufungspunkt in M jener Stellen der Übereinstimmung, dessen Existenz bei den später üblich gewordenen Formulierungen des Identitätssatzes gewöhnlich zu den Voraussetzungen zählt.

[11]) In der von Schwarz angefertigten Ausarbeitung [28] (nach eigenen Worten „kurzgefaßt") findet sich keine diesbezügliche Bemerkung.

geber an der Werkausgabe beteiligt) seit langem ([31], 265). Weierstraß selbst weist in dem erwähnten Akademievortrag darauf hin, daß Riemann bereits in seinen Vorlesungen um 1861 eine für alle reellen Zahlen stetige Funktion angegeben habe, von der aber nicht bekannt geworden sei, ob Riemann eine vollständige Beschreibung ihrer Differenzierbarkeitseigenschaften hatte. In der Tat ist das Riemannsche Beispiel von subtiler Natur. Wie aus einer Mitteilung von Hettner hervorgeht, fand Weierstraß einen „nicht einfachen" Beweis dafür, daß die Funktion auf einer dichten Teilmenge der reellen Zahlen nicht differenzierbar ist ([31], 266). In einer 1970 erschienenen Arbeit [9] wurde nachgewiesen, daß das Riemannsche Beispiel in gewissen rationalen Vielfachen von π doch differenzierbar ist. Die Reaktion auf das Weierstraßsche Beispiel reichte von Erstaunen über Unglauben bis hin zu Abscheu. Noch zwanzig Jahre später klagt Hermite in einem Brief an Th. J. Stieltjes von 20. Mai 1893:

> „Aber diese so eleganten Entwicklungen sind mit einem Fluch belegt; [...] Die Analysis nimmt mit der einen Hand zurück, was die andere gibt. Ich wende mich mit Abscheu und Schrecken von dieser beklagenswerten Wunde der stetigen nirgensdifferenzierbaren Funktionen ab [...]." ([1], 318.)

Anders etwa als Kummer hat Weierstraß neueste Ergebnisse in seine Vorlesungen einfließen lassen. So tritt auch die gerade erwähnte Funktion dort auf (bei nächster Gelegenheit im SS 1874, wo Weierstraß wieder über die Einleitung in die Theorie der analytischen Funktionen liest ([31], 268ff.)).

Soweit einige Bemerkungen über die Herausbildung grundlegender Begriffe der Analysis im Werk von Weierstraß.

Ich möchte nun noch einmal auf jenen eigentümlichen Buchstaben $\wp$ zurückkommen, oder, vielleicht etwas seriöser formuliert, mich der Weierstraßschen Umgestaltung der Theorie der elliptischen Funktionen zuwenden.

Die Theorie der elliptischen Funktionen gehörte zu den Forschungsgegenständen, denen Weierstraß besondere Aufmerksamkeit gewidmet hat. In seiner am 9. Juli 1857 gehaltenen akademischen Antrittsrede heißt es dazu: Diese Theorie hat „eine mächtige Anziehungskraft auf mich geübt, die auf den ganzen Gang meiner mathematischen Ausbildung von bestimmendem Einflusse geblieben ist." ([26], 224). In jenem Jahr, im SS 1857, hält Weierstraß seine erste Vorlesung über elliptische Funktionen. Es sind nicht mehr als 6 Hörer, die ihr folgen. Zu ihnen gehören Leo Koenigsberger und Lazarus Fuchs. Vergeblich würden wir hier nach der für den Weierstraßschen Aufbau charakteristischen Weierstraßschen Normalform suchen. Auch im WS 1860/61 folgt die Klassifikation der elliptischen Integrale dem Vorgange Legendres, im Mittelpunkt der Vorlesung stehen die Jacobischen elliptischen Funktionen in der von Gudermann eingeführten Bezeichnungsweise. Am 16. Dezember 1861 erleidet Weierstraß während einer Vorlesung einen körperlichen Zusammenbruch. Seine Gesundheit ist so stark angegriffen, daß er erst nach einjähriger Unterbrechung im WS 1862/63 in der Lage ist, seine Vorlesungstätigkeit wieder aufzunehmen. Nunmehr bleibt er während seines Vortrages sitzen, einer der fortgeschritteneren Studenten übernimmt das Amt des Tafelanschreibers. In dieser ersten Vorlesung nach der Unterbrechung behandelt

Weierstraß die Theorie der elliptischen Funktionen. Wieder begegnen wir der Legendreschen Reduktionstheorie für elliptische Differentiale. In einer erhalten gebliebenen Ausarbeitung von Schwarz heißt es im Anschluß daran:

> „Wir wollen nun eine andere Substitution behandeln, welche sich von der vorhergehenden in mehrfacher Beziehung auszeichnet. Die Rechnungen empfehle ich Ihnen sorgfältig auszuarbeiten, weil diese Substitution noch nirgends angegeben ist, welche ich eigens zum Behufe dieser Vorlesung ausgearbeitet habe. Es ist möglich, daß die Rechnung in manchen Punkten noch abgekürzt werden kann." ([29], Ausarbeitung der Vorlesung vom 11. 11. 1862, Bl. 80.)

Eine derart explizite Äußerung ist natürlich für den Historiker ein Glücksfall. In der Tat führt die von Weierstraß hier angekündigte Substitution auf die uns als Weierstraßsche Normalform bekannte Relation, die damit ab 1862 von Weierstraß zum Aufbau seiner Theorie der elliptischen Funktionen verwendet wurde. Hermite hatte bereits in einer 1856 erschienenen Arbeit die zwischen den Invarianten und Kovarianten binärer Formen vierten Grades bestehende Relation (und darin steckt ja schon die Weierstraßsche Normalform) zur Transformation elliptischer Integrale verwendet und war so zur Normalform eines elliptischen Integrales erster Gattung im Weierstraßschen Sinne gelangt ([10], 8). Elliptische Funktionen wurden in der genannten Vorlesung (und danach immer) nicht etwa, wie heute üblich, als doppeltperiodische meromorphe Funktionen eingeführt, sondern als Lösungen von Differentialgleichungen $\left(\frac{dx}{du}\right)^2 = R(x)$ (mit Polynomen $R(x)$ vom Grad 3 oder 4 ohne mehrfache Nullstellen), was der für Weierstraß charakteristische Standpunkt ist:

> „Wir betreten hiermit ein wenig cultivirtes Feld [der mathematischen Spekulation][12]). Wir werden zeigen, wie es gelingt, aus der Betrachtung der Differentialgleichung, welcher eine Funktion genügt, den analytischen Charakter einer Funktion zu entwickeln." ([29], Bl. 142.)

Nach den Worten des Weierstraß-Schülers Emil Lampe „überraschte Weierstraß seine Studenten dadurch, daß er in dem angekündigten Kolleg über elliptische Functionen zum erstenmale die Theorie seiner grundlegenden Functionen $\wp(u)$ und $\sigma(u)$ entwickelte." ([18], 40.) Allerdings ist dem hinzuzufügen, daß Weierstraß sich hier des eigentümlichen Buchstabens $\wp$ noch nicht bediente (während σ zur Bezeichnung der Sigmafunktion bereits verwendet wird). Eine genaue Datierung für die Einführung von $\wp$ habe ich auf Grund des mir bekannten Archivmaterials nicht ermitteln können. Aber spätestens seit dem WS 1868/69 hat jenes Zeichen seinen Platz in den Vorlesungen eingenommen.

In den vor ihm liegenden Jahren steigt Weierstraß zu einer der ersten Autoritäten in der mathematischen Welt auf. Seine Vorlesungen werden zum Anziehungspunkt für Studenten und bereits ausgebildete Mathematiker gleichermaßen. Darunter: Georg Cantor, Georg Frobenius, Lazarus Fuchs, Otto Hölder, Adolf Hurwitz, Gösta Mittag-Leffler, Hans von Mangoldt, Carl Runge, Friedrich Schottky, Friedrich Schur, H. A. Schwarz, Ludwig Stickelberger und – wer wüßte es nicht – Sofja Kowalewskaja. Sie kam in Herbst 1870 nach Berlin, wo sie vier Jahre blieb und Weierstraß' vertraute Schülerin und Freundin wurde, die, wie er es einmal ausdrückte, ein gütiges Geschick ihn noch in späten Jahren finden ließ. Ich kann heute auf diese in der Wissenschaftsgeschichte ihresgleichen suchende Verbindung nicht eingehen.

Trotz der hohen Anerkennung, die Weierstraß und seinem Werk aus ganz Europa zuteil wurde, waren etwa die letzten 15 Jahre seines Lebens von der Sorge

Beziehung zwischen Weierstraß und Kronecker hatte mehr und mehr Entfremdung Platz gegriffen. Öffentlich sind Weierstraß und Kronecker nie gegeneinander aufgetreten. In den Briefen an seine vertraute Schülerin und Freundin berührt Weierstraß dieses Thema erstmals am 27. August 1883. Daß eine Divergenz in den wissenschaftlichen Ansichten zwischen ihm und Kronecker besteht, wisse er seit langem. In einem am 24. März 1885 geschriebenen Brief an Kowalewskaja lesen wir:

> „Mein Freund Kronecker, mit dem ich früher in Betreff der wichtigsten Fragen in Übereinstimmung war, und auch Fuchs arbeiten mir entgegen, der eine mit Bewußtsein und Absicht, der andere, theils der Autorität des ersteren sich unterwerfend, theils aus mangelhafter Kenntniß der Bedeutung der Fragen, um die es sich handelt. So kommt es nicht selten vor, daß ich in einer Vorlesung einen Satz aufstelle und zu beweisen vermeine, der in einer anderen Vorlesung als unhaltbar und trügerisch bezeichnet wird. Während ich sage, daß eine sog[enannte] irrationale Zahl eine so reale Existenz habe wie irgend etwas anderes in der Gedankenwelt , ist es bei Kronecker jetzt ein Axiom, daß es nur Gleichungen zwischen ganzen Zahlen gebe." ([6], Brief 136.)

Damit sind wir beim Kern der Kontroverse zwischen Weierstraß und Kronecker angelangt. Kroneckers Grundhaltung bestand in der

Potenzen von Variablen fortschreitet, ist meines Erachtens nur mit dem Vorbehalte zulässig, daß in jedem speciellen Falle auf Grund des arithmetischen Bildungsgesetzes der Glieder (oder der Coefficienten) [...] gewisse Voraussetzungen als erfüllt nachgewiesen werden, welche die Reihe wie endliche Ausdrücke anzuwenden gestatten, und welche also das Hinausgehen über den Begriff einer *endlichen* Reihe eigentlich unnöthig machen." ([17], 336.)

Zuweilen empfindet Weierstraß die Form der Auseinandersetzung als verletzend, so, als er Kenntnis von einem Brief erhält, den Kronecker am 25. Dezember 1884 an Schwarz schrieb.

„Wenn mir noch Jahre und Kräfte genug bleiben, werde ich selber noch der mathematischen Welt zeigen, daß nicht bloß die Geometrie, sondern auch die Arithmetik der Analysis die Wege weisen kann – und sicher die *strengeren.* Kann ich's nicht mehr thun, so werden's die thun, die nach mir kommen, und sie werden auch die Unrichtigkeit aller jener Schlüsse erkennen, mit denen jetzt die sogenannte Analysis arbeitet." ([16].)

Die Situation in Berlin hatte für Weierstraß ein solches Ausmaß an Belastung erreicht, daß er nur wenige Wochen vor der Feier seines 70. Geburtstages (es war aus diesem Anlaß eigens ein Festkomitee unter Vorsitz von Lazarus Fuchs gebildet worden) seiner Freundin nach Stockholm schrieb: „Um es kurz zu sagen, ich bin zu dem Entschlusse gekommen, Berlin zu verlassen und in die Schweiz überzusiedeln." ([6], Brief 141.)

Mehrfach hat er die Absicht geäußert, sich in der Kontroverse mit Kronecker zu Wort melden zu wollen. Es ist nie geschehen. Vielleicht hatte er sich mit Rücksicht auf seinen labilen Gesundheitszustand nicht mehr dazu entschließen können; eine Abneigung, solcherart Auseinandersetzung in die Öffentlichkeit zu tragen, dürfte wohl auch eine Rolle gespielt haben.

Mit einem der letzten im Mittag-Leffler-Institut vorgefundenen Schriftstücke von Weierstraß' Hand möchte ich meine Ausführungen beschließen.

Es ist ein Brief, den Weierstraß am 14. März 1891 an Mittag-Leffler schrieb. Wenige Wochen zuvor, am 10. Februar, war binnen weniger Tage, unerwartet für alle, Sofja Kowalewskaja, erst 41jährig, aus dieser Welt geschieden. Wenn Sie diese Schriftzüge sehen (vgl. den Faksimileabdruck), ahnen Sie, wie sehr Weierstraß noch ganz unter dem erschütternden Eindruck der Nachricht von ihrem Tode steht, als er jene Zeilen an Mittag-Leffler schreibt.

„Wie schwer und tief mich der Tod unserer unvergesslichen Freundin Sonja erschüttert hat, brauche ich Ihnen nicht zu sagen, da Sie wissen, wie nahe ich ihr gestanden und wie sehr sie das Wenige, das ich für sie habe thun können, durch treueste Anhänglichkeit und hingebenstes Vertrauen mit vergolten hat. [...] Mehr zu schreiben ist mir für heute nicht möglich. [...] Die Ärzte vertrösten mich auf die bessere Jahreszeit, doch habe ich nur wenig Hoffnung [...] auf einigermassen dauernde Genesung. Jed[e] Nacht gegen 12 Uhr kommt ein junger Arzt zu mir und macht eine Morphiumeinspritzung (jetzt sei[t] 3 Monaten ununterbrochen), dadurch bekomme ich meistens leidliche Nachtruhe und befinde mich dann bis gegen Mittag besser; von da an bis Mitternacht plagen mich unaufhörlich neuralgische Schmerzen. [...] Herrn Phragmen wollen Sie von mir und meinen Schwestern angelegentlichst grüssen und bestens danke[n] für die Mühwaltung, die sie, wenn ich recht verstanden, auch Ihnen gezeigt hat. Diese Papiere möchte ich nicht gern in fremde

[illegible]

Hände gelangen lassen, und bitte Sie, denselben besonders nachforschen zu ~~[illegible]~~ wollen.

Herrn ~~[illegible]~~ Phragmen wollen Sie von mir und meinen Schwestern angelegentlichst grüßen und bestens danken für die Mühwaltung, der er sich so bereitwillig unterzogen. Meine Schwester Clara hat aber noch immer die Rechnung für den Kranz

[illegible]

Güte, diese Sache in Ordnung zu bringen.

Mit herzlichen Grüßen von Haus zu Haus

Ihr hochachtungsvoll ergebener

Weierstraß

N. S. Kronecker hat in seinem Journal unserer Freundin einen Nachruf gewidmet, mit dem Sie ~~[illegible]~~ zufrieden sein werden. Die darin ~~[illegible]~~ enthaltenen

der er sich so bereitwillig unterzogen.[13]) Meine Schwester Clara hat aber noch immer die Rechnung für den Kranz nicht bekommen. Haben Sie doch die Güte, diese Sache in Ordnung zu bringen.
Mit herzlichen Grüssen von Haus zu Haus

Ihr hochachtungsvoll ergebener
Weierstraß"

Die wenigen Briefe aus den Folgejahren sind fast ausschließlich bis auf die Unterschrift nicht mehr eigenhändig geschrieben. Die letzten drei Lebensjahre verbringt Weierstraß in fast völliger Bewegungslosigkeit im Rollstuhl. Er stirbt am 19. Februar 1897 an den Folgen einer Lungenentzündung. Die ursprüngliche Grabstätte auf dem Friedhof der Berliner St.-Hedwigs-Gemeinde in der Liesenstraße besteht zwar nicht mehr (sie befand sich direkt an der Berliner Mauer), der Grabstein jedoch, ein Obelisk aus schwarzem schwedischen Granit, hat unversehrt die Zeiten überdauert. Nachdem bereits 1891 Kronecker und 1893 Kummer gestorben waren, ging mit Weierstraß eine Ära der Mathematik in Berlin zu Ende. Erfüllt von Sorge um den Fortbestand des wissenschaftlichen Werkes ihres Bruders hatte sich Clara Weierstraß an Sofja Kowalewskaja mit der Bitte um ein aufrichtiges Urteil gewandt, die ihr daraufhin mit folgenden Zeilen antwortete:

„Für mich ist keine Sache der Welt sicherer als diese: die von Weierstraß gefundenen mathematischen Wahrheiten werden anerkannt sein, solange es überhaupt Mathematiker auf der Erde geben wird. Seine Name wird erst vergessen sein, wenn man auch die Namen von Gauß und Abel vergessen haben wird." ([15].)

Ich danke Ihnen!

Quellen- und Literaturverzeichnis

[1] Baillaud, B.; Bourget, H. (Eds.): Correspondance d'Hermite et de Stieltjes. Tome II. Paris: Gauthier-Villars 1905

[2] Behnke, H.: Karl Weierstraß und seine Schule. In: [3], 13–40

[3] Behnke, H.; Kopfermann, K. (Hrsg.): Festschrift zur Gedächtnisfeier für Karl Weierstraß. 1815–1965. (Wissenschaftliche Abhandlungen der Arbeitsgemeinschaft für Forschung des Landes Nordrhein-Westfalen; 33.) Köln und Opladen: Westdeutscher Verlag 1966

[4] Biermann, K.-R.: Karl Weierstraß. Ausgewählte Aspekte seiner Biographie. Journal für die reine und angewandte Mathematik **223** (1966) 191–220

[5] Bölling, R.: Karl Weierstraß (1815–1897). Journal für die reine und angewandte Mathematik **429** (1992) (unpaginiert)

[6] Bölling, R. (Hrsg.): Briefwechsel zwischen Karl Weierstraß und Sofja Kowalewskaja. Berlin: Akademie Verlag 1993

[7] Dugac, P.: Éléments d'analyse de Karl Weierstrass. Archive for History of Exact Sciences **10** (1973) 41–176

[8] Edwards, H.M.: An Appreciation of Kronecker. The Mathematical Intelligencer **9**, No. 1 (1987) 28–35

[9] Gerver, J.: The Differentiability of the Riemann Function at certain rational multiples of π. American Journal of Mathematics **92** (1970) 33–55

[10] Hermite, Ch.: Sur la théorie des fonctions homogènes à deux indéterminées. Premier mémoire. Journal für die reine und angewandte Mathematik **52** (1856) 1–17

[13]) Edvard Phragmén hatte im Auftrage Mittag-Lefflers noch am Todestag Kowalewskajas einen Brief an Clara (?) Weierstraß über die letzten Tage und Stunden im Leben Sofjas geschrieben.

[11] Illigens, E.: Zur Weierstrass'-Cantor'schen Theorie der Irrationalzahlen. Mathematische Annalen **33** (1889) 155–160

[12] Kiepert, L.: Persönliche Erinnerungen an Karl Weierstraß. Jahresbericht der Deutschen Mathematiker-Vereinigung **35** (1926) 56–65

[13] Kopfermann, K.: Weierstraß' Vorlesung zur Funktionentheorie. In: [3], 75–96

[14] [Kotschina, P. Ja.] Кочина, П. Я.: Карл Вейерштрасс, 1815–1897. Москва: Наука 1985

[15] S. Kowalewskaja an Cl. Weierstraß. Undatiert [etwa Ende 1887]. Institut Mittag-Leffler, Djursholm (Schweden)

[16] L. Kronecker an H. A. Schwarz. 25. 12. 1884. Archiv der Akademie der Wissenschaften Berlin; Nachlaß Schwarz, Nr. 973

[17] Kronecker, L.: Ueber einige Anwendungen der Modulsysteme auf elementare algebraische Fragen. Journal für die reine und angewandte Mathematik **99** (1886) 329–371

[18] Lampe, E.: Karl Weierstraß. Jahresbericht der Deutschen Mathematiker-Vereinigung **6** (1899) 27–44

[19] Manning, K.R.: The Emergence of the Weierstrassian Approach to Complex Analysis. Archive for History of Exact Sciences **14** (1975), No. 4, 297–383

[20] G. Mittag-Leffler an H. Schulz. 5. 7. 1904. Institut Mittag-Leffler, Djursholm (Schweden)

[21] G. Mittag-Leffler an H. Schulz. 24. 10. 1904. Institut Mittag-Leffler, Djursholm (Schweden)

[22] Schubring, G.: Warum Karl Weierstraß beinahe in der Lehrerprüfung gescheitert wäre. Der Mathematikunterricht **35** (1989), Heft 1, 13–29

[23] Schwarz, H.A.: Beispiel einer stetigen nicht differentiirbaren Function. Verhandlungen der Schweizerischen Naturforschenden Gesellschaft **56** (1873) 252–258

[24] Tropfke, J.: Geschichte der Elementarmathematik. 4. Auflage. Band 1. Arithmetik und Algebra. Vollständig neu bearbeitet von K. Vogel, K. Reich, H. Gericke. Berlin, New York: W. de Gruyter 1980

[25] K. Weierstraß an P. Weierstraß. 6. 5. 1850. Institut Mittag-Leffler, Djursholm (Schweden)

[26] Weierstraß, K.: Akademische Antrittsrede, gehalten in der öffentlichen Sitzung der Berliner Akademie am 9. Juli 1857. In: [33], 223–226

[27] Weierstraß, K.: [Differentialrechnung.] Sommersemester 1861. [Vorlesungsausarbeitung bzw. -mitschrift von H.A. Schwarz.] Archiv der Akademie der Wissenschaften Berlin; Nachlaß Schwarz, Nr. 26

[28] Weierstraß, K.: Differentialrechnung. Nach einer Vorlesung des Herrn Professor Weierstrass im Sommersemester 1861. Maschinegeschriebenes Manuskript (undatiert) von H.A. Schwarz. Humboldt-Universität Berlin. Bibliothek des Fachbereiches Mathematik

[29] Weierstraß, K.: [Theorie der elliptischen Functionen.] Wintersemester 1862/63. [Vorlesungsausarbeitung bzw. -mitschrift von H.A. Schwarz.] Archiv der Akademie der Wissenschaften Berlin; Nachlaß Schwarz, Nr. 28

[30] Weierstraß, K.: Theorie analytischer Functionen. Winter 1863/64. [Vorlesungsmitschrift von H. A. Schwarz.] Archiv der Akademie der Wissenschaften Berlin; Nachlaß Schwarz, Nr. 29

[31] Weierstraß, K.: Einleitung in die Theorie der analytischen Functionen. Sommer 1874. Vorlesungsausarbeitung von G. Hettner. Humboldt-Universtität Berlin. Bibliothek des Fachbereiches Mathematik

[32] Weierstraß, K.: Ausgewählte Kapitel aus der Funktionenlehre. [1886.] Herausgegeben von R. Siegmund-Schultze. (Teubner-Archiv zur Mathematik; 9.) Leipzig: BSB B.G. Teubner 1988

[33] Weierstraß, K.: Mathematische Werke von Karl Weierstraß. Bd. 1. Abhandlungen I. Herausgegeben unter Mitwirkung einer von der Königlich Preußischen Akademie der Wissenschaften eingesetzten Commission. Berlin: Mayer & Müller 1894

[34] Weierstraß, K.: Mathematische Werke von Karl Weierstraß. Bd. 6. Vorlesungen über Anwendungen der elliptischen Functionen. Herausgegeben unter Mitwirkung einer von der Königlich Preußischen Akademie der Wissenschaften eingesetzten Commission. Berlin: Mayer & Müller 1915

Dr. R. Bölling
Wissenschaftler-Integrations-Programm (WIP)
Hausvogteiplatz 5–7
D-10117

(*Eingegangen 25. 1. 1993*)

Jber. d. Dt. Math.-Verein. 96 (1994) 76–84

Wilhelm Maak 1912–1992

H.-W. Burmann, Göttingen, H. Günzler, Kiel,
H. S. Holdgrün, Göttingen, K. Jacobs, Erlangen

In den Abendstunden des 6. 6. 1992 verstarb Wilhelm Maak in Göttingen kurz vor Vollendung seines 80. Lebensjahres.

Ernst Adolf Wilhelm Maak wurde am 13. 8. 1912 als Sohn des Bankbeamten Wilhelm Maak und seiner Ehefrau Erna, geb. Salje, in Hamburg geboren. In einem von ihm 1951 verfaßten Lebenslauf ist zu lesen:

> Ich besuchte von 1919 bis 1931 zunächst eine Volksschule, dann die „Oberrealschule in Eimsbüttel" in Hamburg. Nach bestandener Reifeprüfung begann ich in Hamburg Mathematik, Physik und Philosophie zu studieren. Das Jahr 1932 verbrachte ich größtenteils als Student an der Universität Kopenhagen. Während der Jahre 1933–1935 beendete ich mein Studium in Hamburg und wurde (1936) als Schüler von Prof. Hecke zum Doktor der Naturwissenschaften promoviert. Nach etwa einjähriger Hilfsassistententätigkeit (Tutor) in Hamburg, erhielt ich Anfang 1938 die wissenschaftliche

Assistentenstelle am Mathematischen Institut der Universität Heidelberg. Ich habilitierte mich 1939 in Hamburg und wurde auch dort am 8. Januar 1949 zum Dozenten ernannt.

Nach einer Lehrstuhlvertretung in Würzburg im Sommer 1951 ging Maak zum Wintersemester 1951/52 als Nachfolger von Oskar Perron (1880–1975) an die Universität München. Zum Sommersemester 1958 folgte er einem Ruf an die Universität Göttingen, wo er zum Herbst 1977 emeritiert wurde.

Maaks Eltern waren intellektuell aufgeschlossene Hamburger Bürger. Als der Sohn – einziges Kind – Neigungen in Richtung Mathematik entwickelte, förderten sie die Erfüllung seines Wunsches bereitwillig. Zu dieser Entwicklung war es auf ungewöhnliche Weise gekommen. Das mathematische Seminar der 1919 gegründeten Hansestadt-Universität Hamburg war mit Wilhelm Blaschke (1885–1962), Erich Hecke (1887–1947) und Johannes Radon (1892–1969) von Anfang an überragend besetzt und gelangte zu weit ausstrahlender Wirkung, der ab 1922 mit den „Hamburger Abhandlungen" auch ein eigenes Publikationsorgan zur Verfügung stand. In Hamburg gab es damals eine unkonventionelle Studentenvereinigung, die an den Hamburger Schulen auf Talentsuche ging. Emil Artin (1898–1962), seit 1925 als Extraordinarius (ab 1926 Ordinarius) in Hamburg tätig, beteiligte sich an dieser Unternehmung, und so kam Wilhelm Maak schon als Schüler mit einer der faszinierendsten Mathematikergestalten des 20. Jahrhunderts in Berührung. „Ma", wie Artin im Freundeskreis genannt wurde, besaß zeitlebens die stupende Fähigkeit, in schwierigem mathematischen Gelände Zauberpfade aufzuspüren, auf denen man scheinbar mühelos zu entscheidenden Aussichtspunkten gelangte, um dann freilich zu merken, wie viel Aneigungsarbeit im Nachhinein noch zu leisten war. Der Übergang Schule-Universität vollzog sich so bei Maak, was die Mathematik betrifft, stufenlos und er hatte das unerhörte Glück, als junger Mensch Zeuge und bald auch Mitwirkender am ebenso jugendfrischen wie bedeutenden Hamburger Mathematikgeschehen zu werden, das vor allem um die Themen

Algebra und Zahlentheorie (Artin, Hecke, Schreier)
Kombinatorik (Artin, Schreier, van der Waerden, Sperner)
Differentialgeometrie (Blaschke)

kreiste. Das Jahr 1932 verbrachte der 20-jährige Student überwiegend in Kopenhagen, und dort vor allem im Umkreis von Harald Bohr (1887–1951), dem Bruder des Physikers Niels Bohr (1885–1962). Maak erzählte später, wie tief ihn Bohr vor allem durch die Gründlichkeit, die er den Mitarbeitern seiner regelmäßigen Seminare abverlangte, geprägt hat: da wurde nie weitergegangen, bevor alle Detailfragen geklärt waren – sicher eine hervorragende Kontrast-Schulung zu Artins Genie-Stil. Bei Bohr fand Maak zu seinem mathematischen Lebensthema: fastperiodische Funktionen. Es gehörte nicht zu den in Hamburg gepflegten Spezialgebieten. Maaks Dissertation von 1935, mitangeregt durch J. v. Neumanns soeben erschienene Arbeit über „Almost periodic functions in a group" (1934) stellte jedoch eine Verbindung zum Hamburger Kombinatorik-Wesen her: in ihr wird der Mittelwertsatz für fastperiodische Funktionen auf abstrakten Gruppen mit Hilfe eines kombinatorischen Satzes bewiesen, der heute, nach einem Vorschlag von Weyl (1949), „Heiratssatz“ genannt wird und als solcher von bemerkenswert vielen Mathematikern gekannt und auch immer wieder angewendet wird. Einen eleganten Induktionsbeweis gaben Halmos und Vaughan 1950. Um den Heiratssatz rankt sich ein reizvolles Stück Mathematikgeschichte. Er wurde 1935 gleichzeitig von Maak und dem bekannten englischen Gruppentheoretiker Philipp Hall (1904–1982) entdeckt und bewiesen, wobei Halls Version das weitere internationale Echo fand; die Maaksche Version ist jedoch äquivalent. Ein äquivalenter graphentheoretischer Satz war bereits 1916 von Deneš König (1884–1944) bewiesen worden. Heute gehören alle diese Sätze zu einem gewaltig angewachsenen „Matching Theory“ genannten Teilgebiet der Kombinatorik. Besonders reizvoll sind Varianten des Heiratssatzes, bei denen die ursprünglich zugrundegelegte Monogamie-Forderung aufgelockert wird („Harem Theorem“ etc.), und besonders weittragend ist die Einfügung des Heiratssatzes in die Schnitt-um Spezialisierung als um einen Gesamtblick auf die Mathematik zu tun war, gepaart freilich mit der Einsicht, daß spezialisierte Forschung stets die solide Grundlage zu bilden habe. Mit dem Buffon-Problem wurde die Grenze zur Stochastik überschritten, und die Mittelwerttheorie der fastperiodischen Funktionen eröffnete – vor allem in ihrer Übertragung auf Halbgruppen, die Maak gegen 1950 in Angriff nahm – einen Einstieg in die Ergodentheorie. In den fünfziger Jahren näherte sich Maak einem Arbeitsgebiet seines Lehrers Hecke: Modulgruppe und fastautomorphe Funktionen. So hat er, in mannigfacher Verschränkung über die produktive Lebenszeit (1935 – ca. 1975) hinweg, auf mindestens drei Gebieten die mathematische Forschung bedeutend vorangetrieben und dabei mannigfache Beziehungen zu weiteren Disziplinen aufgenommen.

Besonders stolz war Maak stets auf seine Arbeit [1951], in der er den Kronecker-Weylschen Gleichverteilungssatz auf nichtabelsche Gruppen ausdehnte. Die Arbeit [1954] markiert zugleich die Eingangstür zu einer Forschungslinie „Aufspaltungssätze und Fastperiodizität“, die schließlich im Jacobs-de Leeuw-Glicksberg-Theorem gipfelte. Sie ist im Zusammenhang mit Maaks Arbeiten über fastperiodische Funktionen auf Halbgruppen ([1952], [1952a]) zu sehen. Beidemal läuft das Endergebnis darauf hinaus, daß zu Fastperiodizität stets eine *Gruppe* gehört, auch wenn zunächst eine *Halbgruppe* vorgegeben war: diese läßt sich ohne wirkliche Veränderungen im Bereich der Fastperiodizität homomorph auf eine Unter-Halbgruppe einer passenden Gruppe reduzieren.

Wilhelm Maaks Vielseitigkeit begünstigte seine Wirkung als akademischer Lehrer außerordentlich. Er untermauerte diese Wirkung mit zwei bemerkenswerten Büchern. Seine Monographie „Fastperiodische Funktionen“ (1950) gilt vielen Mathematikern als eines der schönen Bücher dieses Jahrhunderts; schlank, gründlich, elegant geschrieben führt es den Leser durch eine Mathematik-Landschaft von besonderem Reiz und ungewöhnlicher Fülle der Ausblicke. Mit dem Lehrbuch „Differential- und Integralrechnung“, das 1948–1969 vier Auflagen erlebte und 1963 auch in englischer Übersetzung erschien, gab Maak ein sicheres Fundament für Studienanfänger; Kenner schätzen dabei auch Spezialitäten wie die Einführung der elementaren Transzendenten nach Hurwitz, die systematische Anwendung des Banachschen Fixpunktsatzes und die gediegene Erarbeitung der allgemeinen Stokes-Formel für Differentialformen – all dies bei maßvollem Gesamtumfang. – Zu diesen Büchern kamen im Laufe der Zeit noch Vorlesungsausarbeitungen über verschiedene Themen. In diesen gedruckten Texten konnte freilich ein charakteristisches Element nicht voll zum Ausdruck kommen: die Faszination, die Wilhelm Maak während der Vorlesung, im Seminar, bei der Doktorandenbetreuung kraft seiner außerordentlichen Persönlichkeit ausübte.

Da war zunächst der geschliffene, sorgfältig ausgearbeitete und doch höchst lebendige Vortrag. Mit seinen Exkursen über historisch-biographische Hintergründe wußte Maak seine Vorlesungen schon in seiner Hamburger Dozentenzeit unnachahmlich anziehend zu gestalten. Von einer improvisierten Münchner Faschingsvorlesung sprechen Zeugen noch heute mit Vergnügen. Auch im persönlichen Umgang bezauberte Maak als Erzähler mit einem Hang zur Pointe, zum Anekdotischen. Die Kunst des Weglassens war ihm in besonderem Maße eigen. Dieser Zug hat ihn wohl auch – leider – davon abgehalten, Erzählerisches in

Druck zu geben. Er machte ihn auch zu einem ungewöhnlichen guten Zuhörer, Dialogpartner, ja Erzieher. All dies sind freilich Eigenschaften, die gewöhnlich nur im kleinen Kreise voll zur Wirkung kommen. Dennoch entstand auch bei Maaks Vorlesungen in großen, voll besetzten Hörsälen eine luzide, beflügelte Atmosphäre. Natürlich setzte das ein Mitgehen der Hörerschaft voraus. Als während der sog. Studentenbewegung wissenschaftsfernere Ideen durch viele Köpfe geisterten, kam es 1976/77 zu einer traurigen Entgleisung: Maaks Anfängervorlesung wurde massiv und niveaulos gestört. Er mußte sie schließlich abbrechen und hat dann bis zu seiner Emeritierung 1977 nur noch Spezialvorlesungen und Seminare abgehalten.

In diesen Seminaren, und vor allem in der daran in gleitendem Übergang anschließenden Kandidaten- und Doktorandenbetreuung enfaltete sich der Zauber von Maaks Persönlichkeit in seiner ganzen Fülle. Bald nach seinem Eintreffen in München richtete er eine Montag-Nachmittag-Arbeitsgemeinschaft ein, in der einerseits Doktoranden und Diplom- oder Staatsexamenskanditaten über ihre Arbeiten und deren Umfeld referierten, andererseits auch vielfältige Informationen aus dem Gesamtbereich der Mathematik durch Referat und Gespräch ausgetauscht wurden. Hier fanden sich auch Mitarbeiter des Instituts, die nicht zum engeren Kreis der von Maak Betreuten gehörten, ein, selbst zur Physik ergaben sich fruchtbare Kontakte. Die ganze Einrichtung war eine Pioniertat, mit der nach der Emeritierung der „großen Alten" – Perron (1880–1975) und Tietze (1880–1964) – eine neue, jugendlichere Art, Mathematik zu treiben, Einzug ins Münchner Institut hielt. Maak ging seine Aufgabe mit größtem Verantwortungsbewußtsein an. Daß das Ganze eine höchst lebendige und in jeder Sitzung aufregende Sache wurde, war seiner vielseitigen inner- und außermathematischen Bildung und seiner unbefangenen Frische zu danken.

In Wahrheit war der Münchner Einstand des jungen Ordinarius aus Hamburg ein viel umfassenderer Vorgang. Das fing schon damit an, daß sich der s-sprechende Hamburger gelegentlich im „Seppl-Anzug" zeigte und gern an den Voralpen-Wanderungen, die im Institut Tradition hatten, teilnahm. Es ging aber viel tiefer: Durch seine 1939 mit Frau Truda, geb. Lepper geschlossene Ehe war ein großer Kulturkreis in das Blickfeld des protestantischen Hanseaten Wilhelm Maak getreten: Frankreich und der Katholizismus. Die Maaksche Etagenwohnung am Josephsplatz in Schwabing wurde ein geselliger und geistiger Anziehungspunkt, an dem sich bald außer anderen Fakultätsmitgliedern auch Geisteswissenschaftler einfanden: der Altphilologe Klingner, der Philosoph Deku, und vor allem der große Religionsphilosoph und Theologe Romano Guardini (1885–1968), zu dessen engerem Zirkel der Protestant Maak gegen Ende seiner Münchner Zeit zählte. Eine mit einem Aufsatz „Goethe und die Mathematik" früh angesponnene Linie fächerte sich nun weiter auf. In unveröffentlichten Manuskripten, die er einzelnen Interessierten zugänglich machte, hat Maak sich später auch mit theologischen Fragen bis hin zur Mystik beschäftigt und vor allem Augustinus gelesen. Der Wechsel nach Göttingen im Jahre 1958 brachte, trotz weiterhin häufiger, auch mit der Mitgliedschaft bei der Bayrischen Akademie der Wissenschaften (seit 1957) zusammenhängender München-Besuche, eine gewisse Umorientierung. In Göttingen studierten damals mehrere Stipendiaten aus Taiwan – Frau Hsü promovierte bei Deuring, Herr Miao 1965 bei Maak – und als sie Frau und Herrn Maaks schon seit langem entwickeltem Verständnis für chinesische Kultur gewahr wurden, organisierten sie zwei längere Gastaufenthalte in Taiwan: 1964/65 an der Tsing-Hua-Universität in Hsin-Chu, wo Frau Prof. Hsü lehrte, und 1967/68 an der Taiwan National University in Taipei, der Wirkungsstätte von Prof. Miao. Diese Aufenthalte führten zu weiteren wissenschaftlichen Kontakten, so daß 1973 auch Tzeng und Hsiao in Göttingen bei Maak promovierten. All diese Berührungen führten zu vertieftem Einleben in die chinesische Kulturwelt. Frau Maak lernte Chinesisch und ist als Lyrik-Übersetzerin hervorgetreten.

Wilhelm Maaks Vielseitigkeit wurde vor allem in der Vielfalt der von seinen 19 Doktor-Schülern eingeschlagenen mathematischen Wege sichtbar: Zahlentheorie, Funktionalanalysis, Ergodentheorie, Optimierungstheorie, partielle Differentialgleichungen, Integrationstheorie u.a. Ihnen allen hat Maak nicht nur Wege der Wissenschaft, sondern auch Wege des Lebens gewiesen.

Schriftenverzeichnis Wilhelm Maak

A. Artikel in Zeitschriften und Sammelbänden (35 Titel)

[1935] Eine neue Definition der fastperiodischen Funktionen. Abh. Math. Sem. Univ. Hamburg **11** (1935) 240–244

[1935a] Gruppen und Integrale. Jber. d. Dt. Math.-Verein. **45** (1935) 236–242

[1936] Abstrakte fastperiodische Funktionen. Abh. Math. Sem. Univ. Hamburg **11** (1936) 367–380

[1938] Über den Begriff der fastperiodischen Funktionen. Mat. Tidsskrift **B 1938,** 7–12

[1938a] Grundlagen der ebenen Integralgeometrie. Abh. Math. Sem. Univ. Hamburg **12** (1938) 83–110 (Berichtigung dazu S. 179)

[1938b] Über stetige Kurven. Abh. Math. Sem. Univ. Hamburg **12** (1938) 163–178

[1939] Oberflächenintegral und Stokesformel im gewöhnlichen Raume. Math. Ann. **116** (1939) 574–597

[1941] Schnittpunktanzahl rektifizierbarer und nicht rektifizierbarer Kurven. Math. Ann. **118** (1941/43) 299–304

[1948a] Fastperiodische Funktionen. Fiat Review of German Science 1939–1946, Pure Mathematics, Teil **I** (1948) 155–158 (Hrsg. W. Süß. Wiesbaden: Dieterichsche Verlagsbuchhandlung)

[1948b] Integralgeometrie. Fiat Review, Teil **II** (1948) 231–237

[1948c] Erich Hecke als Lehrer. Abh. Math. Sem. Univ. Hamburg **16**, Heft 1/2 (1948) 1–6

[1949] Moduln fastperiodischer Funktionen. Abh. Math. Sem. Univ. Hamburg **16**, Heft 3/4, (1949) 56–71

[1950a] Goethe und die Mathematik. Math. Phys. Semesterber. **1** (1950) 138–149

[1950b] Almost periodic invariant vector sets in a metric space. Proc. Nat. Ac. Sciences **36** (1950) 208–210

[1950c] Fastperiodische invariante Vektormoduln in einem metrischen Vektorraum. Math. Ann. **122** (1950) 157–166

[1950d] Summierung der Fourierreihen gleichartig fastperiodischer Funktionen auf Gruppen. Math. Z. **52** (1950) 770–778

[1951] Der Kronecker-Weylsche Gleichverteilungssatz für beliebige Matrizengruppen. Abh. Math. Sem. Univ. Hamburg **17** (1951) 91–94

[1952] Integralmittelwerte von Funktionen auf Gruppen und Halbgruppen. J. Reine Angew. Mathematik **190** (1952) 34–48

[1952a] Fastperiodische Funktionen auf Halbgruppen. Acta Math. **87** (1952) 33–58

[1952b] Ein Problem der Kombinatorik in seiner Formulierung von H. Weyl. Math. Phys. Semesterber. **2** (1952) 251–256

[1953] Darstellungstheorie unendlicher Gruppen und fastperiodische Funktionen. Enzyklopädie der math. Wiss., 2. Aufl. I1, **16** (1953)

[1954] Periodizitätseigenschaften unitärer Gruppen in Hilberträumen. Math. Scand. **2** (1954) 334–344

[1955] Eine Verallgemeinerung des Weierstraßschen Approximationssatzes. Archiv. Math. **6** (1955) 188–193

[1955a] Fastperiodische Funktionen auf der Modulgruppe. Math. Scand. **3** (1955) 44–48

[1957] Über eine Verallgemeinerung der doppeltperiodischen Funktionen. Abh. Math. Sem. Univ. Hamburg **21** (1957) 104–108

[1958] Zur Theorie der Modulgruppe. Abh. Math. Sem. Univ. Hamburg **22** (1958) 267–275

[1959] Fastautomorphe Funktionen. Sitzber. Bayr. Akad. Wiss., Math. Nat. Kl. **1959**, Nr. 14, 289–319

[1960] Elementare fastautomorphe Funktionen. Sitzber. Bayr. Akad. Wiss., Math. Nat. Kl. **1960**, Nr. 7, 95–99

[1964] Gitterpunktsummen. Nachr. Akad. Wiss. Göttingen, Math.-phys. Kl. **1964**, Nr. 7, 59–66

[1965] Fastelliptische Funktionen. Nachr. Akad. Wiss. Göttingen, Math.-phys. Kl. **1965**, Nr. 12, 159–174

[1965a] Verallgemeinerung des Kroneckerschen Approximationssatzes auf Matrizengruppen. Nachr. Akad. Wiss. Göttingen, Math.-phys. Kl. **1965**, Nr. 13, 175–186

[1967] Erörterung des Begriffes der fastautomorphen Funktion. Abh. Math. Sem. Univ. Hamburg **31** (1967) 179–190

[1968] Dirichletreihen mit Funktionalgleichung. Nachr. Akad. Wiss. Göttingen, Math.-phys. Kl. **1968**, Nr. 10, 199–223

[1970] Über Längen- und Inhaltsmessung. Nach. Akad. Wiss. Göttingen, Math.-phys. **1970**, Nr. 4, 59–66

[1975] Bohrsche Funktionen und Dirichletsche Reihen. Nachr. Akad. Wiss. Göttingen, Math.-phys. Kl. **1975**, Nr. 15, 233–250

B. Bücher

[1948] Differential- und Integralrechnung. Studia Mathematica Bd. 8. Göttingen: Vandenhoeck und Ruprecht, 1 Aufl. 1948, 2. Aufl. 1960, 3. Aufl. 1963, 4. Aufl. 1969
Englische Übersetzung: Introduction to modern calculus. New York, London 1963

[1950] Fastperiodische Funktionen. Grundlehren der mathematischen Wissenschaften in Einzeldarstellungen. Bd. 61, Berlin usw.: Springer, 1. Auflage 1950, 2. Auflage 1967

C. Vorlesungsausarbeitungen, Seminarberichte, Vorträge

1. Höhere Mathematik IB und IIB (Analytische Geometrie und lineare Algebra I und II), München 1954/55
2. Modulfunktionen I und II, München 1955/56
3. Höhere Mathematik III und IV. Göttingen 1960/61
4. Fastautomorphe Formen. Seminarbericht Nr. 1, Göttingen 1960
5. Die Messung des Flächeninhalts krummer Flächen. Seminarbericht Nr. 2, Göttingen 1960
6. Transformationsverhalten der Funktionen log σ_{rs}. Seminarbericht Nr. 7, Göttingen 1962
7. Simultane Approximation von Matrizen. Seminarbericht Nr. 11, Göttingen 1965
8. Mathematik und Wirklichkeit. Vortrag in der Bayr. Akad. Wiss. zu München, 10. 1. 1966
9. Integralgeometrie (Vorlesung SS 1968). Seminarbericht Nr. 28, Göttingen 1968
10. Bohrsche Funktionen und Dirichletreihen. Seminarbericht Nr. 36, Göttingen 1973
11. Fastautomorphe Formen und Dirichletreihen (Vorlesung WS 1973/74). Seminarbericht Nr. 35,

12. Die Mathematik in der Zeit. Seminarbericht Nr. 38, Göttingen 1976

Doktoranden von Wilhelm Maak

Name	Ort der Promotion	Tag der mündlichen Prüfung	Titel der Dissertation
Konrad Jacobs	München	12. 2. 1954	Ein Ergodensatz für beschränkte Gruppen im Hilbertschen Raum
Eberhard Schieferdecker	München	27. 6. 1954	Zur Einbettung metrischer Halbgruppen und Ringe in ihre Quotientenstrukturen
Christoph Witzgall	München	31. 7. 1957	Über Rückkehrschnitte auf Riemannschen Flächen, die zu Hauptkongruenzuntergruppen der Modulgruppe gehören
Horst Keiner	München	4. 12. 1957	Verallgemeinerte fastperiodische Funktionen auf Halbgruppen
Hans Günzler	München	18. 12. 1957	Hyperbolische Differentialgleichungen und Klassen fastperiodischer Funktionen
Klaus Horneffer	Göttingen	23. 2. 1962	Fastautomorphe Funktionen zu Funktionsgruppen
Heinz Dieter Dombrowski	Göttingen	23. 2. 1962	Fastautomorphe Funktionen zweiten Grades
Klaus-Friedrich Burde	Göttingen	28. 2. 1964	Reziprozitätsgesetze für Gitterpunktsummen
Hans-Wilhelm Burmann	Göttingen	25. 2. 1965	Fastautomorphe Funktionen und Riemannsche Flächen
Friedrich Wille	Göttingen	26. 2. 1965	Konstruktion fastautomorpher Funktionen durch Poincarésche Reihen
Lung-Chi Miao	Göttingen	24. 6. 1965	Über Darstellungen der Dedekindschen Summen durch Gitterpunktsummen
Horst S. Holdgrün	Göttingen	12. 5. 1966	Irreduzibilität und Äquivalenz von Darstellungen
Thomas Hellweg	Göttingen	10. 11. 1966	Fastperiodische Vektoren in lokalkonvexen Vektorräumen
Axel Reich	Göttingen	6. 2. 1969	Verhalten fastelliptischer Funktionen längs Geraden
Hanns Bauermeister	Göttingen	9. 7. 1970	Nullstellen Dirichletscher Reihen mit Funktionalgleichung
Rolf-Dieter Kulle	Göttingen	11. 2. 1971	Axiomatische Einführung des Flächeninhalts und Metrisierung einer Klasse von Hyperflächen
Chung-Hung Tzeng	Göttingen	10. 5. 1973	Fastperiodizitätseigenschaften von Dirichletreihen
Hong-Jen Hsiao	Göttingen	12. 7. 1973	Zur Heckeschen Theorie von Funktionalgleichungen
Heinz-Gerhard Breden	Göttingen	17. 12. 1976	Multiplikationsformeln für Fourierkoeffizienten von Modulformen halbzahligen Gewichts

Prof. Dr. Hans-Wilhelm Burmann
Georg-August-Universität Göttingen
Mathematisches Institut
Bunsenstr. 3–5
37073 Göttingen

Prof. Dr. Horst S. Holdgrün
Georg-August-Universität Göttingen
Mathematisches Institut
Bunsenstr. 3–5
37073 Göttingen

Prof. Dr. Hans F. Günzler
Christian-Albrechts-Universität zu Kiel
Mathematisches Seminar
Ludewig-Meyn-Str. 4
24118 Kiel

Prof. Dr. K. Jacobs
Universität Erlangen-Nürnberg
Mathematisches Institut
Bismarckstr. 1 1/2
91054 Erlangen

(*Eingegangen 5. 7. 1993*)

Buchbesprechungen

Barnsley, M. F., Hurd, L. P., Fractal Image Compression, Wellesley: AK Peters 1993, 238 S., $ 49.95

Die von Barnsley seit Mitte der achtziger Jahre propagierten Collage-Methoden zur Kompression von Bilddaten basieren auf der interessanten Idee, nicht die Einzelheiten des Bildes zu speichern, sondern Beziehungen zwischen seinen verschiedenen Teilen. Diese Beziehungen werden als affine Abbildungen w_i definiert, die Paare ähnlicher Teile ineinander überführen. Im einfachsten Falle – auf den wir uns hier konzentrieren – kann ein Schwarz-Weiß-Bild als Menge durch eine Fixpunktgleichung beschrieben werden:

$$B = F(B) = w_1(B) \cup \ldots \cup w_m(B)$$

Sind hierbei die w_i kontraktive Abbildungen mit Faktoren $r_i < 1$, so ist F eine Kontraktion mit Faktor $r = \max r_i$ bezüglich des Hausdorff-Abstands d_H zwischen Mengen, und die Gleichung ist eindeutig lösbar. Da jedes w_i in der Ebene durch nur sechs Zahlen gegeben ist, sind die Bilddaten jetzt stark komprimiert. Außerdem hat die Menge B im allgemeinen eine fraktale Struktur, und bei manchen Bildern – etwa beim Farnblatt – entsprechen die feineren Details von B auch bei höherer Auflösung noch der Realität. Für solche Vergrößerungen berechnet Barnsley formale Kompressionsraten bis 2500:1.

Das Problem bei der Methode ist die Bestimmung geeigneter Abbildungen w_i. Barnsleys zentrales Ergebnis sagt, daß ein Bild A, das die Fixpunktgleichung näherungsweise erfüllt, durch die genaue Lösung B angenähert werden kann:

$$d_H(A, B) \leqslant (1 - r)^{-1} d_H(A, F(A))$$

Dies „Collage-Theorem" wird von Barnsley im Buch in mehreren Versionen angeführt, aber nie bewiesen. Hier ist der Beweis auf einer Zeile. Man verwendet $B = F(B)$ und die Dreiecksungleichung:

$$d_H(A, B) \leqslant d_H(A, F(A)) + d_H(F(A), F(B)) \leqslant d_H(A, F(A)) + r d_H(A, B).$$

Auch damit ist noch kein Hinweis darauf gegeben, wie denn nun die Collagen einer Menge durch ihre Teile erfolgen sollen. Erst die Betrachtung von speziellen Abbildungsklassen zwischen rechteckingen Bildausschnitten schränkt die Auswahl der Abbildungen so stark ein, daß durch zielgerichtetes Probieren mit dem Computer geeignete Bilddarstellungen gefunden werden können. Diese jetzt als „fractal transform" vermarkteten Methoden wurden erstmals 1989 in der Dissertation von A. Jacquin veröffentlicht, die der Doktorvater M. Barnsley bezeichnenderweise gar nicht zitiert.

Im vorliegenden Buch werden die den Kompressionsverfahren zugrundeliegenden Ideen ausführlich erläutert und durch ansprechende Illustrationen und Beispielprogramme untermauert. Es ist schon verblüffend, daß solch naive Algorithmen zur assoziativen Speicherung tatsächlich auf reale Bilder anwendbar sind, wenn auch mit recht bescheidenen Kompressionsraten und mit stundenlangen Rechenzeiten zur Behandlung eines Bildes (s. dazu Y. Fisher in Peitgen, Jürgens und Saupe, Chaos and Fractals, Springer 1992). Wer eine Diskussion dieser konkreten Probleme oder Details der Algorithmen erwartet hat, wird allerdings enttäuscht sein. Barnsley wendet sich an einen breiten und nicht allzu anspruchsvollen Leserkreis.

Der einführende Abschnitt behandelt die interessante Frage, wie man die Klasse aller „real world images" bildschirmunabhängig definieren sollte, und zeigt, wie Bilder als Mengen, Maße und Funktionen aufgefaßt werden können. Dann werden die Collage-Methoden aus Barnsleys erstem Buch „Fractals everywhere" sowie elementare Kompressionsverfahren der Informationstheorie (Huffman-Codes) erörtert, und erst im letzten Kapitel geht der Autor auf die neuen, computerfähigen Algorithmen mit Rechteckgittern und entsprechenden Abbildungen ein. Im Anhang findet sich ein Abriß des auf der diskreten Cosinus-Transformation beruhenden Bildkompressionsverfahrens.

Dies Buch dokumentiert Anfänge einer Entwicklung. Barnsleys mehrfache Hinweise auf den Patentschutz aller auf der „fractal transform" beruhenden Bildkompressionsverfahren lösen Befremden aus. Abgesehen davon, daß derartige Bestimmungen mühelos unterlaufen werden, sind sie auch dem Fortschritt der Sache nicht dienlich. Einige Jahre werden noch vergehen, und viele Ideen werden kombiniert werden müssen, ehe wirklich brauchbare Verfahren der assoziativen Speicherung von Signalen vorliegen.

Greifswald Ch. Bandt

Lang, S., Begegnungen mit Schülern (aus dem Engl. übers. von Rücker, G. u. überarb. von Hirzebruch, I.), Wiesbaden: Vieweg 1991, 134 S., DM 48,–

Begegnungen zwischen Wissenschaftlern und Schülern beschränken sich üblicherweise darauf, daß einzelne Schüler zu Spezialvorträgen von Wissenschaftlern geschickt werden. – Serge Lang, der bekannte Professor für Mathematik an der Yale University in Connecticut, USA, fand eine neuartige Methode um Schüler auf mathematische Fragestellungen aufmerksam zu machen. Er besuchte Schulen (in Kanada und in Frankreich), hielt Unterrichtsstunden in verschiedenen Klassen und versuchte alle Klassenmitglieder zum Denken anzuregen. Seine Hauptziele waren: auf Zusammenhänge zwischen Begriffen aus dem Lehrstoff hinzudeuten, die Wichtigkeit der Beweise von Sätzen zu betonen, und, vor allem, bei den Schülern das Gefühl zu wecken, daß Mathematik zu betreiben eine schöne und lebendige Tätigkeit ist.

Das vorliegende Buch enthält ausführliche Aufzeichnungen von sieben Unterrichtsstunden, die Serge Lang für Klassen 8 bis 11 hielt. Die Gespräche mit den Schülern sind nach Bandaufnahmen getreu wiedergegeben; dadurch wirkt der Text durchweg spannend und anregend. Die folgenden Themen wurden bearbeitet: „Was ist pi?", „Das Volumen in höheren Dimensionen", „Das Volumen der Kugel", „Der Umfang des Kreises", „Die Oberfläche der Kugel", „Pythagoreische Tripel" und „Unendlich".

Das Vorwort des Verfassers richtet sich an Schüler, aber das Buch ist nicht nur Schülern zu empfehlen, sondern auch Lehrern und Fachdidaktikern, die viele Anregungen zur Bereicherung ihres Unterrichts finden werden. Die geistreichen Einfälle Serge Langs bei der Leitung der Stunden, die Reaktionen der Schüler und die Schlußfolgerungen nach dem Unterricht sind aufschlußreich und erfrischend. Als Lehrer, fühlt man sich ermutigt „etwas ähnliches nachzumachen". In diesem Zusammenhang bietet das Postscriptum des Buches eine passende Lektüre: im Rahmen einer Diskussion mit Fachleuten werden wohlbekannte Aspekte des Schulunterrichts erörtert. Man gewinnt Verständnis für Serge Langs Kritik an Lehrplänen, ebenso wie für Hindernisse, die Lehrer in ihrem Berufsleben bekämpfen müssen. Die Diskussion endet mit der Bemerkung, daß man trotz Schwierigkeiten versuchen soll die Schüler für die Mathematik zu begeistern.

London J. Cofman

Faltings, G., Chai, C.-Li, Degeneration of Abelian Varieties (Ergeb. Math. Grenzgeb. (3), Band 22), Berlin u. a.: Springer Verlag 1990, 316 S., DM 78,-

Das Hauptergebnis des vorliegenden Buches ist die arithmetische Kompaktifizierung des Modulraumes der prinzipal polarisierten abelschen Varietäten. Motiviert waren diese Untersuchungen zum Beispiel durch die Anwendungen in der diophantischen Geometrie. Wie schon Deligne im Séminaire Bourbaki (Vortrag 616) über die bahnbrechende Arbeit von Faltings „Endlichkeitssätze für abelsche Varietäten über Zahlkörpern" feststellte, impliziert eine gute Kompaktifizierung des Siegelschen Modulraumes über $\mathbb{Z}$ einen Endlichkeitssatz für Familien von abelschen Varietäten, wie er zum Beweis der Shafarevich- bzw. der Mordell-Vermutung benutzt wurde. In der Originalarbeit von Faltings wurde ein solcher Endlichkeitssatz durch Rückgriff auf den Modulraum der stabilen Kurven hergeleitet. Mit den Ergebnissen dieses Buches hat man nun den geradlinigen Weg zu diesen Endlichkeitssätzen geebnet. Das hier vorliegende Buch erfüllt nicht nur diesen Zweck. Es ist auch eine konsequente Weiterentwicklung eines großen und wichtigen Themas in der algebraischen Geometrie, nämlich der Theorie der Modulräume, die maßgeblich durch A. Grothendieck, D. Mumford und M. Artin geprägt worden ist.

Worum geht es? Eine abelsche Varietät A ist eine zusammenhängende, projektive Gruppenvarietät der Dimension g über einem Körper. Über dem Körper der komplexen Zahlen ist A isomorph zu einem analytischen Torus; das ist ein Quotient eines komplexen Vektorraumes $V=H^0(A,\Omega^1)^*$ der Dimension g nach einem Gitter $M=H_1(A,\mathbb{Z})$ vom Rang $2g$. Eine prinzipale Polarisierung auf A ist ein Isomorphismus λ von A zu ihrer dualen Varietät, der über dem algebraischen Abschluß durch eine Zuordnung $a\mapsto\tau_a^*\mathscr{L}\otimes\mathscr{L}^{-1}$ vermöge eines amplen Geradenbündels $\mathscr{L}$ gegeben wird, wobei $\tau_a: A\to A$ die Translation mit $a\in A$ ist.

Falls man nur über dem Körper der komplexen Zahlen arbeitet, werden die Isomorphieklassen von solchen Paaren (A,λ) durch die Punkte des Siegelschen Modulraumes $\mathbb{H}_g/Sp(2g,\mathbb{Z})$ klassifiziert. Dieser Raum hat eine natürliche, projektive Kompaktifizierung, die man durch den graduierten Ring der Siegelschen Modulformen erhält. Diese Kompaktifizierung geht zurück auf Baily, Borel und Satake; in dem Buch von Chai und Faltings wird sie minimale Kompaktifizierung genannt. Der Rand dieser Kompaktifizierung setzt sich aus den Modulräumen der prinzipal polarisierten abelschen Varietäten kleinerer Dimension zusammen. Zum Beweis dieser Resultate wird grundlegend die komplexe Uniformisierung benutzt; nämlich daß man A als V/M darstellen kann. Somit ist dieses Vorgehen in substantieller Weise an transzendente Methoden gebunden.

In fundamentalen Arbeiten hat Mumford einen algebraischen Zugang entwickelt, der es erlaubt, den Modulraum A_g der prinzipal polarisierten abelschen Varietäten der Dimension g über $\mathbb{Z}$ zu konstruieren. Letzterer ist ein glattes, quasi-projektives Schema über $\mathbb{Z}$. In diesem Buch geht es nun darum, diesen Raum so zu einem glatten Raum zu kompaktifizieren, daß man seine Punkte als semi-abelsche Degenerationen von abelschen Varietäten deuten kann, und daß der Rand ein Divisor mit normalen Überkreuzungen ist.

Um diese Konstruktion durchführen zu können, bedienen sich die Autoren der Artinschen Methode zur Konstruktion von Modulräumen. Dabei konstruiert man zunächst formelle Karten, die man vermöge Approximation algebraisiert. Auf diese Weise erhält man lokale Karten bzgl. der étalen Topologie, die man zu einem globalen Objekt verheftet. So verläßt man zwar die Kategorie der Schemata und ist gezwungen in der allgemeineren Kategorie von algebraischen Räumen bzw. Stacks zu arbeiten, dafür kann man aber lokale Betrachtungen übersichtlich durchführen.

Ein Anhaltspunkt, wie man A_g zu kompaktifizieren hat, wird durch den Grothendieckschen Satz über die semi-abelsche Reduktion von abelschen Varietäten nahegelegt. Man muß in gewisser Weise alle Familien von semi-abelschen Varietäten $G\to S$ über normalen Schemata $S=Spec(R)$ parametrisieren, deren generische Faser eine prinzipal polarisierte abelsche Varietät ist. Dabei heißt ein glattes Gruppenschema semi-abelsch, wenn seine Fasern Erweiterungen von abelschen Varietäten durch affine Tori sind.

Solche Familien kann man (unter geeigneten Bedingungen) über die sogenannte Raynaud-Konstruktion im Falle einer normalen formellen Basis $S=Spf(R)$ uniformisieren; d.h. man kann G als einen Quotienten $G=\tilde{G}/M$ darstellen, wobei $\tilde{G}$ eine

Erweiterung eines abelschen Schemas der Dimension $(g-r)$ durch einen affinen Torus der Dimension r ist, und wobei M ein polarisiertes Gitter in $\tilde{G}$ vom Rang r ist. Umgekehrt, ebenso im Fall einer normalen formellen Basis $Spf(R)$, liefert die Mumford-Konstruktion zu solchen Daten $(\tilde{G}, M)$ Familien der gewünschten Art. Dieser letztere Teil besteht in einer Verallgemeinerung einer grundlegenden Arbeit von Mumford, die als Reproduktion dem Buch angegliedert worden ist.

Über die Eingangsdaten der Mumford-Konstruktion kann man universelle Familien von solchen Varietäten im Fall von formellen Baisschemata in übersichtlicher Weise beschreiben. Die semi-abelschen Varietäten vom Typ $\tilde{G}$ lassen sich über das r-fache Produkt des dualen Schemas zum universellen abelschen Schema über A_{g-r} parametrisieren, wobei $r=0,\dots,g$ variiert. Da man nur Gitter M betrachten darf, die eine Polarisierung gestatten, werden die Gitter samt ihren Polarisierungen über die $\mathbb{Q}$-wertigen, positiv definiten quadratischen Formen auf $\mathbb{Z}^r$ in das Bild des Modulraums eingebracht. Dazu hat man rationale Polyederzerlegungen des Kegels der positiv definiten quadratischen Formen auf $\mathbb{Z}^r$ einzuführen; die Existenz solcher Zerlegungen geht im wesentlichen auf die Minkowskische Reduktionstheorie zurück. Man benutzt dann essentiell Mumfords Theorie der Toruseinbettungen, um die Kompaktifizierung zu beschreiben. So erhält man formelle Karten für die Kompaktifizierung $\bar{A}_g$ des Modulraums A_g.

Der Abstieg von der formellen Situation zu der algebraischen Situation erfolgt über geschickte Anwendung des Artinschen Approximationssatzes. Auf diese Weise erhält man lokale Karten in der étalen Topologie für den zu konstruierenden Raum. Da die Verklebung der Karten ebenfalls nur in der étalen Topologie erfolgen kann, bekommt man so einen algebraischen Stack $\bar{A}_g$ bzw. einen algebraischen Raum $\bar{A}_{g,n}$ für $n \geqslant 3$, wenn man noch

Griffith, P. H., Introduction to Algebraic Curves (Transl. of Math. Monographs Vol. 76), Am Math. Soc. 1989, 221 S., $ 108,-

Im Sommer 1982 hielt der Autor eine 6wöchige Vorlesung an der Universität Beijing, eine Einführung in die Theorie der algebraischen Kurven. Die Vorlesung wurde von drei Assistenten ausgearbeitet und an der dortigen Universität veröffentlicht. Das vorliegende Buch stellt eine Übersetzung dieser Ausarbeitung aus dem Chinesischen dar.

Die meisten Bücher über algebraische Kurven oder kompakte Riemannsche Flächen stellen diese separat als Teil von verschiedenen allgemeinen Theorien dar. Folglich sind sie gezwungen, entweder beträchtliche Voraussetzungen zu machen oder einen großen Raum für die verschiedenen Hintergrundmaterialien dieser Gebiete zur Verfügung zu stellen. Die notwendigen Voraussetzungen zum Verständnis des vorliegenden Buches sind wesentlich geringer. Es wird nur elementare Funktionentheorie, etwa im Rahmen einer Kursvorlesung Funktionentheorie I, sowie die Kenntnis der Topologie kompakter Flächen benötigt.

Zum Inhalt: Fast alle einführenden Texte in die Kurventheorie schließen mit dem Riemann-Rochschen Satz. Die Theorie der algebraischen Kurven beginnt aber erst mit diesem Satz interessant zu werden. Ziel des vorliegenden Buches ist es, neben dem grundlegenden Riemann-Roch einen Beweis für das Abelsche Theorem zu geben, sowie Anwendungen dieser beiden Sätze zu liefern. Neben einer ausführlichen Beschreibung der Kurven vom Geschlecht 0, 1, 2, 3 und 4, werden Differentiale dritter Gattung, der Jacobische Umkehrsatz und die Weierstraßsche $\wp$-Funktion behandelt.

Wie gelingt es nun Griffith, mit geringen Mitteln so weit zu kommen? Der Trick ist klassisch und besteht darin, den sogenannten „Existenzsatz" zu benutzen. Er besagt, daß es für jede kompakte Riemannsche Fläche C eine Immersion $f\colon C \to \mathbb{P}_2$ gibt, so daß $f(C)$ als Singularitäten höchstens gewöhnliche Doppelpunkte hat. Hiermit können die wesentlichen Sätze auf ebene Kurven mit höchstens gewöhnlichen Doppelpunkten zurückgeführt und dann direkt mit funktionentheoretischen Mitteln bewiesen werden. Puristen könnten einwenden, daß das nicht ganz korrekt ist: Der Beweis des Existenzsatzes, der in einem Anhang angedeutet wird, benutzt Garbentheorie und kohomologische Methoden. Damit sind die Beweise letztlich nicht ganz vollständig. Ich meine aber, daß dieser Zugang didaktisch sehr sinnvoll ist. Er gestattet es einem Studenten, sich schnell in das Gebiet einzuarbeiten.

Als Kritik könnte man vorbringen, daß der Zugang manchmal etwas zu sehr rein komplexanalytisch ist: Beispielsweise wird das Konzept der Normalisierung eingeführt, ohne den Begriff der Normalität von Ringen auch zu erwähnen. Eine Mischung aus Algebra, Geometrie und Analysis wäre sicher an einigen Stellen noch effektiver.

Hervorheben möchte ich, daß der Text ausgezeichnet ausgearbeitet und aufgeschrieben ist. Die Beweise sind ausführlich und sehr klar verständlich. Damit eignet sich das Buch in besonderem Maß für Anfänger. Es sollte für Studenten etwa des 5. Semesters sehr gut lesbar sein.

Erlangen H. Lange

Carmo, D., Riemannian geometry (übersetzt aus dem Portugiesischem von F. Flaherty), Basel u. a.: Birkhäuser Verlag 1991, 300 S., DM 89,–

Das vorliegende Buch gibt eine Einführung in die Riemannsche Geometrie. Die Stoffauswahl ist enger als im Klassiker „Riemannsche Geometrie im Großen" von Gromoll, Klingenberg und Meyer (GKM), ist aber für ein erstes Studium des Gebietes ausreichend. Um einen Einblick in Aufbau und Inhalt des Buches zu gewähren, zähle ich zunächst einmal die Überschriften der einzelnen Kapitel auf: Differentiable Manifolds – Riemannian Metrics – Affine Connections; Riemannian Connections – Geodesics; Convex Neighborhoods – Curvature – Jacobi Fields – Isometric Immersions – Complete Manifolds; Hopf-Rinow and Hadamard Theorems – Spaces of Constant Curvature – Variations of Energy – The Rauch Comparison Theorem – The Morse Index Theorem – The Fundamental Group of Manifolds of Negative Curvature – The Sphere Theorem.

Viele interessante Beispiele und Resultate werden in den Exercises besprochen, zum Beispiel Riemannsche Submersionen und der komplex-projektive Raum, Killing Felder, Satz von Clairaut etc. Leider ist der Index etwas kurz geraten, so daß man nicht immer mit Hinweisen auf diese Zusätze zum Haupttext rechnen kann.

Dem Kenner fällt sicherlich auf, daß in der obigen Aufzählung der Kapitelüberschriften der Vergleichssatz von Alexandrov-Toponogov über geodätische Dreiecke fehlt. In der Tat wird dieser Satz auch nur zitiert und nicht bewiesen, obwohl heutzutage kurze, elegante Beweise existieren (insbesondere Karchers Beweis). An der entsprechenden Stelle im Beweis des Sphärensatzes wird dann ein Argument von Tsukamoto eingesetzt, welches den Satz von Alexandrov-Toponogov vermeidet und stattdessen den Vergleichssatz von Rauch verwendet.

Das Buch ist flott geschrieben. Es gibt aber kleinere Ungereimtheiten, die den positiven Gesamteindruck etwas stören und von denen ich einige erwähnen möchte: nach Konvention (Seite 2, Zeile + 11) soll differenzierbar C^∞ heißen, aber in den Definitionen 2.5 und 2.6 wird „differentiable at p" definiert bzw. verwendet. Das Hausdorff-Axiom (29, −9) wird zu spät gefordert und sollte schon bei der Integration von Vektorfeldern (28, +8) angenommen werden. Die Definition von parametrisierten Flächen (67, 3.3) ist nicht stimmig und eigentlich auch nicht erforderlich; sie wird hauptsächlich für 2-Parameter-Variationen verwendet. Tensoren werden auf Riemannschen Mannigfaltigkeiten definiert (100, 5.1) obwohl die Riemannsche Metrik in der Definition (wohl bei den Beispielen) keine Rolle spielt. Der übliche Krümmungstensor $R(X, Y)Z$ ist leider kein Tensor bez. dieser Definition und wird (deshalb?) als Krümmung bezeichnet (die Vorzeichenkonvention für R ist von Buch zu Buch verschieden; hier ist sie die negative zu derjenigen in *GKM*).

Insgesamt ist das Buch gut gelungen, aber insbesondere in der Vergleichstheorie nicht mehr auf dem neuesten Stand. Dies ist nicht besonders verwunderlich, denn die erste Auflage erschien schon im Jahre 1979 (portugiesisch). Als Alternative zu bestehenden Texten oder als erste Einführung in die Riemannsche Geometrie ist das Buch aber durchaus empfehlenswert.

Bonn W. Ballmann

Artzy, R., Geometry – An Algebraic Approach, Mannheim u. a.: B. I. Wissenschaftsverlag 1992, 262 S., kartoniert DM 34,–

Dieses Buch ist eine besonders gelungene und ausgewogene Einführung in die moderne Geometrie: Auf der einen Seite scheut sich der Autor nicht, durch geschickte Verweise auf elementargeometrische Sachverhalte, Anregungen für ein weiteres natürliches Vorgehen zu geben, auf der anderen Seite wird dem Leser dann aber auch das moderne Instrumentarium geometrischen Schließens in wichtigen geometrischen Teilbereichen geboten. – Wir finden 4 Kapitel vor: Mit 97 Seiten ist das Kapitel 4, das *Metrische Ebenen – Axiomatische Grundlagen* als Überschrift trägt, das längste und vom Inhalt her auch das gewichtigste: Das Kapitel 3, 63 Seiten lang, ist den *Projektiven Räumen* gewidmet; Kapitel 1 bzw. 2, *Affine Räume* bzw. *Bewegungen in der euklidischen Ebene* überschrieben, umfassen 33 bzw. 11 Seiten. Dem Buch sind über 250 Aufgaben beigegeben und außerdem auch

Lösungshinweise. In einem Anhang sind grundlegende algebraische Strukturen definiert, daneben aber auch etwa Quaternionen und Oktaven. – Im ersten Kapitel geht es um Affine Räume, deren Punktmengen gesondert von den zugrundeliegenden Vektorräumen eingeführt werden: Ich halte diese vom Autor vorgenommene Trennung der Begriffe Punkt und Vektor (und vielleicht auch noch Ortsvektor) am Anfang einer grundlegenden Geometrievorlesung für unerläßlich. Daß man dann Identifikationen zwischen den Begriffen herbeiführen kann und somit den Punktraum im Vektorraum darstellen kann, ist schnell erklärt und bewiesen. Jedenfalls geht der Autor diesen Weg, was der Referent ausdrücklich begrüßt. – Unterräume, affine Abbildungen werden definiert und untersucht und ebenso systematisch dann affine Invarianten. Auch Begriffe wie Winkel, Inhalt (Volumen), Orientierung sind im einführenden Kapitel 1 zu finden. Im zweiten Kapitel werden uns in der Anschauungsebene orientierungstreue Bewegungen, Umlegungen, Geradenspiegelungen, Spiegelungsprodukte nahegebracht, wobei komplexe Zahlen als eine adäquate Darstellungsform Verwendung finden. Das dritte Kapitel, Projektive Räume, wird didaktisch sehr gut eingeführt – wie überhaupt durchweg alle Motivationen hervorragend gelungen sind. Die reelle projektive Ebene, als der Anschauung besonders zugänglich, findet eine gesonderte Behandlung, insbesondere in ihren Zusammenhangsverhältnissen und in ihrer Beziehung zum Möbius'schen Band. Projektivitäten, zentrale Kollineationen (Homologien, Elationen) werden eingeführt und wesentliche ihrer Eigenschaften hergeleitet. Die Sätze von Desargues und Pappus werden abbildungsgeometrisch, letzterer unter Hinzuziehung des Doppelverhältnisbegriffes, bewiesen. Kegelschnitte, Polaritäten, quadratische Formen finden ihre angemessene Behandlung. Mit Abschnitt 3.8 beginnt dann der synthetische Aufbau der Geometrie. Projektive Inzidenz-Ebenen (es gibt Projektive Inzidenz-Ebenen, die nicht Projektive Ebenen sind) und Projektive Inzidenz-3-Räume werden eingeführt, weiterhin die Moulton-Ebene und dann auch Translationsebenen. $\mathbb{P}3$ auf Seite 86 ist wohl verschrieben. Wir finden dann Quasikörper, Desarguessche, Pappussche Ebenen, auch Ebenen endlicher Punkteanzahl. Das Bruck-Ryser-Theorem findet Erwähnung. – Kapitel 4 beginnt mit einer allgemeinen Erörterung über Axiome. Tatsächlich handelt es sich hier um Dinge, die zum Allgemeinwissen des Mathematikers gehören müssen. Wann ist ein Axiomensystem kategorisch (oder polymorph), wann ist es unabhängig, wann widerspruchsfrei? – Die metrische Ebene $(\Pi, \Lambda, I, \perp)$ besteht aus Punkten, Geraden, einer Inzidenz – und einer Orthogonalitätsrelation. Gefordert wird, daß zwei verschiedene Punkte durch genau eine Gerade verbunden sind, daß das Produkt der Spiegelungen dreier Geraden, die sich a) in einem Punkt P schneiden resp. b) senkrecht auf einer Geraden g stehen, wieder eine Geradenspiegelung an einer Geraden h ist, die a) durch P geht resp. b) auf g senkrecht steht. Hinzu kommen die Axiome G 4 bis G 9, von denen wir nur noch nennen: G 5: Zu Punkten P, Q und Geraden $s\,\mathrm{I}\,P$, $t\,\mathrm{I}\,Q$ gibt es eine Bewegung β (hier Produkt endlich vieler Geradenspiegelungen) mit $P\beta = Q$, $s\beta = t$, d. i. die Transitivität auf den Fahnen. G 6: An jeder Geraden existiert eindeutig eine Spiegelung. – G 1 bis G 9 sind – wie gezeigt wird – aus den Bachmannschen Axiomen für die Bewegungsgruppe einer metrischen Ebene herleitbar. Mehrere leicht zugängliche Beispiele für metrische Ebenen werden angegeben. Die Frage der Anordnung einer Ebene wird untersucht, die Frage nach der Gültigkeit des euklidischen Parallelenaxioms wird gestellt. Schneiden sich je zwei verschiedene Geraden, so haben wir etwa den Fall der elliptisch-metrischen Ebene. Im Zusammenhang der elliptischen Ebene interessiert natürlich auch die sphärische zweidimensionale Geometrie, die der Autor entwickelt, und dies sogar unter Einschluß geographischer und astronomischer Anwendungen. Poincaré-Modell, hyperbolisch metrische Ebenen, Cayley-Klein-Modell, der reelle Fall nichteuklidischer ebener Geometrien, schließlich Stetigkeit runden die Theorie ab.

Ich empfehle dieses Buch uneingeschränkt als herausragenden Text für Vorlesungen und zum Selbststudium für Studierende der Mathematik und Physik ab dem 3.

Studiensemester, wenn durch die Vorlesungen Lineare Algebra I, II eine gute Vertrautheit mit den Begriffen Gruppe, Körper, Vektorraum vorliegt, obwohl das Buch solche Begriffe ja auch erklärt.

Hamburg W. Benz

Dieck tom, T., Topologie, Berlin u. a.: Walter de Gruyter 1991, 401 S., kartoniert DM 58,–, geb. DM 98,–

„Topologie ist qualitative Geometrie. Hilfsmittel sind Algebra und Analysis. Im Wechselspiel von Geometrie, Algebra und Analysis besteht der Reiz der Topologie.“ Diese Sätze stehen am Anfang des vorliegenden Lehrbuches. Die griffige Umschreibung der Topologie im ersten Satz geht auf Henri Poincaré zurück, der vor rund hundert Jahren die algebraische Topologie auf den Weg brachte und hier mehrfach bemüht wird. Der Reiz des Wechselspiels verschiedener mathematischer Disziplinen ist nicht auf die Topologie beschränkt. Hier wird er nur in einer Richtung ausgekostet, auf Anwendung der Topologie wird nicht eingegangen. In der Entwicklung der Topologie spielten zunächst kombinatorische Methoden eine wichtige Rolle. Mit ihnen wurden beispielsweise die fundamentalen Ergebnisse von Brouwer wie der Satz über die Dimensionsinvarianz, der Satz über die Invarianz des Gebietes und sein Fixpunktsatz erzielt. Heutzutage werden diese und andere geometrische Aussagen meist mit Hilfe der singulären Homologie bewiesen, deren Konstruktion einigen Aufwand erfordert. Andererseits ist seit langem bekannt, daß zu einer Reihe topologischer Aussagen ein analytischer Zugang existiert. So gab M. Nagumo um 1950 eine analytische Definition des Brouwerschen Abbildungsgrades. Was man damit an topologischen Sätzen beweisen kann, steht beispielsweise in dem Buch von K. Deimling: „Nichlineare Gleichungen und Abbildungsgrade“. Die Anwendung differentialtopologischer und damit letztlich analytischer Methoden wurde außerdem in den Büchern „Topology from the differentiable viewpoint“ von J. Milnor und „Differential topology“ von V. Guillemin und A. Pollak beschrieben. Sie hat häufig den Vorteil, daß die Definitionen leicher intuitiv zu erfassen und die Beweise durchsichtiger sind, als das bei Anwendung der Homologie der Fall ist. Diese Einsicht wird in dem vorliegenden Lehrbuch an vielen Stellen genutzt. Der Stoff reicht für eine mehrsemestrige Beschäftigung. Grundkenntnisse aus der homologischen Algebra wie exakte Sequenzen, Kategorien und Funktoren sowie Limeskonstruktionen werden vorausgesetzt. Nicht alles wird bewiesen, auch bei grundlegenden Sätzen wird einige Male auf die Literatur verwiesen, zu anderen Sätzen gibt es den Beweis nur im Spezialfall. In jedem Abschnitt werden weiterführende Aussagen, die zu diesem Zeitpunkt verstanden werden können, deren Beweise aber den Rahmen des Buches überschreiten, zitiert. So erfährt der Leser von den diversen Whitneyschen Sätzen, differenzierbaren Strukturen, dem Immersionssatz von Cohen, stabilen Homotopiegruppen der Sphären, dem Bottschen Periodizitätssatz und anderen. Der Stoff ist in fünf Kapiteln untergebracht mit den Überschriften: Differentialtopologie, Homotopie, Zellenkomplexe, Bündel, Bordismus und Homologie. Dazu kommt ein Anhang über analytische Topologie.

Das Kapitel über Differentialtopologie bringt differenzierbare Mannigfaltigkeiten, deren Konstruktion, Untermannigfaltigkeiten, Lie-Gruppen, differenzierbare Abbildungen, den Whitneyschen Einbettungssatz, Approximation stetiger durch differenzierbare Abbildungen, Transformationsgruppen, projektive Räume, Mannigfaltigkeiten mit Rand. Dazu kommen Transversalität, Orientierung und Schnittzahl. Der Rangsatz und der für die Anwendung der Analysis fundamentale Satz von Sard werden ohne Beweis zitiert. Der Brouwersche Fixpunktsatz hat gleich drei Beweise.

In dem Kapitel über Homotopietheorie wird sofort die Beziehung zum differenzierbaren Fall hergestellt. Nach Zusammenhang und Erweiterung von Homotopien werden differenzierbare Techniken benutzt, um die schon oben erwähnten Brouwerschen Sätze herzuleiten. Es folgen Fundamentalgruppe und Überlagerungstheorie. Der Abbildungsgrad für Abbildungen zwischen glatten Mannigfaltigkeiten wird mit analytischen Hilfsmitteln definiert und damit eine Reihe von klassischen Ergebnissen bewiesen. Zusätzlich wird er mit de Rahm-Kohomologie eingeführt. Weiter gibt es Abbildungsräume, höhere Homotopiegruppen, Faserungen, die exakte Homotopiesequenz für Serre-Faserungen, den Ausschneidungsatz von Blakers und Massey, den Einhängungssatz für Homotopiegruppen, Konstruktionen von Homotopiemengen und die Puppesequenz.

Das Kapitel über Zellenkomplexe enthält simpliziale Komplexe, deren Realisierungen, *CW*-Komplexe und deren Homotopietheorie, Eilenberg-MacLane-Räume und die Klassifikation der kompakten triangulierbaren Flächen. Mit den Eilenberg-MacLane-Räumen $K(\pi, \mathrm{n})$ werden die Kohomologiegruppen $H^n(X, \pi)$ eingeführt als Homotopiemengen $[X, K(\pi, \mathrm{n})]$ der stetigen Abbildungen von X in die H-Gruppe $K(\pi, \mathrm{n})$.

Das Kapitel über Bündel bringt Prizipalbündel, assoziierte Bündel, Vektorraumbündel, den Ring $K(X)$, universelle Bündel, lokale Beschreibung von Bündeln durch Übergangsfunktionen und Čechsche Kohomologiemengen, die Kennzeichnung komplexer Geradenbündel durch die erste Chernsche Klasse, Bestimmung des Tangentialbündels in einigen konkreten geometrischen Situationen, Orientierung von Vektorraumbündeln und Tubenumgebungen von Untermannigfaltigkeiten.

In dem Kapitel über Bordismus und Homologie wird zunächst nach Conner und Floyd die Bordismustheorie eingeführt. Es folgen die Axiome von Eilenberg und Steenrod für Homologie- und Kohomologietheorien, die Berechnung der Homologie von *CW*-Komplexen, Eulercharakteristik, eine Schnittpaarung im Rahmen der Bordismustheorie, Eulerzahl, für *CW*-Paare der Satz von Hurewicz über die Beziehung zwischen Homologie und Homotopie, die Thom-Klasse eines n-dimensionalen orientierten Vektorraumbündels und die Eulerklasse. Der Jordansche Kurvensatz und seine höherdimensionalen Verallgemeinerungen stehen im letzten Abschnitt als Folgerung aus einem Dualitätssatz.

Die Inhaltsangabe vermittelt einen schwachen Eindruck von der Fülle an Material, die in diesem Text untergebracht ist. Zusätzliches steht in den zahlreichen Aufgaben und Ergänzungen. Ob man in einem mehrsemestrigen Kurs, der eine Einführung in das Gesamtgebiet der Topologie geben soll, auf die singuläre Homologietheorie verzichten will, ist vielleicht eine Frage des Geschmacks. Der Autor nennt im Vorwort, in dem noch mehreres steht, zu dem man verschiedene Ansichten haben mag, die Gründe für diese Auswahl. Gleichgültig ob man sie teilt oder nicht, das vorliegende Lehrbuch gibt eine sehr gute Einführung in wesentliche Teilgebiete der Topologie.

Dortmund K. H. Mayer

Khavin, V. P., Nikol'skij, N. K., Commutative Harmonic Analysis I, General Survey – Classical Aspects (Encyclopaedia of Mathematical Sciences, Vol. 15), Berlin: Springer 1991, 265 S., DM 128,–

Die Harmonische Analysis zählt, nicht zuletzt aufgrund der mannigfachen Anwendungsmöglichkeiten ihrer Methoden und Ergebnisse in den verschiedensten mathematischen und außer-mathematischen Disziplinen, zu den fundamentalen Teilgebieten der Mathematik. Im Laufe seiner langen Geschichte, welche mit der für seine Zeit überraschenden Erkenntnis Fouriers, daß sich „beliebige" periodische Funktionen in trigonometrische Reihen entwickeln lassen, begann, hat dieses Gebiet viele und oft drastische Änderungen und Erweiterungen erfahren. Dementsprechend gibt es auch umfangreiche und sehr gute

Literatur zu verschiedenen Teilaspekten dieser Disziplin, jedoch fehlte bis heute ein aktueller Gesamtüberblick. Es ist daher erfreulich, daß der Springer Verlag mit einer Unterreihe der „Encyclopaedia" den Versuch unternimmt, diese Lücke für das wichtige Teilgebiet der kommutativen Theorie zu schließen.

Der vorliegende erste Band soll den Leser mit der Disziplin vertraut machen. Er besteht aus drei i.w. voneinander unabhängigen Artikeln.

Der erste, von V. P. Khavin verfaßte Artikel „Methods and Structure of Commutative Harmonic Analysis", gibt eine schöne Einführung in das Gebiet. Wie üblich, wird zuerst die Theorie der Fourierschen Reihen entwickelt; dann geht es weiter mit Fourierschen Integralen, Harmonischer Analysis auf Gruppen, bis schließlich noch Themen wie die Spektralanalyse und Spektralsynthese, singuläre Integrale und Fouriermultiplikatoren kurz andiskutiert werden. Durch die Wahl eines Distributionentheoretischen Zugangs (die notwendige Distributionentheorie wird mitentwickelt) ist es dem Autor möglich, eine Diskussion der oft sehr technischen Konvergenzprobleme Fourierscher Reihen weitgehend zu vermeiden, wodurch Raum gewonnen wird, anhand vieler interessanter Anwendungsbeispiele Zusammenhänge zu Gebieten wie den Differential- und Integralgleichungen, Approximationstheorie, Zahlentheorie, Wahrscheinlichkeitstheorie, Komplexitätstheorie und Physik aufzuzeigen. Auch ein kurzer, informativer Abriß der Geschichte der Harmonischen Analysis findet sich in Kapitel 4.

Im Gegensatz zum ersten Artikel, in dem die mehr technischen Probleme der Theorie zugunsten einer breiteren Diskussion von Konzepten und Anwendungsmöglichkeiten weitgehend ausgeklammert werden, befaßt sich der zweite, von S. V. Kislyakov erstellte Artikel, gerade mit solchen „klassischen" Fragen der Fourieranalysis (laut Herausgeber ein „Mini-Zygmund" für den Anfänger). Themen sind u.a.: Konvergenz Fourierscher Reihen, das globale Verhalten Fourierscher Koeffizienten, der harmonische Konjugationsoperator und die Hilberttransformation, „dünne" Mengen sowie Eindeutigkeitsmengen.

Im dritten Artikel führt der Verfasser E. M. Dyn'kin den Leser an einige der wohl bedeutsamsten Entwicklungen der letzten zwanzig Jahre in diesem Gebiet heran, nämlich das, was man vielleicht die „geometrische" Fourieranalysis nennen könnte, wozu in erster Linie die Calderon-Zygmund Theorie, insbesondere die Theorie singulärer Integraloperatoren, zu zählen ist. Behandelt werden u.a. Überdeckungssätze, Maximaloperatoren, harmo-

Akhmerov, R. R., Kamenskii, M. I., Potapov, A. S., Rodkina, A. E., Sadovskii, B. N., Measures of Noncompactness and Condensing Operators, Basel u.a.: Birkhäuser-Verlag 1992, 249 S., DM 148,–

Bei dem vorliegenden Buch handelt es sich um die englische Übersetzung des russischen Originals, welches 1986 bei Nauka in Novosibirsk erschienen ist. Ein Nichtkompaktheitsmaß α ist eine numerische Charakteristik, die angibt, „wie weit eine gegebene beschränkte Teilmenge M eines Banachraums X davon entfernt ist", relativkompakt zu sein. Klassische Beispiele sind das Kuratowskische Nichtkompaktheitsmaß

$$\alpha(M) = \inf\{d : d > 0, M \text{ besitzt eine endliche Überdeckung mit Mengen vom Durchmesser} \leqslant d\}$$

und das Hausdorffsche Nichtkompaktheitsmaß

$$\alpha(M) = \inf\{r : r > 0, M \text{ besitzt eine endliche Überdeckung mit Kugeln vom Radius} \leqslant r\}.$$

Kondensierende (nichtlineare) Operatoren A in X sind nun solche, die das Nichtkompaktheitsmaß jeder Menge verkleinern, d. h. $\alpha(A(M)) \leqslant q\alpha(M)$ für ein $q < 1$; salopp gesprochen, macht ein solcher Operator jede Menge „ein bißchen kompakter". Ein wichtiger Fixpunktsatz von G. Darbo [Rend. Sem. Mat. Univ. Padova 24, 84–92 (1955)] besagt, daß ein kondensierender stetiger Operator, der eine nichtleere konvexe abgeschlossene beschränkte Menge in einem Banachraum invariant läßt, in dieser Menge einen Fixpunkt besitzt. Da sowohl kontrahierende als auch kompakte Operatoren kondensierend sind, schlägt dieser Satz sozusagen eine Brücke zwischen den klassischen Fixpunktsätzen von Banach und Schauder.

In den vergangenen 30 Jahren entstand eine umfangreiche Literatur zu diesem Thema; hierher gehören u. a. die Namen M. Furi, A. Vignoli, J. Daneš und R. D. Nussbaum (der in der Aufzählung im Vorwort merkwürdigerweise fehlt). Bekannt sind vor allem der keine Norm). Richtig ärgerlich ist aber nur der Preis, der für ein in TeX gesetztes Buch eindeutig zu hoch ist.

Würzburg J. Appell

Gilbert, J. E., Murray, M. A. M., Clifford algebras and Dirac operators in harmonic analysis, (Cambrigde studies in advanced mathematics, Vol. 26) Cambridge University Press 1991, 334 S., £ 40.–

Aus der erwartungsvollen Sicht ihres Entdeckers, W. K. Clifford (1845–79), sollten die von ihm eingeführten „Cliffordalgebren" von grundlegender Bedeutung für geometrische Fragestellungen sein. Eine wichtige Rolle fanden sie dann auch in der nach Dirac (1928) benannten Gleichung zur relativstisch-quantenmechanischen Beschreibung des Elektrons, da die dabei benutzten Diracmatrizen einer Cliffordalgebra erzeugen. In diesem physikalischen, wie auch im allgemeinen Liegruppen-theoretischen Rahmen erweist sich zudem die explizite Konstruktion der Spingruppen und der Spindarstellungen mittels der Cliffordalgebren als von großem Nutzen.

Einen wesentlichen Auftrieb erhielt das Interesse an Diracoperatoren und Cliffordalgebren durch die Arbeiten von Atiyah und Singer zur Indextheorie elliptischer Operatoren auf Mannigfaltigkeiten, an die sich zahlreiche neue Anwendungen und Verbindungen zu anderen mathematischen Bereichen, wie z.B. denen der Wärmeleitungsgleichung, der Supersymmetrie, der Darstellungstheorie von Liegruppen (Konstruktion der diskreten Serien), der Riemannschen Mannigfaltigkeiten positiver Skalarkrümmung, der elliptischen Geschlechter und vielen anderen angeschlossen haben.

Dem damit entstandenen und weiter wachsenden Interesse an Darstellungen dieser Theorien kommen neben den Originalarbeiten und dem Princeton-Seminar von Palais (1965), auch eine Zahl von neueren Büchern entgegen, wie Gilkey (Publish or Perish, 1984), Booß-Bleecker (Springer, 1977/85), Roe (Pitman, 1988), Lawson-Michelson (Princeton University Press, 1989), Berline-Getzler-Vergne (Springer, 1992).

Das vorliegende Buch von Gilbert-Murray unterscheidet sich nun von diesen Quellen, indem es keine umfassende Darstellung der Indextheorie und ihrer Anwendungen, sondern eine Übersicht über mehrere Anwendungen von Cliffordalgebren und Diracoperatoren i.w. im Rahmen der klassischen, harmonischen Analysis verschaffen möchte. Es konzentriert sich dabei auf die folgenden vier Themenbereiche.

1) Clifford-analytische Funktionen. Dies sind Funktionen auf dem euklidischen $\mathbf{R}^n$ mit Werten in einem Modul der zugehörigen Cliffordalgebra, die im Kern des Diracoperators liegen. Komplex-analytische Funktionen lassen sich als ein Spezialfall interpretieren, und das Hauptanliegen des zweiten Kapitels des Buches ist die Herausarbeitung der Analogien zwischen diesem speziellen und dem allgemeinen Fall. So werden u.a. ein Cauchy-Integralsatz, ein Mittelwertsatz, Sätze von Cauchy, Morera und Weierstraß hergeleitet. Den größten Raum nimmt jedoch die Entwicklung einer Hardy-Raum-Theorie

2) Die Theorie der harmonischen Polynome von Vektor- und Matrixargumenten. Nach einem Abriß der endlichdimensionalen Darstellungstheorie der Spingruppen stellt Kapitel 3 zunächst die klassische Theorie der harmonischen Polynome auf dem euklidischen $\mathbf{R}^n$ vor. Dabei werden die auf diesen Polynomen realisierten irreduziblen Darstellung der orthogonalen Gruppen $O(n)$ identifiziert und mittels der Theorie der Gegenbauer-Polynome bezüglich der Untergruppe $O(n-1)$ in expliziter Weise zerlegt. Als analytische Anwendungen dieser Erkenntnisse erhalten die Autoren Integraldarstellungen für harmonische und Gegenbauer-Polynome. Der verbleibende Teil des Kapitels widmet sich der Übertragung dieser Ergebnisse auf Polynome in Matrixargumenten oder, in anderer Sprache, von mehreren, sagen wir $r \leqslant n$, Vektorvariablen repräsentiert durch die r Reihen einer Matrix. Hierbei spielen nur diejenigen Polynome eine Rolle, die bezüglich der Gruppe $GL(r)$ der Reihenoperationen determinantiell homogen, also invariant bezüglich $SL(r)$ sind. Ergebnisse der klassischen Invariantentheorie ermöglichen nun eine Zerlegung des Raumes dieser Polynome in irreduzible Darstellungen bezüglich der Gruppen $GL(n)$ und $O(n)$. Ebenfalls auf invariantentheoretischen Ergebnissen beruht die Definition von hypergeometrischen Funktionen und Gegenbauer-Polynomen in mehreren Variablen, mit deren Hilfe feinere Eigenschaften der harmonischen $O(n)$-Darstellungen (e.g. die Klasse-I-Eigenschaft) hergeleitet werden. Ähnlich wie bei der Behandlung der klassischen Theorie folgen Anwendungen auf Integraldarstellungen.

3) Unitäre Darstellungen nichtkompakter Spingruppen. In Analogie zur Darstellungstheorie von $SL_2(\mathbf{R})$ werden in Kapitel 5 (§ § 3, 4) Darstellungen der nichtkompakten Spingruppe Spin $(n, 1)$ in Funktionenräumen auf dem n-dimensionalen hyperbolischem Raum und seinem Rand, der $(n-1)$-Sphäre, konstruiert. Wesentlich ist dabei die Aktion von Spin $(n, 1)$ durch gebrochen lineare Transformationen auf den letztgenannten Räumen, die durch geeignet Isomorphismen zwischen der relevanten Cliffordalgebra und der 2×2-Matrizenalgebra über einer kleineren Cliffordalgebren ermöglicht wird. Mittels Calderón-Zygmund-, Cauchy-Szegö- und Randwerttransformationen lassen sich natürliche Verkettungsoperatoren zwischen diesen Darstellung realisieren. Untersuchungen über Irreduzibilität und Unitarisierbarkeit werden jedoch nicht angegangen. Auch findet die Darstellung der diskreten Serie (n ungerade) im Kern des Diracoperators kaum Beachtung.

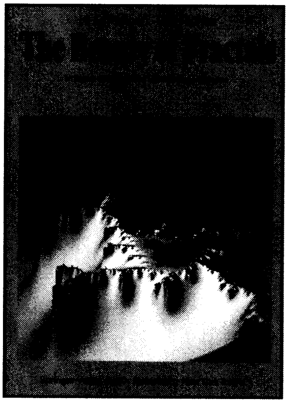
4) Der Atiyah-Singer-Indexsatz für den Diracoperator. Die beiden letzten Abschnitte von Kapitel 5, und damit des Buches, entwickeln einen fast vollständigen Beweis der Atiyah-Singer-Indexformel für den gewöhnlichen Dirac- und Signaturoperator auf einer kompakten Spinmannigfaltigkeit. Diese Formel berechnet den Index der genannten, wie auch den von beliebigen elliptischen Operatoren mittels der Integration einer gewissen, durch den Operator bestimmten, charakteristischen Klasse über die Mannigfaltigkeit. Die Autoren folgen bei ihrer Darstellung dem analytischen Zugang über die Asymptotik des Kerns der Wärmeleitungsgleichung für das Quadrat des Diracoperators, wie er von McKean, Singer, und Patodi initiiert wurde. Bei der expliziten Bestimmung des Integranden in der Indexformel kommen neuere Ideen von E. Getzler zum Tragen, die auf geschickten Deformationsargumenten beruhen.

Wie die Autoren in der Einleitung ihres Buches ausdrücklich sagen, wenden sie sich mit ihrem Text an einen Kreis „klassisch ausgebildeter Analytiker“, auf deren Vorkenntnisse sie sich einstellen. Dementsprechend dienen große Teile des Buches der teilweise elementaren Entwicklung von Grundlagen algebraischer und geometrischer Natur, wie über Cliffordalgebren, Spingruppen (das ganze Kapitel 1), deren endlichdimensionale Darstellungen (Kapitel 3), Zusammenhänge, Krümmung, Bündel (Kapitel 5). Im Gegenzug sind dafür gelegentlich analytische Argumente nur knapp ausgeführt und mit Verweisen auf Analytikern (hoffentlich) wohlvertraute Theorien versehen worden. Aber auch in anderen Bereichen lassen die Autoren gelegentlich Lücken, um schneller über die wesentlichen Ergebnisse berichten zu können. Insofern hat das Buch mehr den Charakter einer pragmatisch konzipierten, orientierenden Einführung als den eines systematischen Lehrbuches. Es spricht auch durchaus Nichtanalytiker an, wie z.B. den Rezensenten, der sich allerdings sehr oft eine stärkere Durcharbeitung des Textes gewünscht hätte. So hätte die Darstellung der Theorie der harmonischen Funktionen von Matrixargumenten sicher an Übersichtlichkeit gewonnen, wenn die zugrundeliegende Invariantentheorie und algebraische Geometrie stärker betont worden wäre. Im Abschnitt über die Darstellungstheorie der nichtkompakten Spingruppen hätte z.B. eine Übersicht über die Klassifikation und Konstruktion der irreduziblen unitären Darstellungen im Spezialfall $SL_2(\mathbf{R})$ eine motivierende Perspektive aufbauen können.

Neben zahlreichen Druckfehlern finden sich auch einige Ausrutscher im Text (u.a. „das orthogonale“ Komplement des Radikals einer quadratischen Form (S. 7), die Homöomorphie aller (!) Spingruppen zu Sphären (S. 147)). Diese sind jedoch meistens leicht als solche zu erkennen oder für den weiteren Gang der Dinge jeweils ohne Belang. Unnötig an der Nase herumgeführt wird der Leser allerdings bei der Behandlung des zentralen Deformationsresultates in Kapitel 5 (Theorem 5.27, S. 305). So wird auf S. 302 erklärt: „... but a careful reading of the proof of the principal general result of this section, theorem (5.27), will show ...“. Auf S. 305, vor der Formulierung dieses Satzes heißt es dann „The following result ... is easier to appreciate than to prove, so we postpone its proof to the end

Im Reich der Fraktale

The fascination of fractals



H.-O. Peitgen, P.H. Richter, University of Bremen

The Beauty of Fractals

Images of Complex Dynamical Systems

1986. XII, 199 pp. 184 figs., 88 in color. Hardcover DM 98,-
ISBN 3-540-15851-0

Intellectually stimulating and full of beautiful color plates, this book is an unusual and unique attempt to present the field of complex dynamics.The astounding results assembled here invite the general public to share in a new mathematical experience: to revel in the charm of fractal frontiers.
In 88 full-color pictures, the authors present variations on a theme whose repercussions reach far beyond the realm of mathematics. They show how structures of unseen complexity and beauty unfold by the repeated action of simple rules. The implied unpredictability of many details in these processes in spite of their complete determination by the given rules, reflects a major challenge to the prevailing scientific conception.

H.-O. Peitgen, H. Jürgens, D. Saupe, University of Bremen

Chaos and Fractals

Neue Lehr- und Fachbücher von Springer