E 20577 F
96. Band Heft 3
ausgegeben am 20. 7. 1994

DMV

Jahresbericht

der Deutschen Mathematiker-Vereinigung

Herausgegeben von W.-D. Geyer
unter Mitwirkung von
P. L. Butzer, U. Felgner,
K.-H. Hoffmann, H. Kurzweil

B. G. Teubner Stuttgart 1994

Jahresbericht
der Deutschen Mathematiker-Vereinigung

Der „Jahresbericht" ist das offizielle Veröffentlichungsorgan der Deutschen Mathematiker-Vereinigung, für dessen inhaltliche Gestaltung im Auftrag des Präsidiums der jeweilige Herausgeber zuständig ist. Im „Jahresbericht" sollen vornehmlich Überblicksartikel über Teilgebiete der reinen und angewandten Mathematik, Nachrufe sowie historische Artikel und Buchbesprechungen veröffentlicht werden.

Manuskripte

Alle für die Schriftleitung des Jahresberichts bestimmten Sendungen (Briefe, Manuskripte, Ankündigung von neuerscheinenden Büchern) sind an Prof. Dr. W.-D. Geyer zu richten. Bücher, von denen eine Besprechung erfolgen soll, werden bei den Verlagen angefordert. Die Autoren werden gebeten, bei der Vorbereitung ihrer Manuskripte die „Hinweise für Autoren" zu beachten.

Grundsätzlich sollen nur solche Manuskripte eingereicht werden, die nicht gleichzeitig an anderer Stelle zur Veröffentlichung eingereicht oder bereits veröffentlicht worden sind. Mit der Annahme zur Veröffentlichung erwirbt der Verlag das Verlagsrecht zur Vervielfältigung und Verbreitung sowie das Recht der Übersetzung in andere Sprachen.

Bezugsinformationen

Jährlich wird ein Band veröffentlicht, bestehend aus 4 Heften, die vierteljährlich erscheinen. Der Bezug ist nur bandweise möglich.

Der im voraus zahlbare Bezugspreis pro Band beträgt zur Zeit DM 128,— einschließlich Versand. Bestellungen nehmen jede Buchhandlung oder der Verlag entgegen.

Für persönliche Mitglieder der DMV, die den Jahresbericht zu beziehen wünschen, ist der zwischen DMV und Verlag vereinbarte Bezugspreis maßgebend, der im Rahmen des Mitgliedsbeitrags erhoben wird.

Verlag:

Postfach 801069, D-70510 Stuttgart, Tel. (0711) 78901-0, Telefax 78901-10
Verantwortlich für den Anzeigenteil: Albrecht Luscher

Jahresbericht
der Deutschen Mathematiker-Vereinigung

Inhalt Band 96, Heft 3

1. Abteilung

2. Abteilung

Anschriften der Herausgeber

Prof. Dr. W.-D. Geyer, Bismarckstr. 1½, 91054 Erlangen

Prof. Dr. P. L. Butzer, Templergraben 55, 52062 Aachen
Prof. Dr. U. Felgner, Auf der Morgenstelle 10, 72076 Tübingen
Prof. Dr. K.-H. Hoffmann, Arcisstraße 21, 80333 München 2
Prof. Dr. H. Kurzweil, Bismarckstr. 1½, 91054 Erlangen

Bezugshinweis

Früher erschienene Bände (ab Band 68) des „Jahresberichts der Deutschen Mathematiker-Vereinigung“ können durch den Buchhandel oder den Verlag bezogen werden.

Nachdruck der Bände 1 bis 40 liefert: Johnson Reprint Corp., 111 Fifth Avenue, New York, N.Y. 10003

Nachdruck der Bände 41 bis 67 liefert: Swets & Zeitlinger, Heereweg 347b, POB 810, NL-2160 SZ Lisse/Holland

Jber. d. Dt. Math.-Verein.
96 (1994) 85–100
AMS subject classification: 34 D 08, 34 F 05, 60 H 10, 93 E 03

Zufällige dynamische Systeme*

L. Arnold, Bremen

Inhaltsverzeichnis

1 Metrische, topologische und glatte Dynamik

Die Theorie der dynamischen Systeme studiert diejenigen Eigenschaften

Aus (i) und (ii) folgt insbesondere, daß $\varphi(t)$ bijektiv ist mit $\varphi(t)^{-1} = \varphi(-t)$.

Je nach der Kategorie des Raumes und der Abbildungen gibt es drei große Teildisziplinen[1]):

Metrische Dynamik/Ergodentheorie

Ein *metrisches dynamisches System* $(\Omega, \mathscr{F}, \mathbb{P}, (\theta(t))_{t\in\mathbb{T}})$ besteht aus einem Fluß von Abbildungen $(\theta(t))_{t\in\mathbb{T}}$ auf einem Wahrscheinlichkeitsraum $(\Omega, \mathscr{F}, \mathbb{P})$, so daß gilt:

(i) $(t,\omega)\mapsto\theta(t)\omega$ ist $\mathscr{B}\otimes\mathscr{F}$, $\mathscr{F}$-meßbar, wobei $\mathscr{B}$ die Borelsche σ-Algebra von $\mathbb{T}$ ist,

(ii) $\theta(t)$: $\Omega\to\Omega$ ist *maßerhaltend*, d. h. $\theta(t)\mathbb{P}=\mathbb{P}$, wobei

$$\theta(t)\mathbb{P}(B) := \mathbb{P}\{\omega : \theta(t)\omega \in B\}, \quad B\in\mathscr{F}.$$

Eine zentrale Aussage der metrischen Dynamik ist der Birkhoffsche Ergodensatz von 1931. Das Gebiet nahm einen enormen Aufschwung nach Einführung des Begriffs der *metrischen Entropie* (= Maß der Informationsproduktion von θ) durch Kolmogorov und Sinai 1958/59.

Von den zahlreichen ausgezeichneten Lehrbüchern erwähnen wir nur diejenigen von Cornfeld, Fomin und Sinai [33], Krengel [53], Rudolph [65] und Walters [72] und den Übersichtsband von Sinai [69].

Auf die folgenden beiden Beispiele als wichtige Modelle von „Rauschen" kommen wir später zurück.

Beispiel 1: Stationärer stochastischer Prozeß als metrisches dynamisches System. Jeder stationäre Prozeß $(\xi_t)_{t\in\mathbb{T}}$ mit Zustandsraum $(E,\mathscr{E})$ erzeugt nach dem Kolmogorovschen Hauptsatz ein Maß $\mathbb{P}$ auf dem Produktraum $(\Omega,\mathscr{F}):=(E^{\mathbb{T}},\mathscr{E}^{\mathbb{T}})$, das invariant gegenüber dem Shift $\theta(t)\omega:=\omega(t+\cdot)$ ist[2]).

Beispiel 2: Weißes Rauschen als metrisches dynamisches System. Sei $\Omega=\{\omega\in\mathscr{C}(\mathbb{R},\mathbb{R}^m):\omega(0)=0\}$, $\mathscr{F}$ die Borelsche σ-Algebra in Ω und $\mathbb{P}$ das sogenannte *Wiener-Maß*, das von der Brownschen Bewegung (deren verallgemeinerte Ableitung *weißes Rauschen* heißt) auf Ω erzeugt wird. Der Shift

$$\theta(t)\omega(\cdot):=\omega(t+\cdot)-\omega(t)$$

ist maßerhaltend und ergodisch (mit unendlicher Entropie).

---

[1]) In der Theorie der dynamischen Systeme kollidieren diverse mathematische und physikalische Teilkulturen mit ihren je spezifischen Begriffen und generischen Notationen, die hier teilweise nebeneinander stehen bleiben sollen. So wird in der Wahrscheinlichkeitstheorie die Grundmenge mit Ω statt mit X bezeichnet etc.

[2]) Das Problem der Meßbarkeit von $(t,\omega)\mapsto\theta(t)\omega$ bei stetiger Zeit wird hier ausgeklammert – es erfordert topologische Voraussetzungen an E und eine Einschränkung auf eine „schöne" Teilmenge von $E^{\mathbb{T}}$.

Topologische Dynamik

Hier ist X ein topologischer Raum, und von φ wird gefordert, daß $(t,x) \mapsto \varphi(t)x$ stetig ist. Dann ist $(\varphi(t))_{t\in\mathbb{T}}$ ein Fluß von Homöomorphismen.

Wichtige Begriffe der topologischen Dynamik sind: Rekurrenz, Limesmengen, Transitivität, topologische Äquivalenz und strukturelle Stabilität (siehe etwa die Lehrbücher von Irwin [50] und Shub [70]).

Im „Durchschnitt" von metrischer und topologischer Dynamik finden wir die *topologische Ergodentheorie* (Brown [31]) und den *thermodynamischen Formalismus* mit seinen *Variationsprinzipien* (Ruelle [66]).

Glatte/differenzierbare Dynamik

Hier ist X eine glatte Mannigfaltigkeit, und von φ wird gefordert, daß $(t,x) \mapsto \varphi(t)x$ stetig und k mal $(1 \leqslant k \leqslant \infty)$ stetig differenzierbar nach x ist. Dann ist $(\varphi(t))_{t\in\mathbb{T}}$ ein Fluß von $\mathscr{C}^k$-Diffeomorphismen.

Für $\mathbb{T}=\mathbb{R}$ erzeugt jedes $\mathscr{C}^k$-Vektorfeld f bzw. die Differentialgleichung $\dot{x}=f(x)$ ein (lokales) $\mathscr{C}^k$ dynamisches System über ihren Lösungsfluß $x \mapsto \varphi(t)x$, und umgekehrt ist jedes glatte dynamische System, für das $t \mapsto \varphi(t)x$ an der Stelle $t=0$ nach t differenzierbar ist, Lösung einer autonomen Differentialgleichung mit der rechten Seite $f(x)=\frac{d}{dt}\varphi(t)x\Big|_{t=0}$. Man kann also (modulo technischer Voraussetzungen) sagen: Glatte dynamische Systeme und Lösungsflüsse autonomer Differentialgleichungen/glatter Vektorfelder sind ein und dieselbe Klasse von Objekten (siehe etwa Amann [1]).

Ein exemplarisches Problem der *lokalen* Theorie glatter dynamischer Systeme ist das Studium des Lösungsflusses φ von $\dot{x}=f(x)$ mit $f(0)=0$ in einer Umgebung von $x=0$ mit Hilfe der Linearisierung $\dot{v}=Av$, $A:=\frac{\partial f}{\partial x}(0)$. Es ist eine simple, aber folgenreiche Tatsache, daß das Verhalten linearer dynamischer Systeme durch lineare Algebra (Eigenwerte, Eigenräume von A) vollständig beschrieben wird. Das Problem ist nun, daraus Aussagen über das *nichtlineare* dynamische System φ zu gewinnen, etwa

- die Stabilität des Fixpunktes $x=0$ von φ zu zeigen, wenn alle Eigenwerte von A negative Realteile besitzen,
- invariante Mannigfaltigkeiten für φ tangential an die Eigenräume von A zu konstruieren,
- φ durch nichtlineare Koordinatentransformationen zu vereinfachen, möglichst zu linearisieren (Normalformen-Theorie, Satz von Hartman und Grobman),
- lokale „qualitative Veränderungen" (Bifurkationen) in parametrisierten Familien $\dot{x}=f^{\alpha}(x)$ zu studieren, wobei „qualitative Veränderung" sehr erfolgreich durch das topologische Konzept der *strukturellen Stabilität* formalisiert wird.

Aus der immensen Literatur zitieren wir nur die Bücher von V. I. Arnold [18], Guckenheimer und Holmes [46], Palis und de Melo [60] und Ruelle [68] und den Übersichtsband von Anosov und V. I. Arnold [2].

Die Technik, aus der Linearisierung $T\varphi$ eines Flusses Rückschlüsse auf φ selbst zu ziehen, funktioniert auch noch für die Umgebung eines periodischen Orbits (dank der Floquet-Theorie) – und dann überraschenderweise wieder in sehr großer Allgemeinheit für zufällige dynamische Systeme auf der Grundlage des multiplikativen Ergodensatzes.

Im enorm fruchtbaren „Durchschnitt" von topologischer und glatter Dynamik findet man die Theorie der strukturellen Stabilität, der Hyperbolizität, der Markov-Partitionen, was zur *symbolischen Dynamik* und dem Problemkreis des „Chaos" führt (siehe Irwin [50], Shub [70] und Szlenk [71]).

Im „Durchschnitt" von metrischer und glatter Dynamik liegt die *glatte Ergodentheorie* (siehe Mañé [58]) mit dem fundamentalen *multiplikativen Ergodensatz*. Sie ist als deterministischer Grenzfall aufgehoben in der allgemeineren Theorie der zufälligen dynamischen Systeme.

2 Zufällige dynamische Systeme: Begriff, invariante Maße

Man stelle sich einen Mechanismus vor, der zu jeder diskreten Zeit n eine (möglicherweise komplizierte, vielseitige) Münze wirft, um zufällig eine Abbildung φ_n auszuwählen, die einen Punkt x_n nach $x_{n+1} = \varphi_n(x_n)$ bewegt. Der Selektionsmechanismus darf sich zur Zeit n an alle vorherigen (und sogar an alle zukünftigen) Entscheidungen erinnern. Wichtig ist nur, daß bei jedem Schritt *derselbe* Auswahl-Mechanismus angewandt wird. Dieses Szenario, genannt *Produkte zufälliger Abbildungen*, ist einer der Prototypen eines zufälligen dynamischen Systems.

In stetiger Zeit würde die zufällige Auswahl zur Zeit t aus einer Menge von Differentialgleichungen $\dot{x} = f(t,x)$ erfolgen, wieder mit der Bedingung, daß die *Statistik* von $f(t,\cdot)$ unabhängig von t ist.

Der Begriff des zufälligen dynamischen Systems[3]) ist so gefaßt, daß er alle heute interessanten Systeme mit Zufallseinwirkungen umfaßt, insbesondere zufällige und stochastische Differentialgleichungen.

Ein ZDS besteht aus zwei Bestandteilen:

- einem topologischen/glatten dynamischen System, auf das „Rauschen" einwirkt,
- einem Modell dieses Rauschens, hier ein metrisches dynamisches System.

Die Theorie der ZDS ist eine Symbiose der topologischen/glatten Dynamik und der Ergodentheorie. Sie erlaubt insbesondere einen neuen Blick auf die Stochastik vom Standpunkt der dynamischen Systeme.

1. Definition. Sei $\mathbb{T} = \mathbb{Z}$ oder $\mathbb{R}$, $(\Omega, \mathscr{F}, \mathbb{P}, (\theta(t))_{t\in\mathbb{T}})$ ein metrisches dynamisches System und $(X, \mathscr{B})$ ein meßbarer Raum[4]). Sei

$$\varphi : \mathbb{T} \times \Omega \times X \to X, \qquad (t, \omega, x) \mapsto \varphi(t, \omega)x,$$

[3]) *Zufälliges dynamisches System* wird ab sofort als ZDS abgekürzt – und dies wird die *einzige* in dieser Arbeit benutzte Abkürzung sein.

[4]) Ist X ein topologischer Raum, so ist $\mathscr{B}$ die Borelsche σ-Algebra.

eine Abbildung mit den Eigenschaften:

(i) $\varphi(0,\omega)=\mathrm{id}_X$,

(ii) *Kozykel-Eigenschaft*: Für alle t, $s\in\mathbb{T}$, $\omega\in\Omega$ gilt

$$\varphi(t+s,\omega)=\varphi(t,\theta(s)\omega)\circ\varphi(s,\omega).$$

1. Ist

$$(t,\omega,x)\mapsto\varphi(t,\omega)x \quad \text{meßbar,}$$

   so heißt φ *meßbares* ZDS über θ.

2. Ist zusätzlich X ein topologischer Raum, und erfüllt das meßbare ZDS φ zusätzlich

$$(t,x)\mapsto\varphi(t,\omega)x \quad \text{stetig für alle } \omega\in\Omega,$$

   so heißt φ *stetiges* oder *topologisches* ZDS über θ.

3. Ist zusätzlich X eine glatte Mannigfaltigkeit, und erfüllt das stetige ZDS zusätzlich für ein k, $1\leqslant k\leqslant\infty$,

$$x\mapsto\varphi(t,\omega)x \quad \text{ist } \mathscr{C}^k \text{ für alle } (t,\omega)\in\mathbb{T}\times\Omega,$$

   so heißt φ ein *glattes*, genauer $\mathscr{C}^k$-ZDS über θ. ■

Bemerkungen: (i) Aus der Definition folgt, daß $\varphi(t,\omega)$ invertierbar ist mit

$$\varphi(t,\omega)^{-1}=\varphi(-t,\theta(t)\omega).$$

Damit ist $\varphi(t,\omega)$ eine bimeßbare Bijektion/ein Homöomorphismus/$\mathscr{C}^k$-Diffeomorphismus.

(ii) Die Abbildungen

$$\Theta(t)(\omega,x):=(\theta(t)\omega,\varphi(t,\omega)x)$$

bilden einen Fluß auf $\Omega\times X$, daß sogenannte *Schiefprodukt* von θ und φ. Umgekehrt bestimmt jedes solche Schiefprodukt einen Kozykel φ auf X – so daß wir „ZDS φ“, „Kozykel φ“ und „Schiefprodukt Θ“ synonym benutzen können.

Invariante Maße für zufällige dynamische Systeme

Für alle weiteren Schritte einer Theorie von ZDS benötigen wir *invariante Maße*. Da wir uns die metrische Komponente $(\Omega,\mathscr{F},\mathbb{P},(\theta(t))_{t\in\mathbb{T}})$ als „von außen“ gegeben und als außerhalb unserer Manipulationsmöglichkeiten liegend vorstellen, betrachten wir nur Maße μ auf $\Omega\times X$ mit der festen Randverteilung $\mathbb{P}$ auf Ω.

2. Definition. Sei φ ein meßbares ZDS über θ. Ein Wahrscheinlichkeitsmaß μ auf $(\Omega\times X,\mathscr{F}\otimes\mathscr{B})$ heißt *invariant* für φ, falls gilt

1. $\Theta(t)\mu=\mu$ für alle $t\in\mathbb{T}$,
2. $\pi\mu=\mathbb{P}$, wobei $\pi(\omega,x):=\omega$. ■

Ist X ein polnischer Raum, so kann man jedes Maß μ mit Randverteilung $\mathbb{P}$ $\mathbb{P}$-fast sicher eindeutig faktorisieren,

$$\mu(d\omega, dx) = \mu_\omega(dx)\mathbb{P}(d\omega),$$

und die Invarianz von μ ist äquivalent zur *Äquivarianz* von μ_ω,

$$\varphi(t,\omega)\mu_\omega = \mu_{\theta(t)\omega} \quad \mathbb{P}-a.s. \quad \text{für alle } t \in \mathbb{T}.$$

Die Antwort auf die Frage „Gibt es für φ invariante Maße?" lautet, wie im Deterministischen, „im allgemeinen viele!" – die verschiedenen invarianten Maße zeugen wie im Deterministischen von den verschiedenen langfristigen dynamischen Möglichkeiten eines ZDS.

Wie findet man invariante Maße? Es gibt für topologische ZDS eine Version der Krylov-Bogolyubov-Prozedur (siehe Crauel [34]), und im Falle eines kompakten metrischen Raumes X liefert der Fixpunktsatz von Markov-Kakutani die Existenz invarianter Maße (siehe auch Ledrappier [55] und Crauel [35]).

Für ZDS, deren *Ein-Punkt-Bewegungen* $\mathbb{R}^+ \ni t \mapsto \varphi(t,\omega)x$ Markov-Prozesse mit Übergangswahrscheinlichkeit $P(t,x,B)$ sind, heißt ein Maß ϱ auf $(X,\mathscr{B})$ *invariant bezüglich der Übergangswahrscheinlichkeit*, falls für alle $t \geqslant 0$ und $B \in \mathscr{B}$

$$\varrho(B) = \int P(t,x,B)\varrho(dx)$$

gilt. Jedes solche Maß kann zu einem invarianten Maß (nun bezüglich des Kozykels φ!) auf $\Omega \times X$ „geliftet" werden via

$$\mu_\omega = \lim_{t\to\infty} \varphi(-t,\omega)^{-1}\varrho$$

(Le Jan [57], Crauel [35]). Es gibt jedoch auch für ZDS, deren Ein-Punkt-Bewegungen Markov-Prozesse sind, i. a. mehr invariante Maße als man über die Übergangswahrscheinlichkeit finden kann (Arnold [3], Crauel [36]).

3 Erzeugung von zufälligen dynamischen Systemen

[illegible]

Sei φ ein ZDS und $\varphi(\omega) := \varphi(1,\omega)$ die *Zeit-Eins-Abbildung*. Die Kozykel-

[illegible]

Eigenschaft ergibt

$$\varphi(-1,\omega) = \varphi(\theta^{-1}\omega)^{-1}$$

und nach mehrmaliger Anwendung

$$\varphi(n,\omega) = \begin{cases} \varphi(\theta^{n-1}\omega)\circ\ldots\circ\varphi(\omega), & n \geqslant 1, \\ \text{id}, & n = 0, \\ \varphi(\theta^n\omega)^{-1}\circ\ldots\circ\varphi(\theta^{-1}\omega)^{-1}, & n \leqslant -1. \end{cases} \tag{1}$$

Umgekehrt sei für jedes ω eine bimeßbare Bijektion/ein Homöomorphismus/ein $\mathscr{C}^k$-Diffeomorphismus $\varphi(\omega)$ gegeben, so daß $(\omega, x) \mapsto \varphi(\omega)x$ und $(\omega, x) \mapsto \varphi(\omega)^{-1}x$

Mit anderen Worten: Alle diskreten ZDS sind *Produkte zufälliger Abbildungen*, wobei die Auswahl der Abbildung $\varphi(\theta^k\omega)$ in stationärer Weise durch ein metrisches dynamisches System gesteuert wird. In nochmals anderen, aber äquivalenten Worten: Alle diskreten ZDS sind Lösungen von zufälligen Differenzengleichungen der Form

$$x_{n+1} = \varphi(\theta^n\omega)x_n, \qquad n \in \mathbb{Z},\ x_0 = x \in X.$$

Der Fall $X = \mathbb{R}^d$ und $\varphi(\omega) \in Gl(d, \mathbb{R})$ ist das Gebiet der *Produkte zufälliger Matrizen* mit vielen fundamentalen Arbeiten, z. B. denen von Furstenberg und Kesten [44], Furstenberg [43], Oseledets [59], Ruelle [67], Guivarc'h und Raugi [47], Goldsheid und Margulis [45], siehe auch Bougerol und Lacroix [29].

Der Fall $X = \mathbb{R}^d$ und $\varphi(\omega)$ eine affine Abbildung ist das Gebiet der *iterierten Funktionensysteme*, wichtig geworden durch die Möglichkeit der Kodierung und Visualisierung von Fraktalen, siehe Hutchinson [49], Barnsley [19], Arnold und Crauel [8].

Stetige Zeit $\mathbb{T} = \mathbb{R}$

Analog zum Deterministischen suchen wir nach „zufälligen Differentialgleichungen", deren Lösungsfluß ein ZDS ist. Hier gibt es im Stochastischen zwei wesentlich verschiedene Antworten: ZDS können generiert werden:

(i) von *zufälligen* Differentialgleichungen, worunter wir gewöhnliche Differentialgleichungen mit ω als Parameter verstehen (pfadweise Interpretation),

(ii) von *stochastischen* Differentialgleichungen. Hier weist das Wort „stochastisch" in Verbindung mit „Differentialgleichung" oder „Integral" darauf hin, daß diese Objekte über die stochastische Analysis definiert werden. Insbesondere haben sie i.a. *keine* pfadweise Bedeutung.

1. Zufällige Differentialgleichungen. Die folgenden Klassen von Objekten sind (modulo technischer Annahmen) dieselben:

- Glatte ZDS φ über θ, für die $t \mapsto \varphi(t, \omega)x$ absolutstetig ist,
- (Pfadweise, d. h. ω-weise) Lösungen von zufälligen Differentialgleichungen der Form $\dot{x} = f(\theta(t)\omega, x)$,

2. Stochastische Differentialgleichungen. Die Theorie der ZDS wäre für die Stochastik weit weniger interessant ohne die folgende Tatsache: Es gibt eine große Klasse wichtiger ZDS, die *nicht* absolutstetig bezüglich t sind (die also prinzipiell *nicht* von einer pfadweisen Differentialgleichung kommen können), aber trotzdem Generatoren in Form von sog. *stochastischen* Differentialgleichungen besitzen.

Die einfachste stochastische Differentialgleichung ist

$$dx = dB, \qquad B = \text{Brownsche Bewegung},$$

die das $\mathscr{C}^\infty$-ZDS $x \mapsto x + B(t, \omega)$, $B(t, \omega) = \omega(t)$, über dem kanonischen System θ des

Die zusätzliche statistische Eigenschaft solcher ZDS ist, daß für jedes x der stochastische Prozeß $t \mapsto \varphi(t,\omega)x$ ein Semimartingal ist. Um solche ZDS als Lösungen von stochastischen Differentialgleichungen zu erhalten, muß die Brownsche Bewegung B durch ein Semimartingal mit stationären Zuwächsen ersetzt werden (siehe Arnold und Scheutzow [14]).

Der klassische Fall ist eine (Stratonovich) stochastische Differentialgleichung der Form

$$dx = f_0(x)dt + \sum_{j=1}^{m} f_j(x) \circ dB^j(t,\omega),$$

wobei die $f_0, \ldots, f_m$ glatte Vektorfelder sind. Bis in die 80er Jahre hinein wurde eine solche Gleichung nur als „Maschine“ zur Erzeugung von Markovprozessen auf $\mathbb{T} = \mathbb{R}^+$ betrachtet. Es erfordert harte Arbeit, zu zeigen, daß sie ein viel reichhaltigeres Objekt liefert: Es gibt eine Version der Lösung $\varphi(t,\omega)x$, so daß $x \mapsto \varphi(t,\omega)x$ Diffeomorphismen sind (siehe u. a. Baxendale [20], Bismut [25], Elworthy [40], Kunita [54]).

Man kann sogar zeigen, daß es eine Version der Lösung gibt, die ein Kozykel (also ein ZDS) über dem weißen Rauschen ist (Arnold und Scheutzow [14], für einen Überblick Arnold [4]).

4 Der multiplikative Ergodensatz

Der folgende Satz ist von fundamentaler Bedeutung. Er macht eine Theorie glatter ZDS dadurch möglich, daß er die Verallgemeinerungen der Begriffe *Eigenwert* und *Eigenraum* für die Linearisierung $T\varphi$ eines ZDS φ bezüglich eines invarianten Maßes bereitstellt.

Sei φ ein $\mathscr{C}^1$-ZDS auf einer Mannigfaltigkeit M. Die Kettenregel für die linearen Isomorphismen

$$T\varphi(t,\omega,x): T_xM \to T_{\varphi(t,\omega)x}M$$

ergibt

$$\begin{aligned} T\varphi(t+s,\omega,x) &= T\varphi(t,\theta(s)\omega,\varphi(s,\omega)x) \circ T\varphi(s,\omega,x) \\ &= T\varphi(t,\Theta(s)(\omega,x)) \circ T\varphi(s,\omega,x), \end{aligned}$$

d. h. $T\varphi$ ist ein *linearer* Kozykel über dem Schiefprodukt Θ.

Ist M Riemannsch, so können wir den *Lyapunov-Exponenten* des Tangentialvektors $v \in T_xM \setminus \{0\}$ an der Stelle (ω,x) definieren als

$$\lambda(\omega,x,v) := \lim_{t\to\infty} \frac{1}{t} \log \|T\varphi(t,\omega,x)v\|.$$

3. Theorem (Multiplikativer Ergodensatz von Oseledets). *Sei φ ein $\mathscr{C}^1$-ZDS auf einer d-dimensionalen Riemannschen Mannigfaltigkeit M und μ ein ergodisches invariantes Maß von φ, so daß gilt*

$$\int_{\Omega\times M} \log^+ \sup_{0\leq t\leq 1} \|T\varphi(t,\omega,x)^{\pm 1}\|\, d\mu < \infty \text{ für stetige Zeit } \mathbb{T} = \mathbb{R}, \tag{2}$$

bzw. $\int_{\Omega\times M} \log^+ \|T\varphi(1,\omega,x)^{\pm 1}\| \, d\mu < \infty$ *für diskrete Zeit* $\mathbb{T} = \mathbb{Z}$. (3)

Dann existiert

- *eine Θ-invariante meßbare Menge $\Gamma \subset \Omega \times M$ von vollem μ-Maß,*
- *eine Liste von festen Zahlen*

  $$\lambda_1 > \lambda_2 > \ldots > \lambda_p$$

  (*genannt Lyapunov-Exponenten von φ unter μ*) *mit Vielfachheiten* $d_1 + d_2 + \ldots + d_p = d$ (*die* λ_i, d_i *bilden das sog.* Lypapunov-Spektrum)

so daß für alle $(\omega, x) \in \Gamma$ *folgendes gilt:*

(*i*) $T_xM = E_1(\omega,x) \oplus E_2(\omega,x) \oplus \ldots \oplus E_p(\omega,x)$ *ist eine meßbare äquivariante Zerlegung, d. h. es gilt* $T\varphi(t,\omega,x)E_i(\omega,x) = E_i(\Theta(t)(\omega,x))$, *mit* $\dim E_i(\omega,x) = d_i$. *Die Zerlegung ist „dynamisch" charakterisiert durch*

$$v \in E_i(\omega,x) \setminus \{0\} \Leftrightarrow \lim_{t\to\pm\infty} \frac{1}{t} \log \|T\varphi(t,\omega,x)v\| = \lambda_i.$$

(*ii*) *Für alle* $v \in T_xM \setminus \{0\}$ *existiert der Lyapunov-Exponent* $\lambda(\omega,x,v)$, *und*

$$\lambda(\omega,x,v) = \lambda_{i_0(\omega,x,v)}, \qquad i_0(\omega,x,v) := \min\{i : proj_{E_i(\omega,x)} v \neq 0\}.$$

Dieser Satz wurde 1968 von Oseledets [59] bewiesen, und seitdem wurden mehr als ein Dutzend weiterer Beweise veröffentlicht. Siehe insbesondere Ruelle [67], für die hier formulierte Form Carverhill [32], und für eine Übersicht Arnold [5].

Die „Moral" des Satzes ist, daß die Situation für ZDS so „schön" wie im linearen autonomen Fall ist: Die λ_i sind die stochastischen Analoga der (Realteile der) Eigenwerte, die E_i die Analoga der verallgemeinerten Eigenräuvon TM, das äquivariant bezüglich des linearisierten Flusses ist,

$$T\varphi(t,\omega,x)E_\Lambda(\omega,x)=E_\Lambda(\Theta(t)(\omega,x)).$$

Das Problem ist, die (lokale) Existenz und Regularität von zufälligen Untermannigfaltigkeiten $M_\Lambda(\omega,x)$ von M nachzuweisen, die die Eigenschaften

$$T_xM_\Lambda(\omega,x)=E_\Lambda(\omega,x)$$

und $\quad \varphi(t,\omega)M_\Lambda(\omega,x)=M_\Lambda(\Theta(t)(\omega,x))$

besitzen. Besteht Λ aus den negativen/positiven/verschwindenden Lyapunov-Exponenten, so ist M_Λ die stabile/instabile/Zentrumsmannigfaltigkeit. Siehe dazu für den deterministischen Fall der glatten Ergodentheorie Pesin [61], [62] und Pugh für den durch $T\varphi(0,\omega) = A(\omega)$ erzeugten linearen Kozykel (= Produkt zufälliger Matrizen) der multiplikative Ergodensatz gilt.

Für eine Version des Satzes von Hartman und Grobman für $\mathscr{C}^1$-ZDS siehe Wanner ([73] für den Fall $\mathbb{T} = \mathbb{Z}$ und [74] für $\mathbb{T} = \mathbb{R}$ (zufällige Differentialgleichungen)). Für eine stochastische Version der glatten Normalformentheorie siehe Arnold und Xu ([16] für $\mathbb{T} = \mathbb{Z}$, [17] für $\mathbb{T} = \mathbb{R}$ (zufällige Differentialgleichungen)). „Resonanzen" sind nun algebraische Beziehungen zwischen Lyapunov-Exponenten von $T\varphi(0,\omega)$, und welche Terme in der Normalform überleben hängt vom „Zusammenspiel" von $T\varphi(0,\omega)$ und θ ab. Arnold und Xu [15] haben die Normalformen für den zufälligen Duffing-Van der Pol-Oszillator mithilfe von MAPLE berechnet.

Eine Normalformentheorie für stochastische Differentialgleichungen steht wegen der derzeitigen „Unverträglichkeit" von stochastischer Analysis und multiplikativer Ergodentheorie (siehe Abschnitt 8) noch aus.

7 Bifurkationstheorie

Die deterministische Bifurkationstheorie, eines der Kerngebiete der Theorie glatter dynamischer Systeme, studiert „qualitative Veränderungen" in parametrisierten Familien von dynamischen Systemen, z. B. von Lösungsflüssen φ_α von Differentialgleichungen

$$\dot{x} = f^\alpha(x).$$

„Qualitative Veränderung" wird erfolgreich formalisiert durch das Konzept der topologischen Äquivalenz und strukturellen Stabilität: α_c ist ein Bifurkationspunkt, wenn die Familie von Flüssen φ_α an der Stelle α_c *nicht* strukturell stabil ist (siehe Guckenheimer und Holmes [46], Seite 119).

Eine Bifurkationstheorie für ZDS studiert natürlich „qualitative Veränderungen" in parametrisierten Familien von ZDS, z. B. von Lösungskozykeln φ_α von *stochastischen* Differentialgleichungen

$$dx = f_0^\alpha(x)\,dt + \sigma \sum_{j=1}^{m} f_j^\alpha(x) \circ dB^j(t,\omega). \tag{5}$$

Wie kann „qualitative Veränderung" hier formalisiert werden? Zwei Ansätze sind bisher verfolgt worden.

1. Der phänomenologische Ansatz

Naturwissenschaftler haben seit langer Zeit qualitative Veränderungen von Dichten p_α von bezüglich der Übergangswahrscheinlichkeit von (5) invarianten Wahrscheinlichkeiten untersucht, also Lösungen der *Fokker-Planck-Gleichung*

$$L_\alpha^* p_\alpha = 0, \quad \text{wobei} \quad L_\alpha = f_0^\alpha + \frac{\sigma^2}{2} \sum_{j=1}^{m} (f_j^\alpha)^2.$$

Dabei haben sie experimentell, durch Simulation und analytisch an Modellsystemen Übergänge von glockenförmigen Dichten zu solchen mit zwei Maxima oder mit Kraterform gefunden, siehe z. B. Horsthemke und Lefever [48] oder Ebeling et al. [39].

Dieses Konzept kann formalisiert werden mit den Ideen von Zeeman ([77], [78]), der zwei Wahrscheinlichkeitsdichten p und q „äquivalent“ nennt, wenn es zwei Diffeomorphismen α und β gibt mit $p \circ \alpha = \beta \circ q$.

2. Dynamischer Ansatz

Gegen obiges Konzept wurde vorgebracht (Arnold [3], Arnold und Boxler [6]), daß es *statisch* sei: Die invariante Dichte mißt lediglich asymptotische Prozentsätze von Aufenthaltszeiten der Ein-Punkt-Bewegung $t \mapsto \varphi(t,\omega)x$ (für ein generisches x) in einem Volumenelement. Dies hat wenig zu tun mit dem Verhalten des *Kozykels* und z. B. seiner Stabilität, wie sie durch die *Zwei*-Punkt-Bewegungen $t \mapsto (\varphi(t,\omega)x,\ \varphi(t,\omega)y)$ für $x \neq y$, in infinitesimaler Form durch $T\varphi(t,\omega,x)v$, also durch die Lyapunov-Exponenten λ_i, beschrieben wird.

Da „invariantes Maß“ das stochastische Analogon zu „Gleichgewichtspunkt“ ist, liegt es nahe, elementare Bifurkationen in ZDS auf der Ebene der invarianten Maße zu studieren: Wann bifurkiert ein neues invariantes Maß ν_α von einem Referenzmaß μ_α an $\alpha = \alpha_c$? Der Test für die Angemessenheit dieses Begriffs wäre, daß diese Bifurkation mit einem Stabilitätswechsel des Referenzmaßes verbunden ist in dem Sinne, daß Lyapunov-Exponenten von μ_α an α_c das Vorzeichen wechseln. Dieses Programm ist bisher nur teilweise ausgeführt (Arnold und Boxler [6], Xu [75], [76]).

Eine interessante Beziehung zwischen dem phänomenologischen und dynamischen Konzept hat Baxendale [23] entdeckt: Ist in (5) $f_j^\alpha(0) = 0$ für alle j und α, und zeigt das ungestörte System ($\sigma = 0$) etwa eine Hopf-Bifurkation an $\alpha = 0$, so bifurkiert für das gestörte System ein nicht-triviales invariantes Maß ν_α vom trivialen Referenzmaß $\mu_\alpha = \delta_0$ an einer Stelle $\alpha_1 = c_1\sigma^2 > 0$, und dieses Maß nimmt seine typische Kraterform erst ab einem Parameterwert $\alpha_2 = c_2\sigma^2 > \alpha_1$ an. Dies kann durch die *Theorie großer Abweichungen* erklärt werden (siehe Arnold und Kliemann [12], Baxendale und Stroock [21]) und führte in der naturwissenschaftlichen Literatur zum Begriff des *Bifurkationsintervalls* (Ebeling et al. [39]).

8 Weitere Problemkreise

Topologische zufällige dynamische Systeme

Mit dem Begriff der *metrischen Faser-Entropie*, die die Informationsproduktion von θ unterdrückt und nur die von $x \mapsto \varphi(t,\omega)x$ zählt, und dem Begriff des *Faser-Drucks* läßt sich ein thermodynamischer Formalismus für topologische ZDS entwickeln mit den Begriffen *Variationsprinzip, Gleichgewichts-* und *Gibbs-Zustand, Ruelle-Perron-Frobenius-Theorie* (siehe Ledrappier und Walters [56], Kifer ([51] und [52]), Ferrero und Schmitt [42], Bogenschütz ([26] und [27]), Bogenschütz und Gundlach [28]).

Der Formalismus hat Anwendungen auf die Dynamik von Populationen in zufälliger Umgebung (Arnold, Demetrius und Gundlach [10]).

Für expandierende zufällige Abbildungen hängen Markov-Partitionen (und damit insbesondere ihre Kardinalität) ebenfalls vom Zufall ab – was bei einer symbolischen Repräsentation Symbolräume mit zufällig vielen Symbolen notwendig macht (Bogenschütz und Gundlach [28]).

Dies führt zu den noch weitgehend offenen Fragen nach *kanonischen* ZDS, der Beschreibung von ZDS durch Isomorphie-Invarianten (wozu die Faser-Entropie gehört) und schließlich zum Problem der Klassifizierung von ZDS.

Meßbarkeit und Dynamik

Eine genuin der Theorie der ZDS angehörende, im Deterministischen nicht existierende Fragestellung ist die nach dem Zusammenspiel von Dynamik und Meßbarkeit. Hier eine Kostprobe: Ist ein invariantes Maß μ_ω eines ZDS φ *nicht* meßbar bezüglich der „Vergangenheit" oder der „Zukunft" des Systems (beschrieben durch Unter-σ-Algebren $\mathscr{F}^-$, $\mathscr{F}^+ \subset \mathscr{F}$), so ist φ bezüglich μ_ω hyperbolisch in dem Sinne, daß es positive *und* negative Lyapunov-Exponenten besitzt (Crauel [37], auch [35] und [36]).

Viele Probleme für durch stochastische Differentialgleichungen generierte ZDS sind zur Zeit noch blockiert durch eine Art „Grundwiderspruch" zwischen stochastischer Analysis und multiplikativer Ergodentheorie (siehe auch die Bemerkung am Ende von Abschnitt 6): Die fundamentalen Ojekte der multiplikativen Ergodentheorie, die zufälligen Oseledets-Räume $E_i(\omega, x)$ (und damit invarianten Maße $\mu_{(\omega,x)}$ mit Trägern in $E_i(\omega, x)$) sind i.a. *nicht* meßbar bezüglich der in der stochastischen Analysis zur Zeit $t = 0$ verfügbaren Information. Dies ruft nach Benutzung eines „antizipierenden" Kalküls (Arnold und Imkeller [11]).

Literatur

[1] Amann, H.: Gewöhnliche Differentialgleichungen. Berlin: Walter de Gruyter 1983

[2] Anosov, D.V.; Arnold, V.I. (eds.): Dynamical systems I. Berlin: Springer 1988

[3] Arnold, L.: Lyapunov exponents of nonlinear stochastic systems, pp. 181–201. In: Nonlinear stochastic dynamic engineering systems. Ziegler, F.; Schuëller, G.I. (eds.): Berlin: Springer 1988

[4] Arnold, L.: Generation of random dynamical systems. Report # 280, Institut für Dynamische Systeme, Universität Bremen, March 1993

[5] Arnold, L.: Random dynamical systems. In Vorbereitung

[6] Arnold, L.; Boxler, P.: Stochastic bifurcation: Instructive examples in dimension one, pp. 241–255. In: Pinsky, M.; Wihstutz, V. (eds.): Diffusion Processes and Related Problems in Analysis, Volume II: Stochastic Flows. Boston: Birkhäuser 1992

[7] Arnold, L.; Crauel, H.: Random dynamical systems, pp. 1–22. In: Arnold, L.; Crauel, H.; Eckmann, J.-P. (eds.): Lyapunov exponents. Lecture Notes in Mathematics Vol. 1486. Berlin: Springer 1991

[8] Arnold, L.; Crauel, H.: Iterated function systems and multiplicative ergodic theory, pp. 283–305. In: Pinsky, M.; Wihstutz, V. (eds): Diffusion Processes and Related Problems in Analysis, Volume II: Stochastic Flows. Boston: Birkhäuser 1992

[9] Arnold, L.; Crauel, H.; Eckmann, J.-P. (eds.): Lyapunov exponents. Lecture Notes in Mathematics Vol. 1486. Berlin: Springer 1991

[10] Arnold, L.; Demetrius, L.; Gundlach, M.: Evolutionary formalism for products of positive random matrices. Report # 272, Institut für Dynamische Systeme, Universität Bremen, Juli 1992

[11] Arnold, L.; Imkeller, P.: Anticipative problems in multiplicative ergodic theory. Report # 288, Institut für Dynamische Systeme, Universität Bremen, Juni 1993

[12] Arnold, L.; Kliemann, W.: Large deviations of linear stochastic differential equations, pp. 117–151. In: Engelbert, H.J.; Schmidt, W. (eds.): Stochastic differential systems, Lecture Notes Control Inf. Sci. 96. Berlin: Springer 1987

[13] Arnold, L.; San Martin, L.: A multiplicative ergodic theorem for rotation numbers. Journal of Dynamics and Differential Equations **1** (1989) 95–119

[14] Arnold, L.; Scheutzow, M.: Perfect cocycles through stochastic differential equations. Report # 293, Institut für Dynamische Systeme, Universität Bremen, September 1993

[15] Arnold, L.; Xu Kedai: Simultaneous normal form and center manifold reduction for random differential equations, pp. 68–80. In: Perelló, C.; Simó, C.; Solà-Morales, J. (eds.): Proceedings of EQUADIFF 91 (Barcelona). Singapore: World Scientific 1993

[16] Arnold, L.; Xu Kedai: Normal forms for random diffeomorphisms. Dynamics and Differential Equations **4** (1992) 445–483

[17] Arnold, L.; Xu Kedai: Normal forms for random differential equations. Journal of Differential Equations, to appear 1993

[18] Arnold, V.I.: Geometrical methods in the theory of ordinary differential equations. Berlin: Springer 1983

[19] Barnsley, M.F.: Fractals Everywhere. New York, Academic Press 1988

[20] Baxendale, P.: Brownian motion in the diffeomorphism group I. Compositio Mathematica **53** (1984) 19–50

[21] Baxendale, P.; Stroock, D.: Large deviations and stochastic flows of diffeomorphisms. Probab. Th. Rel. Fields **80** (1988) 169–215

[22] Baxendale, P.: Lyapunov exponents and relative entropy for a stochastic flow of diffeomorphisms. Probab. Th. Rel. Fields **81** (1989) 521–554

[23] Baxendale, P.: Invariant measures for nonlinear stochastic differential equations, pp. 123–140. In: Arnold, L.; Crauel, H.; Eckmann, J.-P. (eds.).: Lyapunov exponents, Lecture Notes in Mathematics Vol. 1486. Berlin: Springer 1991

[24] Baxendale, P.: Stability and equilibrium properties of stochastic flows of diffeomorpisms: a survey, pp. 3–35. In: Pinsky, M.; Wihstutz, V. (eds.).: Diffusion Processes and Related Problems in Analysis, Volume II: Stochastic Flows. Boston: Birkhäuser 1992

[25] Bismut, J.M.: A generalized formula of Itô and some other properties of stochastic flows. Z. Wahrscheinlichkeitstheorie Verw. Geb. **55** (1981) 331–350

[37] Crauel, H.: Non-Markovian invariant measures are hyperbolic. Stochastic Processes and their Applications **45** (1993) 13–28

[38] Dahlke, S.: Invariante Mannigfaltigkeiten für Produkte zufäliger Diffeomorphismen. Ph.D. Thesis. Bremen 1989

[39] Ebeling, W.; Herzel, H.; Richert, W.; Schimansky-Geier, L.: Influence of noise on Duffing-Van der Pol oscillators. ZAMM **66** (1986) 141–146

[40] Elworthy, K.D.: Stochastic differential equations on manifolds. Cambridge: Cambridge University Press 1982

[41] Elworthy, K.D.: Stochastic flows on Riemannian manifolds, pp. 37–72. In: Pinsky, M.; Wihstutz, V. (eds.). Diffusion Processes and Related Problems in Analysis, Volume II: Stochastic Flows. Boston: Birkhäuser 1992

[42] Ferrero, P.; Schmitt, B.: Produits aléatoires d'opérateurs matrices de transfert. Probab. Th. Rel. Fields **79** (1988) 227–248

[43] Furstenberg, H.: Noncommuting random products. Trans. Amer. Math. Soc. **108** (1963) 377–428

[44] Furstenberg, H.; Kesten, H.: Products of random matrices. Ann. Math. Stat. **31** (1960) 457–469

[45] Goldsheid, I.Ya.; Margulis, G.A.: Lyapunov indices of a product of random matrices. Russian Math. Surveys **44** (1989) 11–71

[46] Guckenheimer, J.; Holmes, P.: Nonlinear oscillations, dynamical systems, and bifurcations of vector fields. Berlin: Springer 1983

[47] Guivarc'h, Y.; Raugi, A.: Frontière de Furstenberg, propriétés de contraction et théorème de convergence. Z. Wahrscheinlichkeitstheorie verw. Gebiete **69** (1985) 187–242

[48] Horsthemke, W.; Lefever, R.: Noise-induced transitions. Berlin: Springer 1984

[49] Hutchinson, J.E.: Fractals and self similarity. Indiana Univ. Math. J. **30** (1981) 713–747

[50] Irwin, M.C.: Smooth dynamical systems. New York: Academic Press 1980

[51] Kifer, Y.: Ergodic theory of random transformations. Boston: Birkhäuser 1986

[52] Kifer, Y.: Equilibrium states for random expanding transformations. Random & Computational Dynamics **1** (1992) 1–31

[53] Krengel, U.: Ergodic theorems. Berlin: Walter de Gruyter 1985

[54] Kunita, H.: Stochastic flows and stochastic differential equations. Cambridge: Cambridge University Press 1990

[55] Ledrappier, F.: Quelques propriétés des exposants caractéristiques. École d'Été de Saint-Flour XII (1982). Springer Lecture Notes in Mathematics 1097 (1984) 305–396

[56] Ledrappier, F.; Walters, P.: A relativised variational principle for continuous transformations. J. London Math. Soc. **16** (1977) 568–576

[57] Le Jan, Y.: Équilibre statistique pour les produits de difféomorphismes aléatoires indépendants. Ann. Inst. H. Poincaré Probab. Statist. **23** (1987) 111–120

[58] Mañe, R.: Ergodic theory and differentiable dynamics. Berlin: Springer 1987

[59] Oseledets, V.I.: A multiplicative ergodic theorem. Lyapunov characteristic numbers for dynamical systems. Trans. Moscow Math. Soc. **19** (1968) 197–231

[60] Palis, Jr., J.; de Melo, W.: Geometric theory of dynamical systems. Berlin: Springer 1982

[61] Pesin, Ya. B.: Families of invariant manifolds corresponding to nonzero characteristic exponents. Math. USSR Izvestija **10** (1976) 1261–1305

[62] Pesin, Ya.B.: Characteristic Lyapunov exponents and smooth ergodic theory. Russian Math. Surveys **32** (1977) 55–114

[63] Petersen, K.: Ergodic theory. Cambridge: Cambridge University Press 1983

[64] Pugh, C.; Shub, M.: Ergodic attractors. Trans. Amer. Math. Soc. **312** (1989) 1–54

[65] Rudolph, D.J.: Fundamentals of measurable dynamics. Oxford: Oxford University Press 1990

[66] Ruelle, D.: Thermodynamic formalism. Reading, Mass: Addison-Wesley 1978

[67] Ruelle, D.: Ergodic theory of differentiable dynamical systems. Publ. Math. IHES **50** (1979) 275–306

[68] Ruelle, D.: Elements of differentiable dynamics and bifurcation theory. New York: Academic Press 1989

[69] Sinai,.Ya.G. (ed.).: Dynamical systems II. Berlin: Springer 1989

[70] Shub, M.: Global stability of dynamical systems. Berlin: Springer 1987

[71] Szlenk, W.: An introduction to the theory of smooth dynamical systems. New York: Wiley 1984
[72] Walters, P.: An introduction to ergodic theory. Berlin: Springer 1982
[73] Wanner, T.: A Hartman-Grobman theorem for discrete random dynamical systems. Report # 269, Institut für Mathematik, Universität Augsburg, November 1992
[74] Wanner, T.: A Hartman-Grobman theorem for random differential equations. Preprint Universität Augsburg, März 1993
[75] Xu Kedai: Bifurcations of random differential equations in dimension one. Random and Computational Dynamics **1** (1993) 277–305
[76] Xu Kedai: Numerical study of elementary stochastic bifurcations. Preprint Bremen 1993
[77] Zeeman, E.C.: Stability of dynamical systems. Nonlinearity **1** (1988) 115–155
[78] Zeeman, E.C.: On the classification of dynamical systems. Bull. London Math. Soc. **20** (1988) 545–557

Prof. Dr. Ludwig Arnold
Institut für Dynamische Systeme
Universität Bremen
28334 Bremen

(*Eingegangen 10. 4. 1993*)

Jber. d. Dt. Math.-Verein.
96 (1994) 101–116
AMS subject classification: 53 A 10

Das Plateausche Problem*)

M. Struwe, Zürich

1 Geschichte

Seifenhäute oder Seifenblasen sind seit mehr als 200 Jahren Gegenstand mathematischer Untersuchungen. Im Jahr 1762 leitet Lagrange als Anwendung des später nach ihm und Euler benannten Variationsprinzips die Gleichung der Flächen (lokal) kleinsten Inhalts ab, wie sie experimentell durch Seifenhäute in guter Näherung realisiert sind. Meusnier (1776) gibt diesen Gleichungen die heute wohlbekannte Form und erkennt, daß sie geometrisch (in heutiger Sprechweise) der Bedingung des Verschwindens der mittleren Krümmung H der dargestellten Fläche entsprechen. Ihren geometrischen Ursprung verallgemeinernd, bezeichnet man alle Flächen verschwindender mittlerer Krümmung als Minimalflächen.

Über die nun einsetzende Entwicklung, insbesondere die Entdeckung einer Vielzahl von speziellen Minimalflächen, daß heißt von Lösungen der Minimalflächengleichung, die sich in geschlossener Form angeben lassen, gibt z. B. Nitsche [42] erschöpfend Auskunft.

Eine wichtige Rolle in dieser Entwicklung spielt der Physiker Plateau. In seinem Werk [46] gelangt Plateau 1873 nach ausgedehnten Experimenten, die er mit Seifenhäuten durchführen ließ, zu der folgenden Erkenntnis:

„Un contour fermé absolument quelconque, plan ou non plan, étant donné, parmi toutes les surface à courbure moyenne nulle qui peuvent s'appuyer sur sa totalité, il y en a toujours au moins une dont une portion finie peut le remplir entièrement." ([46], S. 240)

Leicht verkürzt können wir diesen Satz so wiedergeben: „Jede vorgegebene Raumkurve Γ berandet stets mindestens eine endlich ausgedehnte Fläche verschwindender mittlerer Krümmung." Für den Naturforscher Plateau scheint überdies durch die mit verschiedensten aus Draht zusammengebogenen Kurven erfolgreich durchgeführten Experimente der Existenznachweis bereits in voller Allgemeinheit erbracht, weshalb er sein Credo auch als „Prinzip" formuliert.

*) Dies ist die Zusammenfassung eines im September 1992 an der Jahresversammlung der DMV an der Humboldt-Universität gehaltenen Vortrages gleichen Titels.

Wenig später, nach der von Weierstraß bereits 1870 vorgebrachten Kritik an den Grundlagen des „Dirichletschen Prinzips“ [67], war eine solche Argumentation nicht länger haltbar; man erkannte, daß es notwendig war, zwischen einem physikalischen Phänomen und seinem mathematischen Modell begrifflich zu unterscheiden. Ein streng mathematischer Beweis der Plateauschen Vermutung war nun erforderlich. Weierstraß selbst beteiligte sich an dem Versuch, woraus die nach ihm benannten Darstellungsformeln für Minimalflächen hervorgingen. Das Plateausche Problem entzog sich jedoch zunächst allen Lösungsversuchen.

2 Existenzsätze

Der erste allgemeine Existenzbeweis wurde schließlich 1930/31 von Douglas [15] und Radó [48] geliefert. Um dieses Ergebnis zu beschreiben, müssen wir zunächst ihren parametrischen Ansatz erklären.

Parametrische Minimalflächen. Seit $\Gamma \subset \mathbb{R}^3$ eine hinreichend glatte (C^∞)-Jordan-Kurve, $\mathfrak{X}$ eine differenzierbare (C^∞–) Minimalfläche ($H=0$) mit Rand $\partial\mathfrak{X}=\Gamma$. Sei S ein (topologisches) Modell für $\mathfrak{X}$ mit Rand $\partial S \cong S^1$, und sei $X=(X^1,\ldots,X^3): S \to \mathfrak{X} \subset \mathbb{R}^3$ eine Parameterdarstellung von $\mathfrak{X}$ über S, deren Einschränkung $X|_{\partial S}: \partial S \to \Gamma$ ein Homöomorphismus von ∂S auf Γ ist („Plateausche Randbedingung“). Wir dürfen annehmen, daß S ebenfalls glatt ist und $X: S \to \mathbb{R}^3$ differenzierbar. Versehen wir nun S mit der durch X zurückgeholten Metrik

$$\mu = X^*\mu_0,$$

wobei μ_0 die durch Einschränkung der euklidischen Metrik μ_0 im $\mathbb{R}^3$ auf den Tangentialraum an $\mathfrak{X}$ entstehende 1. Fundamentalform bezeichnet, so ist $X:(S,\mu)\to(\mathbb{R}^3,\mu_0)$ isometrisch, und die Bedingung $H=0$ für $\mathfrak{X}$ läßt sich in der Form

(1) $\Delta X = 0$ (komponentenweise)

für die Parametrisierung X ausdrücken. Beachten wir noch, daß Gleichung (1) konform invariant ist, so können wir das parametrische Plateau-Problem nun wie folgt formulieren.

Parametrisches Plateau-Problem. Zu einer gegebenen C^∞-Jordan-Kurve Γ finde man eine differenzierbare C^∞-Fläche (S,μ) mit Rand $\partial S \cong S^1$ und eine konforme C^∞-Abbildung $X: \bar{S} \to \mathbb{R}^3$, deren Komponenten harmonische Funktionen sind, und die der Plateauschen Randbedingung genügt.

Dabei bemerken wir, daß Konformalität von X der Bedingung

(2) $\Psi(u+iv) = |X_u|^2 - |X_v|^2 - 2iX_u \cdot X_v = 0$

in lokalen konformen Parametern $w=u+iv$ auf S gleichkommt. Die Plateausche Randbedingung wollen wir zudem leicht wie folgt abschwächen:

(3) $X|_{\partial S}: \partial S \to \Gamma$

sei eine schwach monotone Parametrisierung.

Flächen vom Typ der Kreisscheibe. Betrachten wir nun als zunächst einfachsten Fall Modellflächen vom Geschlecht $g=0$. Als Folge des Koebe-Poincaréschen Uniformisierungssatzes ist jede derartige Modellfläche konform zur Kreisscheibe

$$B=\{w=(u,v);\, u^2+v^2<1\}$$

äquivalent.

Ein natürlicher Variationsansatz zur Lösung des Plateauschen Problems wird durch die ursprüngliche Bedeutung des Begriffs „Minimalfläche" als „Fläche kleinsten Inhalts" nahegelegt.

Der Versuch jedoch, (1)–(3) zu lösen, indem man das Flächenintegral

$$A(X)=\int_B |X_u\wedge X_v|\,\mathrm{d}u\mathrm{d}v$$

unter allen Flächen minimiert, welche (3) erfüllen, muß scheitern. Es ist nämlich A parametrisierungsunabhängig und daher eine konforme Parametrisierung in keiner Weise ausgezeichnet.

Eine geeignete Modifikation dieses Ansatzes führt hingegen zum gewünschten Erfolg.

Definiere dazu das Dirichlet-Integral

$$D(X)=\frac{1}{2}\int_B (|X_u|^2+X_v|^2)\mathrm{d}u\mathrm{d}v.$$

Es gilt, wie man unmittelbar nachprüft,

$$D(X)\geqslant A(X),$$

und Gleichheit tritt genau dann ein, wenn X konform parametrisiert ist.

Da man auf jeder (regulären) Fläche vom Typ der Kreisscheibe konforme Parameter einführen kann, liefert also eine Lösung des Problems

(4) $\quad D(X)\to\min,\qquad X$ erfüllt (3),

eine Lösung des parametrischen Plateau-Problems.

Als letztes Hindernis steht der Lösung von (4) nur noch die Invarianz von D unter konformen Abbildungen, in diesem Falle also Invarianz bezüglich Möbius-Transformationen der Kreisscheibe, entgegen. Durch eine geeignete Normierung, z. B. durch die „3-Punkte-Bedingung" $X(\mathrm{e}^{2\pi ik/3})=Q_k$, $k=1,2,3$, wobei Q_1, Q_2, Q_3 [illegible]

Lösung immersiert ist, also keine (inneren) Verzweigungspunkte besitzt. Tomi-Tromba [61], Almgren-Simon [3] und schließlich Meeks-Yau [35] zeigten zudem, daß die Douglas-Radó-Lösung eingebettet ist, falls die Randkurve Γ „extrem" ist, d. h. auf dem Rand eines konvexen Körpers liegt.

Eine verknotete Randkurve Γ kann jedoch keine eingebettete Kreisscheibe beranden; in diesem Fall besitzt die Douglas-Radó-Lösung daher noch nicht die volle zu erwartende geometrische Regularität. So werden wir zur Untersuchung von Flächen höheren Geschlechts geführt.

Flächen höheren Geschlechts. Der Fall Flächen höheren Geschlechts $g>0$ unterscheidet sich vom vorher betrachteten Fall grundlegend dadurch, daß es hier verschiedene, konform nicht äquivalente Modelle gibt. Außerdem ist topologische Entartung möglich durch das Kollabieren von Henkeln oder durch Ablösung von Kreisscheiben unter der Wirkung der Gruppe der Möbiustransformationen auf dem Rande $\partial S \cong S^1 \cong \partial B$.

Auf jeden Fall aber führt eine derartige Entartung zu einer *Reduktion* des topologischen Typs: Das Geschlecht einer Schar von Vergleichsflächen $X_k:(S_k,\mu_k)\to \mathbb{R}^3$, die in irgendeinem geeigneten Sinn für $k\to\infty$ gegen einen Limes $X:(S,\mu)\to\mathbb{R}^3$ streben, ist stets allenfalls größer oder gleich dem der Grenzfläche X, aber niemals kleiner.

Wendet man diese Betrachtung insbesondere auf eine Minimalfolge für das Dirichlet-Integral von Flächen des vorgegebenen Geschlechts g an, so wird die folgende, 1939 von Douglas [14] angegebene hinreichende Bedingung verständlich.

Satz 2.2 (Douglas-Kriterium). *Zu vorgegebener C^∞-Jordan-Kurve Γ, $g\in\mathbb{N}_0$, setze*

$$d=\inf\{D(X);\ \mathit{genus}\ (X)=g\},$$

$$d'=\inf\{D(X');\ \mathit{genus}\ (X')<g\},$$

wobei alle zum Vergleich zugelassenen Flächen X oder X' zusätzlich die Plateausche Randbedingung erfüllen. Gilt dann

$$d<d',$$

so berandet Γ eine parametrische Minimalfläche vom Geschlecht g.

Mit neueren Hilfsmitteln der Modulraum-Theorie, insbesondere dem „Collar-Lemma", konnte Jost [31] den ursprünglichen Beweis von Douglas stark vereinfachen.

Hinreichende algebraische Bedingungen für die Existenz einer Minimalfläche vom Geschlecht g, die von einer Kurve Γ im Abschluß eines Volltorus T berandet werden, wurden von Tomi-Tromba [60] angegeben. Dabei ist wichtig, daß die mittlere Krümmung des Randes von T bezüglich der äußeren Normalen positiv ist, so daß man sich auf Vergleichsflächen innerhalb von T beschränken kann.

Unter derselben Bedingung an ∂T beweist White [68] für „extreme" Randkurven $\Gamma\subset\partial T$ sogar die Existenz eingebetteter Minimalflächen vom Geschlecht $\leqslant g$.

3 Die Struktur der Lösungsmenge

Wir beschränken uns zunächst auf Flächen vom Typ der Kreisscheibe ($g = 0$).

Eindeutigkeit. Die einfachste Gestalt hat die Lösungsmenge natürlich, falls sie aus genau einer Minimalfläche besteht. (Die Existenz einer Lösung ist ja nach Satz 2.1 stets gesichert.) Eindeutige Lösbarkeit für C^∞-Randkurven Γ hat man nach Radó [47], falls Γ sich eineindeutig parallel auf den Rand eines konvexen Gebietes in einer Ebene projizieren läßt, oder nach Nitsche [41], falls die Totalkrümmung von Γ den Wert 4π nicht überschreitet. Für polygonale Ränder hat man nach Sauvigny [50] ebenfalls Eindeutigkeit, falls Γ auf dem Rand eines konvexen Körpers liegt und die Totalkrümmung, in diesem Falle die Summe der Außenwinkel, strikt kleiner als 4π ausfällt.

Mehrfache Lösungen. Bereits die Formulierung von Plateaus Prinzip im Abschnitt 1 läßt jedoch erkennen, daß man im allgemeinen nicht nur eine sondern mehrere Minimalflächen als Lösungen des Plateauschen Problems erwartet. Nicht alle diese Flächen müssen „stabil" sein, im Sinne relativer Minima des Dirichlet-Integrals. Entsprechende Beobachtungen hat bereits Plateau gemacht, vgl. Plateau [46], pp. 228–230.

Plateau betrachtet die Catalan-Scherksche Fläche, die in geeigneten Koordinaten durch die Gleichung

$$z = \log(\cos x) - \log(\cos y)$$

als Graph über einem Periodenquadrat $-\frac{\pi}{2} < x, y < \frac{\pi}{2}$ gegeben ist. In einem geeignet geformten Drahtrahmen gelingt ihm zunächst die Darstellung eines Teils der Catalan-Scherkschen Fläche als Seifenhaut. Anschließend fragt er, ob dies auch noch möglich ist, falls man das Verhältnis von Höhe zu Breite des Rahmens vergrößert. Er läßt daher einen Rahmen mit 10 cm Höhe und 2,5 cm Breite anfertigen, entsprechend einem größeren Ausschnitt aus dem Fundamentalbereich der Catalan-Scherkschen Fläche, wobei er die Kanten approximativ als Geradensegmente ausführen läßt, die sich rechtwinklig treffen.

Nun stellt sich jedoch im Experiment keineswegs die Catalan-Scherksche Fläche ein, sondern eine Fläche, deren Scheitel viermal näher zum einen Ende des Rahmens liegt als zum anderen, und zwar mit gleicher Wahrscheinlichkeit näher zum tieferen wie zum höheren Ende. Plateau schließt, daß die Catalan-Scherksche Fläche nur in einem begrenzten Bereich stabil ist, und daß er diesen Stabilitätsbereich überschritten hat ([46], S. 229).

Um jedoch auch die Catalan-Scherksche Fläche jenseits ihrer vermeintlichen Stabilitätsgrenze als Seifenhaut sichtbar zu machen, ersinnt Plateau folgenden Kunstgriff: Er fügt dem Drahtrahmen die in der Catalan-Scherkschen Fläche enthaltene Gerade $z = 0$, $x = y$ als Hilfslinie ein: „et, en effet, par ce moyen, la surface de MM. Scherk et Catalan s'est parfaitement réalisée" ([46], S. 230).

Trotz seines bewundernswerten Geschicks als Experimentator hat sich Plateau hier geirrt: Jeder minimale Graph ist stabil über einem relativ kompakten Teil seines Definitionsbereichs. Daher kann man das von Plateau beschriebene Phänomen bei der Catalan-Scherkschen Fläche nicht beobachten. Jedoch legt sein Experiment die Vermutung nahe, daß es beliebig nahe bei der von Plateau benutzten Kurve hoch symmetrische Randkurven gibt, die außer zwei nicht voll symmetrischen Minima auch noch eine symmetrische Minimalfläche vom Sattelpunkttyp beranden. In der Tat liefert bei genügend großer Ausdehnung die Ennepperschе Fläche ein solches Beispiel; vgl. Nitsche [42], § 114, S. 104f., sowie Hildebrandt-Tromba [27], S. 104.

Wir bemerken noch, daß die von Plateau beschriebene Kurve des vorigen Abschnitts für jede der zuvor genannten Bedingungen für Eindeutigkeit einen Grenzfall bildet.

Morse-Theorie. Phänomene von der Art, wie sie Plateau bei Seifenflächen beobachtet hat, sind bei reellen Funktionen wohlbekannt. Betrachten wir z. B. eine stetig von einem Parameter $\lambda \in [0,1]$ abhängige Schar von C^∞-Funktionen $f_\lambda : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, welche der Koerzivitätsbedingung

$$|f_\lambda(x)|,\ |f'_\lambda(x)| \to \infty \qquad (|x| \to \infty)$$

genügen. Weiter sei f_0 strikt konvex, z. B.

$$f_0(x) = x^2.$$

Dann besitzt f_0 genau einen „kritischen Punkt“ x_0 mit $f'(x_0) = 0$, und in diesem Punkt nimmt f_0 sein Infimum an. Wenn wir nun die Funktion f_0 stetig in die Funktion f_1 deformieren, indem wir den Parameter λ variieren, so treten möglicherweise neue kritische Punkte hinzu; diese werden aber, falls sie nicht entartet sind, stets in Paaren von relativen Maxima und relativen Minima erzeugt oder wieder ausgelöscht. Ein kritischer Punkt $\bar{x}$ von f heißt dabei *nicht entartet*, falls $f''(\bar{x}) \neq 0$. Weiter können wir nicht entarteten kritischen Punkten als *Morse-Index* die Zahl

$$\mathrm{MI}(\bar{x}) = \sup \{\dim V; f''(\bar{x})|_{V\times V} < 0\}$$

zuordnen; in unserem eindimensionalen Beispiel haben also nicht entartete (relative) Minima den Morse-Index 0, nicht entartete Maxima den Morse-Index 1.

Bilden wir nun die alternierende Summe über alle kritischen Punkte x_j von f_λ, so stellen wir aufgrund des Mechanismus der paarweisen Erzeugung/Auslöschung von kritischen Punkten fest, daß (im nicht entarteten Fall) unabhängig von λ stets gilt:

$$(5) \qquad \sum_j (-1)^{\mathrm{MI}(x_j)} = 1.$$

Diese Relation drückt eine fundamentale Beziehung aus zwischen Art und Anzahl der kritischen Punkte einer Funktion und der Topologie des Definitionsbereichs.

Analoge Systeme von Formeln gelten auch in höheren Dimensionen, wo auch kritische Punkte mit höheren Morse-Indizes auftreten können. Für (koerzive) C^∞-Funktionen $f\colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ mit nicht entarteten kritischen Punkten ist die letzte derartige Formel jedoch stets (5).

Maßgeblichen Anteil an der Aufdeckung dieser Zusammenhänge hatte M. Morse, siehe z. B. Morse [38]. Bald versuchten Morse-Tompkins [39] und – unabhängig – Shiffman [52], die neue Theorie auch auf das Plateau-Problem anzuwenden. Ihre Arbeit leidet jedoch an gewissen prinzipiellen Mängeln, worauf vor allem Tromba seit Mitte der 70er Jahre hingewiesen hat.

In dem von Morse-Tompkins und Shiffman gewählten Funktionenraum ist das Dirichlet-Integral nicht differenzierbar. Der als Ersatz für den nun nicht verfügbaren Begriff des „kritischen Punktes" geprägte Begriff des „Homotopie-kritischen-Punktes" hängt jedoch vom gewählten Umgebungsbegriff ab, und es ist nicht klar, ob alle Minimalflächen auch in diesem Sinne kritische Punkte sind.

Aus dem gleichen Grund können Morse-Tompkins/Shiffman den „Morse-Index" einer Minimalfläche nicht intrinsisch durch die 2. Variation des Dirichlet-Integrals definieren; das von ihnen ersatzweise verwendete Konzept hängt wiederum vom gewählten Funktionenraum ab.

Ein neuer Ansatz war vonnöten, um diese in der Natur des von Morse-Tompkins und Shiffman gewählten Zugangs liegenden Schwierigkeiten zu vermeiden.

Index-Theorie. Zunächst gingen Böhme-Tromba [7] die Frage mit Methoden der globalen Analysis und der Theorie der Fredholmoperatoren an. Dabei betrachteten sie nicht *eine* spezielle Raumkurve Γ und die davon berandeten Minimalflächen, sondern gleichzeitig *alle* von beliebigen C^∞-Jordan-Kurven berandeten Flächen. Dieser Raum erhält auf natürliche Weise die Struktur eines [illegible]

als Faser die davon berandeten harmonischen Flächen X, dargestellt durch monotone Selbstabbildungen x von S^1, wobei man die Randdaten $X|_{\partial B} = \gamma \circ x$ harmonisch auf ∂B fortsetzt. (Die Ersetzung von X durch x findet man bereits in der „klassischen" Literatur, insbesondere bei Morse-Tompkins [39].) In diesem Bündel findet man die Minimalflächen als Nullstellen des Konformalitätsopera-

Satz 3.1 (Böhme-Tromba (1981)). *Eine generische C^∞-Raumkurve Γ berandet höchstens endlich viele Minimalflächen; diese sind „stabil" unter Deformationen von Γ und besitzen höchstens einfache innere Verzweigungspunkte.*

Dabei wird das Wort „stabil" hier im differenzierbaren Sinne gebraucht; falls X keine Verzweigungspunkte besitzt und man bezüglich der konformen Gruppe geeignet normiert, so ist X im obigen Sinn „stabil" genau dann, wenn die 2. Variation des Dirichlet-Integrals $d^2D(X)$ nicht entartet.

Ausgehend von diesem Satz konnte Tromba [65] [64] zudem die „letzte Morse-Ungleichung" (5) für generische Randkurven beweisen. Das vollständige System von Morse-Ungleichungen läßt sich aber mit den verwendeten Methoden nicht erhalten.

Die Index-Theorie von Böhme-Tromba wurde von Thiel [59], Schüffler-Tomi [51], Tomi-Tromba [62] auf mehrfach zusammenhängende Flächen und Flächen höheren Geschlechts erweitert.

Neuere Entwicklungen zur Morse-Theorie. Angeregt durch die Arbeiten Trombas begann ich 1982, mich mit der Morse-Theorie beim Plateau-Problem zu befassen. Entscheidend, um dem Ziel, *alle* Morse-Ungleichungen für eine *einzelne* C^∞-Randkurve Γ herzuleiten, näherzukommen, war die Bemerkung, daß das Plateau-Problem aufgefaßt werden kann als ein Variationsproblem auf einer konvexen Menge: Ersetzt man nämlich, wie oben beschrieben, eine harmonische Fläche X, die von einer durch die Referenzdarstellung γ gegebenen Kurve $\Gamma=\gamma(S^1)$ berandet wird, durch eine Abbildung $x: S^1\cong \mathbb{R}/2\pi\mathbb{Z}\to S^1\cong\mathbb{R}/2\pi\mathbb{Z}$, indem man zu vorgegebenem x das Dirichlet-Problem für $X=X(x)$ löst

$$\begin{aligned} \Delta X &= 0 && \text{in } B,\\ X &= \gamma\circ x && \text{auf } \partial B, \end{aligned}$$

so geht der Raum der von Γ berandeten harmonischen Flächen, die der Plateauschen Randbedingung (3) genügen, über in die konvexe Menge

$$\begin{aligned} M = \{x : \mathbb{R}\to\mathbb{R};\ & x \text{ ist stetig, monoton,}\\ & x(\varphi+2\pi) = x(\varphi)+2\pi,\ D(X(x))<\infty\}. \end{aligned}$$

Fassen wir M auf als Teilraum des affinen Banachraumes $\{\mathrm{id}\}+T$, mit

$$T = H^{1/2,2}\cap C^0(\mathbb{R}/2\pi\mathbb{Z}),$$

wobei die $H^{1/2,2}$-Topologie die „natürliche", vom Dirichlet-Integral induzierte Spurtopologie auf $\mathbb{R}/2\pi\mathbb{Z}\cong S^1\cong\partial B$ ist, so ist M zudem abgeschlossen.

Aufbauend auf Arbeiten von Palais [44], Palais-Smale [45], Smale [54] wird nun in Struwe [56], [58] eine abstrakte Morse-Theorie entwickelt für C^1-Funktionale auf abgeschlossenen, konvexen Mengen. Es zeigt sich, daß das transformierte Funktional

$$E(x) = D(X(x))$$

die geforderten Stetigkeits- und Differenzierbarkeitseigenschaften besitzt und zudem – dies ist von zentraler Bedeutung – eine gewisse Kompaktheitsbedingung

(„Palais-Smale-Bedingung") erfüllt. Die von Conley [10] entwickelte und von Benci [6] auf unendliche Dimensionen erweiterte Morse-Conley-Theorie ist nun unmittelbar anwendbar; im (generischen) nicht entarteten Fall erhält man auch die klassischen Morse-Ungleichungen.

Höherer topologischer Typ. In [57] wird eine analoge Morse-Theorie für Kreisringflächen entwickelt. Dieser Fall erlaubt zudem, das Phänomen der topologischen Entartung, welches bei Flächen von komplizierterem topologischen Typ möglich ist, an einem einfachen Beispiel zu illustrieren.

Seien dazu zwei koaxiale Kreise $\Gamma = (\Gamma_1, \Gamma_1)$ vom Radius 1 in parallelen Ebenen im Abstand $d > 0$ gegeben. Als Parametergebiet für Kreisringflächen mit Rand Γ können wir stets einen Kreisring

$$A_\varrho = \{w = (u, v);\ \varrho < |w| < 1\}$$

wählen, wobei der Parameter $0 < \varrho < 1$ den konformen Modul von A_ϱ beschreibt.

Unter Ausnützung aller Symmetrien genügt es, für jedes ϱ eine einzige Vergleichsfläche X_ϱ zu betrachten. Für festes $d > 0$ entsprechen also minimale Kreisringflächen genau den kritischen Punkten der Funktion $E(\varrho; d) = D(X_\varrho)$.

Eine kurze Rechnung ergibt

$$E(\varrho; d) = \frac{\pi d^2}{|\log \varrho|} + \frac{2\pi(1-\varrho^2)}{(1+\varrho)^2}.$$

Für kleine $d > 0$ besitzt E genau zwei kritische Punkte, entsprechend je einem stabilen und instabilen Katenoid, wobei letzteres stärker eingeschnürt ist und daher einen größeren Flächeninhalt hat. Bei einem gewissen Grenzabstand $d = d_*$ laufen die kritischen Punkte zusammen; und für $d > d_*$ gibt es kein von Γ_1 und Γ_2 berandetes Katenoid mehr. Andererseits aber strebt für $\varrho \to 0$ die Fläche X_ϱ in einem geeigneten Sinn gegen ein Paar von Kreisen mit Rand Γ_1 bzw. Γ_2, die offensichtlich ebenfalls das Plateau-Problem mit Rand Γ lösen.

Indem wir das Parameterintervall an der Stelle $\varrho = 0$ durch Hinzufügen dieser „topologisch entarteten" Lösung vervollständigen, erhalten wir also eine zur oben im Falle der f_λ beschriebenen analoge Situation.

Wie aus der Formel für E ersichtlich, entspricht der Wert $\varrho = 1$ einer Polstelle des Dirichlet-Integrals; es genügt daher, den „Modulraum" $0 < \varrho < 1$ allein bei $\varrho = 0$ zu vervollständigen.

Höheres Geschlecht. Der allgemeine Fall Flächen höheren Geschlechts und/oder höheren Zusammenhangs wurde schließlich von Jost-Struwe [32] untersucht; siehe dazu auch die ergänzenden Arbeiten [55], [30].

Zur Parametrisierung der verschiedenen Modellflächen wird der Teichmüllerraum $\mathscr{T}_g$ der Flächen vom Geschlecht g verwendet, wobei sich Fenchel-Nielsen-Koordinaten für die lokale Darstellung als zweckmäßig erwiesen. Um topologische Entartung zu berücksichtigen, wird der Ansatzraum

$$\mathscr{P}_g = M \times \mathscr{T}_g$$

durch Kollabieren gewisser Henkel und Ablösen von Kreisscheiben (partiell) kompaktifiziert; wie beim zuvor behandelten Beispiel der Kreisringflächen müssen gewisse Entartungen nicht berücksichtigt werden, da sie z. B. Polstellen des Dirichlet-Integrals entsprechen. Auf diese Weise erhält man einen Ansatzraum $\hat{\mathscr{P}}_g$, in dem in natürlicher Weise die zu niedrigerem Geschlecht gehörigen Ansatzräume

$$\hat{\mathscr{P}}_g \supset \hat{\mathscr{P}}_{g-1} \supset \dots \hat{\mathscr{P}}_0 = M$$

eingebettet sind. Er gelingt nun weiter, für das Dirichlet-Integral auf $\hat{\mathscr{P}}_g$ einen bezüglich konformer Transformationen äquivarianten (Pseudo-) Gradientenfluß zu definieren, der diese Stratifikation respektiert; d. h. entlang den Flußlinien kann das Geschlecht sich allenfalls verringern aber niemals zunehmen. Schließlich weist man bei geeigneter Normierung bezüglich konformer Transformationen die Palais-Smale-Bedingung nach. So erhält man unter anderem den folgenden Satz:

Satz 3.2. *Es berande Γ nur endlich viele Minimalflächen endlichen topologischen Typs. Davon seien $X_1, \dots, X_L$ eingebettet. Sind $X_1, \dots, X_L$ zusätzlich nicht entartet als kritische Punkte des Dirichlet-Integrals (für ihren topologischen Typ), dann gilt:*

$$\sum_j (-1)^{\mathrm{MI}(X_j)} = 1.$$

Die Aussagen der Morse-Conley-Theorie gelten natürlich auch im entarteten Fall. Bemerkenswert ist, daß Flächen mit Selbstschnitten keinen Beitrag zur Morse-Theorie liefern; anschaulich ist ihr Morse-Index unendlich. Eine ähnliche Beobachtung wurde bereits 1985 von Tromba [66] im Falle von Kreistypflächen für extreme Randkurven gemacht.

Um mit Hilfe des Douglas-Kriteriums oder aufgrund der Morse-Theorie zu Existenzaussagen für eingebettete Flächen zu gelangen, müßte man allerdings zusätzlich zu diesen Sätzen a-priori-Abschätzungen für das Geschlecht parametrischer Minimalflächen mit vorgegebenem Rand besitzen, die zur Zeit noch nicht verfügbar sind.

Es gibt jedoch einen vom parametrischen gänzlich verschiedenen Zugang tät dargestellt werden kann. Einem Strom S kann man in natürlicher Weise eine Masse

$$M(S) = \sup_{|\varphi| \leqslant 1} S(\varphi)$$

und einen Rand

$$\partial S(\varphi) = S(d\varphi), \qquad \varphi \in C_0^\infty(\Lambda^{m-1}\mathbb{R}^n)$$

zuordnen.

Wiederum nach Federer-Fleming [17] heißt S *ganz* („integral current"), falls S und ∂S rektifizierbar sind. Es bezeichne $I_m\mathbb{R}^n$ die Menge der ganzen Ströme.

Die Existenz verallgemeinerter eingebetteter, orientierter Lösungen des Plateau-Problems zu vorgegebenem Rand Γ folgt nun unmittelbar aus dem Kompaktheitssatz für ganze Ströme.

Satz 4.1 (Federer-Fleming (1960)). *Sei $K \subset \mathbb{R}^n$ kompakt, $c \in \mathbb{R}$. Dann ist die Menge*

$$\{S \in I_m\mathbb{R}^n;\ spt(S) \subset K,\ M(S) + M(\partial S) \leqslant c\}$$

schwach kompakt.

Wie im parametrischen Fall stellt sich die Frage nach der Regularität der verallgemeinerten Lösung. Wir betrachten nur den Fall $m = n - 1$, d. h. minimale Hyperflächen der Kodimension 1.

Innere Regularität für $n = 3$ wurde 1962 von Fleming [18] bewiesen. Dieses Ergebnis wurde von Almgren [2] und Simons [53] sukzessive bis $n \leqslant 7$ ausgedehnt.

Überraschenderweise konnten 1969 Bombieri-De Giorgi-Giusti [8] zeigen, daß der Kegel

$$K = \{(x, y) \in \mathbb{R}^4 \times \mathbb{R}^4;\ |x| = |y|\}$$

minimal und die Schranke $n \leqslant 7$ daher bestmöglich ist. Schließlich bewies Federer [16] allgemein die (optimale) Abschätzung

$$\dim (Sing) \leqslant n - 8$$

für die Hausdorff-Dimension der singulären Menge *Sing* im Innern einer minimalen Hyperfläche im $\mathbb{R}^n$.

Am Rande hat man nach einem Satz von Hardt-Simon [24] unabhängig von der Raumdimension n stets sogar volle Regularität.

Speziell im Falle $n = 3$ erhält man so:

Satz 4.2 (Hardt-Simon (1979)). *Eine C^∞-Jordan-Kurve Γ in $\mathbb{R}^3$ berandet stets eine eingebettete, orientierte Minimalfläche endlichen topologischen Typs.*

Der zum Begriff des Stromes analoge Begriff „Varifaltigkeit" wurde von Allard [1] geprägt. Nähere Auskunft über diese und verwandte Entwicklungen gibt das Buch von Morgan [36], wo sich auf Seite 130 auch eine beeindruckende Darstellung einer von einer Kleeblattschlinge berandeten, eingebetteten und orientierten Minimalfläche findet.

BV-Zugang. Den geometrisch-maßtheoretischen Methoden verwandt ist

nen beschränkter Variation von De Giorgi [11]; siehe auch Giusti [22].

Zur Veranschaulichung betrachten wir das folgende Modellproblem. Es sei $K \subset \mathbb{R}^3$ konvex mit glattem Rand, $\Gamma \subset \partial K$ eine glatte Jordan-Kurve. (Solche Kurven hatten wir in Abschnitt 2 als „extrem" bezeichnet.) Γ zerlegt ∂K disjunkt in die Bereiche D^+ und D^-. Indem wir nun das Variationsproblem

$$\int_K |Df| \to \min, \qquad f|_{D^\pm} = \pm 1$$

lösen, erhalten wir aufgrund der co-area-Formel

$$\int_K |Df| = \int_{-1}^{1} \mathscr{H}^2(f^{-1}(s))\,\mathrm{d}s$$

für fast alle $s \in]-1, 1[$ eine Lösung

$$\mathfrak{X} = f^{-1}(s)$$

des Plateau-Problems mit Rand Γ.

Scheinbar ist dieses Vorgehen im allgemeinen nur unter den beschriebenen geometrischen Annahmen (d. h. für extreme Kurven) durchführbar; insbesondere läßt sich das Verfahren nicht anwenden, falls die Randkurve Γ verknotet ist.

Schließlich kann man wie in Fröhlich-Struwe [20] das Problem (6), (7) als Variationsproblem für Schnitte f in einem Linienbündel über $\mathbb{R}^3 \setminus \Gamma$ mit Holonomiebedingung (7) deuten. Die Existenz einer Lösung folgt in diesem Falle unmittelbar aus der lokalen L^1-Konvergenz einer Minimalfolge.

Ähnliche Betrachtungen ließen sich anstellen für Ränder, die aus polygonalen Netzen bestehen, um so z. B. die von Hildebrandt-Tromba [27], Seite 128f., oder die von Morgan [37] beschriebenen Flächen zu erhalten.

Auf jeden Fall ist ein interessanter Bezug zur Differentialtopologie aufgedeckt, der sowohl für das Studium des Plateau-Problems als auch für die Topologie fruchtbar zu werden verspricht.

Weitere Bezüge zur Topologie findet man auch bei Fomenko [19], Band II.

5 Verallgemeinerungen

Das klassische Plateau-Problem läßt sich in viele Richtungen verallgemeinern. In jüngster Zeit wurden neuartige vollständige Minimalflächen endlichen topologischen Typs im $\mathbb{R}^3$ entdeckt (Hoffman-Meeks [29]) und inzwischen von Karcher-Polthier [33] auch im hyperbolischen Raum. Nicht kompakte Randkurven wurden bereits 1898 von Riemann [49] und in neuerer Zeit von Hoffman-Karcher-Rosenberg [28] untersucht. Krust [34] und Tomi-Ye [63] betrachten das äußere Plateau-Problem.

Von der Vielzahl der Arbeiten über freie Randwertprobleme sei nur die jüngste Arbeit von Hildebrandt-Sauvigny [26] erwähnt; in der in Kürze erscheinenden Monographie von Dierkes-Hildebrandt-Küster-Wohlrab (1992) [13] wird dieser Themenkreis ausführlich behandelt.

Literaturhinweise. Als einführende Werke sind Nitsche [42], Hildebrandt-Tromba [27] und Morgan [36] zu empfehlen.

Literatur

[1] Allard, W. K.: First variation of a varifold. Annals of Mathematics **95** (1972) 417–491

[2] Almgren, F. J.: Some interior regularity theorems for minimal surfaces and an extension of Bernsteins theorem. Annals of Mathematics **84** (1966) 277–292

[3] Almgren, F. J.; Simon, L.: Existence of embedded solutions of Plateau's problem. Annali della Scuola Normale Superiore di Pisa **6** (4) (1979) 447–495

[4] Alt, W.: Verzweigungspunkte von H-Flächen, Part I. Mathematische Zeitschrift **127** (1972) 333–362

[5] Alt, W.: Verzweigungspunkte von H-Flächen, Part II. Annals of Mathematics **201** (1973) 333–362

[6] Benci, V.: A new approach to the Morse-Conley theory and some applications. Annali di matematica pura ed applicata **158** (4) (1991) 231–305

[7] Böhme, R.; Tromba, A. J.: The index theorem for classical minimal surfaces. Annals of Mathematics **113** (2) (1981) 447–499

[8] Bombieri, E.; DeGiorgi, E.; Giusti, E.: Minimal cones and the Bernstein problem. Inventiones Mathematicae **7** (1969) 243–268

[9] Brezis, H.; Coron, J.-M.; Lieb, E. H.: Harmonic maps with defects. Comm. Math. Phys. **107** (1986) 649–705

[10] Conley, C. C.: Isolated invariant sets and the Morse index. CBMS Regional Conf. Ser. Math. 38, American Mathematical Society, Providence RI, 1978

[11] DeGiorgi, E.: Su una teoria generale della misura $(r-1)$-dimensionale in uno spazio ad r dimensioni. Annali di matematica pura ed applicata **36** (4) (1954) 191–213

[12] deRham, G.: Variétes différentiables, formes, courants, formes harmoniques. Act. Sci. et Ind. **1222** (1955)

[13] Dierkes, U.; Hildebrandt, S.; Küster, A.; Wohlrab, O.: Minimal surfaces I/II. Grundlehren 295/296, Berlin etc.: Springer 1992

[14] Douglas, J.: Minimal surfaces of higher topological structure. Annals of Mathematics **40** (1939) 205–298

[15] Douglas, J.: Solution of the problem of Plateau. Transactions of the American Mathematical Society **33** (1931) 263–321

[16] Federer, H.: The singular set of area-minimizing rectifiable currents .... Bulletin of the American Mathematical Society **76** (1970) 767–771

[17] Federer, H.; Fleming, W. H.: Normal and integral currents. Annals of Mathematics **72** (1960) 458–520

[18] Fleming, W. H.: On the oriented Plateau problem. Rendiconti del Circolo matematico di Palermo **11** (2) (1962) 1–22

[19] Fomenko: The Plateau problem. New York: Gordon and Breach 1990

[20] Fröhlich, J.; Struwe, M.: Variational problems on vector bundles. Comm. Math. Phys **131** (1990) 431–464

[21] Giaquinta, M.; Modica, G.; Souček, J.: Variational problems for maps of bounded variation with values in S^1, preprint 1992

[22] Giusti, E.: Minimal surfaces and functions of bounded variation. Monogr. Math. 80, Boston – Basel – Stuttgart: Birkhäuser 1984

[23] Gulliver, R. D.: Regularity of minimizing surfaces of prescribed mean curvature. Annals of Mathematics **97** (2) (1973) 275–305

[24] Hardt, R.; Simon, L.: Boundary regularity and embedded solutions for the oriented Plateau problem. Annals of Mathematics **110** (1979) 439–486

[25] Hildebrandt, S.: Boundary behaviour of minimal surfaces. Archive for Rational Mechanics and Analysis **35** (1969) 47–82

[26] Hildebrandt, S.; Sauvigny, F.: On one-to-one harmonic mappings and minimal surfaces, preprint 1991

[27] Hildebrandt, S.; Tromba, A. J.: Mathematics and optimal form. New York: Scientific American Books Inc. 1985

[28] Hoffman, D.; Karcher, H.; Rosenberg, H.: Embedded minimal annuli in $\mathbb{R}^3$ bounded by a pair of straight lines, preprint 1990

[29] Hoffman, D.; Meeks III, W. H.: A complete embedded minimal surface in $\mathbb{R}^3$ with genus one and three ends. Journal of Differential Geometry **21** (1985) 109–127

[30] Jost, J.: In Vorbereitung

[31] Jost, J.: Conformal mappings and the Plateau-Douglas problem in Riemannian manifolds. Journal für die Reine und Angewandte Mathematik **359** (1985) 37–54

[32] Jost, J.; Struwe, M.: Morse-Conley theory for minimal surfaces of varying topological type. Inventiones Mathematicae **102** (1990) 465–499

[33] Karcher, H.; Polthier, K.: Die Geometrie von Minimalflächen. Spektrum der Wissenschaft **10** (1990)

[34] Krust, R.: Remarques sur le problème extérieur de Plateau. Duke Mathematical Journal **59** (1989) 161–173

[35] Meeks III, W. H.; Yau, S.-T.: The classical Plateau problem and the topology of three-dimensional manifolds. Topology **21** (1982) 409–442

[36] Morgan, F.: Geometric measure theory. Boston etc.: Academic Press 1988

[37] Morgan, F.: Minimal surfaces, crystals, shortest networks, and undergraduate research. Mathematical Intelligencer **14** (1992) 37–44

[38] Morse, M.: The critical points of functions and the calculus of variations in the large. Bulletin of the American Mathematical Society **35** (1929) 38–54

[illegible]
Annals of Mathematics **40** (1939) 443–472

[40] Nitsche, J. C. C.: The boundary behavior of minimal surfaces, Kellog's theorem and branch points on the boundary. Inventiones Mathematicae **8** (1969) 313–333

[41] Nitsche, J. C. C.: A new uniqueness theorem for minimal surfaces. Archive for Rational Mechanics and Analysis **52** (1973) 319–329

[42] Nitsche, J. C. C.: Vorlesungen über Minimalflächen. Grundlehren 199. Berlin – Heidelberg – New York: Springer 1975

[43] Osserman, R.: A proof of the regularity everywhere of the classical solution to Plateau's problem. Annals of Mathematics **91** (1970) 550–569

[44] Palais, R. S.: Morse theory on Hilbert manifolds. Topology **2** (1963) 299–340

[45] Palais, R. S.; Smale, S.: A generalized Morse theory. Bulletin of the American Mathematical Society **70** (1964) 165–172

[46] Plateau, J.: Statique expérimentale et théorie des liquides soumis aux seules forces moléculaires I. Paris: Gauthiers-Villars 1873

[47] Radó, T.: The problem of the least area and the problem of Plateau. Mathematische Zeitschrift **32** (1930) 763–796

[48] Radó, T.: On Plateau's problem. Annals of Mathematics **31** (1930) 457–469

[49] Riemann, B.: Oeuvres Mathématiques. Paris: Gauthiers-Villars 1898

[50] Sauvigny, F.: Ein Eindeutigkeitssatz für Minimalflächen im $\mathbb{R}^p$ mit polygonalem Rand. Journal für die Reine und Angewandte Mathematik **358** (1985) 92–96

[51] Schüffler, K.; Tomi, F.: Ein Indexsatz für Flächen konstanter mittlerer Krümmung. Mathematische Zeitschrift **182** (1983) 245–257

[52] Shiffman, M.: The Plateau problem for non-relative minima. Annals of Mathematics **40** (1939) 834–854

[53] Simons, J.: Minimal varieties in Riemannian manifolds. Annals of Mathematics **88** (1968) 62–105

[54] Smale, S.: Morse theory and a nonlinear generalization of the Dirichlet problem. Annals of Mathematics **2** (1964) 382–396

[55] Struwe, M.: Minimal surfaces of higher genus and general critical type. Proc. Intern. Conf. Microlocal and Nonlinear Analysis, Nankai Institute, 1991. (Chang et al. Herausg.) Singapore etc.: World Scientific 1992

[56] Struwe, M.: On a critical point theory for minimal surfaces spanning a wire in $\mathbb{R}^3$. Journal für die Reine und Angewandte Mathematik **349** (1984) 1–23

[57] Struwe, M.: A Morse theory for annulus-type minimal surfaces. Journal für die Reine und Angewandte Mathematik **368** (1986) 1–27

[58] Struwe, M.: Plateau's problem and the calculus of variations. Mathematical Notes 35. Princeton, New Jersey: Princeton University Press 1988

[59] Thiel, U.: The index theorem for k-fold connected minimal surfaces. Annals of Mathematics **270** (1985) 489–501

[60] Tomi, F.; Tromba, A. J.: Existence theorems for minimal surfaces of non-zero genus spanning a contour. Providence RI: American Mathematical Society 1988

[61] Tomi, F.; Tromba, A. J.: Extreme curves bound embedded minimal surfaces of the type of the disc. Mathematische Zeitschrift **158** (1978) 137–145

[67] Weierstraß, K.: Mathematische Werke II. Über das sogenannte Dirichlet'sche Princip, 49–54. Berlin: Mayer & Müller 1895
[68] White, B.: Existence of smooth embedded surfaces of prescribed genus .... Journal of Differential Geometry **33** (1991) 413–443

Michael Struwe
Mathematik, ETH-Zentrum
CH-8092 Zürich
E-mail address: struwe@math.ethz.ch

(*Eingegangen 25. 2. 1993*)

Jber. d. Dt. Math.-Verein.
96 (1994) 117–129

Hans Petersson zum Gedächtnis

K. Wohlfahrt, Heidelberg*)

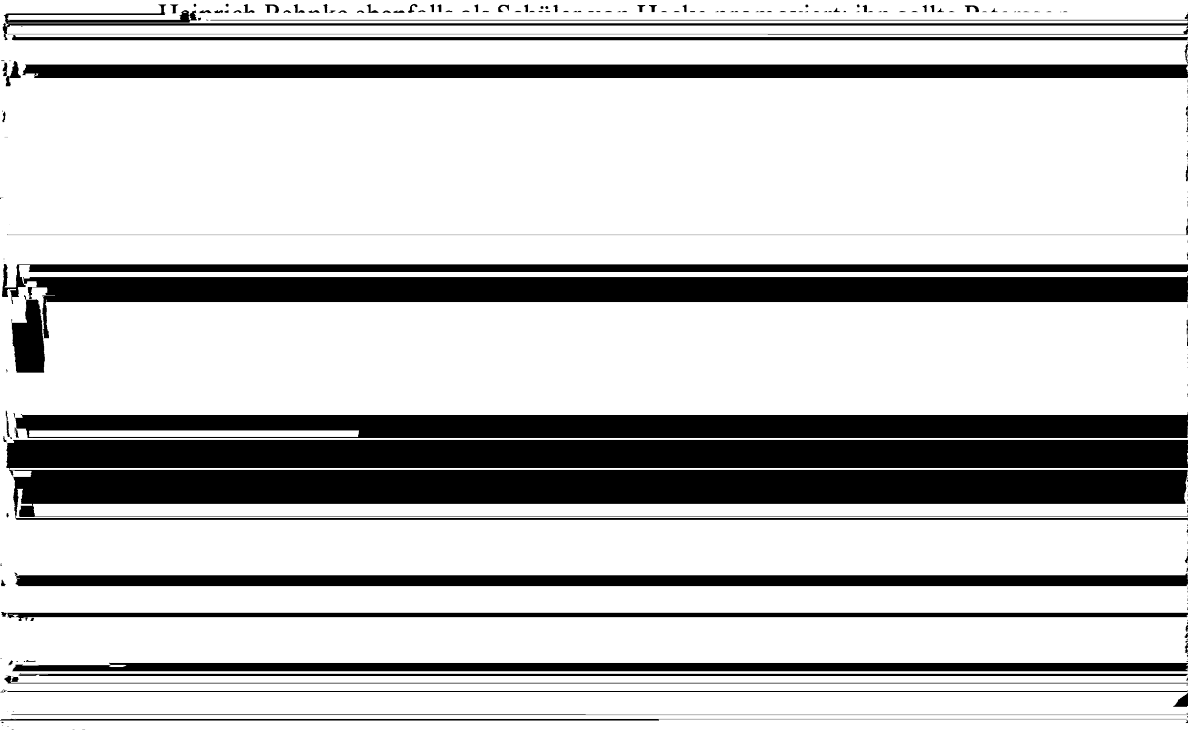
Wilfried Hans Henning Petersson wurde am 24. September 1902 in Bentschen in der ehemals preußischen Provinz Posen geboren. Seine Eltern waren der Amtsrichter Franz Petersson und dessen Ehefrau Olga, geborene Köberlin. Nach dem Besuch von Realgymnasien in Gleiwitz (Oberschlesien), Flensburg und Altona legte er 1921 die Reifeprüfung ab und studierte dann an der 1919 gegründeten Hamburgischen Universität Mathematik und Astronomie. Dort hatten Wilhelm Blaschke und Erich Hecke die ersten beiden Lehrstühle am Mathematischen Seminar inne.

Im Sommer 1923 ging Hans Petersson für ein Semester nach Göttingen, wo damals neben David Hilbert und Edmund Landau auch Richard Courant, Emmy

---

*) Für wertvolle Hinweise und Ergänzungen möchte ich mich an dieser Stelle bei Jürgen Elstrodt und Holger Petersson bedanken.

Noether und Carl David Tolmé Runge lehrten. Wieder in Hamburg promovierte er 1925 mit einer von Erich Hecke angeregten Arbeit. Zwei Jahre zuvor hatte Heinrich Behnke ebenfalls als Schüler von Hecke promoviert; ihn sollte Petersson



drei Jahrzehnte später in Münster in Westfalen wiedertreffen. Fortan blieb Hans Petersson in Hamburg, erst als Stipendiat der Rockefeller Foundation, dann nach seiner Habilitation 1929 als Privatdozent und ab 1939 als Professor. Im Jahr 1933 heiratete er Margarethe Ehlers. Das Ehepaar bekam zwei Söhne – Jörn und Holger – in den Jahren 1936 und 1939. Der ältere von ihnen wandte sich später der Physik, der jüngere – wie sein Vater – der Mathematik zu.

Peterssons erster Schüler wurde 1937 Hans Maaß, der nach dem Krieg zusammen mit Herbert Seifert das Mathematische Institut der Ruprecht-Karls-Universität in Heidelberg wieder aufbaute. 1939 übernahm Petersson die Vertretung eines Lehrstuhls in Prag. Zwei Jahre später folgte er einem Ruf nach Straßburg, von wo er 1944 nach Hamburg zurückkehrte. Im Wintersemester 1949/50 lernte ich ihn kennen, als er eine Vorlesung über elementare Zahlentheorie hielt. Lehrstühle am mathematischen Seminar in Hamburg hatten damals Helmut Hasse, Ernst Witt und Wilhelm Blaschke inne. Ein engerer Fachkollege Peterssons war Bruno Schoeneberg, der sich mit elliptischen Modulfunktionen beschäftigte. Er hatte 1931 bei Hecke promoviert und sich 1950 in Hamburg habilitiert.

Im Jahr 1953 folgte Hans Petersson einem Ruf an die Westfälische Wilhelms-Universität in Münster. Das dortige Mathematische Institut hatten Heinrich Behnke und Friedrich Karl Schmidt geleitet. Schmidt hatte einen Ruf nach Heidelberg angenommen, und das Institut in Münster wurde nun geteilt: Behnke übernahm das I., Petersson das II. Mathematische Institut. Zu diesem

Aus Anlaß der Vollendung des 80. Lebensjahres von Hans Petersson – und gleichzeitig zur Ehrenpromotion von Martin Eichler – fand ein Festkolloquium im Fachbereich Mathematik statt; dazu war gerade rechtzeitig die Monographie „Modulfunktionen und quadratische Formen“ erschienen. Die Mathematische Fakultät der Universität Bielefeld verlieh im gleichen Jahr an Hans Petersson die Würde eines Ehrendoktors. Zwei Jahre noch war ihm die Beschäftigung mit seiner geliebten Mathematik vergönnt: Am 9. November 1984 starb Hans Petersson in Münster. Untersuchungen, mit denen er bis in die letzten Tage seines Lebens befaßt war, sind postum im Druck erschienen. Am Jahrestag seines Todes lud der Fachbereich Mathematik zu einem Festkolloquium ein, bei welchem Heinz Helling auf Peterssons mathematisches Werk und Joseph Lehner im besonderen auf die Bedeutung des Skalarprodukts eingingen.

Petersson besaß ein lebhaftes Temperament, war mitteilsam und wußte seine dezidierten Meinungen wohlbegründet vorzubringen. In Unterhaltungen war er für mannigfache Themen auch außerhalb seines Faches zugänglich, mochte es sich um Politik und Wirtschaft, Menschen, Musik, oder um sein engeres Hobby – die Astronomie – handeln. Besonders in kleinem Kreis zeigte sich sein Sinn für Humor. Taktvoll und einfühlsam vermied er es stets, anderen zu nahe zu treten. Seine kollegiale Art, das Institut zu leiten, war effektiv und wurde sehr geschätzt. Das Weierstraß-Symbol $\wp$, mit dem er Vorlagen abzuzeichnen pflegte, wurde unter den Institutsmitgliedern bald zur Bezeichnung für ihn selbst.

Technischen Fortschritt schätzte er – mit Einschränkungen: Das Fernsehprogramm in den USA schien ihm kaum genießbar zu sein, und nur zum Betrachten von Aufnahmen der Mondlandung hielt er einen Bildschirm für sinnvoll. Einen Führerschein erwarb er erst spät im Leben und benutzte ihn nur ein Jahr lang in den Staaten. Wandern oder Radfahren waren ihm die liebsten Betätigungen zum Ausgleich der Arbeit am Schreibtisch. Als er mit seinem Institut in Münster einen Tagesausflug plante, wählte er mit Bedacht die nächst erreichbaren Berge – den Teutoburger Wald – und beriet uns beim Anstieg über das einzuschlagende Tempo. Noch in hohem Alter ist er in den kanadischen Rockies gewandert.

In seiner Dissertation [2] greift Hans Petersson ein Problem auf, welches ihn sein Leben lang eingehend beschäftigen sollte, die Frage nach den Darstellungsanzahlen natürlicher Zahlen durch quadratische Formen unter vielfach verschiedenen Bedingungen. Im Vordergrund steht zunächst die Anwendung einer Methode von Hardy und Littlewood aus der analytischen Zahlentheorie. Petersson erzielt damit asymptotische Abschätzungen für Darstellungsanzahlen durch Formen, die sich als Summe von (wenigstens drei) binären quadratischen Formen über dem rationalen Zahlkörper schreiben lassen. Die gleiche Methode führt Petersson in [3] bei der Abschätzung von Gitterpunktanzahlen in (mindestens fünfdimensionalen) Ellipsoiden zu schärferen Abschätzungen als den eben von Landau und Walfisz erzielten, indem er die Transformationstheorie der Jacobischen Thetafunktionen heranzieht. Die Resultate verwendet er später in Arbeiten über die Fourierkoeffizienten von Modulformen.

Teilersummen und Partitionenanzahlen treten ebenfalls in Fourierentwicklungen von Modulformen auf. Deren Theorie (wie die allgemeinere Theorie automorpher Formen) lag seinerzeit in einer von Poncaré, Klein und Fricke entwickelten Gestalt vor, die nun vielfach als schwer zugänglich, inexakt im Detail, und in der Darstellung als lückenhaft und nicht mehr zeitgemäß empfunden wurde. Petersson begründet die Theorie in [4], [7] und [8] ganz neu und verallgemeinert sie weitgehend. Das Gewicht r – bei Petersson die „Dimension $-r$" – einer automorphen Form f zu einer Grenzkreisgruppe Γ (mit endlich vielen Erzeugenden und mit parabolischen Substitutionen) darf nun beliebig reell statt nur ganzrational sein, und zu Γ und r werden Multiplikatorsysteme v neu eingeführt. Das Verhalten von f wird dann durch einen von Petersson eingeführten Strichoperator besonders prägnant beschrieben: Setzt man für die komplexe Variable τ der oberen Halbebene H und für reelle unimodulare zweireihige Matrizen S mit zweiter Zeile $(c\,d)$

$$f|S(\tau) := (c\tau+d)^{-r}f(S\tau),$$

so genügt die automorphe Form f den Funktionalgleichungen

$$f\,|L = v(L)f \quad (L\in\Gamma)$$

Petersson konstruiert automorphe Formen zu Γ, $r>2$ und v in der Gestalt absolut konvergenter Poincaréscher Reihen, deren Meromorphieverhalten (in den Spitzen von Γ) noch recht allgemein vorgeschrieben werden darf. In dem wichtigen Fall $r=2$ und unter der Voraussetzung $v=1$ gelingt eine entsprechende Konstruktion immerhin noch für die Hauptkongruenzgruppen $\Gamma(N)$ der Stufe N in der Modulgruppe, nach dem Vorbild eines von Hecke eingeführten Summationsverfahrens für Eisensteinsche Reihen. Mit einer Methode von Ritter beweist Petersson schließlich zwei Vollständigkeitssätze, wonach sich jede automorphe Form (im angegebenen Rahmen) als lineares Kompositum geeigneter Poincaréscher Reihen schreiben läßt. Für die abelschen Integrale zu den Hauptkongruenzgruppen lassen sich so Darstellungen in Gestalt von Reihenentwicklungen gewinnen. Eine Anwendung auf die absolute Invariante j der elliptischen Funktionen ergibt für deren Fourierkoeffizienten $c(n)$ die jeweils einem Aggregat aus const $\cdot\, n$ Gliedern nächstliegende ganze Zahl, ähnlich wie in der Rademacherschen Formel für Partitionenanzahlen.

Nun wendet sich Petersson speziell den Fourierkoeffizienten von Modulformen zu. Den einfacheren Fall der Eisensteinschen Reihen behandelt er in [5], den allgemeinen Fall Poincaréscher Reihen dann in [10]. Für die Koeffizienten

Theorie der Grenzkreisgruppen“ [14]–[18] eine neue, vollständige Grundlegung, die sich nun auf Hermann Weyls „Idee der Riemannschen Fläche“ und Arbeiten

Bereich der Grenzkreisgruppen hinausweist, und dessen Bedeutung für die gesamte Theorie gar nicht hoch genug einzuschätzen ist.

Die Metrisierung geschieht mittels eines Skalarprodukts, welches sich auf die ganzen Formen zu einer Grenzkreisgruppe Γ von erster Art mit parabolischen Spitzen, von positivem Gewicht r und einem Multiplikatorsystem v vom Betrag 1 bezieht. Sind f und g zwei solche Formen und verschwindet ihr Produkt fg in allen Spitzen von Γ, so wird ihr Skalarprodukt (f, g) als das über einen Fundamentalbereich von Γ zu erstreckende Integral der Γ-invarianten Funktion $y^r f \bar{g}$ bezüglich des hyperbolischen Flächenelements $y^{-2} dx dy$ erklärt; Peterssons Skalarprodukt ist hermitesch.

Der Raum G der ganzen Formen zu Γ, r und v zerfällt in den Hilbertraum S der Spitzenformen und die „Normalschar" N derjenigen Formen, die zu S orthogonal sind. Dabei wird hier und in [36] bewiesen, daß sich die von Hecke untersuchten Eisensteinreihen durch ihr Verhalten in den Spitzen und ihre Orthogonalität zu den Spitzenformen innerhalb des Raumes der ganzen Modulformen der betreffenden Stufe und vom gleichen Gewicht auszeichnen. Das bedeutet, daß man die Analoga dieser Eisensteinreihen für beliebige Grenzkreisgruppen erster Art mit parabolischen Spitzen durch die entsprechenden funktionalen Bedingungen erklären darf. Besonders interessant sind hier die Eisensteinreihen vom Gewicht 1 in [52], wo im Zusammenhang mit Rangbestimmungen die Klassenzahlen imaginär-quadratischer Zahlkörper auftreten.

Für die nächsten drei Abschnitte beschränke ich mich auf die Modulgruppe Γ, gerades Gewicht $r \geqslant 4$ und triviale Multiplikatoren. Mit geeignet normierten Poincaréreihen g_n vom parabolischen Typ ($n=0$ Eisensteinreihe, $n>0$ Spitzenform) und einer Spitzenform f mit Fourierkoeffizienten $b_n(f)$ wird

$$(f, g_n) = b_n(f) \quad (n \geqslant 0).$$

Daher ist die durch die Reihe g_n dargestellte Funktion bis auf ihre Normierung dadurch charakterisiert, daß sie zu allen Spitzenformen, deren n-ter Fourierkoeffizient verschwindet, orthogonal ist.

Schließlich liefert nun die lineare Algebra ein Kriterium dafür, daß vorgegebene Poincaréreihen linear unabhängig sind. Die früheren Beweise der Vollständigkeitssätze und der Sätze über lineare Relationen zwischen Poincaréschen Reihen vereinfachen sich ganz erheblich; insbesondere wird der Rittersche Satz über die „Anzahl frei beweglicher Pole" entbehrlich. – Entsprechendes gilt für die von Petersson eingeführten Poincaréreihen vom elliptischen und hyperbolischen Typ (siehe [27]).

Kurz zuvor hatte Erich Hecke seine Theorie der Operatoren T_n entwickelt und in einigen Fällen nachrechnen können, daß die Räume ganzer Modulformen jeweils Basen aus simultanen Eigenfunktionen dieser Operatoren besitzen; ob dies allgemein zutrifft, blieb offen. Nun zeigt Petersson, daß Heckes Operatoren bezüglich seines Skalarprodukts selbstadjungiert sind, und schließt daraus und aus ihrer Kommutativität, daß die von den Hecke-Operatoren erzeugte Algebra halbeinfach ist. – Für Formen der Stufe N gelang die volle Verallgemeinerung im Fall $(n, N) > 1$ erst 1970 A. O. L. Atkin und Joseph Lehner durch ihre Theorie der „Neuformen".

Wenngleich die Idee eines Skalarprodukts für Spitzenformen (nach einer Bemerkung von Samuel James Patterson in „Ein Jahrhundert Mathematik 1890–1990“, DMV, p. 641) bereits auf Felix Klein und Henri Poincaré zurückgeht, so hat doch erst Petersson die Bedeutung dieses Begriffs erkannt und die Forschung mit einem heute selbstverständlichen und äußerst nützlichen Hilfsmittel versehen. Erich Hecke hielt diese Entwicklung damals zunächst für nicht sachgemäß und hat sich eine spätere „algebraische Lösung“ seines Diagonalisierungsproblems erhofft.

Das Skalarprodukt zweier Modulformen kann Peterson in [41] in einigen Fällen berechnen, indem er Residuen geeigneter Dirichletscher Reihen auswertet; so läßt sich der Wert der Riemannschen Zetafunktion an der Stelle $s = 3$ durch ein Skalarprodukt zweier Potenzprodukte Jacobischer Thetafunktionen ausdrücken.

Aus den Resultaten von [22], zu denen auch die Kernfunktion einer Integralgleichung für Spitzenformen gehört, hat Max Koecher 1956 eine Spurformel für Heckes Operatoren hergeleitet; es handelt sich dabei um einen Spezialfall der Selbergschen Spurformel.

Bei dem durch das Mellin-Integral vermittelten Zusammenhang zwischen Modulformen und Dirichletschen Reihen entsprechen den Eigenfunktionen der Operatoren T_n Dirichletreihen mit einer Eulerschen Produktentwicklung und einer Funktionalgleichung nach Art der Riemannschen Zetafunktion. Petersson behandelt den Komplex mittels seiner Metrik – die sich auch hier als geeignetes Instrument erweist – in drei Arbeiten [23–25]. Deren zweite enthält seine weithin bekannt gewordene Verallgemeinerung einer Vermutung von Ramanujan. Diese betrifft die Fourierkoeffizienten $\tau(n)$ der sogenannten „Diskriminante der elliptischen Funktionen“, einer ganzen Spitzenform Δ vom Gewicht $r = 12$ zur Modulgruppe. Ramanujan hatte vermutet, daß

$$|\tau(p)| \leqslant 2p^{(r-1)/2} \quad (p \text{ Primzahl})$$

gilt, und Petersson erweitert dies auf beliebige ganze Spitzenformen zur Modulgruppe, welche (wie Δ) normierte Eigenfunktionen der Heckeschen Operatoren sind. Die Ramanujan-Peterssonsche Vermutung wurde 1974 von Pierre Deligne – als Konsequenz seines Beweises einer tiefliegenden Vermutung von André Weil – mit Mitteln der algebraischen Geometrie bestätigt.

Die Metrisierung hat weittragende Konsequenzen auch für die Uniformisierung einer Riemannschen Fläche R mittels einer Grenzkreisgruppe Γ. Den abelschen Differentialen auf R entsprechen automorphe Formen vom Gewicht $r = 2$ zu Γ. Um diese aus den nur für $r > 2$ absolut konvergenten Poincaréreihen zu gewinnen, bedarf es eines Summationsverfahrens; die Methode von Hecke ist auf die Kongruenzgruppen in der Modulgruppe beschränkt. In [31]–[32] zeigt nun Petersson einen völlig neuen Weg auf: Er charakterisiert die Poincaréschen Reihen zu Γ, $r > 2$ und einem stetig von r abhängenden Multiplikatorsystem v_r, welches gegen ein vorgegebenes Multiplikatorsystem v_2 konvergiert, durch ihre metrische Stellung im Raum der Spitzenformen zu Γ, r und v_r. Es gelingt ihm zu beweisen, daß man durch den Übergang zur Grenze $r = 2$ die gesuchten Spitzenformen gewinnt. Wieder ist es Peterssons Metrik, die hier weiterführt!

Das neue Summationsverfahren läßt sich auf automorphe Formen mit Singularitäten ausdehnen, wie Petersson in [57] nach Vorarbeiten in [47] (welche die metrische Verknüpfung von ganzen und nicht ganzen Formen betreffen) in aufwendiger Weise zeigen kann. So erhält er schließlich die den abelschen Differentialen jeder Gattung auf kompakten Riemannschen Flächen entsprechenden automorphen Formen aus Poincaréschen Reihen. Wieviel damit für die Theorie der Riemannschen Flächen erreicht ist, legt Petersson eindrucksvoll in [60] dar. Hermann Weyl hat diesen neuen Zugang zu den grundlegenden Existenzsätzen der Theorie in der dritten Auflage seines bekannten Buches mit gebührender Anerkennung gewürdigt.

Zu den nicht-ganzen automorphen Formen gehören insbesondere diejenigen von negativem reellem Gewicht, die – bereits klassisch – in ganz allgemeinen Partitionenproblemen auftreten. Den Zusammenhang beschreibt Petersson in [45] und stellt dort fest, „daß die Farey-dissection in Wahrheit nicht als das angemessene Mittel zur Untersuchung der hier diskutierten Probleme angesehen werden kann".

In einer seiner weiteren Arbeiten über Partitionenprobleme [55] setzt er sich – in für ihn sehr charakteristischer Weise – zum Ziel, „die entwickelte Theorie im engeren Rahmen bis in die letzten, für sie prinzipiell erreichbaren Einzelheiten auszugestalten". Hier erhält er einen bemerkenswerten asymptotischen Zusammenhang zwischen dem Quotienten zweier Anzahlen von Partitionen, deren Summanden beziehungsweise quadratische Reste und Nichtreste nach einer Primzahl $p \equiv 1 \pmod 4$ sind, und Grundeinheit und Klassenzahl des reellquadratischen Zahlkörpers mit der Diskriminante p.

Seine Theorie hat Petersson später in verschiedener Hinsicht ergänzt, etwa in [67] durch eine Untersuchung der Operation der Spurbildung: Ist g eine automorphe Form zu einer Grenzkreisgruppe Δ, welche endlichen Index in einer Grenzkreisgruppe Γ besitzt, und durchläuft V ein Vertretersystem der Nebenklassen ΔL von Δ in Γ, so erhält man mittels

$$\mathrm{Sp}\,(\Delta, \Gamma; g) := \sum v(V)^{-1} g | V$$

eine automorphe Form zu Γ, vorausgesetzt, daß das Multiplikatorsystem v von g eine – ebenso bezeichnete – Fortsetzung nach Γ besitzt; hier wurde der oben erklärte Strichoperator benutzt. Petersson merkt an, daß man die Poincaréschen Reihen vom parabolischen und vom hyperbolischen Typ erhält, indem man einerseits voraussetzt, daß Γ parabolische Spitzen besitzt, andererseits die Endlichkeitsbedingung fortläßt, und den Spuroperator auf geeignete elementare Funktionen anwendet.

Mit der Spurbildung lassen sich die Heckeschen Operatoren T_n definieren: Ist (etwa) f eine Modulform zur vollen Modulgruppe Γ und Q die zweireihige Matrix $(n\ \ 0|0\ \ 1)$, so ist $f|Q$ eine Modulform zur Gruppe $\Delta = \Gamma_0(n)$, und man erhält (nach passender Normierung) $f|T_n$ als Spur von $f|Q$. Die erwähnte Bedingung an das Multiplikatorsystem ist im Fall von Thetamultiplikatoren dafür verantwortlich, daß – wie bereits Hecke wußte – Operatoren T_n zu Formen halbzahligen Gewichts nur für Quadratzahlen n existieren. – Eine befriedigende Theorie Heckescher Operatoren für diese Modulformen hat erst 1973 Goro Shimura entwickelt.

Einige Arbeiten hat Hans Petersson den Untergruppen Γ von endlichem Index μ in der Modulgruppe gewidmet; μ ist gleich dem Grad der Erweiterung des zugehörigen Funktionenkörpers über dem (rationalen) Körper der Modulfunktionen. Daher definiert jede solche Untergruppe eine als „Modulkurve" bezeichnete algebraische Kurve. μ hängt mit dem Geschlecht p der Kurve und den Anzahlen σ, e_2, e_3 (beziehungsweise) der Äquivalenzklassen parabolischer und elliptischer Fixpunkte zweiter und dritter Ordnung von Γ – der Spitzen und Ecken – über die topologische Grundformel

$$\mu = 12(p-1)+6\sigma+3e_2+4e_3$$

zusammen, die eine Form der Eulerschen Polyederformel ist.

Petersson war stets der Meinung, Untergruppen der Modulgruppe seien nicht einfach aufzusuchen, sondern zu konstruieren. In [46] geht er an diese Aufgabe für Untergruppen mit nur einer Spitzenklasse heran, die er zykloid nennt, und beweist, daß es zu jeder Lösung der topologischen Grundformel mit $p=0$ – und insgesamt also unendlich viele – zykloide Gruppen gibt. Er klassifiziert in mühsamer Arbeit [70] die endlich vielen Kongruenzgruppen unter ihnen und zeigt, daß ihre Indizes genau mit den Teilern der Zahl

$$2^4\cdot 3^2\cdot 5\cdot 7\cdot 11 = 55440$$

zusammenfallen; daß hier kein Primteiler $\geqslant 13$ vorkommen kann, entnimmt er einem berühmten Resultat von Galois.

War Peterssons Schaffen bis etwa 1960 überwiegend dem Aufbau einer sehr allgemeinen Theorie – die ihre einheitliche und geschlossene Form vor allem seinem Skalarprodukt und der daraus entspringenden Metrik verdankt, – daneben aber auch dem Studium konkreter Anwendungen gewidmet, so tritt seitdem der zweite Gesichtspunkt in den Vordergrund. Dies zeigt sich beispielhaft in seiner Schrift [73] über Thetareihen und besonders deutlich in der Monographie [76], über die eine Besprechung in diesen Jahresberichten (Band 86, Heft 4) vorliegt. Mit ihr kehrt er zum Ausgangspunkt zurück, der Frage nach den Darstellungen natürlicher Zahlen durch quadratische Formen. Die geeigneten Mittel dafür findet er in seiner allgemeinen Theorie; er gewinnt aus ihr auf analytischem Wege zahlreiche „Jacobische Identitäten", welche die gesuchten Darstellungsanzahlen ergeben. Deren weitgehende numerische Bestätigung ist für ihn das eigentliche Ziel der mathematischen Analyse. Hier enthüllt sich ihm eine „prästabilierte Harmonie" ([176], p. 48).

Mit seinem Werk hat Hans Petersson Funktionentheorie und algebraische Geometrie durch allgemeine Methoden und spezielle Resultate wesentlich bereichert. Vor allem aber hat er ein riesiges Kapitel der analytischen Zahlentheorie neu begründet und vollständig dargestellt. Er hinterläßt ein beeindruckendes mathematisches Werk, in dessen Tiefe manch wertvolle Erkenntnis darauf wartet, daß sie unter neuem Aspekt beschrieben und ausgeführt wird. Durch sein unermüdliches Streben nach Erkenntnis und das nachahmenswerte Beispiel seiner Arbeitsweise, mit der er stets auf die geringsten Voraussetzungen für die Theorie und die denkbar konkreteste Form für die Anwendungen zielte, hat sich Hans Petersson die mathematische Welt zu Dank verpflichtet.

Verzeichnis der im Druck erschienenen Arbeiten von Hans Petersson

[1] Über die Konvergenz der Reihen in der Störungstheorie. Abhandlungen aus dem Mathematischen Seminar der Universität Hamburg **3** (1924) 324–330

[2] Über die Darstellung natürlicher Zahlen durch definite und indefinite quadratische Formen von $2r$ Variablen. Abhandlungen aus dem Mathematischen Seminar der Universität Hamburg **4** (1926) 267–296

[3] Über die Anzahl der Gitterpunkte in mehrdimensionalen Ellipsoiden. Abhandlungen aus dem Mathematischen Seminar der Universität Hamburg **5** (1927) 116–150

[4] Theorie der automorphen Formen beliebiger reeller Dimension und ihre Darstellung durch eine neue Art Poicaréscher Reihen. Mathematische Annalen **103** (1930) 369–436

[5] Über die Entwicklungskoeffizienten der ganzen Modulformen und ihre Bedeutung für die Zahlentheorie. Abhandlungen aus dem Mathematischen Seminar der Universität Hamburg **8** (1931) 215–242

[6] Über Potenzreihen mit ganzen algebraischen Koeffizienten, Abhandlungen aus dem Mathematischen Seminar der Universität Hamburg **8** (1931), 315–322

[7] Darstellung der eigentlich-automorphen Formen (-2)-ter Dimension durch eine Art Poincaréscher Reihen bei gewissen Grenzkreisgruppen, Mathematische Annalen **105** (1931) 206–239

[8] Ein Fundamentalsatz aus der Theorie der ganzen automorphen Formen, Mathematische Annalen **106** (1932) 343–368

[9] Über die Entwicklungskoeffizienten einer gewissen Klasse von automorphen Formen, Verhandlungen des Internationalen Mathematiker-Kongresses Zürich 1932, 48–50

[10] Über die Entwicklungskoeffizienten der automorphen Formen, Acta Mathematica **58** (1932) 169–215

[11] Über die Entwicklungskoeffizienten einer allgemeinen Klasse automorpher Formen, Mathematische Annalen **108** (1933) 370–377

[12] Über die linearen Relationen zwischen den Poincaréschen Reihen der Modulgruppe, Jahresbericht der Deutschen Mathematiker-Vereinigung **47** (1937) 56–58

[13] Neuere Untersuchungen über automorphe Formen komplexer Dimension, Jahresbericht der Deutschen Mathematiker-Vereinigung **47** (1937) 161–176

[14] Zur analytischen Theorie der Grenzkreisgruppen I, Mathematische Annalen **115** (1938) 23–67

[15] Zur analytischen Theorie der Grenzkreisgruppen II, Mathematische Annalen **115** (1938) 175–204

[16] Zur analytischen Theorie der Grenzkreisgruppen III, Mathematische Annalen **115** (1938) 518–572

[17] Zur analytischen Theorie der Grenzkreisgruppen IV, Mathematische Annalen **115** (1938) 670–709

[18] Zur analytischen Theorie der Grenzkreisgruppen V, Mathematische Zeitschrift 44 (1939) 127–155

[19] Über die eindeutige Bestimmung und die Erweiterungsfähigkeit von gewissen Grenzkreisgruppen, Abhandlungen aus dem Mathematischen Seminar der Universität Hamburg **12** (1938) 180–199

[20] Die linearen Relationen zwischen den ganzen Poincaréschen Reihen von reeller Dimension zur

[27] Einheitliche Begründung der Vollständigkeitssätze für die Poincaréschen Reihen von reeller Dimension bei beliebigen Grenzkreisgruppen von erster Art, Abhandlungen aus dem Mathematischen Seminar der Universität Hamburg **14** (1941) 22–60

[28] Ein Summationsverfahren für die Poincaréschen Reihen von der Dimension −2 zu den hyperbolischen Fixpunktepaaren, Mathematische Zeitschrift **49** (1943/44) 441–496

[29] Modulformen und Zahlentheorie, Bericht über die Mathematiker-Tagung in Tübingen 1947, 116–118

[30] Elliptische Modulfunktionen und automorphe Funktionen, Naturforschung und Medizin in Deutschland (FIAT Review) (1948) 243–275

[31] Automorphe Formen als metrische Invarianten I, Mathematische Nachrichten **1** (1948) 158–212

[32] Automorphe Formen als metrische Invarianten II, Mathematische Nachrichten **1** (1948) 218–257

[33] Über den Bereich absoluter Konvergenz der Poincaréschen Reihen, Acta Mathematica **80** (1948) 23–63

[34] Über die lineare Zerlegung der den ganzen Modulformen von höherer Stufe entsprechenden Dirichletreihen in vollständige Eulersche Produkte, Acta Mathematica **80** (1948) 191–221

[35] Das wissenschaftliche Werk von E. Hecke, Abhandlungen aus dem Mathematischen Seminar der Universität Hamburg **16** 1/2 (1949) 7–31

[36] Über die systematische Bedeutung der Eisensteinschen Reihen, Abhandlungen aus dem Mathematischen Seminar der Universität Hamburg **16** 1/2 (1949) 104–126

[37] Ein Konvergenzbeweis für Poincarésche Reihen, Abhandlungen aus dem Mathematischen Seminar der Universität Hamburg **16** 1/2 (1949) 127–130

[38] Über Interpolation durch Lösungen linearer Differentialgleichungen, Abhandlungen aus dem Mathematischen Seminar der Universität Hamburg **16** 3/4 (1949) 41–55

[39] Über den Körper der Fourierkoeffizienten der von Hecke untersuchten Eisensteinreihen, Abhandlungen aus dem Mathematischen Seminar der Universität Hamburg **16** 3/4 (1949) 101–113

[40] Über die Werte der Riemannschen Zetafunktion für positive ungerade Argumente, Abhandlungen aus dem Mathematischen Seminar der Universität Hamburg **16** 3/4 (1949) 119–135

[41] Über die Berechnung der Skalarprodukte ganzer Modulformen, Commentarii Mathematici Helvetici **22** (1949) 168–199

[42] Über Weierstraßpunkte und die expliziten Darstellungen der automorphen Formen von reeller Dimension, Mathematische Zeitschrift **52** (1949) 32–59

[43] Über die Transformationsfaktoren der relativen Invarianten linearer Substitutionsgruppen, Monatshefte für Mathematik **53** (1949) 17–41

[44] Zwei Bemerkungen über die Weierstraßpunkte der Kongruenzgruppen, Archiv der Mathematik **2** (1949/50) 246–250

[45] Konstruktion der Modulformen und der zu gewissen Grenzkreisgruppen gehörigen automorphen Formen von positiver reeller Dimension und die vollständige Bestimmung ihrer Fourierkoeffizienten, Sitzungsberichte der Heidelberger Akademie der Wissenschaften 1950, 417–494

[46] Über einen einfachen Typus von Untergruppen der Modulgruppe, Archiv der Mathematik 4

[53] Über Partitionenprobleme in Verbindung mit Potenzresten nach einem Primzahlmodul, Mathematische Zeitschrift **66** (1956) 241–268
[54] On a Certain Kind of Zetafuchsien Functions, Report of an International Colloquium on Zeta-Functions Bombay 1956, 297–298
[55] Über die arithmetischen Eigenschaften eines Systems multiplikativer Modulfunktionen von Primzahlstufe, Acta Mathematica **95** (1956) 57–110
[56] Asymptotic Formulae for the Fourier Coefficients of Multiplicative Automorphic Functions, Seminars on Analytic Functions Princeton 1957, Vol. II, 134–151
[57] Explizite Konstruktion der automorphen Orthogonalfunktionen in den multiplikativen Differentialklassen, Mathematische Nachrichten **16** (1957) 343–368
[58] Über Betragmittelwerte und die Fourier-Koeffizienten der ganzen automorphen Formen, Archiv der Mathematik **9** (1958) 176–182
[59] Über Darstellungsanzahlen von Primzahlen durch Quadratsummen, Mathematische Zeitschrift **71** (1959) 289–307
[60] Die Systematik der abelschen Differentiale in der Grenzkreisuniformisierung, Annales Academiae Scientiarium Fennicae 1960, 74 S
[61] The Properties of the Representation of the Abelian Differentials by Poincaré's Series, Contributions to Function Theory Bombay 1960, 185–201
[62] Über die Kongruenzgruppen der Stufe 4, Journal für die reine und angewandte Mathematik **212** (1963) 63–72
[63] Über eine Funktion von G. Lochs und die Diskriminante der elliptischen Funktionen, Monatshefte für Mathematik **67** (1963) 243–258
[64] Über eine Spurbildung bei automorphen Formen, Mathematische Zeitschrift **96** (1967) 296–332
[65] Über die Eisensteinchen Reihen der Thetagruppe, Abhandlungen aus dem Mathematischen Seminar der Universität Hamburg **31** (1967) 166–178
[66] Über die logarithmischen Ableitungen der automorphen Formen, Abhandlungen aus dem Mathematischen Seminar der Universität Hamburg **31** (1967) 191–198
[67] Über Differentialoperatoren und die Kroneckersche Potenzdarstellung bei automorphen Formen, Journal für die reine und angewandte Mathematik **231** (1968) 163–191
[68] Über Funktionen mit dem Transformationsverhalten der logarithmischen Ableitungen automorpher Formen und die Resultatfunktionen des Heckeschen Summationsverfahrens, Annales Academiae Scientiarium Fennicae 1969, 29 S
[69] Schachtelsätze über Eigenwerte, Archiv der Mathematik **21** (1970) 574–577
[70] Über die Konstruktion zykloider Kongruenzgruppen in der rationalen Modulgruppe, Journal für die reine und angewandte Mathematik **250** (1971) 182–212
[71] Über die Mittelwerte der automorphen Funktionen und die Nullstellen der automorphen Formen, Inventiones Mathematicae **12** (1971) 1–34
[72] Über die Primformen der Hauptkongruenzgruppen, Abhandlungen aus dem Mathematischen Seminar der Universität Hamburg **38** (1972) 8–31
[73] Über Thetareihen zu großen Untergruppen der rationalen Modulgruppe, Sitzungsberichte der Heidelberger Akademie der Wissenschaften 1972, 1–61
[74] Über Heckesche Operatoren, Poincarésche Reihen und eine Siegelsche Konstruktion, Acta Arithmetica **24** (1973) 411–434
[75] Konstruktionsprinzipien für Untergruppen der Modulgruppe mit einer oder zwei Spitzenklassen, Journal für die reine und angewandte Mathematik **268/269** (1974) 94–109
[76] Modulfunktionen und quadratische Formen, Ergebnisse der Mathematik und ihrer Grenzgebiete **100** (1982)
[77] Über Kongruenzgruppen mit zwei Spitzenbahnen in der rationalen Modulgruppe I, Seminarberichte Mathematik und Informatik Hagen **17** (1983) 1–52
[78] Über die orthogonale Zerlegung von Formenscharen der rationalen Modulgruppe, Archiv der Mathematik **42** (1984) 526–535
[79] Über gewisse Dirichlet-Reihen mit Eulerscher Produktzerlegung, Mathematische Zeitschrift **189** (1985) 273–288
[80] Über Rangbestimmungen im Bereich der Modulformen vom Gewicht 1 der rationalen Modulgruppe, Archiv der Mathematik **44** (1985) 152–158

[81] Über Spuren von Modulformen und die Eisensteinschen Reihen in den Kongruenzklassen der rationalen Modulgruppe, Abhandlungen aus dem Mathematischen Seminar der Universität Hamburg 56 (1986) 75–106

Darüber hinaus werden 61 Manuskripte aus dem Nachlaß von Hans Petersson in der Universitätsbibliothek Münster aufbewahrt.

Die Schüler von Hans Petersson

Hans Maaß
Konstruktion ganzer Modulformen halbzahliger Dimension mit Theta-Multiplikatoren in einer und zwei Variablen
26. Juni 1937

Elisabeth Schulenburg
Die Erweiterung der Grenzkreisgruppen mit zwei Erzeugenden
11. Februar 1939

Karl-Bernhard Gundlach
Über die Darstellung der ganzen Spitzenformen zu den Idealstufen der Hilbertschen Modulgruppe und die Abschätzung ihrer Fourierkoeffizienten
8. Februar 1954

Klaus Wohlfahrt
Über Operatoren Heckescher Art bei Modulformen reeller Dimension
18. Januar 1956

Hans-Dieter Pumplün
Die Zerlegung der Kreisteilungspolynome von quadratfreier Ordnung in Teilkörpern des Zerfällungskörpers im Zusammenhang mit algebraischen Kreiseinheiten, Klassenzahlen und Eisensteinschen Reihen halbzahliger Dimension
21. Dezember 1960

Armin Leutbecher
Über den Zusammenhang der Werte von L-Reihen quadratischer Zahlkörper im Punkte $s=1$ mit automorphen Formen
26. November 1963

Heinz Helling
Konstruktion arithmetischer Grenzkreisgruppen erster Art durch die Einheiten der rationalen Quaternionenalgebren
29. Januar 1965

Detlef Brümmer
Eine Spurbildung an Thetareihen
27. Januar 1971

Prof. Dr. Klaus Wohlfahrt
Im Eichwald 2
69126 Heidelberg

(*Eingegangen: 16. 3. 1993, rev. Version 7. 6. 1993*)

Buchbesprechungen

Marinov, C. A., Neittaanmäki, P., Mathematical Models in Circuit Theory: Theory and Applications, Dordrecht: Kluwer Academic Publ. 1991, 160 S., Dfl. 120.–

Der Titel der vorliegenden Monographie verspricht eine Darstellung der Theorie mathematischer Modelle für elektrische Netzwerke und deren Anwendungen. Laut Vorwort des Buches wollen die Autoren mit diesen Modellen eine Brücke zwischen angewandter Mathematik und der Theorie elektrischer Netzwerke schlagen, und so zur weiteren Entwicklung beider Gebiete beitragen.

Das erste Kapitel enthält einige Grundlagen über dissipative Operatoren und Differentialgleichungen in Banachräumen. Das für die Halbgruppentheorie zentrale Hille-Yosida-Theorem wird ausführlich bewiesen – auch in der für Anwendungen bequemeren Version von Lumer und Phillips – und einige Standardresultate über Lösungen des inhomogenen linearen Cauchy-Problems $\dot{u} = Au + f(t)$, $u(0) = u_0$, werden angegeben. Dieses Kapitel enthält des weiteren zwei wohlbekannte Sätze über nichtlineare Gleichungen $\dot{u} = A(t, u)$. Das eine betrifft globale Existenz und Eindeutigkeit der Lösungen falls A überall definiert, stetig und „quasi-dissipativ" ist; im zweiten hingegen wird der Fall quasi-m-dissipativer A, die nur auf $\mathbb{R}_+ \times D$ definiert sind, aber einige zusätzliche Regularitätsbedingungen erfüllen, diskutiert. Diese Resultate sind für den nun folgenden Teil des Buches von grundlegender Bedeutung, da die Eigenschaft der Dissipativität allen betrachteten Modellen gemeinsam ist. Leider enthält das erste Kapitel einige mathematische Mängel, wie z. B. Fehler in der Definition von „Lösungen" (solche sollten stetig auch in $t = 0$ sein), und in Theorem 1.5 sollte f auch absolutstetig sein (die erhaltenen Lösungen sind in der Tat „klassisch" und nicht nur „stark").

Im zweiten Kapitel wird die Formulierung der betrachteten Modelle für elektrische Netzwerke vorgenommen. Letztere dürfen neben den üblichen Widerständen, Kapazitäten, und Induktivitäten auch komplexere Elemente wie Dioden und Transistoren enthalten, die durch Ansätze von Gummel (dynamic response large signal model) beschrieben werden. Es muß erwähnt werden, daß die graphischen Symbole für elektrische Elemente in Schaltkreisdiagrammen nicht einheitlich verwendet worden sind, was gelegentlich zur Verwirrung führt; hier hätte ein Symbolverzeichnis sicherlich Abhilfe schaffen können. Leider äußern sich die Autoren nicht über die Gültigkeitsbereiche solcher Ersatzschaltbilder, und geben bedauerlicherweise auch keine physikalische Interpretation und Motivation für die des weiteren formulierten Annahmen, insbesondere nicht über den nichtlinearen Multiport. Diese Voraussetzungen führen zu einem „quasi-autonomen" System der Form $\dot{u} = Au + b(t)$ im $\mathbb{R}^N$, wobei A zwar nichtlinear, aber stetig und ω-dissipativ bzgl. einer gewichteten l^1-Norm ist. Daher birgt der verbleibende Teil dieses Kapitels mathematisch gesehen keine Überraschungen mehr: man erhält globale Existenz und Eindeutigkeit, und im Falle $\omega < 0$ natürlich globale exponentielle Stabilität.

Im nächsten Kapitel wird ein Versuch zur mathematischen Behandlung abzählbar unendlicher Netzwerke gemacht. Da solche „Netzwerke" leider nur mangelhaft motiviert werden, und das einzige angegebene Beispiel, die diskretisierte, halbunendliche Telegraphengleichung, mit Hilfe von Halbgruppentheorie in einfacher Weise behandelt werden kann, soll hier nicht weiter auf dieses Kapitel eingegangen werden.

Der aus der Sicht des Rezensenten interessanteste Teil des vorliegenden Buches sind Kapitel 4 und 5, in denen der Effekt von Leitungsverbindungen in die Modelle miteinbezogen wird. Solche endlichen Übertragungsstrecken werden hier durch vereinfachte Telegraphengleichungen modelliert, wobei die Vereinfachung in Vernachlässigung der Leitungsinduktivitäten besteht. Auch hier werden leider nur vage Angaben über die Gültigkeitsbereiche solcher Annahmen gemacht. Resultat dieser Art der Beschreibung ist mathematisch gesehen ein diagonales System von linearen Diffusionsgleichungen in einer Raumdimension, deren Randbedingungen mit einem nichtlinearen System gewöhnlicher Differentialgleichungen gekoppelt sind. Aus unverständlichen Gründen zeigen die Autoren nur im linearen Fall die Wohlgestelltheit (wellposedness) des Systems, und zwar durch Anwendung des Hille-Yosida Theorems, im nichtlinearen Fall wird des weiteren die Existenz klassischer Lösungen vorausgesetzt. Aufgrund der wiederum postulierten ω-Dissipativität, $\omega < 0$, wird globale exponentielle Stabilität auch in dieser Situation erhalten.

Besonderes Gewicht legen die Autoren auf Abschätzungen für die sogenannten Verzögerungszeiten, die durch die Konvergenzrate der Lösungen erklärt ist. Natürlich sind solche für das dynamische Verhalten elektrischer Schaltkreise von großer Bedeutung, und daher sind Abschätzungen dieser Raten, die durch ω-Dissipativität auf einfache Weise gewonnen werden können, sehr nützlich. Die Autoren legen durchgehend großen Wert auf solche Abschätzungen, und belegen im letzten Kapitel durch numerische Simulationen, daß sie im Entwurf von Schaltkreisen Anwendungen haben können.

Bei Durchsicht des Buches muß man den Eindruck gewinnen, daß alle Modelle für elektrische Netzwerke auf dissipative Systeme führen, die genau einen exponentiell stabilen Gleichgewichtszustand besitzen. Ein kritischer Leser mit moderaten Vorkenntnissen über Netzwerke wird sich mit der gegebenen Darstellung der betrachteten Modelle nicht zufrieden geben können, und auf Originalliteratur zurückgreifen müssen. Mit den genannten Einschränkungen kann man das vorliegende Buch dennoch als brauchbare mathematische Einführung in die Theorie elektrischer Netzwerke ansehen.

Paderborn Jan Prüss

Bouleau, N., Hirsch, F., Dirichlet Forms and Analysis on Wiener Space, Berlin u. a.: Walter de Gruyter 1991, 325 S., DM 128,–

In der klassischen Potentialtheorie spielen die harmonischen Funktionen, d. h. die Lösungen der partiellen Differentialgleichung $\Delta u = 0$, die Potentiale, d. h. die Funktionen $p(x) = \int_{\mathbb{R}^n} |x-y|^{2-n} d\mu(y)$, und das Dirichlet-Integral, d. h. die quadratische Form $E(u) = \int_{\mathbb{R}^n} |\nabla u(x)|^2 dx$, eine ausgezeichnete Rolle. Versucht man typische Resultate für harmonische Funktionen auf eine größere Funktionenklasse zu übertragen, so führt dies zur Beschäftigung mit linearen partiellen Differentialgleichungen zweiter Ordnung mit nichtnegativer charakteristischer Form (man vergleiche etwa [10] und [14], sowie für einen abstrakten Zugang [1]). Möchte man hingegen die Klasse der Potentiale erweitern, so liegt es nahe, allgemeinere Kerne als den Newton-Kern zuzulassen. Dies wurde erstmals von M. Riesz [15] getan, man vergleiche hierzu auch [13].

In [2] und [3] haben nun A. Beurling und J. Deny einen Zugang zur Potentialtheorie mit Hilfe des Energiebegriffs entwickelt und in diesem Zusammenhang den Begriff der Dirichlet-Form und des Dirichlet-Raums eingeführt. Es sei X ein lokal-kompakter Raum und μ ein Radon-Maß auf X. Eine symmetrische Bilinearform E auf $L^2(X)$ mit dichtem Definitionsbereich $D(E) \subset L^2(X)$ heißt Dirichlet-Form, falls E eine abgeschlossene und nicht-negative Form ist, für die zusätzlich gilt, daß mit $u \in D(E)$ stets auch $v := \min(1, \max(u, 0))$ zu $D(E)$ gehört und $E(v, v) \leqslant E(u, u)$ gilt. Das Paar $(E, D(E))$ wird dann Dirichlet-Raum genannt. Eine Dirichlet-Form ist z. B. durch $E(u, v) = \int_X \nabla u \cdot \nabla v \, dx$ mit Definitionsbereich $D(E) = H_0^1(\Omega)$ (Sobolev-Raum) gegeben, klarerweise ist dann $E(u, u)$

gerade das Dirichlet-Integral. Eine gute Übersicht über die Potentialtheorie der Dirichlet-Räume gibt der Artikel [4].

Das heutige Bild der Potentialtheorie ist aber vor allem durch ihre Wechselwirkung mit der Theorie der Markovschen Prozesse bestimmt. Fundamentallösungen von gewissen partiellen Differentialgleichungen zweiter Ordnung geben bekanntlich Halbgruppen Markovscher Kerne und damit Markov-Prozesse, andererseits ist seit den Arbeiten von S. Kakutani [11]–[12] bekannt, daß man z. B. die Brownsche Bewegung zum Studium harmonischer Funktionen heranziehen kann. (Man vergleiche hierzu etwa die Monographien von E. B. Dynkin [6]–[7] oder die von J. L. Doob [5] und die dort angegebene Literatur.)

In [8] gelang es nun M. Fukushima zu einer (regulären) Dirichlet-Form über einem lokal-kompakten Raum einen Markov-Prozeß zu konstruieren und zu zeigen, daß dieser die Dirichlet-Form (in einem gewissen Sinne) bestimmt. Man vergleiche hierzu auch die Monographie [16] von M. Silverstein. Die Monographie [9] „Dirichlet Forms and Markov Processes" von Fukushima kann als die Standardreferenz für die Theorie der Dirichlet-Formen über lokal-kompakten Räume angesehen werden.

Der enge Bezug von Dirichlet-Formen zur Theorie der Markov-Prozesse läßt es aber wünschenswert erscheinen, den Rahmen der lokal-kompakten Räume zu verlassen. Die vorliegende Monographie behandelt nun Dirichlet-Formen auf nicht notwendigerweise lokal-kompakten Räumen und nutzt die erzielten Resultate, um im Wiener-Raum Analysis zu betreiben. Der Wiener-Raum ist hierbei nicht ein willkürlich ausgewähltes Objekt, sondern er ist der Wahrscheinlichkeitsraum, auf dem Diffusionsprozesse leben (können), und es ist ein Anliegen der Autoren, aufzuzeigen, wie Dirichlet-Form-Techniken zum Studium stochastischer Differentialgleichungen benutzt werden können. Dies schlägt insbesondere auch eine Brücke zu einem anderen zentralen Gebiet der stochastischen Analysis, dem Malliavin-Kalkül.

In einem ersten Kapitel wird die allgemeine Theorie der Dirichlet-Formen entwickelt und vor allem auch die Rolle des carré-du-champ-Operators beleuchtet. Die meisten Resultate werden noch für einen allgemeinen Maßraum hergeleitet. In Kapitel 2 werden nun Dirichlet-Formen über einem (unendlich-dimensionalen) Vektorraum diskutiert, insbesondere auch über einem (abstrakten) Wiener-Raum. Kapitel 3 behandelt die Analysis im Wiener-Raum, insbesondere wird der Nutzen der Wiener-Chaos-Zerlegung aufgezeigt und ein Kalkül für stochastische Integrale aufgebaut. Im folgenden Kapitel werden nun stochastische Differentialgleichungen mit Lipschitz-stetigen Koeffizienten studiert; es werden u. a. Resultate über die Existenz von Dichten und (stochastischen) Flüssen erzielt. Hierbei wird wesentlich der zuvor entwickelte Kalkül mit Dirichlet-Formen zum Einsatz gebracht, und es zeigen sich Analogien zum Malliavin-Kalkül. In der Tat wird in Kapitel 5 auch dieser Zusammenhang mit dem Malliavin-Kalkül untersucht. Die beiden letzten Kapitel behandeln weitere Anwendungen (u. a. eine Verallgemeinerung des Satzes von Girsanov bzw. Verallgemeinerungen von einigen Konvergenzsätzen).

Das Buch setzt vom Leser gewisse Kenntnisse aus der Theorie der stochastischen Prozesse voraus, ist dann aber zum Selbststudium durchaus geeignet, wobei der knappe Stil vom seriösen Leser allerdings viel Mitarbeit erwartet. Vorteilhaft finde ich, daß die Autoren nicht Allgemeinheit um ihrer selbst willen anstreben, sondern sich an konkreten Problemen (z. B. stochastischen Differentialgleichungen) orientieren.

Ich halte das Buch für eine wertvolle Bereicherung des Angebots von Monographien über stochastische Analysis. Wer auf diesen Gebiet arbeitet (oder sich einarbeiten möchte), sollte es zur Hand haben.

[1] Bauer, H.: Harmonische Räume und ihre Potentialtheorie. Lecture Notes in Mathematics, vol. 22. Berlin – Heidelberg – New York: Springer 1966

[2] Beurling, A.; Deny, J.: Espaces de Dirichlet. I. Le cas élémentaire. Acta Math. **99** (1958) 203–

[3] Beurling, A.; Deny, J.: Dirichlet spaces. Proc. Natl. Acad. Sci. U.S.A. **45** (1959) 208–215
[4] Deny, J.: Méthodes Hilbertiennes et théorie du potentiel. In: Potential Theory. C.I.M.E., Roma 1970, 123–201
[5] Doob, J. L.: Classical potential theory and its probabilistic counterpart. Die Grundlehren der mathematischen Wissenschaften Bd. 262. New York – Berlin – Heidelberg – Tokyo: Springer 1983
[6] Dynkin, E. B.: Markov processes, Vol. 1. Die Grundlehren der mathematischen Wissenschaften Bd. 121. Berlin – Göttingen – New York: Springer 1965
[7] Dynkin, E. B.: Markov processes, Vol. 2. Die Grundlehren der mathematischen Wissenschaften Bd. 122. Berlin – Göttingen – New York: Springer 1965
[8] Fukushima, M.: Dirichlet spaces and strong Markov processes. Trans. Amer. Math. Soc. **162** (1971) 455–473
[9] Fukushima, M.: Dirichlet forms and Markov processes. North Holland Math. Library Vol. 23. Amsterdam – Oxford – New York: North Holland 1980
[10] Gilbarg, D.; Trudinger, N. S.: Elliptic partial differential equations of second order. Grundlehren der mathematischen Wissenschaften Bd. 224. Berlin – Heidelberg – New York: Springer 1977
[11] Kakutani, S.: Two dimensional Brownian motion and harmonic functions. Proc. Imp. Acad. Tokyo **20** (1944) 706–714
[12] Kakutani, S.: Markoff process and Dirichlet problem. Proc. Japan Acad. **21** (1945) 227–233
[13] Landkof, N. S.: Foundation of modern potential theory. Die Grundlehren der mathematischen Wissenschaften in Einzeldarstellungen, Band 180. Berlin – Heidelberg – New York: Springer 1972
[14] Oleinik, O. A.; Radkevic, E. V.: Second order equations with non-negative characteristic form. Providence R. I.: Amer. Math. Soc. – New York – London: Plenum Press 1973
[15] Riesz, M.: Intégrales de Riemann-Liouville et potentiels. Acta Szeged Sect. Math. **9** (1938) 1–42
[16] Silverstein, M. L.: Symmetric Markov processes. Lecture Notes in Mathematics, vol. 426. Berlin – Heidelberg – New York: Springer 1974

Erlangen N. Jacob

Basar, T., Bernhard, P., H^∞-Optimal Control and Related Minimax Design Problems, A Dynamic Game Approach, Basel u. a.: Birkhäuser-Verlag 1991, 240 S., DM 94,–

Das Buch versucht, die H^∞-Theorie im Rahmen der Theorie der Differentialspiele auf elementare Art zu behandeln und zu zeigen, inwieweit sich über diesen Zugang gerade für verschiedene Informationsstrukturen neue Resultate gewinnen lassen. Die H^∞-Theorie wurde zu Beginn der achtziger Jahre von Zames [93] (als Reduktion der Sensivität eines Systems durch Steuerung) als ein vielversprechendes Instrument in die Literatur eingeführt, um klassische, von Eingrößensystemen bekannte Desingverfahren auf Mehrgrößensysteme auszudehnen: Störungsunterdrückung, Konstruktion robuster Regler, Folgeregelung usw. Mittlerweile werden alle diese Fragestellungen unter ein Standardproblem subsumiert [39], das sich im Zustandsraum als Aufgabe der Störungsunterdrückung wie folgt formulieren läßt: Zum linearen endlichdimensionalen zeitinvarianten System

$$\dot{x}=Ax+B_1w+B_2\mathrm{u},\qquad z=C_1x+D_{12}u,\qquad y=C_2x+D_{21}w \tag{1}$$

mit Zustand x, einwirkender Störung w, Steuerung u, zu regelnder Variable z und gemessenem Ausgang y suche man einen Regler

$$\dot{r}=Kr+Ly,\qquad u=Mr+Ny,$$

so daß das geregelte Gesamtsystem

$$\begin{pmatrix}\dot{x}\\ \dot{r}\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}A+B_2NC_2 & B_2\mathrm{M}\\ LC_2 & K\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x\\ r\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}B_1+B_2ND_{21}\\ LD_{21}\end{pmatrix}w,\ z=(C_1+D_{12}NC_2\ \ D_{12}ND_{21})$$

im Sinne von $\sigma\begin{pmatrix} A+B_2NC_2 & B_2M \\ LC_2 & K \end{pmatrix} \subset C^-$ stabilisiert wird und die durch diese Differentialgleichung mit verschwindenden Anfangswerten definierte Abbildung eine möglichst kleine $L_2[0,\infty)$-induzierte Norm besitzt.

Unter einschränkenden Regularitätsannahmen (D_{12} und D_{21}^T müssen vollen Spaltenrang haben, was leider an keiner Stelle betont wird) und gewissen keineswegs natürlichen Steuerbarkeits- und Beobachtbarkeitsvoraussetzungen (Theorem 5.5) werden dieses Problem zusammen mit den jeweils analogen Fragestellungen für zeitvariante Systeme auf endlichem Zeithorizont $[0, T]$ (ohne Stabilitätsforderung) und beide Varianten in dieskreter Zeit diskutiert. Der wesentliche neue Aspekt liegt in der Untersuchung, wie allgemeinere Reglerkonzepte (Abtastregler, zeitverzögerte Regler, nichtlineare Regler) die Problemlösung verändern. Methodisch wird an den Anfang die Behandlung des zugrundeliegenden Differentialspiels gestellt: Wann existiert ein Sattelpunkt (für verschiedene Strategiemengen) für das Spiel mit der Auszahlung

$$\int_0^\infty \|z(t)\|^2 - \gamma^2\|w(t)\|^2\, dt$$

unter der Nebenbedingung (1), wobei der u-Spieler minimiert und seine Information nur aus y beziehen darf während der w-Spieler maximiert?

Die Kapitel 1 und 2 stellen die Grundlagen der Spieltheorie in dem Maße bereit, wie sie in den folgenden Kapiteln benötigt werden. Trotz dieser hilfreichen Idee finden sich leider sehr viele unpräzise Definitionen (insbesondere der Strategiemengen) und Notationen, die häufig ohne ausreichende Diskussion und Interpretation („strong time consistency" und „noise insensitivity") im Raum stehen bleiben oder gar falsch sind (Sattelpunktdefinition auf Seite 14). Mittels des Theorems 2.5, formuliert für diskrete Zeit und ohne stringenten Beweis, wird in Kapitel 4 für Probleme in kontinuierlicher Zeit argumentiert; dies sind nur einige Punkte, um zu verdeutlichen, daß gerade dem Neuling der Zugang zur Theorie durch diese Anfangskapitel nicht unbedingt erleichtert wird.

Die Kapitel 3 und 4 befassen sich mit dem Fall, daß der Zustand des zugrundeliegenden Systems gemessen wird. In sehr direkter und wünschenswert übersichtlicher Weise werden zunächst Kriterien in Form von Definitheitsrelationen (diskrete Zeit) oder Nichtexistenz konjugierter Punkte gewisser Riccatidifferentialgleichungen (kontinuierliche Zeit) dafür hergeleitet, daß das zugrundeliegende Differentialspiel für verschiedene Strategiemengen einen Sattelpunkt besitzt. Diese Betrachtungen führen unmittelbar zur Lösung des H^∞-Problems für die entsprechenden Informationsstrukturen, was gerade für Abtastregler und verzögerte Zeit zu sehr schönen neuen und korrekt (aber vielleicht etwas redundant) formulierten Ergebnissen führt. Der Anhang A beinhaltet eine gut gelungene und elementare Übersicht über die Theorie der konjugierten Punkte, obwohl diese Entwicklung in das Kapitel 4 mit Gewinn integriert hätten werden können. Leider basieren die Beweise gerade im Kapitel 4 oft auf intuitiven Erläuterungen und bedürften einer Präzisierung, so daß einige Resultate überhaupt nicht verifizierbar sind (beispielsweise Lemma 3.2, Theorem 3.8, Theorem 4.3 basierend auf Theorem 2.5, Theorem 4.4). Außerdem werden sehr zentrale Aspekte (Fixpunktaussagen zur Herleitung der Darstellung der Sattelpunktstrategien, Definitheitseigenschaften der Lösung von Riccatigleichungen), deren Herleitung die Intuition des Lesers für die abgeleiteten Kriterien wesentlich fördern würde, nur durch den Verweis auf die Literatur begründet während simple Tatsachen (z. B. wiederholte Beschreibung der Systemdarstellung, Lemma 3.5) einen zu breiten Raum finden. Schließlich müßten auch in diesen Kapiteln einige Aussagen sauberer formuliert werden, um die Verständlichkeit zu fördern (z. B. Theorem 3.3, Remark 4.3 und Seite 90ff: Grenzwert einer feedback Strategie).

In den Kapitel 5 und 6 wird das H^∞-Problem durch Ausgangsrückführung behandelt: Statt des gesamten Zustandes steht grundsätzlich nur der gemessene Ausgang zur Verfügung. Interessant ist die Vorgehensweise, aus einem allgemein abgeleiteten „Certainty Equivalence Principle" die Struktur der Steuerung zu identifizieren: Man bestimme zunächst die schlechteste Störung und den zugehörigen Systemzustand für ein geeignet zu definierendes Hilfsproblem. Führt man nun diesen Hilfszustand statt des eigentlichen Systemzustandes mit der Feedbackstrategie aus dem Fall der Zustandsrückführung zurück, so definiert dies einen „min sup" Regler. Nur zur Realisierung dieses Reglers in Form eines Beobachters wird die lineare Struktur des Systems herangezogen. Wichtig ist außerdem die Tragfähigkeit dieses Konzepts, das auch auf Abtastregler und verzögerte Regler oder nichtlineare Regler angewendet werden kann.Im diskreten Fall sind viele aber nicht alle Argumente gut nachzuvollziehen, während bei kontinuierlichen Systemen erneut die Lückenhaftigkeit der Darstellung zu bemängeln ist (z. B. unpräzise Formulierung des Fixpunktproblems und fehlender Beweis der Existenz auf Seite 119). Außerdem wäre eine ausführlichere Diskussion von Theorem 6.3 vonnöten, zumal beispielsweise die Bedingung (i) redundant ist und in der Literatur stark abweichende Formulierungen zu finden sind [60]. Dasselbe gilt für den unendlichen Zeithorizont, denn einerseits differiert schon die Problemformulierung (keine interne Stabilität, Zeitintervall $(-\infty, \infty)$) und andererseits vermißt man in Theorem 6.4 gewisse von [74] bekannte Definitheitsrelationen.

Kapitel 7 enthält schließlich einen eleganten Zugang zur optimalen Schätzung des Systemzustandes im Endpunkt mittels der Kenntnis des gesamten oder des verzögerten Ausgangs (Filterprobleme) oder in einem Zwischenpunkt (etwas allgemeiner formuliert) durch Messung des Ausgangs über das ganze Intervall (smoothing). Aufgrund des endlichen Zeithorizonts lassen sich all diese Probleme auf ein einfaches statistisches Operatorenoptimierungsproblem reduzieren, dessen Lösung man sich allerdings gleich in Hilberträumen auf direktere Art gewünscht hätte.

Zusammenfassend läßt sich feststellen, daß das Buch auf spieltheoretischer Grundlage eine umfassende Darstellung bekannter Ergebnisse und gewisser nichttrivialer Verallgemeinerungen der H^∞-Theorie auf bisher nicht behandelte Informationsstrukturen liefert. Die Intuition des Lesers wird durch viele erläuternde Bemerkungen gestärkt. Gerade im Hinblick auf den Anspruch der Autoren, die Theorie dem fortgeschrittenen Anfänger zugänglich zu machen, liegt das Hauptgewicht der Kritik allerdings auf der fehlenden mathematischen Präzision in verschiedenen Formulierungen und auf der Lückenhaftigkeit der Beweise, die eine Verifikation der Ergebnisse oftmals verteilt.

Würzburg C. Schere

Iwasaki, K., Kimura, H., Shimomura, S., Yosihida, M., From Gauß to Painlevé. A modern theory of special functions (Aspects of Math. vol. E 16), Wiesbaden: Vieweg-Verlag 1991, 347 S., DM 78,–

Viele spezielle Funktionen und insbesondere die in der mathematischen Physik relevanten sind Lösungen linearer gewöhnlicher Differentialgleichungen zweiter Ordnung mit rationalen Koeffizienten, wie sie etwa bei Trennung der Variablen aus der Wellengleichung hervorgehen. Erster bedeutender Beitrag war die Lösung der hypergeometrischen Differentialgleichung durch Gauß, dem Untersuchungen der Königsberger Schule (Bessel, Jacobi) folgten. Systematisch untersucht wurde die Klasse der Differentialgleichungen – ohne Beschränkung auf zweite Ordnung – von I. L. Fuchs und seiner Berliner Arbeitsgruppe. Sie setzten komplexe Methoden der inzwischen voll entwickelten Funktionstheorie ein und schufen damit die Grundlage zur adäquaten Behandlung auch allgemeinerer Differentialgleichungen.

Einfache aber wichtige Beispiele für algebraische Differentialgleichungen sind die Riccatische Gleichung und die Gleichung der Weierstraßschen $\wp$-Funktion. Es gibt spezielle Funktionen, etwa die Gammafunktion, die keiner algebraischen Differentialgleichung genügen. Spezielle algebraische Gleichungen sind die rationalen, zu denen die sechs Painlevéschen Gleichungen gehören, deren Lösungen die Painlevéschen Transzendenten sind. Bei ihnen handelt es sich um explizite nichtlineare Differentialgleichungen zweiter Ordnung, deren rechte Seiten algebraisch in der Variablen, der Unbekannten und ihrer ersten Ableitung sind. Jede Gleichung dieses Typs, die keine beweglichen Singularitäten hat, kann in eine lineare Differentialgleichung, in eine durch Quadraturen lösbare, oder in eine der sechs Painlevéschen Gleichungen transformiert werden. Dieses Resultat stammt von Painlevé, seinem Schüler Gambier und Richard Fuchs.

In den klassischen Lehrbüchern über Differentialgleichungen im Komplexen [illegible] (Bieberbach, Coddington-Levinson, Golubew, Hille, Ince) wird hierüber, wenn überhaupt, nur kurz und exemplarisch berichtet. Das mag daran liegen, daß aufwendige Überlegungen zugrunde liegen. Außerdem steht dieses Painlevésche Resultat noch isoliert da. Für keine rationalen Differentialgleichungen von höherer als zweiter Ordnung gibt es nämlich bisher eine vollständige Klassifikation.

In dem vorliegenden Werk über rationale Differentialgleichungen zweiter Ordnung, in dessen erstem Drittel die hypergeometrische Differentialgleichung nicht um ihrer selbst willen sondern als einfacheres, die Problematik aufzeigendes Beispiel dargestellt wird, schließt sich in natürlicher Weise die Behandlung der Painlevéschen Gleichungen an. Daß dies unter dem Aspekt „spezielle Funktionen" geschieht, ist eher eine Option. Die Verfasser glauben, daß die Painlevéschen Transzendenten in Zukunft eine wichtige Rolle sowohl in der Mathematik als auch in der Physik spielen werden, auch wenn sich bisher hierfür nur einige physikalische Anwendungen in der Quantenfeldtheorie und bei nichtlinearen Evolutionsgleichungen in der theoretischen Physik anführen lassen. Mit den üblichen Grundkenntnissen von gewöhnlichen Differentialgleichungen, aus Funktionentheorie und in Gruppentheorie ausgestattet, kann jeder sich von der Schönheit und Eleganz der Theorie der gewöhnlichen Differentialgleichung mit singulären Stellen in den Bann ziehen lassen. Die moderne Darstellung ist nicht nur geeignet, Anfängern eine interessante Thematik zu erschließen, sondern gibt auch eine umfassende Abhandlung bis zu neuesten Resultaten. Allerdings ist es ein anspruchsvoller Text, den man sich erarbeiten muß. Auch soll man sich durch den Untertitel nicht dazu verleiten lassen, ein Werk über spezielle Funktionen im herkömmlichen Sinne zu erwarten. Im Blickpunkt stehen die Painlevéschen Differentialgleichungen, während die Vielfalt der mit den linearen Gleichungen zusammenhängenden klassischen speziellen Funktionen kein Gegenstand der Untersuchung sind.

Nach einer Einführung der Theorie der Painlevéschen Gleichungen auf klassische Art wird sie im Rahmen der monodromieerhaltenden Deformationen dargestellt (Kapitel 3). Das Garniersche System einer Fuchsschen Differentialgleichung zweiter Ordnung mit mehr als drei Singularitäten ist ein Hamilton System, das die Deformationen der Differentialgleichung bestimmt. Der Zusammenhang des Garnier-Systems mit dem Schlesinger System, das die monodromieerhaltenden Deformationen von Schlesingerschen Matrixgleichungen widerspiegelt, ermöglicht die Überführung des Garnier-Systems in ein polynomiales Hamiltonsches, das von beweglichen Singularitäten (Verzweigungspunkten) frei ist. Methoden zur Konstruktion von Lösungen nichtlinearer Differentialgleichungen in der Nähe von regulären singulären Stellen werden (Kapitel 4) für Gleichungen erster Ordnung und für die Painlevéschen Gleichungen entwickelt. Die unterschiedliche Behandlung ist nötig, da für die Painlevéschen Gleichungen die [illegible]

Gleichungen aufgeführt. Nicht angegeben sind das Werk von I. L. Fuchs und etwa die einschlägigen Arbeiten von K. F. Gauß, F. G. Frobenius und E. E. Kummer.

Ein wohlgelungenes, anspruchsvolles, in sich geschlossenes Werk, zum Selbststudium sowie als Grundlage für Spezialvorlesungen und Seminare bestens geeignet.

Berlin H. Begehr

[redacted]

262 S., £ 40.-

This book deals with the generalized theory of integration. The author is one of the founders of this theory. The present book appeared shortly after the "Lectures on the Theory of Integration" (World Scientific, Singapore 1988) and is devoted to more advanced and more general ideas behind the theory.

Generalized integration is based on the somewhat surprising discovery that the nonabsolutely convergent Perron integral (or equivalenty the special Denjoy integral) can be defined via Riemann integral sums. This fact is known since 1957 but only in the last decade it comes to the consciousness of a wider community of mathematicians.

Various types of integration are defined e.g. in the dependence of the choice of the division structure. The norm integral, the refinement integral, the Henstock-Kurzweil gauge integral, the variational integral and others are treated in this framework.

Attention is paid to some fundamental tools of integration. Convergence theorems are derived and a necessarry and sufficient condition is given for interchanging of the limit and the integral. In the part concerning differentiation the problem of differentiation of the hend vom 20. Hilbertschen Problem (Lösung von Variationsproblemen und partiellen Differentialgleichungen), ist es jedoch eine der Grunderfahrungen der Analysis des 20. Jahrhunderts, daß sich eine übersichtliche Existenztheorie nur aufbauen läßt, wenn man nichtglatte Funktionen verwendet. In diesem Fall verhält sich der Superpositionsoperator ausgesprochen störrisch, und dieses Verhalten ist häufig verantwortlich für das Auftreten von Schwierigkeiten bei der Lösung nichtlinearer Aufgaben.

Die beiden Autoren der vorliegenden Monographie haben sich der sehr verdienstvollen Aufgabe unterzogen, eine geschlossene Darstellung von wichtigen Eigenschaften des Superpositionsoperators zu geben. In neun Kapiteln betrachten sie den Superpositionsoperator in folgenden Raumtypen: Maßräume, Banachverbände (ideale Räume), Lebesgueräume, Orliczräume, symmetrische Räume (Lorentzräume und Marcinkiewiczräume), Räume stetiger Funktionen, Räume von Funktionen mit beschränkter Variation, Räume Hölderstetiger Funktionen, Räume glatter Funktionen, Sobolevräume und Sobolev-Orliczräume. Studiert werden dabei unter anderem folgende Eigenschaften: Beschränktheit, Stetigkeit, Differenzierbarkeit, Analytizität. Die Autoren sind bestrebt, notwendige und hinreichende Kriterien für das Vorhandensein gewisser Eigenschaften anzugeben und weisen gesondert darauf hin, falls nur hinreichende Bedingungen bekannt sind. Insgesamt wird eine Fülle von Material vor dem Leser ausgebreitet, das man zum Teil bisher nur in Originalarbeiten findet. Die Autoren sind erfolgreich darum bemüht, Zusammenhänge herauszuarbeiten und den Gang der Untersuchungen durch motivierende Bemerkungen für den Leser transparent werden zu lassen. Am Ende eines jeden Kapitels findet man Kommentare, die von der Kompetenz der Autoren zeugen. Die sehr umfangreiche Bibliographie umfaßt 400 Titel, wobei auch zahlreiche russischsprachige Arbeiten zitiert werden, die nicht in einer Übersetzung vorliegen.

Obwohl fast hundert Jahre seit Hilberts programmatischem Pariser Vortrag vergangen sind, bieten die nichtlinearen partiellen Differentialgleichungen der mathematischen Physik noch immer viele offene Fragen. Der Fortschritt ist dabei häufig mit neuen Einsichten über spezielle Eigenschaften des Superpositionsoperators verbunden. In dieser Richtung empfehlen wir dem interessierten Leser als ergänzende Literatur die folgenden beiden kürzlich erschienenen Monographien: L. Evans, Weak convergence methods for nonlinear partial differential equations, Amer. Math. Soc. 1990 und R. Racke, Lectures on nonlinear evolution equations, Vieweg, Braunschweig 1992.

Die vorliegende Monographie stellt ein wichtiges Werkzeug für zahlreiche Anwendungen der nichtlinearen Analysis bereit. Sie eignet sich auch zum Nachschlagen und wird sicher einen festen Platz in der Literatur über nichtlineare Analysis einnehmen.

Leipzig E. Zeidler

Ambartzumian, R. V., Factorization calculus and geometric probability (Enzyclopedia of Math. and its Appl., Vol. 33), Cambridge u. a.: Cambridge Univ. Press 1990, 286 S., £ 35.–

Die Stochastische Geometrie hat sich seit ihrer Entstehung vor etwa 20 Jahren zu einer wichtigen und interessanten mathematischen Disziplin entwickelt, die einerseits mit klassischen Gebieten der Geometrie („Integralgeometrie", „Geometrische Wahrscheinlichkeiten") und der Stochastik („Punktprozesse"), andererseits mit Anwendungsgebieten wie der „Stereologie" und der „Räumlichen Statistik" verbunden ist. Die verschiedenartigen Aspekte, die sich in der Stochastischen Geometrie vereinen, haben in einer Reihe von unterschiedlichen Lehrbüchern und Monographien ihren Niederschlag gefunden. Als Beispiel seien hier G. Matheron, Random Sets and Integral Geometry, Wiley 1975; L.A.

Santaló, Integral Geometry and Geometric Probability, Addison-Wesley 1976, und D. Stoyan, W.S. Kendall & J. Mecke, Stochastic Geometry and Its Applications, Wiley 1987, genannt.

Mit dem vorliegenden Buch werden Aspekte der Integralgeometrie und der Stochastischen Geometrie präsentiert, die den obengenannten Darstellungen einige neue Facetten hinzufügen und am ehesten noch als Fortsetzung des früheren Werkes des Autors (Combinatorial Integral Geometry, Wiley 1982) angesehen werden können. Dabei wird das Prinzip der Faktorisierung in den Mittelpunkt gestellt. Genauer ist damit gemeint, daß sich Maße auf Produkträumen unter geeigneten Invarianzforderungen als Produktmaß erweisen, sich also „faktorisieren" lassen, wobei der eine Faktor das Lebesguemaß auf dem $\mathbb{R}^n$ oder das (bi-invariante) Haarsche Maß auf einer lokalkompakten Gruppe ist. Da bewegungs- bzw. translationsinvariante Maße an der Wurzel vieler integralgeometrischer Problemstellungen liegen und auch die Stochastische Geometrie Invarianzeigenschaften (wie Stationarität oder Isotropie) in den Mittelpunkt stellt, kann man Eindeutigkeitsaussagen für Haarsche Maße vielfach erfolgreich in den beiden Gebieten einsetzen, um etwa die Berechnung von Transformationsdeterminanten zu vermeiden oder zu vereinfachen, zumal wenn man relativ invariante Maße hinzuzieht und die Betrachtung auf Desintegrationen auf Faserbündeln ausdehnt. Der Einsatz von Desintegrationsargumenten in Verbindung mit Eindeutigkeitsaussagen für Haarsche Maße wurde inzwischen auch von anderen Autoren erfolgreich im Umfeld der Stochastischen Geometrie praktiziert (so etwa in O.E. Barndorff-Nielsen et al., Decomposition and Invariance of Measures, and Statistical Transformation Models, Springer 1989; und in R. Schneider & W. Weil, Integralgeometrie, Teubner 1992). Im vorliegenden Buch dient der Faktorisierungsgedanke aber hauptsächlich als Klammer, um Resultate zusammenzufügen, die vom Autor und einigen Kollegen in den letzten Jahren, und insbesondere seit Erscheinen des früheren Buches über kombinatorische Integralgeometrie erzielt worden sind. Dabei erfährt der Leser vieles, was er so in keinem der obengenannten Klassiker finden wird, erhält aber auch einige wohlbekannte Resultate der Integralgeometrie und der Geometrischen Wahrscheinlichkeiten aus einem neuen Blickwinim $\mathbb{R}^2$ bzw. $\mathbb{R}^3$ sowie der Ebenen im $\mathbb{R}^3$ (jeweils orientiert bzw. nichtorientiert). Die Beschränkung auf die Dimensionen 2 und 3 ist typisch für weite Abschnitte des Buches. Zum Teil ist sie durch die Fragestellungen und Methoden bedingt oder sie geschieht im Hinblick auf die späteren Anwendungen in den letzten Kapiteln, gerade in diesem ersten Teil wären aber häufig auch allgemeinere Resultate möglich gewesen. Auf den genannten Räumen werden dann translationsinvariante Maße desintegriert (später auch stationäre zufällige Maße) und der Zusammenhang solcher Maße mit zentralsymmetrischen konvexen Körpern (Zonoide) im $\mathbb{R}^2$ bzw. $\mathbb{R}^3$ wird (allerdings nicht sehr ausführlich) beschrieben.

In Kapitel 3 werden entsprechend bewegungsinvariante Maße betrachtet, wozu einige weitere integralgeometrische Räume eingeführt werden (Drehgruppe und Bewegungsgruppe im $\mathbb{R}^2$ und $\mathbb{R}^3$, sphärische Geraden). Verschiedene Parametrisierungen von Geraden und Ebenen werden angesprochen und die jeweiligen Darstellungen der invarianten Maße angegeben. Schließlich werden für verschiedene geometrische Konfigurationen (angefangen von Punktepaaren im $\mathbb{R}^2$ bis zu Quadrupeln von Punkten im $\mathbb{R}^3$) die invarianten Maße in Positionsanteil, Größenanteil und Formanteil zerlegt und so der Anschluß an die von D.G. Kendall stammende Formstatistik hergestellt, wie sie etwa in dem obengenannten Buch von D. Stoyan et al. beschrieben ist.

Kapitel 4 zielt darauf ab, entsprechende Zerlegungen für affine Formen anzugeben. Dazu werden die affinen Gruppen des $\mathbb{R}^2$ bzw. $\mathbb{R}^3$ und ihre invarianten Maße behandelt und Faktorisierungen entwickelt.

Nach diesen aufeinander aufbauenden Abschnitten des Buchs gibt Kapitel 5 einen kurzen Abriß der kombinatorischen Integralgeometrie. Es handelt sich um die Wiedergabe einiger Ergebnisse (ohne Beweise) aus dem früheren Buch des Verfassers, ergänzt um einige neuere Resultate. Dazu gehört insbesondere die sogenannte „Fahnendarstellung" konvexer Körper (bzw. Zonoide) im $\mathbb{R}^3$. Bei genauerem Hinsehen erkennt man dahinter eine für die Konvexgeometrie interessante Darstellung der Stützfunktion zentralsymmetrischer Körper durch das erste Oberflächenmaß. Auch die am Ende von 5.10 angegebene Charakterisierung von Zonoiden läßt sich nun einordnen: Es ist die auf Blaschke zurückgehende Aussage, daß ein zentralsymmetrischer Körper $K \subset \mathbb{R}^3$ genau dann Zonoid ist, wenn sein erstes Oberflächenmaß (sphärische) Radon-Transformierte eines Maßes ist.

Kapitel 6 enthält eine Reihe von lose zusammenhängenden Resultaten. Neben der Invertierung der Integralgleichung für Zonoide finden sich hier z. B. Spezialfälle der Formeln, die üblicherweise als grundlegende Resultate der Integralgeometrie bekannt sind, die Croftonschen Schnittformeln und die Kinematische Hauptformel. In Abschnitt 6.7 wird (in vereinfachter Form) ein Resultat von Davidson, Janson-Kallenberg und Mecke über maximale Schnittintensitäten bei Geradenprozessen bewiesen, ohne daß die (an sich schon vorbereitete) Verbindung zu den Zonoiden (etwa durch Anwendung der isoperimetrischen Ungleichung) ausgenutzt wird.

Der zweite Teil (Kapitel 7 bis 10) befaßt sich mit (geometrischen) Punktprozessen (im $\mathbb{R}^n$, später überwiegend in der Ebene). Nach einer ausführlichen Beschreibung der Konstruktion von Punktprozessen auf $\mathbb{R}$ und der anschließenden Behandlung des Poisson-Prozesses werden in Kapitel 7 Punktprozesse im $\mathbb{R}^n$, Geradenprozesse, gitterförmige Prozesse, markierte Punktprozesse, zufällige Mosaike und Momentenmaße behandelt. Das Bemühen des Autors ist es auch hier, mittels geeigneter Parametrisierungen Produkträume zugrunde zu legen, um so Faktorisierungen etwa der Momentenmaße zu erreichen.

Kapitel 8 gibt zunächst eine gut lesbare Behandlung des Palmschen Maßes und bringt dann einige neuere Existenzaussagen des Autors für Punktprozesse und Palmsche Maße, die im Zusammenhang mit Erneuerungsprozessen stehen.

Kapitel 9 behandelt relative Palm-Verteilungen und wendet dieses Hilfsmittel auf Poisson-Prozesse geometrischer Art an (Poissonsche Geradenprozesse im $\mathbb{R}^2$ und die von ihnen erzeugten zufälligen Mosaike, Poissonsche Punktprozesse im $\mathbb{R}^n$ und induzierte

Prozesse von Simplices, Voronoi-Mosaike zu einem ebenen Poisson-Prozeß und einige ihrer Mittelwerte).

Kapitel 10 ist mehr stereologischer Natur, beschränkt sich aber auf die Ebene. Für einige stationäre und istrope Punktprozesse (Geradenprozesse, Mosaike, Prozesse von Kreisscheiben und ihre Vereinigungsmenge (Boolesches Modell)) werden die auf einer Schnittgeraden induzierten markierten Punkt- bzw. Intervallprozesse analysiert, wobei die Schnittwinkel als Marken fungieren. Es werden Beziehungen zwischen Palmschen Maßen des ursprünglichen Prozesses und (bedingten) Verteilungen des induzierten Schnittprozesses angegeben, die es beispielsweise erlauben, für eine Klasse von zufälligen Mosaiken die Verteilung der Länge der typischen Kante aus Verteilungseigenschaften des Schnittprozesses abzuleiten.

Das Buch ist sicher von Nutzen für den, der mit der Materie schon vertraut ist und Querverbindungen ziehen bzw. Details ausfüllen kann. Er findet eine Vielzahl von Ideen, Ansätzen und Resultaten, die zur weiteren Auseinandersetzung mit diesem Gebiet einladen. Dies gilt insbesondere für die letzten Kapitel über Punktprozesse, in denen viele der zuvor entwickelten (und isoliert erscheinenden) Methoden und Ergebnisse vom Autor erfolgreich eingesetzt werden. Als einführender Text in die Integralgeometrie oder die Stochastische Geometrie scheint mir der Band aber weniger geeignet.

Karlsruhe W. Weil

Lojasiewicz, St., Introduction to complex analytic geometry, Basel u. a.: Birkhäuser-Verlag 1991, 537 S., DM 198,–

Der Verf. gibt eine recht angenehme Einführung in die komplex-analytische Geometrie. Dabei werden berücksichtigt: reduzierte komplexe Räume (analytic spaces), der Weierstraßsche Vorbereitungssatz, die klassischen Sätze von Oka über Keime von holomorphen Funktionen, die Remmertschen Bildsätze bei eigentlichen holomorphen Abbildungen, die Normalisierung komplexer Räume, monoidale Transformationen, also spezielle eigentliche Modifikationen, ferner Sätze von GAGA-Typ: wann folgen aus „komplex-analytischen" Resultaten die analogen Ergebnisse der projektiv-algebraischen Geometrie über dem Körper der komplexen Zahlen? Der Verf. scheint die Garbentheorie für besonders tiefsinnig zu halten. Er ist deshalb bestrebt, sie möglichst zu vermeiden. Manchmal gelingt das nur scheinbar: so redet er an einer Stelle statt von kohärenten Garben einfach von kohärenten Familien. Die weiterführenden Sätze aus der Garbentheorie wie etwa der Bildgarbensatz werden allerdings nicht einmal erwähnt.

Der Anfang des Buches bringt die wichtigsten elementaren Sätze aus der kommutativen Algebra, der Topologie und der komplexen Analysis, die für den Beweis der weiterführenden Aussagen benötigt werden, z. B. das Nakayama-Lemma für endliche Moduln. Es wird neben der mengentheoretischen auch die Topologie der Graßmannschen Mannigfaltigkeiten behandelt. In der komplexen Analysis wird der Weierstraßsche Vorbereitungssatz auf ganz uraltem Wege mit Hilfe von Integralen bewiesen.

Aber schon das erste Kapitel des Haupteiles bringt die Verallgemeinerung von Thom-Martinet (die anscheinend schon auf Houzel zurückgeht). Es folgt eine Untersuchung von analytischen Mengen und von Idealen von Keimen holomorpher Funktionen. Es wird die Noethereigenschaft hergeleitet und der Rückertsche Nullstellensatz bewiesen. Auch der Kontinuitätssatz für analytische Mengen von Remmert-Stein fehlt nicht. Holomorphe Abbildungen werden ausführlich behandelt.

Das letzte Kapitel des Buches ist ganz den (komplex-) algebraischen Mengen gewidmet. Es werden der komplex-projektive Raum und die Graßmmanschen Mannigfaltigkeiten definiert. Man gewinnt den Satz von Chow. Aus eingeschränktem Wachstumsverhalten analytischer Mengen im P_n folgt ihre Algebraizität. Ferner wird natürlich das Bezout-Theorem berücksichtigt. Interessant ist auch das Andreotti-Salmon Theorem. Es werden hier Determinantenmengen betrachtet. Es wird der Hodgering definiert, und es wird schließlich gezeigt, daß er faktoriell ist. Der letzte Paragraph beweist das wichtige Chow-Theorem für holomorphe Abbildungen zwischen Graßmannschen Mannigfaltigkeiten. Es geht um die Frage, wann eine biholomorphe Abbildung ein Isomorphimus ist.

Göttingen H. Grauert

Benson, D. J., Representations and Cohomology I, II, Cambridge University Press 1991, 224 S. und 287 S., £ 25.00 und £ 35.00

Ein ungewöhnliches Werk! Eine äußerst interessante, wenn auch recht subjektive Zusammenstellung von Themen zur Darstellungstheorie endlicher Gruppen. Die Darstellungstheorie endlicher Gruppen geht auf Frobenius, Schur und Weyl zurück, sie wurde vor allem von R. Brauer und J.A. Green weiterentwickelt. Ein sehr lesenswerter historischer Abriß wurde kürzlich von Michler zur 100-Jahr-Feier der DMV vorgelegt. Der kohomologische Aspekt der Darstellungstheorie galt lange (jedenfalls bei den Algebraikern) als eine eher formale Theorie, ohne Fleisch und Blut, unbeachtet blieben dabei Ergebnisse in der algebraischen Topologie und in der K-Theorie, die einen besonderen Reiz besitzen, und denen der zweite Band gewidmet ist. Es gibt mittlerweile eine Vielzahl von Lehrbüchern, die sich den rein algebraischen Methoden der Darstellungstheorie endlicher Gruppen widmen, mit diesen Bücher konkurriert der erste Band, da er sich ja das Thema setzt, die Grundlagen der Darstellungstheorie vorzustellen, Überschneidungen mit dem sonst üblichen Stoff sind dennoch eher gering. Die beiden Bücher stellen eine Erweiterung eines in der Springer Lecture Notes Series erschienenen Bandes dar. Besonders der zweite Teil sprengt völlig den Rahmen dessen, was sonst in Lehrbüchern zur Darstellungstheorie von Gruppen geboten wird; dabei ist zu betonen, daß vom Umfang her die Bücher mit jeweils etwa 250 Seiten eher schmal wirken. Sie sind ungleichgewichtig: während der erste Band eine klare Einführung in die Grundlagen der Darstellungstheorie liefert, ist der zweite Band als reiner Ergebnisbericht anzusehen, wo Beweise nur angedeutet werden.

Welche Themenbereiche werden angesprochen? Die ersten beiden Kapitel von Band I liefern einen Abriß der Grundlagen aus der Ring- und Modultheorie und der homologischen Algebra, soweit sie für die Untersuchungen im ersten Band gebraucht werden; den Spektralfolgen ist Kapitel 3 des zweiten Bandes gewidmet.

Im Kapitel 3 des ersten Bandes werden die Grundbegriffe der modularen Darstellungstheorie endlicher Gruppen vorgestellt. Gleich zu Beginn wird herausgearbeitet, daß jede Gruppenalgebra eine Hopf-Algebra ist, und welche unmittelbaren Folgerungen daraus gezogen werden können. Im Mittelpunkt der Betrachtung steht die Green-Korrespondenz.

Das 4. Kapitel stellt einige Methoden aus der Darstellungstheorie endlichdimensionaler Algebren bereit: die von Bernstein-Gelfand-Ponomarev eingeführten Spiegelungsfunktoren, mit Hilfe derer die darstellungs-endlichen Köcher (und Gattungen) vorgestellt werden (bekanntlich erhält man auf diese Weise gerade die Dynkin-Diagramme $A_n, B_n, \ldots, F_4, G_2$ mit beliebiger Orientierung); die Betrachtung von Filtrierungen des Vergißfunktors, als Anwendung wird die Klassifikation der unzerlegbaren Darstellungen einer Dieder-2-Gruppe vorgeführt; die Existenz und Eindeutigkeit der fast-zerfallenden Folgen, damit

Das 5. Kapitel ist den Green- und Burnside-Ringen gewidmet, beide sind von besonderer Bedeutung für die in Band II behandelten Themen. Betrachtet werden einerseits ringtheoretische Fragen, wie die Halbeinfachkeit und die Existenz nilpotenter Elemente, andererseits die bekannten Induktionssätze von Artin, Brauer, Colon und Dress. Der Zusammenhang zur Auslander-Reiten-Theorie wurde von Benson und Parker gefunden; ihm sind die letzten Abschnitte dieses Kapitels gewidmet.

Überraschend kurz ist die Behandlung der Brauer'schen Theorie. Ganze 15 Seiten sind ihr gewidmet, und dies schließt die Behandlung der Blöcke mit zyklischer Defekt-Gruppe ein. Hier wird natürlich auf die Green-Korrespondenz, die in Kapitel 3 in recht allgemeinem Rahmen entwickelt wurde, zurückgegriffen.

Während der erste Band thematisch durchaus mit den bekannten Büchern der Darstellungstheorie von Gruppen und Algebren konkurriert, und uneingeschränkt auch Studenten empfohlen werden kann, wird gleich zu Beginn des zweiten Bandes die Bandbreite des vorgelegten Werkes deutlich: hier werden grundlegende Begriffe, Methoden und Ergebnisse der algebraischen Topologie für die weitere Untersuchung bereitgestellt: einzelne Abschnitte sind z. B. Homotopie- und Homologie-Gruppen, CW-Komplexen, Faserungen und Faser-Bündeln, parakompakten Räumen und simplizialen Mengen gewidmet.

Im 2. Kapitel, das der Kohomologie-Theorie endlicher Gruppen gewidmet ist, wird [illegible] vor allem die Beziehung zur topologischen und zur algebraischen K-Theorie herausgearbeitet. Während in den ersten (einführenden) Abschnitten noch einigermaßen vollständige Beweise gegeben werden, ist die weitere Darstellung recht komprimiert und überblicksartig. Berichtet wird als erstes über Ergebnisse von Atiyah und Segal, die gezeigt haben, daß die K-Theorie eines klassifizierenden Raumes einer endlichen Gruppe gerade die Vervollständigung des Green-Rings am Augmentationsideal ist, daß entsprechend die stabile Kohomotopietheorie die analoge Vervollständigung des Burnside-Rings ist. Danach wird die Dennis'sche Spurabbildung von der K-Theorie in die Hochschild-Kohomologie thematisiert, und gezeigt, daß diese Abbildung sich durch die zyklische Kohomologie faktorisieren läßt.

Kapitel 4 beginnt mit dem wichtigen Satz von Evens über die endliche Erzeugbarkeit des Kohomologie-Rings einer endlichen Gruppe, daran schließen sich recht technische Untersuchungen des Bockstein-Homomorphismus, der Steenrod-Operationen, der Adem-Relationen an. Kapitel 5 baut auf dem Satz von Evens auf: hier wird die Komplexität eines Moduls, und seine Varietät vorgestellt, eine Theorie, die vor allem auf J. Carlson zurückgeht.

Die beiden letzten Kapitel verallgemeinern Ideen, die vor allem bei Chevalley-Gruppen Beachtung gefunden haben, behandelt werden der Steinberg-Modul, der für eine beliebige endliche Gruppe als Element des Green-Rings eingeführt wird, und garbentheoretische Überlegungen von Ronan und Smith.

Insgesamt also ein breites Spektrum von Themen, das auf zusammen nur 500 Seiten vorgestellt wird, und es ist natürlich klar, daß der Leser hier keineswegs vollständige Beweise erwarten kann.

Gewisse Vorsicht ist jedoch auch dort geboten, wo der Eindruck erweckt wird, daß ziemlich ausführliche Beweise geboten werden. Die beiden Bände leiden stellenweise an fehlender Präzision, selten wird etwa formuliert, was gemeint ist, wenn von Eindeutigkeit die Rede ist, Gleichheitszeichen stehen oft anstelle von Isomorphiezeichen (siehe z. B. p. 134 in Band I). Gleich zu Beginn von Band I wird behauptet, daß ein beliebiger projektiver Generator, auch wenn er nicht endlich erzeugt ist, eine Morita-Äquivalenz liefere (Lemma 2.2.3 und Exercises 3, p. 24: ist etwa k ein Körper, so ist die Kategorie der k-Vektorräume halbeinfach, während die der $\mathrm{Mat}_\infty(k)$-Moduln nicht halbeinfach ist!)

Viele technische Einzelheiten und Rechnungen, die sonst eher für die Darstellungstheorie von Gruppen charakteristisch sind, bleiben ausgespart. Charaktere treten nur im

Rahmen der Diskussion des Green-Rings auf. Die Hinwendung zu topologischen und K-theoretischen Fragestellungen bedingt aber zusätzlichen technischen Ballast, dessen Notwendigkeit nicht immer klar herausgearbeitet wird, der manchmal gar als Selbstzweck erscheinen mag.

Die beiden Bücher empfehlen sich als ergänzende Lektüre zu den vielen klassischen Lehrbüchern der Darstellungstheorie von Gruppen wie Curtis-Reiner, Dornhoff oder Feit, und den Darstellungen der Kohomologietheorie von Gruppen wie K. Brown und (ganz neu) Evens; zusammen liefern sie einen Ergebnisbericht über vielfältige Themen, sie entführen den Leser in ein weites Paradies.

Bielefeld C. M. Ringel

Evens, L., The Cohomology of Groups, Oxford: Clarendon Press 1991, 159 S. £ 20,–

Der Titel dieses Buches könnte falsche Erwartungen wecken: es handelt sich hier nicht um ein allgemeines Werk über die Cohomologietheorie der Gruppen sondern fast ausschließlich um eines über die Cohomologietheorie endlicher Gruppen, insbesondere die Theorie ihrer Cohomologieringe. Das wird ausdrücklich vom Verfasser in seinem attraktiv geschriebenen und informativen Vorwort erklärt. Hier steht deutlich, womit sich das Buch befaßt und womit nicht, und es wird mit anderen Büchern über das gleiche Gebiet verglichen.

Was sind diese Cohomologieringe und wozu braucht man sie? Sei G eine endliche Gruppe, k ein kommutativer Ring, der als trivialer kG-Modul angesehen werden soll (hier bedeutet kG die Gruppenalgebra von G über K), und man bilde, wie üblich, die Cohomologiegruppen $H^n(G,k)=\mathrm{Ext}^n_{kG}(k,k)$ für $n\geqslant 0$. Diese abelschen Gruppen können zu einer graduierten Gruppe zusammengefaßt werden, $H^*(G,k)=\oplus H^n(G,k)$, und diese, versehen mit dem Cup Produkt, wird nun zu einem graduierten Ring, der beinahe kommutativ ist: für α homogen vom Grad r, β vom Grad s, gilt $\beta\alpha=(-1)^{rs}\alpha\beta$. Man sagt $H^*(G,k)$ ist graduiert-kommutativ. (Der Unterring erzeugt von allen graden Elementen, $H^{ev}(G,k)$, ist dann „echt" kommutativ). Das eigentliche Thema des Buches von Evens ist die Struktur der Ringe $H^*(G,k)$ und die Frage, wie sich die Struktur der Gruppe G in ihm spiegelt.

Als Beispiel möchte ich einen von Serre stammenden Satz zitieren. Es sei G eine (endliche) p-Gruppe. Identifiziert man die Elemente von $H^2(G,\mathbb{Z})$ mit Homomorphismen von G nach $\mathbb{Q}/\mathbb{Z}$, dann entspricht jeder maximalen Untergruppe H von G ein Element β_H in $H^2(G,\mathbb{Z})$. Serres Satz besagt, daß die p-Gruppe G genau dann *nicht* elementar abelsch ist, wenn es maximale Untergruppen $H_1,\ldots,H_s$ gibt, mit $\beta_{H_1}\ldots\beta_{H_s}=0$ im Ring $H^*(G,\mathbb{Z})$. Mit diesem Satz konnte Chouinard das folgende Resultat beweisen: ein kG-Modul (k ein Körper der Charakteristik p) ist genau dann projektiv über G, wenn das gleiche für die Restriktion auf alle elementar abelschen p-Untergruppen von G gilt. Serres Satz spielt eine zentrale Rolle in der Theorie der Modulvarietäten, in der Chouinards Satz seinen natürlichen Platz findet. In dieser Theorie, begonnen von Alperin und Evens, und mit großem Erfolg weitergeführt von anderen, besonders von Carlson und Benson, betrachtet man, für einen gegebenen kG-Modul M, $\mathrm{Ext}^*_{kG}(M,M)$ als graduierten Modul über $H^*(G,k)$. Ist M Noethersch als k-Modul, so folgt aus dem berühmten Endlichkeitssatz von Evens, daß $\mathrm{Ext}^*_{kG}(M,M)$ ein Noetherscher $H^*(G,k)$-Modul ist. Damit öffnen sich die Türen zur kommutativen Algebra. Zum Beispiel gilt das Resultat, daß die Krullsche Dimension von $H^{ev}(G,K)$ (k wieder ein Körper der Charakteristik p) gleich dem maximalen Rang der elementar abelschen p-Untergruppen von G ist.

endlichen Gruppen im Vordergrund. In diesem einleitenden Teil wird vorausgesetzt, daß der Leser schon die Grundideen der homologischen Algebra (Ext und Tor Funktoren, usw.) versteht. Im 5. Kapitel, welches dem Kranzprodukt gewidmet ist, taucht zum ersten Mal der tensor-induzierte Modul (tensor induced module) auf, welcher im folgenden Kapitel, über die von Evens herstammende Normabbildung, eine wichtige Rolle spielt. Der Beweis des oben zitierten Satzes von Serre folgt mit Hilfe der Normabbildung. Ein relativ ausführliches Kapitel über Spektralreihen führt zum Endlichkeitssatz von Evens, und der letzte Teil des Buches, etwa ein Drittel des Ganzen, befaßt sich mit der Theorie der Modulvarietäten. Hier muß der Leser mit den Grundlagen der kommutativen Algebra vertraut sein, wie sie zum Beispiel im Text von Atiyah-Macdonald zu finden sind. (Der Name ist Macdonald, nicht wie es im Evens' Buch immer wieder erscheint, MacDonald.)

Die meisten der in diesem Buch behandelten Gegenstände finden sich auch in dem kürzlich erschienenen großen zweibändigen Werk von David Benson, „Representations and Cohomology". Während aber Benson nach einer enzyklopädischen Vollständigkeit strebt, verfolgt Evens nur die grundlegende Idee des Cohomologieringes. Daher eignet sich sein erfreulich kurzes Buch für ein lineares Studium.

Ein Buch für Anfänger ist dieses recht knapp und dicht geschriebene Buch allerdings nicht. Zwar behauptet Evens, er hätte das Material erfolgreich als „qualifying examination topic" für Studenten in Algebra und algebraische Topologie benützt. Ich gratuliere der Northwestern University zu ihren Schülern und Schülerinnen! Aber für fortgeschrittene Studenten sowie für Mathematiker, die sich für die Cohomologie endlicher Gruppen interessieren, ist dies ein willkommenes Buch.

London K. W. Gruenberg

Margulis, G. A., Discrete subgroups of semisimple Lie Groups (Ergebnisse der Mathematik und ihrer Grenzgebiete, 3. Folge, Bd. 17), Berlin u. a.: Springer Verlag 1991, 388 S., DM 148,–

Wir beginnen mit einer Erläuterung der Fragen, auf die das Buch von Margulis Antworten gibt.

E. Cartan hat 1926 die Klasse der symmetrischen Räume eingeführt. Definitionsgemäß ist ein global symmetrischer Raum eine zusammenhängende Riemannsche Mannigfaltigkeit Y, die zu jedem Punkt $p \in Y$ eine involutorische Isometrie I_p besitzt, deren Fixpunktmenge $\{p\}$ ist. Diese Symmetrie I_p kehrt die Durchlaufungsrichtung der Geodätischen durch p um und induziert daher die sogenannte geodätische Symmetrie bzgl. p. Man nennt eine zusammenhängende Riemannsche Mannigfaltigkeit Y lokal symmetrisch, wenn jeder Punkt $p \in Y$ eine Umgebung hat, auf der die geodätische Symmetrie bezüglich p eine Isometrie ist. Cartan zeigt, daß die einfach zusammenhängende Überlagerung X von Y ein global symmetrischer Raum ist. Damit ist Y völlig durch X und die Operation seiner Fundamentalgruppe $\Gamma := \pi_1(Y)$ auf X bestimmt. Ein großer Teil des vorliegenden Buches behandelt die Fortschritte, die in den letzten zwanzig Jahren bei der Klassifikation lokal symmetrischer Räume vor allem durch den Autor selbst erzielt wurden.

Die Klassifikation der global symmetrischen Räume wurde von E. Cartan auf die der reellen Liegruppen zurückgeführt. Hierzu zeigt er, daß die Zusammenhangskomponente der Gruppe der Isometrien des global symmetrischen Raumes X eine reelle Liegruppe G ist und identifiziert X mit G/K, wobei K die (kompakte) Isotropiegruppe eines Punktes $x \in X$ in G bezeichnet. Dann operiert $\Gamma = \pi_1(Y) \subset G$ als diskrete Gruppe von Isometrien auf X und Y wird mit $\Gamma \setminus G/K$ identifiziert.

Aus der Identifikation $X = G/K$ sieht man, daß auf X ein G-invariantes positives Maß existiert. Man nennt Γ ein *Gitter* in G (englisch: lattice), wenn das induzierte Volumen auf $\Gamma \setminus X$ endlich ausfällt oder äquivalent: wenn das invariante Volumen von $\Gamma \setminus G$ endlich ist. Die Klassifikation aller solcher Gitter ist jetzt noch zu kompliziert, denn im allgemeinen hat ein vorgegebenes Gitter Γ einen völlig unübersichtlichen Verband von Untergruppen von endlichem Index, und jede dieser Untergruppen ist ein Gitter. Man untersucht daher gröber nur die Kommensurabilitätsklassen von Gittern. Dabei heißen Gitter Γ_1, Γ_2 in G kommensurabel, wenn $\Gamma_1 \cap \Gamma_2$ von endlichem Index in Γ_1 und in Γ_2 ist. Für die Untersuchung von Kommensurabilitätsklassen von Gittern sind nun sicher Gitter in kompakten Lie-Gruppen – i. e. endliche Untergruppen – und Gitter im $\mathbb{R}^n$ – diese sind wohl verstanden – wenig interessant. Man muß daher „nur" Kommensurabilitätsklassen von Gittern in halbeinfachen nicht kompakten Lie-Gruppen studieren. Auf der geometrischen Seite bedeutet dieses, daß man Isogenieklassen lokal symmetrischer Räume negativer Schnittkrümmung und mit endlichem Volumen studiert. Diese Übersetzung ergibt sich aus der Cartanschen Klassifikation global symmetrischer einfach zusammenhängender Räume.

Sei also jetzt $Y = \Gamma \setminus G/K$, wobei G halbeinfach und nicht kompakt ist, und wobei K eine maximal kompakte Untergruppe von G ist. Hier kann man offenbar annehmen, daß G adjugiert ist. Wir tun das im folgenden. Man nennt Γ *irreduzibel,* wenn es keine Zerlegung $G = G_1 \times G_2$ von G gibt, so daß $\Gamma_i = \Gamma \cap G_i$ Gitter in G_i sind so, daß Γ kommensurabel zu $\Gamma_1 \times \Gamma_2$ ist. Damit ist das Studium von Isogenieklassen gewisser lokal symmetrischer Räume zurückgeführt auf das der Kommensurabilitätsklassen von irreduziblen Gittern in reellen halbeinfachen Lie-Gruppen.

Zur Konstruktion von Gittern sei daran erinnert, daß eine zusammenhängende adjugierte reelle halbeinfache Lie-Gruppe algebraisch ist, i. e. es gibt ein $N \in \mathbb{N}$ und eine über $\mathbb{Q}$ definierte algebraische Untergruppe H der speziellen linearen Gruppe SL_N, so daß für die reellen Punkte $H(\mathbb{R})$ von H gilt $H(\mathbb{R})^0 = G$. Dabei ist H das Nullstellengebilde endlich vieler Polynome mit rationalen Koeffizienten in den Variablen x_{ij}, $1 \leqslant i, j \leqslant N$, und $H(\mathbb{R})^0$ bezeichnet die Zusammenhangskomponente von $H(\mathbb{R})$. Sei $\mathbb{Z}^N \subset \mathbb{R}^N$ das Standard-Gitter und bezeichne $H(\mathbb{Z})$ den Stabilisator dieses Gitters in $H(\mathbb{R})^0 = G$. Dann ist nach Ergebnissen von Borel und Harish-Chandra $H(\mathbb{Z})$ ein Gitter in G. Der Margulis'sche Arithmetizitätssatz, eines der Hauptergebnisse des Buches, besagt nun, daß man durch eine Variation dieser Konstruktionen oft alle Gitter erhält, genauer: Sei G halbeinfach zusammenhängend und adjungiert und Γ ein irreduzibles Gitter in G. Falls $\mathbb{R}$-rank $G \geqslant 2$ gibt es eine über $\mathbb{Q}$ definierte halbeinfache algebraische Gruppe H und einen surjektiven Homomorphismus $\varphi: H(\mathbb{R})^0 \to G$ von Lie-Gruppen mit kompaktem Kern, so daß $\varphi(H(\mathbb{Z}))$ und Γ kommensurabel sind. Man sagt hierfür auch kurz: Γ ist arithmetisch. Die Bedingung $\mathbb{R}$-rank $G \geqslant 2$ bedeutet, daß G eine reelle Cartanuntergruppe von Rank $\geqslant 2$ enthält. Daß so eine Voraussetzung wirklich nötig ist, zeigt das Beispiel von nicht arithmetischen Fuchsschen Gruppen in $SL_2(\mathbb{R})$.

Ein weiteres Hauptergebnis ist der Starrheitssatz von Mostow-Margulis. In seiner einfachsten Form besagt er, daß ein Homomorphismus $\varphi: \Gamma_1 \to \Gamma_2$ von Gittern $\Gamma_i \subset G_i$ sich eindeutig zu einem Homomorphismus $G_1 \to G_2$ fortsetzt, falls die Lie-Gruppen G_i zusammenhängend und adjungiert sind und falls Γ_1 irreduzibel in G_1 ist und $\mathbb{R}$-rank $G_1 \geqslant 2$. In der Sprache der lokal symmetrischen Räume heißt das, daß der Γ_1 entsprechende Raum Y_1 bis aus Isomorphie allein durch seine Fundamentalgruppe $\Gamma_1 = \pi_1(Y_1)$ bestimmt ist.

Zur gruppentheoretischen Natur irreduzibler Gitter beweist Margulis unter anderem einen Einfachheitssatz. Sei hierzu Γ ein irreduzibles Gitter in einer halbeinfachen adjungierten zusammenhängenden Lie-Gruppe G ohne kompakte Faktoren mit $\mathbb{R}$-rank $G \geqslant 2$. Dann ist Γ einfach modulo endlicher Gruppen, i. e. ist N normal in Γ, so ist $N = \{e\}$ oder N hat endlichen Index in Γ.

Es sei angemerkt, daß die angegebenen Ergebnisse unter allgemeineren Voraussetzungen gelten. Diese werden im Buch ausführlich dargestellt. Insbesondere werden auch Gitter in Lie-Gruppen betrachtet, die Faktoren haben, welche statt über $\mathbb{R}$ allgemeiner über lokalen Körpern definiert sind. Die Beweise hierzu werden im Buch in allen oft sehr technischen Einzelheiten vollständig durchgeführt. Außer zu den zentralen Themen enthält das Buch eine große Fülle weiterer Informationen darunter auch neue und oft einfachere Beweise bekannter Ergebnisse.

Das Buch ist in neun Kapitel eingeteilt. Nach einer ausführlichen Einleitung, in der die Hauptergebnisse beschrieben werden, beginnt es im ersten Kapitel mit einer Zusammenstellung der benötigten Grundlagen aus der Theorie algebraischer Gruppen und der Ergodentheorie. Nur in diesem Kapitel wird gelegentlich auf Beweise verzichtet. Da Margulis so nur bei Standardergebnissen verfährt, die gut zugänglich in der Literatur vorliegen, bleibt der Text gut lesbar. Kapitel II handelt von Versionen des Borel-Wang-Theorems, welches besagt, daß unter gewissen Voraussetzungen der Zariski-Abschluß eines Gitters die zugehörige algebraische Gruppe vollständig bestimmt. Kapitel III ist der