E 20577 F
97. Band Heft 3
ausgegeben am 25. 10. 1995

DMV

Jahresbericht
der Deutschen Mathematiker-Vereinigung

Herausgegeben von W.-D. Geyer
unter Mitwirkung von
P. L. Butzer, U. Felgner,
K.-H. Hoffmann, H. Kurzweil

B. G. Teubner Stuttgart 1995

Jahresbericht
der Deutschen Mathematiker-Vereinigung

Der „Jahresbericht" ist das offizielle Veröffentlichungsorgan der Deutschen Mathematiker-Vereinigung, für dessen inhaltliche Gestaltung im Auftrag des Präsidiums der jeweilige Herausgeber zuständig ist. Im „Jahresbericht" sollen vornehmlich Überblicksartikel über Teilgebiete der reinen und angewandten Mathematik, Nachrufe sowie historische Artikel und Buchbesprechungen veröffentlicht werden.

Manuskripte

Alle für die Schriftleitung des Jahresberichts bestimmten Sendungen (Briefe, Manuskripte, Ankündigung von neuerscheinenden Büchern) sind an Prof. Dr. W.-D. Geyer zu richten. Bücher, von denen eine Besprechung erfolgen soll, werden bei den Verlagen angefordert. Die Autoren werden gebeten, bei der Vorbereitung ihrer Manuskripte die „Hinweise für Autoren" zu beachten.

Grundsätzlich sollen nur solche Manuskripte eingereicht werden, die nicht gleichzeitig an anderer Stelle zur Veröffentlichung eingereicht oder bereits veröffentlicht worden sind. Mit der Annahme zur Veröffentlichung erwirbt der Verlag das Verlagsrecht zur Vervielfältigung und Verbreitung sowie das Recht der Übersetzung in andere Sprachen.

Bezugsinformationen

Jährlich wird ein Band veröffentlicht, bestehend aus 4 Heften, die vierteljährlich erscheinen. Der Bezug ist nur bandweise möglich.

Der im voraus zahlbare Bezugspreis pro Band beträgt zur Zeit DM 128,— einschließlich Versand. Bestellungen nehmen jede Buchhandlung oder der Verlag entgegen.

Für persönliche Mitglieder der DMV, die den Jahresbericht zu beziehen wünschen, ist der zwischen DMV und Verlag vereinbarte Bezugspreis maßgebend, der im Rahmen des Mitgliedsbeitrags erhoben wird.

Verlag:
B. G. Teubner GmbH, Industriestr. 15, D-70565 Stuttgart
Postfach 801069, D-70510 Stuttgart, Tel. (0711) 78901-0, Telefax 78901-10
Verantwortlich für den Anzeigenteil: Albrecht Luscher

Printed in Germany – ISSN 0012-0456
Satz: Elsner & Behrens GmbH, D-68723 Oftersheim
Druck: pagina media gmbh, D-69502 Hemsbach

Jahresbericht
der Deutschen Mathematiker-Vereinigung

Inhalt Band 97, Heft 3

1. Abteilung

2. Abteilung

In den nächsten Heften erscheinende Arbeiten:

A. Böttcher: Toeplitz operators with piecewise continuous symbols – a neverending story?
L. Bröcker: Semialgebraische Geometrie
G. Bruhn: Wolfgang Haack zum Gedächtnis
M. Denker, S. Heinemann: Dynamik analytischer Endomorphismen auf der Sphäre
H. Neunzert: Vom Nutzen der Mathematik
K. Rubin: Euler systems and exact formulas in number theory
P. Schneider: Gebäude in der Darstellungstheorie über lokalen Zahlkörpern
G. Schumacher: Über die Entwicklung der Komplexen Analysis in Deutschland vom Ausgang des 19. Jahrhunderts bis zum Anfang der siebziger Jahre

---

Anschriften der Herausgeber

Prof. Dr. W.-D. Geyer, Bismarckstr. 1½, 91054 Erlangen

Prof. Dr. P. L. Butzer, Templergraben 55, 52062 Aachen
Prof. Dr. U. Felgner, Auf der Morgenstelle 10, 72076 Tübingen
Prof. Dr. K.-H. Hoffmann, Arcisstraße 21, 80333 München 2
Prof. Dr. H. Kurzweil, Bismarckstr. 1½, 91054 Erlangen

Bezugshinweis

Früher erschienene Bände (ab Band 68) des „Jahresberichts der Deutschen Mathematiker-Vereinigung" können durch den Buchhandel oder den Verlag bezogen werden.

Nachdruck der Bände 1 bis 40 liefert: Johnson Reprint Corp., 111 Fifth Avenue, New York, N.Y. 10003

Nachdruck der Bände 41 bis 67 liefert: Swets & Zeitlinger, Heereweg 347b, POB 810, NL-2160 SZ Lisse/Holland

Jber. d. Dt. Math.-Verein.

97 (1995) 75–96
Mathematics Subject Classification: 57 M 25, 05 C 75, 05 B 05

Knoten, Spin Modelle und Graphen

M. Aigner, Berlin, J. J. Seidel, Eindhoven

1 Einleitung

Die Theorie der Knoten und Verschlingungen war über die letzten 100 Jahre eine Inspiration für die algebraische Topologie und Geometrie, und umgekehrt haben die Methoden der Topologie bedeutende Fortschritte zum Verständnis der Knoten erbracht. Das Hauptproblem war und ist, Bedingungen zu finden, wann zwei Knoten äquivalent oder nichtäquivalent sind, und insbesondere, wann ein Knoten „entknotet" werden kann. Die algebraische Topologie hat dazu mehrere Invarianten geliefert, aber in den letzten 10 Jahren wurden, beginnend mit den Arbeiten von Jones, völlig neue Methoden entdeckt, welche nicht nur außerordentlich effektiv sind, sondern auch unerwartete Verbindungen zu ganz anderen Gebieten aufgezeigt haben. Die ursprüngliche Definition des Jones Polynoms erfolgte mit Hilfe von Operator Algebren und ihren Spurfunktionen. Später wurde von Kauffman eine induktive Definition gegeben, welche einen ungewöhnlich einfachen Zugang zum Jones Polynom erlaubt. Parallel dazu wurde in mehreren Arbeiten auf die Verbindung zu Modellen der Statistischen Mechanik hingewiesen – und dies ist unser Ausgangspunkt. Ziel dieser Arbeit ist es, dem Leser aufzuzeigen, wie das Knotenproblem via Spin Modelle in natürlicher, wenn auch vielleicht unerwarteter Weise zu einigen der berühmtesten (offenen) Probleme der Kombinatorik führt.

2 Knoten

Eine *Verschlingung* L mit $c(L)$ Komponenten besteht aus $c(L)$ disjunkten einfachen geschlossenen Kurven in $\mathbb{R}^3$. Ein *Knoten* ist eine Verschlingung mit einer Komponente. Zwei Verschlingungen L und L' sind *äquivalent,* in Zeichen $L \cong L'$, falls L durch eine bijektive stetige Deformation in L' übergeführt werden kann. Die natürlichste Art, eine Verschlingung darzustellen, erfolgt mit Hilfe eines *Diagrammes* $D(L)$, das durch Parallelprojektion von L auf eine Ebene erhalten wird. Dabei nehmen wir an, daß sich in einem beliebigen Punkt der Bildebene höchstens zwei Bildkurven kreuzen. In jedem Kreuzungspunkt von $D(L)$ wird spezifiziert, welche Kurve oben und welche unten verläuft (Figur 1).

Wir beschränken uns, ohne dies noch weiter zu erwähnen, auf *zahme* Verschlingungen (siehe [6, 11]).

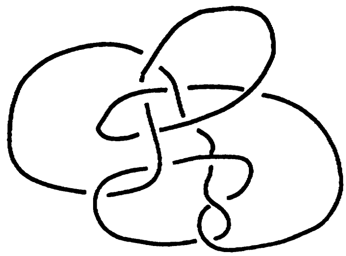

Fig. 1

Das klassische Ergebnis der kombinatorischen Knotentheorie (und unser Ausgangspunkt) ist der Satz von Reidemeister, der die Äquivalenz von Verschlingungen auf drei lokale Operationen, die sogenannten *Reidemeister Bewegungen* zurückführt.

Theorem A [42]. *Zwei Diagramme D und D′ repräsentieren genau dann äquivalente Verschlingungen, wenn D durch eine endliche Folge von lokalen Bewegungen der folgenden Typen in D′ übergeführt werden kann:*

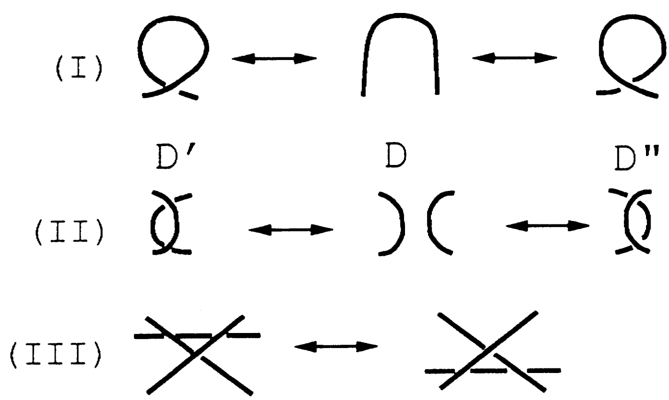

Fig. 2

Ein Knoten, der ein Diagramm $\bigcirc$ besitzt, heißt die *Schleife* L_0. Das Hauptproblem der Knotentheorie lautet nun: Gegeben zwei Verschlingungen L und L', entscheide, ob L und L' äquivalent sind oder nicht. Als Spezialfall ergibt sich: Wann gilt $L \cong L_0$?, das heißt, wann kann L „entknotet" werden ? [6, 11].

Eine *Invariante* I ist eine Abbildung $I: L \to I(L)$, so daß $L \cong L'$ impliziert $I(L) = I(L')$. Eine Reihe von Invarianten sind aus der algebraischen Topologie bekannt (Fundamentalgruppe, Zopfgruppe, Alexander Polynom [6, 11]), mit deren Hilfe als erstes Beispiel gezeigt wurde, daß das Kleeblatt nicht entknotet werden kann (Tietze 1910) (Fig. 3).

Aus dem Satz von Reidemeister folgt, daß I eine Invariante ist, falls I invariant in bezug auf die Reidemeister Bewegungen bleibt.

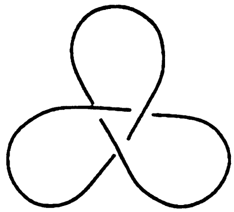

Fig. 3

3 Spin Modelle

Betrachten wir wieder das Diagramm D einer Verschlingung. Wir fassen D als ebenen Graph auf mit den Überkreuzungspunkten als Ecken und färben die Länder der so entstehenden ebenen Landkarte mit den Farben schwarz und weiß, so daß Länder mit einer gemeinsamen Kante verschiedene Farben erhalten. Das äußere Gebiet soll dabei weiß gefärbt werden. Ein bekannter Satz der Graphentheorie besagt, daß solch eine 2-Färbung der Länder genau dann möglich ist, wenn alle Ecken geraden Grad haben (siehe z. B. [1]). In unserem Fall haben alle Ecken Grad 4, also ist eine 2-Färbung möglich. Die Färbungen der Diagramme aus Figur 1 und 3 sehen beispielsweise folgendermaßen aus:

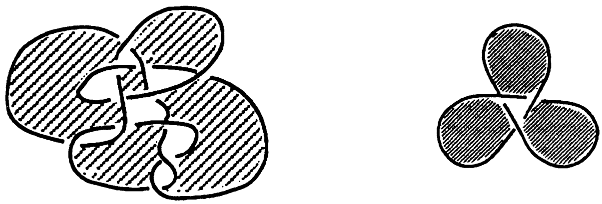

Fig. 4

Mittels des gefärbten Diagrammes D konstruieren wir nun einen *signierten* (Multi-) *Graphen* G auf folgende Weise: Die Ecken von G sind die schwarzen Länder, und zwei Ecken sind genau dann benachbart, wenn sie einen Überkreuzungspunkt gemeinsam haben. Schließlich erteilen wir den Kanten ein Vorzeichen nach folgender Regel:

Fig. 5

Für unsere Beispiele aus Figur 4 erhalten wir somit folgende Graphen:

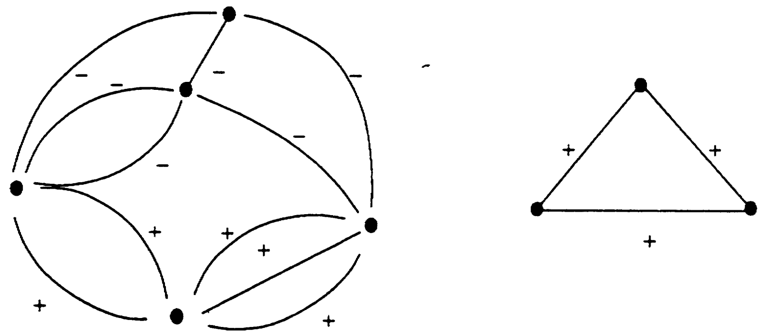

Fig. 6

Der signierte Graph des Kleeblattes weist also nur das Vorzeichen + auf. Ist G zusammenhängend, so sieht man leicht, daß G genau dann konstantes Vorzeichen hat, wenn das Diagramm *alternierend* ist, das heißt die Überkreuzungen wechseln zwischen oben und unten, wenn wir die Verschlingung durchlaufen. Eine Verschlingung L heißt *alternierend,* falls L ein alternierendes Diagramm besitzt. Einige der berühmtesten Vermutungen der Knotentheorie betreffen alternierende Verschlingungen, die zum Teil durch die Polynominvarianten, die wir besprechen werden, verifiziert werden konnten [30, 36, 40, 46, 49].

Der letzte Schritt zu einer Invariante besteht in der Zuordnung von sogenannten Boltzmann Gewichten zu den Kanten, welche die Reidemeister Bewegungen widerspiegeln. Eine Reihe solcher Modelle, inspiriert aus der Statistischen Mechanik, wurden als Invarianten ausgewiesen [3, 28, 31, 37, 47]. Wir behandeln im folgenden das von Jones [28] eingeführte Spin Modell.

Definition. Sei $X=\{\alpha,\beta,\gamma,\dots\}$ eine n-Menge, $n\geqslant 2$. Ein *Spin Modell* (über X) besteht aus einem Paar kommutativer Abbildungen W_+, $W_-: X\times X\to\mathbb{C}$, welche die folgenden Gleichungen (A), (B), (C) erfüllen. Wir fassen $W_+=[w_+(\alpha,\beta)]$, $W_-=[w_-(\alpha,\beta)]$ als $n\times n$-Matrizen indiziert durch X auf. Dann existiert $d\in\mathbb{C}$, so daß für alle α, β, $\gamma\in X$ gilt:

(A) $\quad w_+(\alpha,\beta)w_-(\alpha,\beta)=1$

(B) $$\sum_{\xi\in X} w_+(\alpha,\xi)w_-(\xi,\beta)=\begin{cases} d^2 & \alpha=\beta \\ 0 & \alpha\neq\beta\end{cases}$$

(C) $$\sum_{\xi\in X} w_+(\alpha,\xi)w_+(\beta,\xi)w_-(\gamma,\xi)=dw_+(\alpha,\beta)w_-(\alpha,\gamma)w_-(\beta,\gamma).$$

Aus (A), (B), (C) folgt unmittelbar für alle α, β, $\gamma\in X$:

(D) Es existiert $a\in\mathbb{C}$ mit $w_+(\alpha,\alpha)=a$, $w_-(\alpha,\alpha)=a^{-1}$

(E) $$\sum_{\xi\in X} w_+(\alpha,\xi)=da^{-1},\ \sum_{\xi\in X} w_-(\alpha,\xi)=da$$

(F) $\quad n = d^2$

(C′) $\quad \sum_{\xi \in X} w_-(\alpha, \xi) w_-(\beta, \xi) w_+(\gamma, \xi) = d w_-(\alpha, \beta) w_+(\alpha, \gamma) w_+(\beta, \gamma).$

Die Matrizen W_+, W_- haben also konstante Hauptdiagonale und konstante Zeilen- und Spaltensummen. Die Zahlen $d \in \{\sqrt{n}, -\sqrt{n}\}$ und a heißen die *Loop-Variable* bzw. der *Modulus* des Spin Modelles. Aus (A) – (C′) folgt, daß die Bedingungen völlig symmetrisch für W_+ und W_- sind.

Sei nun ein signierter Graph G mit Eckenmenge V und Kantenmenge E, und ein Spin Modell $M = (W_+, W_-)$ auf X gegeben. Ein *Status* von G ist eine Zuordnung $\sigma: V \to X$, wobei alle Abbildungen X^V zugelassen sind. Wir schreiben kurz $\Sigma = X^V$ für die Statusmenge.

Definition. Sei der signierte Graph G und das Spin Modell $M = (W_+, W_-)$ gegeben, dann ist die *Partitionsfunktion* Z_G^M erklärt durch

$$Z_G^M = d^{-|V|} \sum_{\sigma \in \Sigma} \prod_{uv \in E} w_\pm(\sigma u, \sigma v),$$

wobei $w_+(\sigma u, \sigma v)$ bzw. $w_-(\sigma u, \sigma v)$ je nach dem Vorzeichen der Kante uv genommen wird. Ist $|V| = 1$ (Schleife), so setzen wir $\prod = 1$. Besteht G aus mehreren Komponenten $G_1, \ldots, G_m$, so gilt $Z_G^M = \prod_{i=1}^{m} Z_{G_i}^M$.

Theorem B [28]. *Die Partitionsfunktion Z_G^M ist invariant unter den Reidemeister Bewegungen* (II) *und* (III), *und für die Bewegung* (I) *gilt: $Z_{G'}^M = a^{-1} Z_G^M$, $Z_{G''}^M = a Z_G^M$, wobei G', G, G'' zu den Diagrammen D', D, D'' in Theorem A korrespondieren.*

Betrachten wir als Beispiel Bewegung (II), wobei es aus Symmetriegründen genügt, die Behauptung für die linke Äquivalenz in (II) zu zeigen. Je nach der Färbung der Länder ergeben sich zwei Möglichkeiten:

Fall a.

Sei $E' = E$ minus die beiden Kanten uv. Dann gilt nach (A)

$$Z_G^M = d^{-|V|} \sum_{\sigma \in \Sigma} w_+(\sigma u, \sigma v) w_-(\sigma u, \sigma v) \prod_{E'} w_\pm(\sigma x, \sigma y)$$

$$= d^{-|V|} \sum_{\sigma \in \Sigma} \prod_{E'} w_\pm(\sigma x, \sigma y) = Z_{G'}^M$$

Fall b.

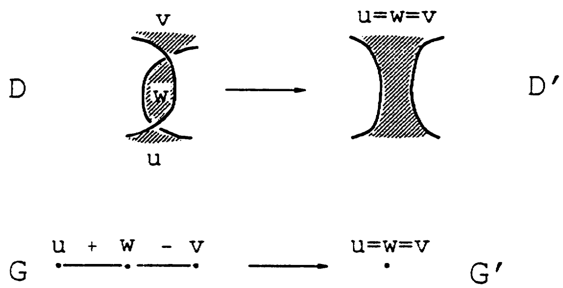

Fig. 8

Sei $E' = E \setminus \{uw, vw\}$, dann gilt

$$Z_G^M = d^{-|V|} \sum_{\sigma \in \Sigma} w_+(\sigma u, \sigma w) w_-(\sigma w, \sigma v) \prod_{E'} w_\pm(\sigma x, \sigma y)$$

Betrachten wir eine feste Zuordnung $\bar{\sigma}$: $V \setminus \{w\} \to X$ mit $\bar{\sigma} u = \alpha$, $\bar{\sigma} v = \beta$, so folgt aus (B)

$$\sum_{\sigma \in \Sigma} w_+(\alpha, \sigma w) w(\sigma w, \beta) = \begin{cases} d^2 & \alpha = \beta \\ 0 & \alpha \neq \beta \end{cases},$$

also $$Z_G^M = d^{-|V|+2} \sum_{\sigma \in \Sigma} \prod_{E'} w_\pm(\sigma x, \sigma y) = Z_{G'}^M$$

da G' zwei Ecken weniger als G hat.

Ganz analog verifiziert man die anderen Fälle.

Bemerkung. Für die Schleife haben wir $|V| = 1$, und es folgt aus (F)

$$Z_G^M = d^{-1} \sum_{\sigma \in \Sigma} 1 = d.$$

Durch Übergang zu orientierten Verschlingungen und geeignete Normalisierung kann der Faktor a bzw. a^{-1} entfernt werden (siehe dazu Abschnitt 5). Wir

sehen also, daß jedes Spin Modell eine Invariante liefert, so daß sich das folgende Problem ergibt: Klassifiziere die Spin Modelle oder finde zumindest Beispiele.

4 Matrix Gleichungen und die Yang-Baxter Relationen

Sei (W_+, W_-) ein Spin Modell über X. Im folgenden bezeichne I die Einheitsmatrix und J die Matrix bestehend aus lauter Einsen. Mit AB bezeichnen wir das übliche Matrizenprodukt und mit $A \circ B$ das elementweise Produkt. Die Bedingungen (A), (B), (D), (E) und (F) lauten in Matrizenschreibweise:

(1) $W_+ \circ W_- = J$

(2) $W_+ W_- = nI$

(3) $W_+ \circ I = aI, \qquad W_- \circ I = a^{-1}I$

(4) $W_+ J = JW_+ = da^{-1}J, \qquad W_- J = JW_- = daJ.$

Studieren wir nun die Gleichung (C). Es sei $Y_{\beta\gamma}(\xi) = w_+(\beta, \xi) w_-(\gamma, \xi)$ und $Y_{\beta\gamma} = Y_{\beta\gamma}(\xi) \in \mathbb{C}^n$. Gleichung (C) besagt

$$\sum_{\xi} w_+(\alpha, \xi) Y_{\beta\gamma}(\xi) = dw_-(\beta, \gamma) Y_{\beta\gamma}(\alpha) \qquad (\alpha \in X)$$

oder in Matrixform

(5) $W_+ Y_{\beta\gamma} = dw_-(\beta, \gamma) Y_{\beta\gamma}$ für alle $\beta, \gamma \in X.$

Wir schließen also (aus Symmetriegründen analog für W_-):

Lemma 1. *Seien* Spec W_+, Spec W_- *die Spektra (ohne Vielfachheiten), dann gilt*

(6) Spec $W_+ \supseteq \{dw_-(\alpha, \beta) : \alpha, \beta \in X\}$

Spec $W_- \supseteq \{dw_+(\alpha, \beta) : \alpha, \beta \in X\}$

Insbesondere können W_+ und W_- höchstens n verschiedene Einträge haben.

Es sei $T = \mathbb{C}(X \otimes X)$ der Tensorraum erzeugt von den Paaren $(\alpha, \beta) \in X^2$. Wir betrachten die beiden linearen Abbildungen $R_+, R_- : T \to T$ definiert durch

$$R_+ : \alpha \otimes \beta \to \sum_{\xi} w_+(\alpha, \xi)(\xi \otimes \beta)$$

$$R_- : \alpha \otimes \beta \to dw_-(\alpha, \beta)(\alpha \otimes \beta).$$

Aus (C) folgt unmittelbar, daß R_+, R_- die sogenannte Yang-Baxter Relation erfüllen [28, 47].

Satz 1. *Es gilt $R_+ R_- R_+ = R_- R_+ R_-$; R_+ und R_- sind ähnlich und haben daher gleiches Spektrum $\{dw_-(\alpha, \beta) : \alpha, \beta \in X\}$ mit Vielfachheiten.*

Aus (6) und der Definition von R_+, R_- folgt daraus:

Folgerung 1. *Es gilt* Spec $W_+ = \{dw_-(\alpha, \beta) : \alpha, \beta \in X\}$, Spec $W_- = \{dw_+(\alpha, \beta) : \alpha, \beta \in X\}$. *Ein Eigenwert $\lambda \in$ Spec R_+ hat genau die n-fache Vielfachheit wie in W_+, analog für W_-. Insbesondere ist die Anzahl der Stellen in W_+ oder W_-, in denen eine feste Zahl erscheint, stets ein Vielfaches von n.*

Fassen wir zusammen: Sei (W_+, W_-) ein Spin Modell. Angenommen, W_+ hat außer a noch m verschiedene Einträge $t_1, \ldots, t_m$. Wir definieren A_i als $n \times n$-Matrix mit 1 an den Stellen, wo t_i in W_+ erscheint, und 0 sonst. Die A_i's sind also symmetrische 0,1-Matrizen, für die gilt:

(7) $J = I + A_1 + \ldots + A_m$

(8) $W_+ = aI + t_1 A_1 + \ldots + t_m A_m$

(9) $W_- = a^{-1} I + t_1^{-1} A_1 + \ldots + t_m^{-1} A_m$

(10) $\operatorname{Spec} W_+ = \{da^{-1}, dt_1^{-1}, \ldots, dt_m^{-1}\}$, $\quad$ $\operatorname{Spec} W_- = \{da, dt_1, \ldots, dt_m\}$.

Wir fassen nun die A_i's als Adjazenzmatrizen von Graphen G_i mit Eckenmenge X auf. Sei K_n der vollständige Graph auf X, dann nennen wir eine kantendisjunkte Zerlegung $K_n = G_1 + \ldots + G_m$ wieder ein *Spin Modell,* falls die Matrizen W_+, W_- definiert gemäß (8), (9) die Gleichungen (A), (B), (C) für gewisse $a, t_1, \ldots, t_m, d \in \{\sqrt{n}, -\sqrt{n}\}$, alle t_i verschieden, erfüllen.

Es stellen sich also die beiden Fragen:

I. Welche Zerlegungen $K_n = G_1 + \ldots + G_m$ sind Spin Modelle?
II. Wie sieht die Lösungsmenge $(a, t_1, \ldots, t_m)$ aus?

Wir werden dies anschließend für $m = 1$ beantworten und dann in den folgenden Abschnitten für $m = 2$. Dabei wird sich herausstellen, daß die Spin Modelle für $m = 1$ genau dem Jones Polynom entsprechen, und für $m = 2$ dem Kauffman Polynom. Für beliebiges m ist das Problem eng mit der Bose-Mesner Algebra eines

Sei $M=(W_+, W_-)$ ein Spin Modell mit Parametern a, t gemäß Satz 2. Wir wollen uns überlegen, daß die zugeordnete Partitionsfunktion Z^M (bis auf einen Faktor d^{-1}) genau das Kauffmansche Klammerpolynom ergibt (siehe z. B. [31, 32, 36]).

Das *Klammerpolynom* $\langle L \rangle$ einer Verschlingung L ist ein Laurent Polynom in der Variablen A, induktiv definiert durch die folgenden Regeln:

(a) $\langle \bigcirc \rangle = 1$

(b) $\langle L \cup \bigcirc \rangle = -(A^2 + A^{-2})\langle L \rangle$

(c) $\langle \times \rangle = A\langle \asymp \rangle + A^{-1}\langle)(\rangle$.

Dabei bedeutet $L \cup \bigcirc$ die Verschlingung bestehend aus L und einer dazu disjunkten Schleife. Regel (c) besagt, daß wir eine Überkreuzung auflösen, indem wir entlang der unteren Kurve einmal nach rechts gehen (Faktor A) und einmal nach links (Faktor A^{-1}). Man beachte, daß die Orientierung keine Rolle spielt.

Wir zeigen nun, daß die Partitionsfunktion Z^M genau dieselben Rekursionen (b) und (c) für $t=A^{-1}$ erfüllt. Für (b) ist dies wegen $Z^M(\bigcirc)=d = -(t^2+t^{-2})$ klar. Betrachten wir (c). Wir haben zwei (symmetrische) Fälle je nach der Färbung. Sei

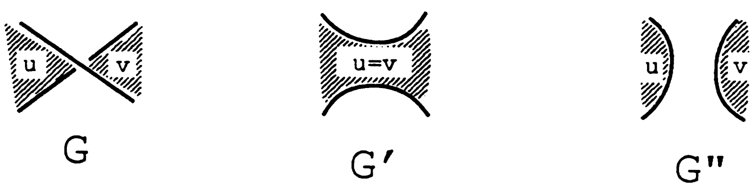

Fig. 9

Es sei $E'=E\setminus\{uv\}$ und Σ_0 bzw. Σ_1 die Menge der $\sigma: V\to X$ mit $\sigma u=\sigma v$ bzw. $\sigma u \neq \sigma v$. Mit der Kurzschreibweise $\Pi_\sigma = \prod_{E'} w_\pm(\sigma x, \sigma y)$ erhalten wir

$$Z_G^M = d^{-|V|}\left[a\sum_{\sigma\in\Sigma_0}\Pi_\sigma + t\sum_{\sigma\in\Sigma_1}\Pi_\sigma\right]$$

$$Z_{G'}^M = d^{-|V|+1}\sum_{\sigma\in\Sigma_0}\Pi_\sigma$$

$$Z_{G''}^M = d^{-|V|}\left[\sum_{\sigma\in\Sigma_0}\Pi_\sigma + \sum_{\sigma\in\Sigma_1}\Pi_\sigma\right].$$

Die Paritionsfunktion für $m=1$ ergibt daher (bis auf den Faktor d^{-1}) für jedes t eine Auswertung des Klammerpolynoms. Geben wir nun L eine Orientierung. Wir bezeichnen die Überkreuzungen als positiv bzw. negativ wie in Figur 10.

\+ -

Fig. 10

Die *Verwindungszahl* $w(L)$ ist die algebraische Summe der Überkreuzungen, indem wir $+1$ für eine positive Überkreuzung zählen, und -1 für eine negative. Das Polynom $(-A)^{-3w(L)}\langle L\rangle$ ist nun auch invariant bezüglich der Reidemeister Bewegung (I). Durch die Substitution $A=t^{-1/4}$ erhält man das ursprüngliche Jones Polynom $V(L)$ (siehe z.B. [8, 15, 27, 29, 34, 35]).

Kleeblatt L die Partitionsfunktion $Z_G^M(t)=-t^9+t+t^{-3}+t^{-7}$ und daraus $\langle L\rangle=-A^5-A^{-3}+A^{-7}$ bzw. das Jones Polynom $V(t)=t+t^3-t^4$.

Übersetzen wir die Rekursion (c) in Graphen, so haben wir

$$\langle \underset{u}{\bullet}\overset{+}{\text{———}}\underset{v}{\bullet} \rangle = A\langle \underset{uv}{\bullet} \rangle + A^{-1}\langle \underset{u}{\bullet} \quad \underset{v}{\bullet} \rangle,$$

und (c) ist ein Spezialfall der contraction/deletion Definition des *Tutte Polynoms* eines Graphen. Partitionsfunktion, Klammerpolynom und Jones Polynom können also durch das Tutte Polynom ausgedrückt werden [10, 24, 25, 46, 48, 49].

6 Spin Modelle für $m=2$, stark reguläre Graphen

A und B sind also jeweils mit J vertauschbar, und daher auch A mit $B=J-I-A$. Alle Matrizen besitzen daher eine gemeinsame Eigenbasis, und es folgt

(14) Spec $W_+ = aI + t_1$ Spec A + t_2 Spec B

(15) Spec $W_- = a^{-1}I + t_1^{-1}$ Spec A + t_2^{-1} Spec B.

Da $|\text{Spec}\, W_+| \leqslant 3$ ist nach Folgerung 1, erhalten wir $|\text{Spec}\, A| \leqslant 3$, $|\text{Spec}\, B| \leqslant 3$, und somit

Lemma 3. *G und $\bar{G}$ sind regulär mit höchstens drei verschiedenen Eigenwerten.*

Die Klasse der Graphen aus Lemma 3 ist wohlbekannt – es sind die stark regulären Graphen (siehe z. B. [9, 12, 16, 44]).

Definition. Ein Graph G heißt *stark regulär* mit *Parametern* (k, λ, μ), falls

a) G k-regulär ist,
b) jedes Paar benachbarter Ecken genau λ gemeinsame Nachbarn hat,
c) jedes Paar nichtbenachbarter Ecken genau μ gemeinsame Nachbarn hat.

Satz 3. *Ein regulärer Graph G ist genau dann stark regulär, wenn G höchstens drei verschiedene Eigenwerte besitzt.*

Es sei von nun an G ein stark regulärer Graph auf n Ecken mit Adjazenzmatrix A und Parametern (k, λ, μ). Da $A\mathbf{1} = k\mathbf{1}$ ist ($\mathbf{1}$ = Vektor aus Einsen), [illegible]

und s bezeichnet. Man sieht sofort, daß der komplementäre Graph $\bar{G}$ ebenfalls stark regulär ist mit Parametern $l=n-1-k$, $\bar{\lambda}=n-2-2k+\mu$, $\bar{\mu}=n-2k+\lambda$ und Eigenwerten l, $-r-1$, $-s-1$,.

Von zwei komplementären Graphen ist stets einer zusammenhängend, wir können also G als zusammenhängend voraussetzen. In diesem Fall ist k einfacher Eigenwert mit $|r|$, $|s| \leqslant k$ nach dem Satz von Perron-Frobenius [9]. Für die Vielfachheiten f, g der Eigenwerte r und s gilt demnach $f+g=n-1$ wegen Spur $A=0$. Der folgende Satz faßt die wichtigsten Eigenschaften stark regulärer Graphen zusammen (siehe [5, 9, 12, 13, 44]).

Satz 4. *Sei G ein zusammenhängender stark regulärer Graph $\neq K_n$ mit Parametern* (k, λ, μ) und Spec $A=\{k^1, r^f, s^g\}$, *das heißt f, g sind die Vielfachheiten von r, s. Dann gilt:*

(15) *Die Eigenwerte r, s sind verschieden und r, s sind die Nullstellen der Gleichung* $x^2-(\lambda-\mu)x+(\mu-k)=0$,

(16) $\lambda = k + r + s + rs,\ \mu = k + rs = \dfrac{(k-r)(k-s)}{n}$,

(17) $f = \dfrac{-s(n-1)-k}{r-s},\ g = \dfrac{r(n-1)+k}{r-s}$,

(18) $rs \leqslant 0$ *und* $rs=0$ *genau für die multipartiten Graphen* $K_{m,\ldots,m}$, $n=mt$, $m \geqslant 2$, $t \geqslant 2$, *mit Spec* $A=\{m(t-1)^1, 0^{n-t}, (-m)^{t-1}\}$,

(19) $(r-s)^2 fg = nkl.$

(20) *Die Eigenwerte r, s sind in $\mathbb{Z}$, außer wenn $f=g=\dfrac{n-1}{2}$ ist. In diesem Fall gilt* $n=4\mu+1$, $k=2\mu$, $\lambda=\mu-1$, $r, s = \dfrac{-1 \pm \sqrt{n}}{2}$. *Ist umgekehrt* $n=4\mu+1$, $k=2\mu$, *so folgt* $f=g=\dfrac{n-1}{2}$.

(21) *Die folgenden Bedingungen sind äquivalent:*

i) $n=(r-s)^2$

ii) $\mu = s(s+1)$ *oder* $\mu = r(r+1)$

iii) $f=k, g=l$ *oder* $f=l, g=k$.

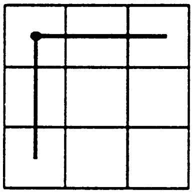

Fig. 12

Konferenzgraphen ist, daß n Summe von zwei Quadraten ganzer Zahlen ist [13, 16.

Kehren wir zu unserem Hauptproblem zurück: Welche Graphen G ergeben ein Spin Modell für $m = 2$? Unsere Analyse hat bis jetzt ergeben, daß G stark regulär sein muß. Wegen $J = I + A + B$ und $\operatorname{Spec} J = \{n^1, 0^{n-1}\}$ wissen wir

$$\operatorname{Spec} A = \{k^1, r^f, s^g\}, \qquad \operatorname{Spec} B = \{l^1, (-r-1)^f, (-s-1)^g\},$$

und es folgt aus (14)

$$\operatorname{Spec} W_+ = \{(a + t_1 k + t_2 l)^1, (a + t_1 r - t_2(r+1))^f, (a + t_1 s - t_2(s+1))^g\}.$$

Nach Satz 1 und Folgerung 1 gilt

$$\operatorname{Spec} R_+ = \{(a + t_1 k + t_2 l)^n, (a + t_1 r - t(r+1))^{nf}, (a + t_1 s - t_2(s+1))^{ng}\}.$$

$$\operatorname{Spec} R_+ = \{(da^{-1})^n, (dt_1^{-1})^{kn}, (dt_2^{-1})^{ln}\},$$

und es folgt ohne Beschränkung der Allgemeinheit (Vertauschung von r und s) mit (21)

(22) $\quad a + t_1 r - t_2(r+1) = dt_1^{-1}$

(23) $\quad a + t_1 s - t_2(s+1) = dt_2^{-1}$

(24) $\quad n = (r-s)^2, \mu = s(s+1), f = k, g = l.$

Durch die Symmetrie von + und − ergibt sich analog

(25) $\quad a^{-1} + t_1^{-1} r - t_2^{-1}(r+1) = dt_1$

(26) $\quad a^{-1} + t_1^{-1} s - t_2^{-1}(s+1) = dt_2.$

In Zusammenfassung erhalten wir aus (16):

Folgerung 2. *Ist G Spin Modell, so gilt:*

Gleichungen (22), (25) nehmen dann die Form an:

(28) $a = -tr - \varepsilon t^{-1}(s+1), \qquad a^{-1} = -t^{-1}r - \varepsilon t(s+1),$

und Multiplikation ergibt

(29) $r^2 + (s+1)^2 + \varepsilon(t^2 + t^{-2})r(s+1) = 1.$

Ist $r(s+1)=0$, so haben wir $r=0$, $s=-2$ oder $r=1$, $s=-1$. Im ersten Fall erhalten wir $G=C_4$ aus (27). Im zweiten Fall ist G nicht zusammenhängend. Insbesondere folgt aus (18), daß $K_{m,\ldots,m}$, $n=m^2$, kein Spin Modell ist für $m>2$.

Sei also $r(s+1)\neq 0$, dann erhalten wir im allgemeinen vier Lösungen für t und daraus korrespondierende Lösungen für a aus (28). Mit t ist offenbar $\pm t$, $\pm t^{-1}$ Lösung von (29), und mit a ist $\pm a$, $\pm a^{-1}$ Lösung. Dabei entspricht $t \leftrightarrow t^{-1}$ ersichtlich der Vertauschung $W_+ \leftrightarrow W_-$. Ist schließlich (t, a) Lösung für d, so ist (it, ia) Lösung für $-d$ $(i=\sqrt{-1})$. Wir haben also mit einer Lösung (t,a) alle Lösungen für $\pm d$ bestimmt, und können daher ohne Beschränkung der Allgemeinheit $\varepsilon=-1$, also $d=s-r$ annehmen. Unsere Gleichungen lauten nun:

(30) $r^2 + (s+1)^2 - (t^2 + t^{-2})r(s+1) = 1$

(31) $a = -tr + t^{-1}(s+1), \qquad a^{-1} = -t^{-1}r + t(s+1)$

mit $d=s-r$, $t_1=t$, $t_2=t^{-1}$.

Insbesondere folgt

(32) $a + a^{-1} = (t + t^{-1})(d+1).$

Durch Betrachtung der Spektralzerlegung von A hat Jaeger aus (30), (31) die Spin Modelle unter den stark regulären Graphen auf elegante Weise charakterisiert.

Definition. Sei G ein Graph auf X. $N(\alpha)=\{\beta\in X:\alpha\beta\in E\}$ heißt die *Nachbarschaft* von α. Die *Residuen* $G(\alpha)$ bzw. $G'(\alpha)$ sind die beiden Untergraphen, induziert auf $N(\alpha)$ bzw. $N'(\alpha)=X\setminus(N(\alpha)\cup\alpha)$. G heißt *lokal stark regulär*, falls $G(\alpha)$ und $G'(\alpha)$ stark regulär sind für alle $\alpha\in X$.

Satz 5 [26]. *Ein Graph $G\neq K_n, \bar{K}_n$ ist genau dann Spin Modell für $m=2$, wenn*

a) *G stark regulär ist*
b) *G lokal stark regulär ist*
c) *$n=(r-s)^2$ gilt.*

Bemerkung. Ein lokal stark regulärer Graph braucht nicht stark regulär zu sein, z. B. $G=K_{m,n}$ für $m\neq n$. Ein stark regulärer, lokal stark regulärer Graph muß nicht $n=(r-s)^2$ erfüllen. Ein Beispiel ist der *Schläfli Graph* mit Parametern $n=27$, $k=16$, $\lambda=10$, $\mu=8$ und Eigenwerten $\{r, s\}=\{4, -2\}$. Der Schläfli Graph kann im Wurzelgitter E_8 realisiert werden. Betrachten wir den Graph auf den 240 Wurzeln mit Wurzeln u, v benachbart, wenn das innere Produkt $u\cdot v=1$ ist, so ist der Schläfli Graph der Untergraph induziert von den 27 gemeinsamen Nachbarn zweier benachbarter Wurzeln [9].

Analog zum vorigen Abschnitt zeigen wir nun, daß die Partitionsfunktion Z^M eines Spin Modells mit $m=2$ zum Kauffman Polynom in zwei Variablen korrespondiert [32, 33, 35]:

Das *Kauffman Polynom* $\Lambda(L)$ ist ein Laurent Polynom in zwei Variablen a und x, induktiv definiert durch die folgenden Regeln:

(a) $\Lambda(\bigcirc) = 1$

(b) $\Lambda(\mathcal{Q}) = a^{-1}\Lambda(\cap),\ \Lambda(\mathcal{Q}) = a\Lambda(\cap)$

(c) $\Lambda(\times) + \Lambda(\times) = x[\Lambda()() + \Lambda(\asymp)]$.

Die Regeln (b) und (c) beziehen sich also wieder auf die lokale Struktur in einem Überkreuzungspunkt. Betrachten wir nun die Partitionsfunktion Z^M, wobei M ein Spin Modell ist für $m=2$. Regel (b) gilt nach Theorem B auch für Z^M, und aus (32) folgt ohne weiteres, daß Z^M auch (c) erfüllt mit $x=t+t^{-1}$. Wir haben also $\Lambda=d^{-1}Z^M$, das heißt (bis auf den Faktor d^{-1}) ist die Partitionsfunktion eine Auswertung des Kauffman Polynoms für jedes Spin Modell. Übergang zu orientierten Verschlingungen wie im Fall $m=1$ liefert dann eine Polynominvariante, die auch invariant bezüglich der Reidemeister Bewegung (I) ist.

7 Klassifikation der Spin Modelle für $m=2$

Wir wollen nun die Graphen G beschreiben, welche den Bedingungen von Satz 5 genügen. Wir wissen, daß alle Kandidatengraphen die Parameter (27) haben. Aus dem Beweis von Satz 5 schließt man, daß unter den Konferenzgraphen nur C_5 und $L_2(3)$ auftreten können. Abgesehen von C_5 sind also die Eigenwerte ganzzahlig. Ferner berechnet man für die Residuen $G(\alpha)$ und $G'(\alpha)$:

(33) $G(\alpha) = \bar{K}_k$ (d. h. $\lambda = 0$) oder $G(\alpha)$ hat die Eigenwerte $\lambda,\ r,\ \dfrac{s^2+2s+r}{s-r+2}$.

(34) $G'(\alpha) = K_l$ (d. h. $\bar{\lambda} = 0$) oder $G'(\alpha)$ hat die Eigenwerte $k-\mu,\ s,\ \dfrac{-r^2+r}{s-r+2}$.

Da die Eigenwerte der Residuen wieder ganzzahlig sind, erhalten wir daraus die Teilerbedingung

(35) $s-r+2 \mid r(s+1)$.

Wir klassifizieren nun die möglichen Graphen nach den Werten von λ und $\bar{\lambda}$, wobei wir in jede Klasse auch das Komplement geben.

(A) $\lambda=\bar{\lambda}=0$. Aus (27) folgt $s=-2$ oder -1, oder s ist Nullstelle der Gleichung $s^2+s-1=0$. Für $s=-2$ erhalten wir C_4, für $s=-1$ das Komplement $\bar{C}_4=K_2+K_2$, und im letzten Fall $C_5=\bar{C}_5$. Alle diese Graphen sind Spin Modelle.

(B) $\lambda=0,\ \bar{\lambda}>0$. Hier gilt

(36) $n=(s(s+3))^2,\ k=s^3+3s^2+s,\ \lambda=0,\ \mu=s^2+s \qquad (s \geqslant 1)$.

Die Graphen aus dieser Klasse heißen *Smith Graphen* [13, 45]. Wir wollen nun zeigen, daß *alle* diese Graphen Spin Modelle sind und eng mit der Existenz von 3-Designs zusammenhängen. Wegen $\lambda=0$ sind alle Residuen $G(\alpha)$ leer und damit trivialerweise stark regulär. Es interessieren also nur die Residuen $G'(\alpha)$.

Sei $\alpha \in X$, $N(\alpha)$ die Nachbarn von α in G, und $N'(\alpha) = X \setminus (N(\alpha) \cup \alpha)$. Wir betrachten das Design $D(\alpha)$, indem wir als Punkte u die Menge $N(\alpha)$ nehmen und als Blöcke B die Menge $N'(\alpha)$ mit $u \in B$ genau dann, wenn u, B in G benachbart sind. Aus der Definition der Parameter von G folgt unmittelbar, daß $D(\alpha)$ ein $2-(k, \mu, \mu-1)$ Design ist, das heißt, $|N(\alpha)| = k$, $|B| = \mu$ und jedes Paar von Punkten ist in genau $\mu - 1$ Blöcken. Aber es gilt mehr. Aus Standardmethoden der Designtheorie schließt man das folgende bemerkenswerte Resultat (siehe z. B. [12]).

Satz 6. *Sei G ein stark regulärer Graph mit Parametern* $k > \mu \geqslant 2, \lambda = 0$. *Dann sind die folgenden Bedingungen äquivalent:*

a) $k = s^3 + 3s^2 + s$, $\mu = s^2 + s$ *für ein* $s \geqslant 1$
b) $G'(\alpha)$ *ist stark regulär für alle* $\alpha \in X$
c) $G'(\alpha)$ *ist stark regulär für ein* $\alpha \in X$.

Jede Bedingung impliziert $n = (r-s)^2$ *und*

d) $D(\alpha)$ *ist ein* $3-(k, \mu, s-1)$ *Design, das heißt jedes Tripel von Punkten ist in genau* $s-1$ *Blöcken. Ferner sind zwei Blöcke in* $D(\alpha)$ *genau dann disjunkt, wenn sie als Ecken in G benachbart sind.*

Ist umgekehrt D ein $3-(k, \mu, s-1)$ *Design mit* $k = s^3 + 3s^2 + s$, $\mu = s^2 + s$ *auf der Punktmenge N und Blockmenge N', so ist der Graph G auf der Eckenmenge* $\alpha \cup N \cup N'$ *definiert wie oben ein stark regulärer Graph.*

Folgerung 3. *Alle Graphen aus Klasse* (B) *und ihre Komplemente sind Spin Modelle.*

(C) $\lambda > 0, \bar{\lambda} > 0, s < -1$ (wegen $r(s+1) \neq 0$). Setzen wir $q = r - s$, so erhalten wir die Parameter

(37) $n = q^2, k = -s(q-1), \lambda = s^2 + 3s + q, \mu = s^2 + s.$

Graphen mit diesen Parametern heißen *Pseudo-Latin-Square Graphen* $PLS_{-s}(q)$ (warum, wird im nächsten Abschnitt klar werden). Man sieht sofort, daß das Komplement eines $PLS_{-s}(q)$ ein Graph $PLS_{r+1}(q)$ ist. Ferner folgt aus (35)

(38) $1 < -s < q, q - 2 \mid (s+1)(s+2).$

(D) $\lambda > 0, \bar{\lambda} > 0, r < -1, s > 0$. Setzen wir $q = s - r$, so erhalten wir die Parameter

(39) $n = q^2, k = s(q+1), \lambda = s^2 + 3s - q, \mu = s^2 + s.$

Graphen mit diesen Parametern heißen *Negativ-Latin-Square Graphen* $NLS_s(q)$. Das Komplement von $NLS_s(q)$ ist ein Graph $NLS_{-r-1}(q)$, und es gilt ferner

(40) $0 < s < q - 1, q + 2 \mid (s+1)(s+2).$

8 Beispiele von Spin Modellen für $m=2$

Wir betrachten nun die Klassen aus dem letzten Abschnitt und versuchen, konkrete Beispiele zu konstruieren, und für jedes Beispiel eine Lösung (t, a) gemäß (30), (31) zu bestimmen.

(A) Das Quadrat C_4 und das Pentagon C_5

Für C_4 ist jedes Paar $(t,\ a=-t^{-1})$ Lösung für $d=-2$. Für C_5 haben wir die Eigenwerte $r=-\tau$, $s=\tau-1$ mit $\tau=\dfrac{1+\sqrt{5}}{2}$, dem goldenen Schnitt. Als Lösung ergibt sich $t=e^{2\pi i/5}$, $a=1$.

(B) Die Smith Graphen

Die Existenz dieser Graphen läuft nach Satz 6 auf die Existenz von $3-(k, \mu, s-1)$ Designs hinaus. Wenn ein solches Design existiert, so ist der Graph G nach Satz 6 vollkommen festgelegt und ergibt ein Spin Modell. Betrachten wir $s=1$, dann erhalten wir die Parameter $n=16$, $k=5$, $\lambda=0$, $\mu=2$. Wir wissen aus Satz 6, daß G folgendermaßen aussieht. Sei $\omega\in X$, $N(\omega)=\{\alpha, \beta, \gamma, \delta, \varepsilon\}$. Dann besteht $N'(\omega)$ aus allen 10 Paaren aus $N(\omega)$, und zwei Paare sind genau dann benachbart, wenn sie disjunkt sind. $G'(\omega)$ ist somit der Petersen Graph (Figur 13).

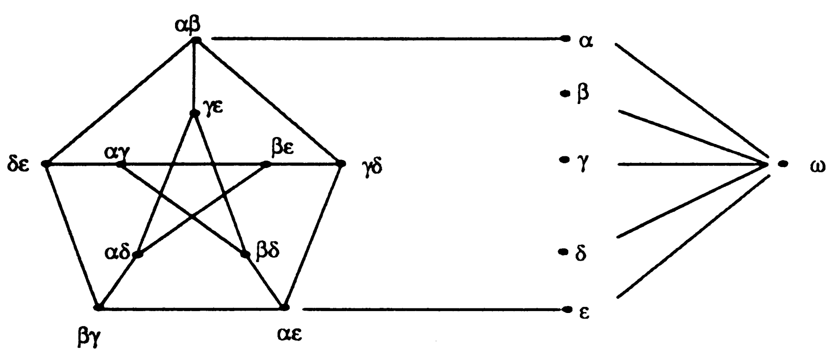

Fig. 13

G heißt der *Clebsch Graph* und ist durch seine Parameter eindeutig bestimmt. Die Eigenwerte sind $r=-3$, $s=1$, und wir erhalten als Lösung $t=a=i$ für $d=4$. Der Clebsch Graph G kann wiederum im Wurzelgitter E_8 realisiert werden. Das Komplement $\bar{G}$ ist der Graph, induziert von den Nachbarn einer festen Ecke des Schläfli Graphen (siehe Abschnitt 6).

Betrachten wir nun $s=2$. Wir erhalten die Parameter $n=100$, $k=22$, $\lambda=0$, $\mu=6$. Nach Satz 6 benötigen wir ein Steiner System $3-(22, 6, 1)$ – und so ein Design gibt es, das *Witt Design* W_{22} [4, 9, 50]. W_{22} durch seine Parameter eindeutig mengruppe von G ist eine sporadische einfache Gruppe, die Higman Sims Gruppe [23]. Daß der Higman Sims Graph Spin Modell ist, wurde von Jaeger entdeckt [20, 26]. Die Eigenwerte sind $r=-8$, $s=2$, und wir erhalten die Lösung $t=i\tau$, $a=i\tau^5$ für $d=10$.

Außer dem Clebsch Graph, Higman Sims Graph und ihren Komplementen sind keine weiteren Spin Modelle in Klasse (B) bekannt. Wie Satz 6 zeigt, führt die Frage nach weiteren Modellen auf ein erstes großes Problem der Kombinatorik, die *Existenz von Designs,* und insbesondere 3-Designs.

(C) Die Pseudo-Latin-Square Graphen

Wir konstruieren eine Klasse von Graphen, die sogenannten *Latin Square Graphen,* welche die Parameter aus (37) aufweisen. Aus diesem Grund heißt ein beliebiger stark regulärer Graph mit den Parametern (37) ein Pseudo-Latin-Square Graph.

Es seien $p-2$ paarweise orthogonale Lateinische Quadrate L_i der Ordnung q gegeben [4, 12, 38]. Eine *Transversale* T eines Lateinischen Quadrates L ist jede Menge von q Feldern, in denen ein festes Element vorkommt. Jedes Quadrat L_i ergibt somit eine Transversalzerlegung $\mathscr{T}_i$ der q^2 Felder. Nehmen wir die Zeilen –

Aus der Designtheorie [4] weiß man, daß orthogonale Lateinische Quadrate sogenannten *Netzen* entsprechen, und daß insbesondere die Existenz von *bzw.*

a′) *Es existiert eine reguläre Hadamard Matrix H der Ordnung* $4s^2$, $HJ=-2sJ$, $s>0$.

b′) *Es existiert ein Graph* $NLS_s(2s)$.

Für $q=2^{2m}$ ist eine Konstruktion regulärer Hadamard Matrizen bekannt, welche Spin Modelle ergeben [43]. Sei $Q:[GF(2)]^{2m}\to GF(2)$ eine quadratische Form, deren zugeordnete (symplektische) Form $B(x, y)=Q(x)+Q(y)+Q(x+y)$ nicht ausgeartet ist. Die $(2^{2m}\times 2^{2m})$-Matrix H indiziert durch $[GF(2)]^{2m}$ mit $H(x, y)=(-1)^{Q(x+y)}$ ist eine Hadamard Matrix, deren zugeordneter Graph wie in Satz 8 lokal stark regulär, also Spin Modell ist. Wegen $r=-s$ lautet die Gleichung (30)

$$s^2+(s+1)^2+(t^2+t^{-2})s(s+1)=1,$$

und wir erhalten die Lösung $t=i$, $a=-i$.

Abgesehen von diesen Beispielen sind keine weiteren Spin Modelle in den Klassen (C) und (D) bekannt, und einige Autoren halten die folgende Vermutung für plausibel:

Vermutung. Abgesehen von den Gittergraphen und ihren Komplementen existieren Spin Modelle in den Klassen (C) und (D) nur für $q=-2s$ bzw. $q=2s$, s gerade.

Mit dieser Vermutung sind wir also bei einem dritten großen Problem der Kombinatorik angelangt: *Existenz von Hadamard Matrizen* und insbesondere regulären Hadamard Matrizen.

Literatur

[1] Aigner, M.: Combinatorial Theory. Springer-Verlag 1977

[2] Bannai, E.; Bannai, E.: Generalized spin models and association schemes. Mem. Fac. Sci. Kyushu Univ. Ser. A**47** No. 2 (1993) 397–409

[3] Baxter, R.: Exactly Solved Models in Statistical Mechanics. Academic Press 1982

[4] Beth, T.; Jungnickel, D.; Lenz, H.: Design Theory. Bibliographisches Institut 1985

[5] Biggs, N. L.: Algebraic Graph Theory. Cambridge Tracts in Mathematics 67. Cambridge Univ. Press 1974

[6] Birman, J. S.: Braids, Links and Mapping Class Groups. Princeton Univ. Press 1974

[7] Bose, R. C.; Mesner, D. M.: On linear associative algebras corresponding to association schemes of partially balanced designs. Ann. Math. Stat. **30** (1959) 21–38

[8] Brandt, R. D.; Lickorish, W. B. R.; Millett, K. C.: A polynomial invariant for unoriented knots and links. Invent. Math. **84** (1986) 563–573

[9] Brouwer, A.; Cohen, A. E.; Neumaier, A.: Distance-Regular Graphs. Springer-Verlag 1989

[10] Brylawski, T. H.; Oxley, J. G.: The Tutte polynomial and its applications. In: Matroid Theory Vol. 3 (N. White, ed.). Cambridge Univ. Press 1991, 123–225

[11] Burde, G.; Zieschang, H.: Knots. De Gruyter 1985

[12] Cameron, P. J.; Van Lint, J .H.: Designs, Graph, Codes and their Links. London Math. Soc. Student Texts 22. Cambridge Univ. Press 1991

[13] Cameron, P. J.; Goethals, J. M.; Seidel, J. J.: Strongly regular graphs having strongly regular subconstituents. J. Algebra **55** (1978) 257–280

[14] Conway, J. H.: An enumeration of knots and links. Computational Problems in Abstract Algebra (J. Leech, ed.). Pergamon Press 1969, 329–358
[15] Freyd, P.; Yetter, D.; Hoste, J.; Lickorish, W. B. R.; Millett, K. C.; Ocneanu, A.: A new polynomial invariant of knots and links, Bull. Amer. Math. Soc. **12** (1985) 239–246
[16] Godsil, C. D.: Algebraic Combinatorics. Chapman and Hall 1993
[17] Goethals, J. M.; Seidel, J. J.: Orthogonal matrices with zero diagonal. Can. J. Math. **19** (1967) 1001–1010
[18] Goethals, J. M.; Seidel, J. J.: Strongly regular graphs derived from combinatorial designs. Canad. J. Math. **22** (1970) 597–614
[19] Goethals, J. M.; Seidel, J. J.: The regular two-graph on 276 vertices. Discrete Math. **12** (1975) 143–158
[20] de la Harpe, P.: Spin models for link polynomials, strongly regular graphs and Jaeger's HS-model. Pacific J. Math. **162** (1994) 57–96
[21] de la Harpe, P.; Kervaire, P.; Weber, C.: On the Jones Polynomial. Enseign. Math. **32** (1986) 271–335
[22] de la Harpe, P.; Jones, V. F. R.: Paires des sous-algèbres semi-simples et graphes fortement reguliers. C. R. Acad, Sci. Paris, Sèrie I **311** (1990) 147–150
[23] Higman, D. G.; Sims, C. C.: A simple group of order 44352000. Math. Z. **105** (1968) 110–113
[24] Jaeger, F.: On Tutte polynomials and link polynomials. Proc. Amer. Math. Soc. **103** (1988) 647–654
[25] Jaeger, F.: Graph colourings and link invariants. In: Graph Colourings (R. Nelson, R. J. Wilson, eds.) 1990, 97–114
[26] Jaeger, F.: Strongly regular graphs and spin models for the Kauffman polynomial. Geom. Dedicata **44** (1992) 23–52
[27] Jones, V. F. R.: A polynomial invariant for knots via von Neumann algebras. Bull. Amer. Math. Soc. **12** (1985) 103–111
[28] Jones, V. F. R.: On knot invariants related to some statistical models. Pac. J. Math. **137** (1989) 311–334
[29] Jones, V. F. R.: Subfactors and knots. CBMS Regional Conference Series Math. 80. Amer. Math. Soc. 1991
[30] Kauffman, L. H.: State models and the Jones polynomial. Topology **26** (1987) 395–407
[31] Kauffman, L. H.: Statistical mechanics and the Jones polynomial. Contemp. Math. **78** (1988) 263–297
[32] Kauffman, L. H.: New invariants in the theory of knots. Amer. Math. Monthly **95** (1988) 195–242
[33] Kauffman, L. H.: An invariant of regular isotopy. Trans. Amer. Math. Soc. **318** (1990) 417–471
[34] Lickorish, W. B. R.; Millett, K. C.: A polynomial invariant of oriented links. Topology **26** (1987) 107–141
[35] Lickorish, W. B. R.: Polynomials for links. Bull. London Math. Soc. **208** (1988) 558–588
[36] Lickorish, W. B. R.; Millett, K. C.: The new polynomial invariants of knots and links. Math. Magazine **61** (1988) 3–23
[37] Lipson, A. S.: Some more state models for link invariants. Pac. J. Math. **152** (1992) 337–346
[38] MacWilliams, F. J.; Sloane, N. J. A.: The Theory of Error Correcting Codes. North-Holland 1977
[39] Mesner, D. M.: A new family of partially balanced incomplete block designs with some Latin square properties. Ann. Math. Stat. **38** (1967) 571–581
[40] Murasugi, K.: Jones polynomials and classical conjectures in knot theory. Topology **26** (1987) 187–194
[41] Neumaier, A.: Duality in coherent configurations. Combinatorica **9** (1989) 59–67
[42] Reidemeister, K.: Knotentheorie. Nachdruck. Springer-Verlag 1974
[43] Seidel, J. J.: A survey of two-graphs. In: Proc. Intern. Coll. Teorie Combinatorie. Acad. Nat. Lincei Roma 1976, 481–511
[44] Seidel, J. J.: Strongly regular graphs. In: Survey of Combinatorics (Bollobás ed.). Cambridge Univ. Press 1979, 157–180
[45] Smith, M. S.: On rank 3 permutation groups. J. Algebra **33** (1975) 22–42

[46] Thistlethwaite, M. B.: A spanning tree expansion of the Jones polynomial. Topology **26** (1987) 296–309
[47] Turaev, V.: The Yang-Baxter equations and invariants of links. Invent. Math. **92** (1988) 527–553
[48] Tutte, W. T.: On dichromatic polynomials. J. Combinatorial Theory **2** (1967) 301–320
[redacted]
Math. **124** (1994) 251–269
[50] Witt, E.: Über Steinersche Systeme. Abh. Math. Sem. Hamburg Univ. **12** (1938) 265–275

Prof. Dr. Martin Aigner
Freie Universität Berlin
Institut für Mathematik II
Arnimallee 3
14195 Berlin

Prof. Dr. J. J. Seidel
Technical University Eindhoven
Dept. of Mathematics and Computer Science
P.O. Box 513
N-5600 MB Eindhoven

(*Eingegangen 4. 11. 1994*)

Jber. d. Dt. Math.-Verein. 97 (1995) 97–114

Mathematics Subject Classification: 41 A 17, 46 A 35, 47 G 30, 65 F 10, 65 F 35, 65 J 10, 65 N 12, 65 Y 20

Multiskalen-Methoden und Wavelets – Konzepte und Anwendungen

W. Dahmen, Aachen

1 Einleitung

Mit der enorm gesteigerten Leistung digitaler Rechenanlagen ist der Anwendungsgrad und damit einher die Bedeutung der numerischen Simulation in technischen Anwendungsbereichen drastisch gewachsen. Die zugrundeliegende mathematische Modellierung beruht häufig auf der Formulierung von Differential- oder Integralgleichungen, deren Diskretisierung (gegebenenfalls nach Linearisierung) auf *große* lineare Gleichungssysteme führt. Bei komplexen realistischen Prozessen bedeutet „groß" möglicherweise mehrere millionen Unbekannte, so daß man auch beim derzeitigen Stand der Rechnertechnologie auf ernsthafte Herausforderungen in Hinsicht auf akzeptable Durchführbarkeit derartiger Simulationen trifft. Ein Kernanliegen des *Wissenschaftlichen Rechnens* ist somit, die Bereiche der Berechenbarkeit im Hinblick auf Komplexität zu erweitern. Hierzu bieten sich verschiedene Ansatzebenen. Selbstverständlich ist in einer enorm schnelllebigen Wechselwirkung zwischen Rechnerarchitekturentwicklung und der Handhabung ständig wachsender Datenmengen die Informatik in natürlicher Weise gefordert. Eine wichtige Antwort ist sicherlich mit dem Stichwort *Paralleles Rechnen* angesprochen.

Allerdings wird man in einer solchen rein datenorientierten Sichtweise keinen befriedigenden Lösungsweg finden. Vielmehr scheint es nach derzeitigem Stand der Dinge unumgänglich zu sein, die numerischen Verfahren selbst schon im Vorfeld bezüglich Stabilität und Komplexität zu optimieren. Grob gesprochen heißt hier (asymptotisch) *optimal* (a.o.), daß ein Verfahren die Lösung innerhalb einer gewünschten Genauigkeit mit einem Speicher- und Rechenaufwand liefert, der *proportional* zur Problemgröße also zur Anzahl der Unbekannten bleibt. Bei den obengenannten Größenordnungen ist der Effekt dieser Bedingung oft weitaus stärker als etwa die Parallelisierung eines nicht-optimalen Verfahrens. Nun ist die Forderung nach Optimalität im obigen Sinne offensichtlich eine sehr starke Bedingung, die für beliebige Gleichungssysteme sicherlich nicht erfüllbar ist. Entsprechend stoßen die Methoden der klassischen Numerischen Linearen Algebra hier auf Grenzen. Man sieht vielmehr leicht ein, daß sich asymptotische Optimalität nur realisieren läßt, wenn man Information über das zugrundeliegende analytische Modell benutzt und letztlich auch grundlegende Operationen wie Matrix-Vektor-Multiplikation approximativ interpretiert.

Bekannte Beispiele solcher *analysisbasierter Methoden* lassen sich zum Beispiel unter den Stichworten Multigrid-, Multilevel-Methoden, Wavelets oder Multipolentwicklungen ansprechen. Auf die eine oder andere Art ziehen alle diese Ansätze essentiellen Nutzen aus der Interaktion verschiedener *(Diskretisierungs-) Skalen.* Dies wiederum bildet die Grundlage zur Einbeziehung *adaptiver* Techniken, mit denen sich höhere Diskretisierungstiefe dort lokalisieren läßt, wo sie erforderlich ist, eine insgesamt balancierte Genauigkeit bei minimalem Aufwand zu gewährleisten.

Das Mehrgitterkonzept hat sich als flexible Methodologie erwiesen, die für eine große Klasse von Problemen a.o. Verfahren liefert [H]. In den letzten Jahren haben *Multilevel-Verfahren* großes Interesse erregt. Sie haben sich bei symmetrischen elliptischen Problemen in der Gestalt vorkonditionierter Konjugierte-Gradienten-Verfahren ebenfalls als a.o. erwiesen [BPX, DK, O1, O2]. Beide Verfahrenstypen lassen sich als multiplikative bzw. additive Korrekturverfahren interpretieren [GO, Y], bei denen Feinstruktur sukzessive mit steigender Diskretisierungstiefe aufdatiert wird. Letzteres ist ebenfalls ein Kerngedanke des *Wavelet*-Konzepts, das völlig unabhängig während der letzten Jahre vornehmlich im Hinblick auf Anwendungen im Bereich Signalanalyse und Datenkompression entwickelt wurde [Dau, Ma, M1]. Nichtsdestoweniger legen die strukturellen Parallelen nahe, die Verwendbarkeit von Waveletkonzepten als mögliche Diskretisierungshilfsmittel auch im Bereich numerische Behandlung von Operatorgleichun-

In Abschnitt 3 wird ein allgemeiner Rahmen für Multiskalenzerlegungen
beschrieben und insbesondere die Rolle verschiedener Stabilitätsbegriffe und

zu schreiben, wobei Q^* die Adjungierte von Q_j (bezügl. $\langle\cdot,\cdot\rangle$) ist. Das Verfahren heißt (s, r)-stabil, falls

$$(2.5) \qquad \|Q_j^* A v_j\|_{H^{s-r}} \gtrsim \|v_j\|_{H^s}, \qquad v_j \in S_j.$$

Gelten für die Räume S_j gewisse *direkte Ungleichungen* für die Approximationsgüte sowie *inverse Ungleichungen,* wie später zu präzisieren ist, so kann man für eine große Klasse von Problemen zeigen, daß unter der Voraussetzung (2.2) das Verfahren (2.4) (s, r)-stabil in einem Bereich für s ist, der von der Ordnung r des Operators A und von obigem Ungleichungspaar abhängt. Insbesondere erhält man Fehlerabschätzungen des Typs

$$(2.6) \qquad \|u - u_j\|_{H^\tau} \lesssim 2^{j(\tau - v)} \|u\|_{H^v}$$

die wiederum für einen gewissen Bereich $\tau \leqslant v, r/2 \leqslant v$ gelten, wobei u und u_j die Lösungen von (2.1) bzw. (2.4) sind [DPS].

Insofern ist unter derartigen Bedingungen gesichert, daß sich für obige allgemeine Problemklasse prinzipiell Näherungslösungen mit beliebiger Genauigkeit bestimmen lassen. Es stellt sich somit die Aufgabe, diese Näherungen mit einem vertretbaren Aufwand zu gewinnen. Welche wesentlichen Probleme in diesem Zusammenhang auftreten, soll an zwei Beispielklassen im folgenden etwas genauer gekennzeichnet werden.

2.2 Elliptische Randwertprobleme

Sei Ω ein beschränktes Gebiet in $\mathbb{R}^d$ mit hinreichend glattem Rand. Für $s = r/2 \in \mathbb{N}$ sei A ein Differentialoperator der Ordnung r und $H^{r/2} = H_0^{r/2}(\Omega)$ der Abschluß der unendlich oft differenzierbaren Funktionen mit kompaktem Träger in Ω bezüglich der üblichen Sobolevnorm der Ordnung $r/2$. Ferner definiere

$$a(u, v) := \int_\Omega Au(x)v(x)dx =: \langle Au, v\rangle$$

eine stetige, *symmetrische,* $H^{r/2}$-elliptische Bilinearform, d. h.

$$(2.7) \qquad a(\cdot,\cdot) \sim \|\cdot\|^2_{H^{r/2}}.$$

Ein typisches Beispiel ist $A := -\nabla \cdot (C(x)\nabla)$, wobei $C(x)$ eine auf Ω positiv definite Matrix ist.

Wählt man Basen für S_j von Funktionen mit kompaktem Träger, führt (2.3) auf lineare Gleichungssysteme

$$(2.8) \qquad \mathbf{A}_j \mathbf{u}_j = \mathbf{f}_j$$

mit dünnbesetzten und symmetrisch positiv definiten Systemmatrizen $\mathbf{A}_j$. Bei drei Ortsvariablen $d = 3$ und hinreichend kleiner Gitterweite h_j verbietet die Größe der Matrizen im allgemeinen den Einsatz *direkter* Lösungsverfahren. Zum einen würde die Anzahl der erforderlichen Rechenoperationen unakzeptabel groß, zum anderen füllen sich im Laufe der Elimination die ursprünglich dünnbesetzten Matrizen allmählich auf, so daß sich auch der Speicherbedarf überproportional erhöht.

Als Alternative kommen *iterative* Verfahren in Frage, bei denen sich der Speicherbedarf nicht wesentlich erhöht. Da jeder Iterationsschritt aufgrund der Dünnbesetztheit größenordnungsmäßig so viele Operationen wie Unbekannte erfordert, müßte jede Iteration, um Optimalität im obigen Sinne zu gewährleisten, den Fehler um einen Faktor reduzieren, der unabhängig von der Größe der Matrix angeben. Diese Bedingung wird sich als essentiell für die Matrixkompression erweisen. Sie kann auch noch gelten, wenn der Operator kein Pseudo-Differentialoperator mehr ist.

Es gibt eine Vielzahl von Anwendungsbeispielen, die in den obigen Rahmen fallen. Etwa das als *Radiosity* bezeichnete Illuminationsmodell, das man zur photorealistischen Computervisualisierung vor allem diffuser Effekte verwenden kann, beruht auf der Lösung einer Integralgleichung über Ω, wobei der Integralkern obige Eigenschaften hat, und Ω die durch die Szenengegenstände definierte Oberfläche ist [GSCH, Ka]. Andere Beispiele treten bei Streuproblemen oder in der Verformungstechnik auf. Hierbei wird ein Randwertproblem für eine lineare partielle Differentialgleichung auf eine Integralgleichung auf dem Rand des Gebiets transformiert [CS, CW]. Letztere läßt sich numerisch wieder mit Hilfe von Galerkin- oder Kollokationsverfahren lösen. Soll insbesondere die ursprüngliche Randwertaufgabe auf dem *Außenraum* eines Kompaktums gelöst werden, hat diese *Randelementmethode* folgende Vorteile.

> Statt eines Problems auf einem dreidimensionalen unbeschränkten Gebiet ist nur noch ein Problem auf einem zweidimensionalen Kompaktum zu lösen.

Dem steht allerdings als Nachteil der Umstand gegenüber, daß entsprechende Matrizen im allgemeinen *vollbesetzt* sind, auch wenn man Ansatzfunktionen mit kleinen Trägern benutzt. Bei zweidimensionalen Oberflächen mit komplexer Struktur kann dies für die Durchführbarkeit des Verfahrens entscheidend sein. Abgesehen von dem für $r \neq 0$ auch hier auftretenden Konditionsproblem stellt sich als möglicher Ausweg die Aufgabe, eine zumindest *approximativ dünnbesetzte* Diskretisierung des Operators A zu finden.

Ein einfaches Beispiel läßt sich folgendermaßen beschreiben [DKPS]. Für ein gegebenes beschränktes Gebiet $\Omega \subset \mathbb{R}^3$ betrachte man die Randwertaufgabe

$$(2.11) \quad \Delta U = 0 \quad \text{auf} \quad \mathbb{R}^3 \setminus \Omega, \quad U|_{\partial\Omega} = f.$$

Die Lösung von (2.11) ist durch

$$(2.12) \quad U(x) = \frac{1}{4\pi} \int_{\partial\Omega} \frac{n_y \cdot (x-y)}{|x-y|^3} u(y)\,dy, \qquad x \in \Omega,$$

gegeben, falls u die Operatorgleichung

$$Au = f \qquad A = I + 2W$$

löst. Ist insbesondere Ω ein polyhedrales Gebiet und bezeichnet $\theta_\Omega(x)$ den Innenwinkel an der Stelle x, ist der Operator W durch das Doppelschichtpotential

$$(2.13) \quad Wu(x) := [1/2 - \theta_\Omega(x)]u(x) + \frac{1}{4\pi} \int_{\partial\Omega} \frac{n_y \cdot (x-y)}{|y-x|^3} u(y)\,dy,$$

gegeben (vgl. [Maz]). Hier ist n_y die innere Normale zur Gebietsoberfläche am

Polyhedrons. Er ist zwar kein Pseudo-Differentialoperator mehr, jedoch ein Calderón-Zygmund-Operator (der Ordnung $r=0$) (vgl. [M2]) und erfüllt somit immer noch eine Bedingung des Typs (2.10).

3 Multiskalen-Zerlegungen

Man kann nicht erwarten, aus der Restriktion des Operators A auf einen einzelnen endlichdimensionalen Raum (noch so großer Dimension) hinreichend genaue Information über die Lösung von (2.1) zu gewinnen. Man kann hingegen hoffen, aus der Wirkung von A auf eine *Folge* von Räumen asymptotische Eigenschaften extrahieren zu können.

3.1 Ein allgemeiner Rahmen

Allgemein betrachte man eine aufsteigende dichte Folge $\mathcal{S}$ von abgeschlossenen, geschachtelten Teilräumen S_j eines Hilbertraumes H

$$\ldots \subset S_0 \subset S_1 \subset S_2 \subset \ldots H, \qquad \overline{\bigcup_j S_j} = H.$$

Im Hinblick auf praktische Anwendungen ist es sinnvoll zu fordern, daß

$$S_j = \operatorname{span} \Phi_j, \qquad \Phi_j = \{\varphi_{j,k} : k \in I_j\},$$

wobei die Φ_j stabile Basen sind, d. h.

$$\|\mathbf{c}\|_{l_2(I_j)} \sim \|\sum_{k \in I_j} c_k \varphi_{j,k}\|_H. \tag{3.1}$$

Man kann nun nach Möglichkeiten suchen, eine gegebene Approximation $v_n \in S_n$ durch einen Term w_n in einem geeigneten Komplement W_n von S_n in S_{n+1} zu verbessern. Ist $\Psi^n = \{\psi_{n,k}; k \in J_n\}$ nun eine im Sinne von (3.1) stabile Basis von W_n, läßt sich jedes $v_n \in S_n$ einerseits in der *Einzelskalendarstellung*

$$v_n = \sum_{k \in I_n} c_k \varphi_{n,k} \tag{3.2}$$

als auch andererseits als *Multiskalendarstellung*

$$v_n = \sum_{j=-1}^{n-1} \sum_{k \in J_j} d_{j,k} \psi_{j,k} \tag{3.3}$$

schreiben, wobei $\Psi_{-1} := \Phi_0, J_{-1} := I_0$.

Hierarchische Basen sind ein einfaches Beispiel im Finite-Elemente-Kontext [Y]. Die systematischsten Konstruktionsprinzipien stehen für den Fall $H = L_2(\mathbb{R}^d)$ und $\varphi_{j,k} = 2^{dj/2}\varphi(2^j \cdot - k), k \in \mathbb{Z}^d$, zur Verfügung. In diesem Fall gilt $v \in S_j$, genau dann wenn $v(2^{-j}\cdot) \in S_0$. Entsprechend reicht es, das Komplement W_0 zu definieren. Man sieht leicht ein, daß W_0 durch die ganzzahligen Translate von $2^d - 1$ Funktionen

$$\psi_e = \sum_{k \in \mathbb{Z}^d} a_k^e \varphi(2 \cdot - k), \qquad e \in \{0,1\}^d \setminus \{0\}, \tag{3.4}$$

erzeugt ist. Die Konstruktion geeigneter zusätzlicher Masken $\{a_k^e\}_{k\in\mathbb{Z}^d}$, $e\in\{0,1\}^d\setminus\{0\}$, verlangt, den gegebenen Zeilenvektor mit Einträgen $\sum_{k\in\mathbb{Z}^d} a_{2k+e}z^k$, $e\in\{0,1\}$, zu einer quadratischen Matrix zu ergänzen, deren Einträge Laurent-Polynome sind und deren Determinante zumindest auf dem Torus nicht verschwindet. Falls obige Ausgangspolynome auf $(\mathbb{C}\setminus\{0\})^d$ keine gemeinsamen Nullstellen haben, sichert der Satz von Quillen-Suslin, daß man Matrixergänzungen mit konstanter Determinante finden kann (vgl. [JM]). Wählt man speziell das Komplement W_0 als orthogonales Komplement von S_0 in S_1, nennt man die ψ_e [illegible]

er sich nicht leicht für beschränkte Gebiete oder geschlossene Oberflächen nutzen läßt. In solchen Fällen ist es meist schwierig, orthogonale Zerlegungen mit vertretbarem Aufwand zu konstruieren. Entsprechende Konstruktionen haben daher stets spezielleren Charakter.

Hat man nun solche Komplementbasen zur Verfügung und möchte explizit mit der Multiskalendarstellung arbeiten, hat man letztlich Transformationen des Typs

$$\text{(3.5)} \qquad \mathbf{T}_n : \mathbf{d} \mapsto \mathbf{c}$$

auszuführen, wobei **c** bzw. **d** die Koeffizientenvektoren aus den Darstellungen (3.2) bzw. (3.3) sind. Als wesentliche Forderungen an die *Multiskalen-Transformationen* $\mathbf{T}_n$ ergeben sich dabei *wobei*

$$(3.7)\qquad \|v\|_H \sim \left(\sum_{j=-1}^{\infty} \sum_{k\in J_j} |d_{j,k}(v)|^2 \right)^{1/2}.$$

(iii) *Es existiert eine* biorthogonale *Riesz-Basis* $\tilde{\Psi}$, *d. h.* $\langle \psi_{j,k}, \tilde{\psi}_{j',k'} \rangle = \delta_{(j,j'),(k,k')}$, *und* $d_{j,k}(v) = \langle v, \tilde{\psi}_{j,k} \rangle$.

Eigenschaft (iii) in Bemerkung 3.1 besagt gerade, daß die Abbildungen

$$(3.8)\qquad Q_{n+1} f := \sum_{j=-1}^{n} \sum_{k\in J_j} \langle f, \tilde{\psi}_{j,k} \rangle \psi_{j,k}, \qquad Q^*_{n+1} f := \sum_{j=-1}^{n} \sum_{k\in J_j} \langle f, \psi_{j,k} \rangle \tilde{\psi}_{j,k}$$

dann offenbar zueinander adjungierte Projektoren mit Bildern S_{n+1} bzw. $\tilde{S}_{n+1}$ sind [illegible]

Wegen (3.7) sind die Q_n, Q_n^* gleichmäßig beschränkt. Ferner erfüllen sie

$$(3.9)\qquad Q_j Q_n = Q_j, \qquad \text{für alle } j \leqslant n.$$

Bemerkung 3.2. *Folgende Aussagen sind äqivalent:*

(i) $\mathcal{Q}$ *erfüllt* (3.9).

(ii) *Die Bilder* $\tilde{\mathcal{S}}$ *der adjungierten Projektoren sind auch geschachtelt.*

(iii) *Die Abbildungen* $Q_{j+1} - Q_j$ *sind auch Projektoren.*

Für eine Folge $\mathcal{Q}$ von linearen gleichmäßig beschränkten Projektoren, die (3.9) erfüllen, stellt somit die in der Norm konvergierende Entwicklung

$$(3.10)\qquad v = \sum_{j=0}^{\infty} (Q_j - Q_{j-1}) v \qquad (Q_{-1} = 0),$$

eine Zerlegung von v in direkte Summanden dar, die typischerweise zunehmendes *Detail* von v repräsentieren. Das Problem, stabile Multiskalenbasen Ψ und somit gutkonditionierte Transformationen $\mathbf{T}_n$ zu konstruieren, läßt sich nun in folgende Teilaufgaben zerlegen:

(I) Zu gegebenem $\mathcal{S}$ finde $\mathcal{Q}$, das (3.9) erfüllt. Wegen Bemerkung 3.2 (ii) bedeutet dies, zu den Φ_j biorthogonale Basen $\tilde{\Phi}_j$ zu konstruieren, die wieder geschachtelte Räume erzeugen.

(II) Bestimme stabile Basen Ψ^j für die Komplementräume $W_j := (Q_{j+1} - Q_j) S_{j+1}$, so daß man über explizite Darstellungen der Details

$$(3.11)\qquad (Q_{j+1} - Q_j) v = \sum_{k\in J_j} d_{j,k}(v) \psi_{j,k}$$

verfügen kann.

(III) [illegible]

Reihe praktikabler Kriterien bekannt, die wesentlichen Gebrauch von Fouriertransformations-Techniken machen [CDM, CD]. Falls etwa aufgrund beschränkter Gebiete derartige Hilfsmittel nicht zur Verfügung stehen, sind diese Konvergenzfragen im allgemeinen recht schwierig. Falls jedoch die Φ_j über Modifikationen des stationären Falls gewonnen werden, etwa um Gebietsränder zu berücksichtigen, lassen sich die Grenzwertbetrachtungen zur Konstruktion der $\tilde{\Phi}_j$ vermeiden [CDD].

(II) hängt stark von der konkreten Situation ab. Verschiedene Möglichkeiten werden in [CDP] diskutiert.

Sobald man den Rahmen orthogonaler Komplemente verläßt, ist (III) meist das schwierigere Problem. Im Falle (3.4) und $H=L_2(\mathbb{R}^d)$ läßt sich die

3.2 Sobolev-Normen

Speziell ist natürlich der Fall $H=H^s(\Omega)$ oder $H=H_0^s(\Omega)$ und insbesondere $H=L_2(\Omega)$ von Interesse. Die Rolle des Moduls ω kann dann zum Beispiel von den klassischen L_2-Glattheitsmodulen (bzw. geeigneten Modifikationen) übernommen werden, deren Ordnung die Regularitäts- und Approximationseigenschaften der Räume $\mathscr{S}$ wiederspiegelt. Es zeigt sich, daß (3.13) unter gewissen Voraussetzungen an den Rand des Gebiets Ω zu folgendem Paar von Ungleichungen äquivalent ist:

$$(3.14)\quad \inf_{v_n\in S_n} \|v-v_n\|_{L_2(\Omega)} \lesssim 2^{-nt}\|v\|_{H^t(\Omega)}, \qquad v\in H^t(\Omega),\, t\leqslant m,$$

falls in (3.13) ω ein auf Differenzen m-ter Ordnung beruhender L_2-Glattheitsmodul ist, und

$$(3.15)\quad \|v_n\|_{H^t(\Omega)} \lesssim 2^{nt}\|v_n\|_{L_2(\Omega)}, \qquad v_n\in S_n,\, t<\gamma.$$

Man kann dann aus Satz 3.1 ableiten, daß sich die Normäquivalenz (3.12)

[illegible]

definiere

$$\Lambda_s : v \mapsto \sum_{j=0}^{\infty} 2^{sj}(Q_j - Q_{j-1})v.$$

Satz 3.2. *Sei $\mathscr{Q}$ eine auf $L_2(\Omega)$ gleichmäßig beschränkte Folge von linearen Projektoren mit geschachtelten Bildern $\mathscr{S}$, die* (3.9) *erfüllt. Gelten* (3.14), (3.15) *für $\mathscr{S}$ und $\tilde{\mathscr{S}}$ bezüglich $m, \tilde{m}\in\mathbb{N}$ und $\gamma, \tilde{\gamma}>0$ ($\gamma\leqslant m$, $\tilde{\gamma}\leqslant \tilde{m}$), so gilt*

$$(3.16)\quad \|\Lambda_s v\|_{H^r(\Omega)} \sim \|v\|_{H^{s+r}(\Omega)}, \qquad s+r\in(-\tilde{\gamma},\gamma),$$

so daß für $s\in(-\tilde{\gamma},\gamma)$

$$(3.17)\quad \|v\|_{H^s(\Omega)} \sim \left(\sum_{j=0}^{\infty} 2^{2sj}\|(Q_j-Q_{j-1})v\|^2_{L_2(\Omega)}\right)^{1/2} \sim \left(\sum_{j=0}^{\infty} \|(Q_j-Q_{j-1})v\|^2_{H^s(\Omega)}\right)^{1/2}.$$

Aufgrund der Min-Max-Charakterisierung der größten und kleinsten Eigenwerte *symmetrisch* positiv definiter Operatoren ist dies äquivalent zu $\langle u,u\rangle \sim \langle C_j^{1/2} A_j C_j^{1/2} u, u\rangle$ und somit zu

$$(4.2)\qquad \langle C_j^{-1} v, v\rangle \sim \langle A_j v, v\rangle = a(v,v) \sim \|v\|_{H^{r/2}},$$

wobei im letzten Schritt die $H^{r/2}$-Elliptizität (2.7) benutzt wurde. Erfülle nun $\mathscr{S}$ die Bedingungen (3.14), (3.15) für $t > r/2$. Wählt man $\mathscr{Q}$ als orthogonale Projektoren auf $\mathscr{S}$, so gilt (3.9) und $\mathscr{S} = \tilde{\mathscr{S}}$. Definiert man nun

$$(4.3)\qquad C_j^{-1} : \sum_{l=0}^{j} 2^{rl}(Q_l - Q_{l-1}),$$

folgt aus Satz 3.2

$$\langle C_j^{-1} v, v\rangle = \left\langle \sum_{l=0}^{j} 2^{rl/2}(Q_l - Q_{l-1})v, \sum_{l=0}^{j} 2^{rl/2}(Q_l - Q_{l-1})v \right\rangle \sim \|v\|^2_{H^{r/2}}.$$

Wegen (4.2) und der vorhergehenden Bemerkungen bedeutet dies aber gerade

$$(4.4)\qquad \varkappa_2(C_j^{1/2} A_j C_j^{1/2}) = \mathcal{O}(1), \qquad j \to \infty,$$

(vgl. [BPX, DK, O1]).

Die entscheidende Frage ist, wie man C_j effizient auswerten kann. Wegen

$$C_j = \sum_{l=0}^{j} 2^{-rl}(Q_l - Q_{l-1})$$

scheint dies zunächst die Kenntnis expliziter Darstellungen (3.11) für die Elemente der orthogonalen Komplemente zu erfordern. Bereits für stückweis lineare finite Elemente kann die Bereitstellung solcher Basen mit unvertretbarem Aufwand verbunden sein. Tatsächlich läßt sich dies aber über folgende wichtige Beobachtung vermeiden [X]. Man sieht zunächst leicht ein, daß C_j spektral äquivalent zu $\sum_{l=0}^{j} 2^{-rl} Q_l$ ist. Da aber Q_l wiederum zu $\sum_{k\in I_l} \langle v, \varphi_{l,k}\rangle \varphi_{l,k}$ spektral äquivalent ist, genau dann wenn Φ_j stabil ist, verfügt man mit

$$(4.5)\qquad \hat{C}_j v := \sum_{l=0}^{j} 2^{-lr} \sum_{k\in I_l} \langle v, \varphi_{l,k}\rangle \varphi_{l,k}$$

über einen zu C_j spektral äquivalenten Operator, dessen Anwendung, wie sich zeigt, nur $\mathcal{O}(\dim S_j)$ Operationen erfordert und der asymptotisch optimal ist [O2, X, Y].

In dieser Form wurde zunächst die Gültigkeit der direkten Abschätzung (3.14) vorausgesetzt, was typischerweise auf uniforme Verfeinerungen eines Ausgangsnetzes zugeschnitten ist. Tatsächlich läßt sich dieses Ergebnis aber auf adaptiv lokal verfeinerte Netze übertragen, indem man zum Beispiel geeignete Besovnormen verwendet und die Terme $\|(Q_j - Q_{j-1})v_m\|_{L_2(\Omega)}$ für $j \leqslant m$ direkt abschätzt [DK].

Zunächst scheint also nur die Normäquivalenz in Satz 3.2 wichtig zu sein, während sich die Transformationen $\mathbf{T}_j$ vermeiden lassen. Es stellt sich die Frage, inwieweit sich der Aufwand zur Bestimmung expliziter Basen überhaupt lohnen wird.

Im folgenden werden einige Gesichtspunkte angesprochen, unter denen stabile Multiskalen-Basen dennoch Vorteile versprechen.

Im Hinblick auf das Problem der Vorkonditionierung mögen $\mathscr{S}$ und $\mathscr{Q}$ die Voraussetzungen von Satz 3.2 für $\gamma, \tilde{\gamma} > r/2$ erfüllen, wobei hier die Q_j nicht notwendig orthogonale Projektoren sind. Für $w_j = \Lambda_{r/2} v_j$ erhält man wegen (2.5)

$$\|w_j\|_{L_2(\Omega)} \sim \|v_j\|_{H^{r/2}} \sim \|Q_j^* A v_j\|_{H^{-r/2}} \sim \|\Lambda^*_{-r/2} Q_j^* A Q_j \Lambda_{-r/2} w_j\|_{L_2(\Omega)}.$$

Bezeichnet man mit A_{Ψ_j} die Steifigkeitsmatrix von A bezüglich der Basis $\Psi_j := \bigcup_{l=-1}^{j-1} \Psi^l$, so ist die Matrixdarstellung des Operators $\Lambda^*_{-r/2} Q_j^* A Q_j \Lambda_{-r/2}$ gerade

$$B_j := D_j^{-r/2} A_{\Psi_j} D_j^{-r/2}, \tag{4.6}$$

wobei D_j^s eine Diagonalmatrix der Form $(D_j^s)_{(l,k),(l',k')} = 2^{sl} \delta_{l,l'} \delta_{k,k'}, l, l' < j, k \in J_l$, $k' \in J_{l'}$ ist. Aus Satz 3.2 folgt wiederum sofort

Satz 4.1. *Unter obigen Annahmen gilt*

$$\|\mathbf{B}_j\|_2 \|\mathbf{B}_j^{-1}\|_2 = \varkappa_2(\mathbf{B}_j) = \mathcal{O}(1), \qquad j \to \infty.$$

Hierbei ist allerdings zu beachten, daß im Gegensatz zum vorher beschriebenen Zugang *schwächere* Voraussetzungen an A reichen:

A muß *nicht* notwendig symmetrisch sein. A kann *negative* Ordnung haben.

Man kann dann allerdings nicht mehr auf eine Realisierung des Typs (4.5) zurückgreifen. Alternativ kann man folgendermaßen vorgehen. Falls A ein Operator mit globalem Schwarzkern ist, so daß Steifigkeitsmatrizen im allgemeinen voll besetzt sind, wird man diese sofort bezüglich der Multiskalenbasis Ψ_n bilden. Wie sich später zeigen wird, hat dies noch besondere Vorteile für eine große [illegible]

Klasse von Operatoren. Die Vorkonditionierung beschränkt sich wegen (4.6) auf

4.2 Matrix-Kompression

Wir betrachten jetzt eine Anwendung, bei der die explizite Verfügbarkeit von stabilen Multiskalen-Basen wesentliche Vorteile bietet. Zum Beispiel

$$\begin{aligned}\langle A\psi_{j,k},\psi_{j',k'}\rangle &= \int_\Omega\int_\Omega K(x,y)\psi_{j',k'}(x)\psi_{j,k}(y)dxdy\\ &= \int_\Omega\int_\Omega (K(x,y)-p(x,y))\psi_{j',k'}(x)\psi_{j,k}(y)dxdy.\end{aligned}$$

Wenn immer der Kern K in einer Umgebung von x,y hinreichend glatt ist, kann man p als Taylor-Polynom um $(x_{j',k'},y_{j,k})\in \operatorname{supp}\psi_{j',k'}\times\operatorname{supp}\psi_{j,k}$ wählen und erhält

$$K(x,y)-p(x,y)\sim\sum_{|\alpha|,|\beta|=n}(x-x_{j',k'})^\alpha(y-y_{j,k})^\beta\partial_x^\alpha\partial_y^\beta K(x_{j',k'},y_{j,k}).$$

Elementare Abschätzungen unter Ausnutzung von (2.10) ergeben schließlich Abschätzungen des Typ [DPS, PS]

$$|\langle A\psi_{l,k},\psi_{l',k'}\rangle|\lesssim 2^{-(l+l')d/2-2n}\operatorname{dist}(\Omega_{l,k},\Omega_{l',k'})^{-(d+r+2n)}.$$

Darauf aufbauend kann man folgender groben Vorgehenskizze folgen, um schließlich zu Stabilitäts- und Konvergenzaussagen zu kommen.

– An obige A-priori-Abschätzungen für die Einträge werden Abschneideregeln angepaßt, die vom Verfeinerungsgrad abhängen können.
– Schur-Lemma-Argumente in Verbindung mit der Vorkonditionierung gemäß Satz 4.1 liefern schließlich Normabschätzungen für die Differenz von A_{Ψ_-} und der komprimierten Matrix.
– Approximationseigenschaften führen zu Konsistenzabschätzungen.
– Über Störungsargumente kommt man damit zu Stabilitäts- und Konvergenzbeweisen.

Für Galerkin-Verfahren bei Randintegralgleichungen auf Kurven und glatten Mannigfaltigkeiten Ω sei hierzu auf [DPS, PS] verwiesen. Die Analyse in [DPS1, DPS2] liefert Stabilitäts- und Konvergenzaussagen sogar für verallgemeinerte Petrov-Galerkin-Verfahren, speziell auch für Kollokation für eine große Klasse von Pseudo-Differentialgleichungen auf dem Torus.

In [DKPS] wird eine Implementation eines derartigen Verfahrens für die Doppelschichtpotentialgleichung (2.13) auf geschlossenen zweidimensionalen polyhedralen Oberflächen vorgestellt. Obgleich diese Gebiete nicht glatt sind, bestätigen sich erstaunlich gut die für den Torus gemachten Aussagen bezüglich Kompression, Konvergenz und Effizienz der Lösung der komprimierten Systeme. Dennoch bleibt als Engpaß die Berechnung der Steifigkeitsmatrix. Zunächst etwa in Anlehnung an (4.7) die volle Matrix A_{Φ_j} zu berechnen erzeugt letztlich nicht vertretbare Kosten. Mit Hilfe der A-Priori-Abschätzungen nur die signifikanten Einträge von A_{Ψ_j} zu berechnen, wirft Genauigkeitsprobleme bei der Quadratur auf. Mögliche Verbesserungen werden zur Zeit noch untersucht.

4.3 Weitere Perspektiven

Es haben sich inzwischen eine Reihe weiterer Fälle herausgeschält, in denen stabile Multiskalen-Basen erfolgreich eingesetzt werden können.

Dünne Gitter führen bei relativ geringen Genauigkeitsverlusten zu einer erheblichen Komplexitätsreduktion bei Diskretisierungen zu elliptischen Randwertaufgaben [Z]. Das dahinterstehende Prinzip ist unabhängig in der Approximationstheorie an mehreren Stellen untersucht worden. In [GO2] wird gezeigt, daß Wavelets sich zur Konstruktion von robusten Vorkonditionierern bei anisotropen Problemen auch bei Dünngitterdiskretisierungen mit $d \geqslant 3$ eignen.

Stokes-Gleichungen stellen wichtige Modellprobleme zur Modellierung inkompressibler Flüssigkeiten dar. Klassische Finite-Elemente-Schemata für das Stokes-Problem und gemischte Formulierungen für elliptische Probleme führen auf Sattelpunktsprobleme. Die zugehörigen Matrizen sind indefinit. Die zentrale Voraussetzung für die stabile Lösbarkeit der diskreten Probleme ist, daß die

dung von Konstruktionsprinzipien für biorthogonale Wavelets (vgl. (3.4)) kann man Multiskalen-Basen konstruieren, die die Babuška-Brezzi-Bedingung erfüllen [DKU] oder sogar divergenzfrei sind [L, U]. Insbesondere im letzteren Fall reduziert sich die Aufgabe auf die Behandlung eines elliptischen Problems nach oben erwähnten Mustern, wobei Randbedingungen, die bei Ansatzfunktionen des Typs (3.4) oft Schwierigkeiten bereiten, mit Hilfe von Lagrange-Multiplikatoren angehängt werden können [K]. Ferner erhält man stabile Zerlegungen des Raumes $H(\mathrm{div})$ der Vektorfelder in L_2^d, deren Divergenz in L_2 liegt [U]. Schließlich bleibt zu erwähnen, daß bei Verwendung solcher Basen effiziente und im Prinzip dimensionsunabhängige Verfahren zur Berechnung der Steifigkeitsmatrizen zum Einsatz kommen können [DM].

Durch derartige Konzepte läßt sich natürlich nur dann die gewünschte Effizienz erzielen, wenn das Problem eine Vergröberung über hinreichend viele Skalen zuläßt. Falls dem etwa durch komplizierte Gebietsgeometrien Grenzen gesetzt sind, wird man Gebietszerlegungsmethoden hinzuziehen müssen.

[D1] Dahmen, W.: Some remarks on multiscale transformations, stability and biorthogonality. In: Laurent, P. J.; Le Méhauté, A.; Schumaker, L. L. (eds.): Wavelets, Images and Surface Fitting. A. K. Peters, Wellesley 1994, 157–188

[D2] Dahmen, W.: Stability of multiscale transformation. RWTH Aachen, IGPM Report No. 109, 1994

[DK] Dahmen, W.; Kunoth, A.: Multilevel preconditioning. Numer. Math. **63** (1992) 315–344

[DKPS] Dahmen, W.; Kleemann, B.; Prössdorf, S.; Schneider, R.: A multiscale method for the double layer potential equation on a polyhedron. In: Dikshit, H. P.; Micchelli, C. A. (eds.): Advances in Computational Mathematics. World Scientific 1994, 15–57

[DKU] Dahmen, W.; Kunoth, A.; Urban, K.: Wavelet-Galerkin methods for the Stokes equations. RWTH Aachen, IGPM Report No 111, 1995, erscheint in Computing

[DM] Dahmen, W.; Micchelli, C. A.: Using the refinement equation for evaluating integrals of wavelets. Siam J. Numer. Anal. **30** (1993) 507-537

[DPS1] Dahmen, W.; Prössdorf, S.; Schneider, R.: Wavelet approximation methods for pseudodifferential equations I: Stability and convergence. Math. Z. **215** (1994) 583–620

[DPS2] Dahmen, W.; Prössdorf, S.; Schneider, R.: Wavelet approximation methods for pseudodifferential equations II: Matrix compression and fast solution. Advances in Computational Mathematics **1** (1993) 259–335

[DPS] Dahmen, W.; Prössdorf, S.; Schneider, R.: Multiscale methods for pseudo-differential equations on smooth manifolds. In: Chui, C. K.; Montefusco, L.; Puccio, L. (eds.): Wavelets Theory, Algorithms, and Applications. Academic Press 1994, 385–424

[Dau] Daubechies, I.: Ten Lectures on Wavelets. CBMS-NFS Regional Conference Series in Applied Mathematics **61** (1992)

[GSCH] Görtler, S. J.; Schröder, P.; Cohen, M. F.; Hanrahan, P.: Wavelet radiosity. Proceedings of SIGGRAPH 93, Aug. 1-5, Anaheim, California

[GO] Griebel, M.; Oswald, P.: On the abstract theory of additive and multiplicative Schwarz Schwarz algorithms, erscheint in Numer. Math.

[GO2] Griebel, M.; Oswald, P.: Tensor product type subspace splittings and multilevel iterative methods for anisotropic problems. Advances in Computational Mathematics **4** (1995) 171–206

[H] Hackbusch, W.: Multi-Grid Methods and Applications. Springer Series on Computational Mathematics 4. Springer-Verlag, 1985

[HN] Hackbusch, W.; Nowak, Z. P.: On the fast matrix multiplication in the boundary element method by panel clustering. Numer. Math. **54** (1989) 463–491

[HW] Hildebrandt, S.; Wienholtz, E.: Constructive proofs of representation theorems in separable Hilbert spaces. Comm. and Pure Appl. Math. **17** (1964) 369–373

[JM] Jia, R. Q.; Micchelli, C. A.: Using the refinement equation for the construction of prewavelets II: Powers of two. In: Laurent, P. J.; LeMéhauté, A.; Schumaker, L. L. (eds.): Curves and Surfaces. Academic Press, New York 1991, 209–246

[Ka] Kajiya, J. T.: The rendering equation. Computer Graphics **20** (1986) 143–150

[Ku] Kumano-go, H.: Pseudodifferential Operators. MIT Press, Boston 1981

[K] Kunoth, A.: Multilevel preconditioning – appending boundary conditions by Lagrange Multipliers. Advances in Computational Mathematics **4** (1995) 145–170

[L] Lemarié-Rieusset, P. G.: Analyses multi-résolutions non orthogonales, Commutation entre Projecteurs et Derivation et Ondelettes Vecteurs à divergence nulle. Revista Mat. Iberoamericana **8** (1992) 221–236

[Ma] Mallat, S.: Multiresolution approximation and wavelet orthonormal bases of $L^2(\mathbb{R})$. Trans. Amer. Math. Soc. **315** (1) (1989) 69–87

[Maz] Mazya, V. G.: Boundary integral equations. In: Mazya, V. G.; Nikol'skiĭ, S. M. (Hrsg.): Encyclopaedia of Math. Sciences, vol. 27, Analysis IV, Springer-Verlag, Berlin, Heidelberg 1991

[M1] Meyer, Y.: Ondelettes et Opérateurs 1: Ondelettes. Hermann, Paris 1990

[M2] Meyer, Y.: Ondelettes et Opérateurs 2: Opérateur de Caldéron-Zygmund. Hermann, Paris 1990

[M3] Meyer, Y.: private communication

[O1] Oswald, P.: On discrete norm estimates related to multilevel preconditioners in the finite element method. In: Ivanov, K. G.; Petrushev, P.; Sendov, B. (eds.): Constructive Theory of Functions. Proc. Int. Conf. Varna 1991. Bulg. Acad. Sci., Sofia 1992, 203–214

[O2] Oswald, P.: Multilevel Finite Element Approximation. Theory & Applications. Teubner Skripten zur Numerik, Teubner Verlag, Stuttgart 1994

[PS] von Petersdorf, T.; Schwab, C.: Wavelet Approximation for first kind boundary integral equations on polygons. Techn. Note BN-1157, Institute for Physical Science and Technology, University of Maryland at College Park, February 1994

[R] Rokhlin, V: Rapid solution of integral equations of classical potential theory. J. Comp. Phys. **60** (1985) 187–207

[U] Urban, K.: On divergence-free wavelets. Advances in Computational Mathematics **4** (1995) 51–81

[X] Xu, J.: Theory of multilevel methods. Report AM48, Department of Mathematics, Pennsylvania State University 1989

[Y] Yserentant, H.: Old and new convergence proofs for multigrid methods. Acta Numerica 1993, 285–326

Buchbesprechungen

Straughan, B., The Energy Method, Stability, and Nonlinear Convection, Berlin u. a.: Springer Verlag 1991, 250 S., DM 98,–

In der vorliegenden Monographie werden Ergebnisse zur globalen Stabilität hydrodynamischer Konvektionsprobleme, die unter Verwendung von Ljapunow-Funktionalen und damit verbundenen Differentialungleichungen gewonnen wurden, dargestellt.

Da in der Regel eine der kinetischen Energie der Abweichungen verwandte Größe Ausgangspunkt für ein Ljapunow-Funktional mit variierbaren Parametern ist, heißt diese Technik auch Energie-Methode.

Schon D.D. Joseph hat 1976 in seiner bekannten Monographie eine ausführliche Darstellung der Energie-Methode gegeben. Im Unterschied zu Joseph, der fast alle Strömungsarten betrachtet, bezieht sich Straughan nur auf Konvektionsprobleme und verwendet in wesentlichen hier nicht lokale Methoden. Lokale Bifurkationen, die etwa über Störungsansätze beschreibbar sind, wurden nicht untersucht.

Im groben läßt sich der Inhalt des Buches von Straughan etwa so charakterisieren. In einem Einführungskapitel (2) werden die Grundideen der Energie-Methode am Beispiel abstrakten) Differentialgleichungen vor Augen hat, noch nicht genügend an vorhandene Konzepte angepaßt. So charakterisiert der Autor mit nonlinear conditional stability die Tatsache, daß die nichtlinearen Terme der Differentialgleichung einbezogen wurden und sich die Stabilität nur auf kleine Abweichungen bezieht. Gemeint ist offenbar die (lokale) Stabilität einer Lösung im Sinne von Ljapunow.

Funktionalanalytische Hilfsmittel werden im Buch sehr sparsam eingesetzt. Eine Ausnahme bilden die Symmetriebetrachtungen in Kapitel 4. Dort wird über die Untersuchung von quasilinearen Evolutionsgleichungen in einem abstrakten Raum die Rolle der Symmetrie des linearen Anteils diskutiert. Die als Aisermansches Problem bekannte Frage kann für eine quasilineare Gleichung mit symmetrischem linearen Operator und monotonem nichtlinearen Teil positiv beantwortet werden: Aus der Stabilität der Linearisierung bezüglich der Ruhelage folgt die globale Stabilität dieser Ruhelage. Ist der lineare Teil des Problems nicht symmetrisch, wird der symmetrische Anteil betrachtet. Wie auch schon Joseph bemerkt, wird allerdings durch diesen Symmetrisierungsvorgang der lokale Bifurkationsmechanismus verschleiert und die Abschätzungen für Bifurkationsparameter sind grob.

Eine Arbeit von Homsy (1974) zur globalen Stabilität der periodischen Lösung eines zeitlich periodisch angeregten Bénard-Problems, die in der Monographie von Joseph nur kurz erwähnt wird, findet in Kapitel 10 des vorliegenden Buches gebührende Aufmerksamkeit. Grob gesagt geht es darum, daß für das betrachtete Energie-Funktional der Abweichungen von der periodischen Basislösung nur „über viele Zyklen hinweg" gezeigt werden kann, daß sich die Energie verringert. Interessant ist, daß diese Technik auch eingesetzt wurde, um die globale Stabilisierbarkeit des von Boussinesq-Gleichungen abgeleiteten Lorenz-Systems der konvektiven Turbulenz durch eine periodische Erregung zu zeigen. Leider geht der Autor mit keinem Wort auf das Lorenz-System ein.

Abschließend soll bemerkt werden, daß das Buch von Straughan für einen breiten Leserkreis empfohlen werden kann: Für Biologen, Chemiker, Geophysiker, Mathematiker und Physiker. Der Leser möchte über Grundkenntnisse der Hydrodynamik (etwa entsprechender Kapitel aus Band VI von Landau/Lifschitz) und Vektoranalysis, insbesondere Integralsätze, verfügen, um die wichtigsten Abschätzungen der Energie-Methode nachvollziehen zu können. Der im Buch nur kurz angesprochene funktionalanalytische Hintergrund erfordert dagegen den auf diesem Gebiet spezialisierten Leser.

Dresden V. Reitmann

Neutsch, W., Scherer, K., Celestial Mechanics, An Introduction To Classical And Contemporary Methods, Mannheim u. a.: B. I. Wissenschaftsverlag 1992, 784 S., DM 98,–

Das Buch beginnt mit astronomiegeschichtlichen Bemerkungen, von den Zeugnissen der Archäoastronomie bis zu Copernicus und Kepler. Die weiteren Abschnitte des den Grundlagen gewidmeten ersten Teils des Buches machen mit den wichtigsten Tatsachen aus sphärischer Astronomie, den Keplerschen Gesetzen und der Newtonschen Mechanik einschließlich dem Gravitationsgesetz bekannt. Besonders reizvoll ist hier der Ausflug in die projektive Geometrie und die in Lehrbüchern meist zu kurz behandelten Kegelschnitte, den möglichen Bahnkurven des Kepler-Problems. Der Versuch einer analytischen Lösung der Kepler-Gleichung, aus mathematischer Sicht zweifellos eine Herausforderung, ist im Hinblick auf die Anwendung enttäuschend. Vielleicht führt hier der Einsatz elliptischer Funktionen und Integrale, wie er etwa von V. A. Brumberg aufgezeigt worden ist, deutlich weiter. Die Begründung von Aberration und Doppler-Effekt bricht etwas unvermittelt über den Leser herein, sie wäre besser im letzten Teil im Kontext der Relativitätstheorie plaziert.

Der zweite Teil des Buches stellt unverzichtbare Themen der klassischen Himmelsmechanik vor, beginnend mit einem gelungenen Exkurs in die Potentialtheorie, in dem das Potential des homogenen Ellipsoids, die Wechselwirkung zweier homogener Ellipsoide sowie das dreiachsige Ellipsoid behandelt werden. Es schließt sich ein längerer Abschnitt über Bahnbestimmung an. Aus der verwirrenden Fülle bekannter Verfahren haben die Autoren eine dem einführenden Charakter des Buches angemessene Auswahl getroffen. Die Darstellung hätte die Rollen der vorläufigen und definitiven Bahnbestimmung sowie der Bahnverbesserung durch differentielle Korrektur noch deutlicher machen sollen. Bei der Behandlung des Gauss-Verfahrens wäre die Bedeutung der von Bucerius entwickelten Konvergenztheorie und damit der Rolle der Enckeschen Näherung zur Einleitung der Iteration vorteilhaft gewesen. Bei der Darlegung des Verfahrens von Neutsch gewinnt man etwas den Eindruck, ältere Verfahren, wie etwa das Gauss-Verfahren, wären auf $N=3$ [illegible]

Richtungsbeobachtungen beschränkt. Bucerius hat gezeigt, daß man mehrere Beobachtungen zwanglos verarbeiten kann.

Der folgende Abschnitt setzt sich mit der Formulierung von Bewegungsproblemen in beliebig bewegten Bezugssystemen, der Cavendishschen Drehwaage und dem Foucaultschen Pendelversuch auseinander. Daran schließt sich eine Einführung in das Mehrkörperproblem gravitierender Massenpunkte sowie in die Störungsrechnung nach Gauss an.

Daß die Analysis auf Mannigfaltigkeiten, der der dritte Teil des Buches gewidmet ist, das adäquate Darstellungsmittel zahlreicher physikalischer Sachverhalte ist, steht außer Zweifel. Viele Einsichten wie etwa in die Integrabilität dynamischer Systeme wären ohne diesen Zugang kaum gewonnen worden. Wie man sie in einer Einführung in die Himmelsmechanik unter didaktischen Gesichtspunkten darlegt, ist eine schwierige Frage. Die Autoren haben eine kommentierte, summarische Darlegung der wichtigsten Begriffe und Sachverhalte gewählt, unter Verzicht auf Beweise und jedwede veranschaulichende Abbildung. Damit wird mancher Nichtmathematiker wohl seine Not haben. Diesen Lesern wäre eine Entwicklung des mathematischen Bildes aus den himmelmechanischen Sachverhalten heraus, die relativistische Himmelsmechanik eingeschlossen, eher zugänglich. Das bekannte Lehrbuch von Arnol'd über klassische Mechanik setzt hier Maßstäbe. Für einen Dozenten der Mathematik mag der Teil des Buches durchaus ein reizvoller Entwurf für eine Vorlesung sein.

Der folgende Teil behandelt fortgeschrittene Methoden, genauer eigentlich die Darstellung der alternativen Fassungen von Bewegungsproblemen nach Lagrange, Hamilton und Jacobi in der Sprache der Analysis auf Mannigfaltigkeiten. Darüber hinaus werden Linearisation und Regularisierung sowie Lie-Gruppen und Algebra und das Noethersche Theorem dargestellt. Hier gilt das bereits Gesagte, das Darstellungsmittel gerät etwas zu sehr zum Selbstzweck; ein Student der Astronomie oder Physik, der eine traditionelle Kursvorlesung zur theoretischen Mechanik gehört hat, wird nach der Notwendigkeit des hohen mathematischen Aufwandes fragen. Das wird noch deutlicher, wenn im folgenden Teil über Anwendungen nur mehr andeutungsweise die Analysis auf Mannigfaltigkeiten eingesetzt wird.

Dieser letzte Teil geht ein auf die Theorie der Gleichgewichtsoberflächen rotierender Himmelskörper, die Theorie der Mond- und Planetenbewegung und gibt einen Exkurs in die Einsteinsche Gravitationstheorie. Wenn manches auch nur skizziert ist, so gelingt es den Autoren doch, eine Fülle wissenswerter Details mitzuteilen und an eine Reihe von Fragestellungen heranzuführen, die Forschungsgegenstand sind.

Das Buch führt thematisch breit und doch geschickt in der Auswahl in die Himmelsmechanik ein. Es ist flüssig geschrieben und sorgfältig Korrektur gelesen. Mit aber sollte eine engere Verbindung der mathematischen und astronomischen Aspekte angestrebt werden.

Insgesamt ist das Buch eine lesenswerte und anregende Einführung in das sich lebhaft entwickelnde Gebiet der Himmelsmechanik, in der viele Fragen der nichtlinearen Dynamik lange gestellt sind und die heute auf ein breites Spektrum effizienter Methoden der symbolischen Formelmanipulation, der Störungsrechnung und des wissenschaftlichen Hochleistungsrechnens zurückgreifen kann.

Studierende der Astronomie, Physik und Mathematik werden das Buch etwa am Ende des Grundstudiums mit Gewinn lesen.

München M. Schneider

Deschauer, S., Das zweite Rechenbuch von Adam Ries (Eine moderne Textfassung mit Kommentar und metrologischem Anhang und einer Einführung in Leben und Werk des Rechenmeisters), Braunschweig u. a.: Friedrich Vieweg & Sohn Verlagsgesellschaft 1992, 237 S., DM 54,–

Titel und Untertitel sagen präzise, worauf der potentielle Leser des vorliegenden Buches sich freuen kann. Sein Herz ist der von Deschauer ins heutige Deutsch übertragene Text des zweiten Rechenbuches von Adam Ries. Es ist das Buch, das Adam Ries zum sprichwörtlichen Rechenmeister machte. Um dieses Herzstück sind gruppiert:

Eine Beschreibung des Lebens und Werkes von Adam Ries, sowie eine Würdigung seines didaktischen Geschicks, der Grundlage für die in Raum und Zeit weite Verbreitung seines Rechenbuches. Dabei bemängelt Deschauer, daß seines Wissens eine Würdigung von Riesens Beitrag zur deutschen Sprachentwicklung seitens der Germanisten noch fehlt, daß seine Bücher in deutschen Literaturgeschichten nicht einmal erwähnt werden.

Eine Beschreibung von vier Seiten Länge des formalen und inhaltlichen Aufbaus des Buches, die einen schnellen Überblick gestattet. Dabei hilft die von Deschauer

vorgenommene Numerierung der Aufgaben, die es im Original nicht gibt.

Ablowitz, M. J., Clarkson, P. A., Solitons, Nonlinear Evolution Equations and Inverse Scattering (London Mathematical Society Lecture Note Series, 149), Cambridge: University Press 1991, 516 S., pb., £ 27.95

Seit in der Mitte der 60er Jahre Rekurrenzphänomene bei nichtlinearen Gleichungen der Plasmaphysik und der Flachwasserwellentheorie entdeckt wurden, hat man eine Vielzahl von Lösungsmethoden für diese sogenannten Solitongleichungen gefunden.

Statt von Solitongleichungen spricht man etwas allgemeiner von *„integrablen Systemen“*. Unter geometrischer Betrachtungsweise kann man solche Systeme auch als Kompatibilitätsbedingung zwischen höherdimensionalen linearen Gleichungen verstehen. Wenn man die Orbits bezüglich der unabhängigen Variablen als geodätische Linien auffaßt, so bedeutet diese Kompatibilität das Verschwinden der Krümmung, daher spricht man hier auch von der *„zero curvature“* Bedingung. Weiterhin wurden die gruppentheoretischen Aspekte dieser *integrablen* Systeme aufgeklärt, was zur Konstruktion spezieller Lösungen führte, darunter insbesondere den Solitonlösungen, welche sich als Orbits auf invarianten Mannigfaltigkeiten, die durch gruppentheoretische Reduktion erhalten werden, herausstellen.

Heute ist eine große Anzahl vollständig integrabler partieller Differentialgleichungen in einer Raum- und einer Zeitdimension bekannt. Darüberhinaus gibt es Verallgemeinerungen auf $n+1$ Dimensionen, sowie ähnliche Phänomene im Bereich der Differenzengleichungen, der Spinketten und neuerdings auch unter den zellularen Automaten.

Das vorliegende Buch behandelt als zentrales Thema die klassische Inverse Streumethode. Dabei geht es darum, die Kompatibilität, die durch die *zero curvature* Bedingung gegeben ist, auszunutzen und das betrachtete nichtlineare System als isospektralen Fluß eines Differential- oder auch eines anderen geeigneten Operators aufzufassen. Dadurch wird die zugrunde liegende nichtlineare Gleichung formal linearisiert, denn die Streudaten unterliegen wegen der Isospektralität einer linearen Evolution. Die Rückberechnung von den zeitabhängigen Streudaten auf die zugrunde liegende Feldfunktion der nichtlinearen Gleichung bezeichnet man als *Inverse Transformation.* Das bekannteste Beispiel der Lösung einer nichtlinearen Gleichung durch diese Methode ist der Fall der Korteweg-de Vries-Gleichung, die als isospektraler Fluß des klassischen eindimensionalen Schrödinger-Operators verstanden werden kann. Für die Konstruktion expliziter Lösungen stellt die Inverse Streumethode auch heute noch eines der mächtigsten Werkzeuge dar.

Das vorliegende Buch beginnt mit einer sehr schönen Einführung, in welcher, neben einem kurzen geschichtlichen Abriß, die Entwicklung des Gebiets und die grundlegenden Ideen diskutiert werden. Daneben findet man schon hier eine Vielzahl von Beispielen für vollständig integrable Systeme nebst den assoziierten Streuproblemen. Auch die physikalischen Aspekte, welche viele dieser Gleichungen aufweisen, werden nicht vernachlässigt. So findet man in der Einführung eine Ableitung der Kadomtsev-Petviashvili-Gleichung, die für die mehrdimensionale Beschreibung nichtlinearer Wellen in flachem Wasser Bedeutung hat. Unter dem angegebenen Katalog integrabler Gleichungen befindet sich eine Fülle von Information von der Korteweg-de Vries-Gleichung bis zu den selbstdualen Yang-Mills-Feldern. Schon dieses Kapitel wird dem Leser, der einen schnellen Überblick über das Gebiet wünscht, eine unschätzbare Quelle sein.

Im zweiten Kapitel wird dann am klassischen Beispiel der Kortewege-de Vries-Gleichung die Inverse Streumethode für Wellen auf der unendlichen Linie im Detail durchgerechnet. Weitere Informationen über Hamiltonische Struktur, über erste Integrale, sowie die Darstellung in Wirkungs- und Winkelvariablen werden abgeleitet, außerdem werden Bäcklundtransformationen und Painlevétest kurz gestreift.

Im dritten Kapitel werden dann die bisher eher beispielhaft präsentierten Methoden zu einer allgemeinen Theorie der Inversen Streumethode für zwei unabhängige Variablen ausgebaut. Im Detail wird insbesondere das Riemann-Hilbert-Problem für $n\times n$-Systeme behandelt. Außerdem werden jene beiden Gleichungen aus der nichtlinearen Flachwasserwellentheorie, die es notwendig machten, die relativ einfache Formulierung der Inversen Streumethode im Fall der Korteweg-de Vries-Gleichung zugunsten der etwas komplizierteren Riemann-Hilbert-Methode zu verlassen, behandelt, nämlich die *Benjamin-Ono*-Gleichung und die *Intermediate-Long-Wave*-Gleichung; beide beschreiben die Ausbreitung nichtlinearer Wellen bei größerer Wassertiefe.

Im darauf folgenden Kapitel wird dann die Übertragung der Inversen Streumethode auf $2+1$-dimensionale Probleme behandelt. Hier werden insbesondere die Kadomtsev-Petviashvili-Gleichung, die Davey-Stewartson-Gleichung und die damit zusammenhängenden anderen Systeme in der unendlich ausgedehnten Ebene behandelt. Konsequenterweise wird dann im darauffolgenden Kapitel die Erweiterung der Riemann-Hilbert-Methode zur sogenannten *D-bar*-Methode, welche auch als Verallgemeinerung der Inversen Streumethode aufgefaßt werden kann, vorgestellt. Diese erschließt einem dann die Behandlung von Gleichungen mit mehr als $2+1$ unabhängigen Variablen.

Das siebte Kapitel weicht etwas vom bisherigen Schwerpunkt ab. Darin wird in die sogenannte Painlevé-Analyse nichtlinearer Gleichungen eingeführt. Zuerst wird der klassische Ursprung dieses heuristischen Tests auf Integrabilität behandelt, sowie ein Rückblick auf den Zusammenhang zwischen Painlevé-Transzendenten und der Unterscheidung zwischen fixierten und bewegbaren Singularitäten bei gewöhnlichen Differentialgleichungen gegeben. Auch dieser Teil kann wieder als leicht lesbare und gründliche Einführung in dieses Spezialgebiet angesehen werden. Danach wird die von Ablowitz, Ramani und Segur formulierte Painlevé-Vermutung behandelt. Diese Vermutung besagt, daß jede gewöhnliche Differentialgleichung die sich, modulo der Transformation von Variablen, als Ähnlichkeitsreduktion einer vollständig integrablen partiellen Differentialgleichung ergibt, vom Painlevé-Typ ist, also nur bewegliche Singularitäten hat. Diese Vermutung wird dann als heuristische Bedingung für die vollständige Integrabilität von partiellen Differentialgleichungen verstanden, und es werden eine Reihe von nichtlinearen Gleichungen behandelt, die diesen Test erfüllen und in der Tat auch vollständig integrabel sind. So zum Beispiel die zylindrische Korteweg-de Vries-Gleichung, die Double-sine-Gordon-Gleichung, die modifizierte BBM-Gleichung und andere mehr. Die Methode wird dann zur heute üblichen heuristischen Methode des sogenannten *Painlevé-Tests* erweitert.

Das Buch schließt mit einer Liste offener Probleme, einem beeindruckenden Literaturverzeichnis, sowie Anhängen, in denen mathematische Grundlagen zur Verfügung gestellt werden.

Natürlich behandelt das Buch nur einen Aspekt der vollständigen Integrabilität und muß notgedrungen eine Reihe wichtiger Perspektiven und Methoden auslassen. So werden zum Beispiel Randwertprobleme, Symmetriegruppenstruktur oder auch spezielle Lösungen in periodischen Fällen nur ganz kurz gestreift. Auch die Lie-Algebra-Methoden zum Verständnis der vollständigen Integrabilität werden nur am Rande erwähnt. Natrülich hätte eine ähnlich gründliche Behandlung dieser Aspekte auch weit über den Rahmen dieses doch immerhin schon 500seitigen Buches hinausgeführt.

Insgesamt handelt es sich um ein gründlich geschriebenes, außerordentlich kenntnisreiches Buch, kein Wunder, denn einer der Autoren, Mark Ablowitz, hat die Entwicklung der Inversen Streumethode ja entscheidend vorangetrieben, beeinflußt und mitformuliert.

Das Material, welches dieses Buch erschließt, ist in seiner Fülle überwältigend und gibt gerade demjenigen, der sich ein modernes Gebiet durch Methoden der klassischen Analysis erschließen möchte, einen tiefen Einblick. Das Buch ist gleichermaßen als Informationsquelle für aktive Forscher geeignet, wie auch als Einführungslektüre für diejenigen, denen das Gebiet neu ist.

Paderborn B. Fuchssteiner

Pilyugin, Sergei Yu., Introduction to Structurally Stable Systems of Differential Equations, Basel u. a.: Birkhäuser 1992, 188 S., DM 98,-

Die neue Technik läßt uns nachgerade zu einem Volk von Setzern werden. Das Flurgespräch bei Tagungen ist nicht der neue Satz, sondern das neue schnelle Satzprogramm. Die Verlage lassen sich die Verschiebung der Pflichten gerne gefallen: Das reproduktionsfähig gelieferte Manuskript wird vervielfältigt, fest gebunden, wie ein Markenprodukt glanzkaschiert verpackt und vermarktet. Es kostet nicht weniger als früher ein Buch – jedenfalls für den Käufer, der es lesen will. Den Verlag kostet es natürlich viel weniger, und weil dadurch das Risiko für das einzelne Buch geringer ist als früher, hat beim Verlag vor Erscheinen auch niemand das Manuskript gelesen, denn das rentiert sich nicht. Kurzum, zwischen einem Buch und einem vervielfältigten Vorlesungsmanuskript ist nach dem Äußeren nicht mehr zu unterscheiden. Es wäre wohl angebracht, wenn wenigstens bei Besprechung der Verlagsprodukte deutlich unterscheidende Rubriken eingeführt würden: Bücher, Skripten für Anfänger, Lecture Notes, Kongreßberichte, ...

Hier handelt es sich um Lecture Notes. Man erkennt das schon auf Seite 0, wo die „List of Symbols" nicht etwa die Symbole im Buche zur Hilfe und Orientierung aufführt, sondern vielmehr nur die Bezeichnungen einführt, mit denen es losgeht. Die Form der Liste erspart dabei sorgfältigere Erklärungen, wie es zum Beispiel gemeint sei, wenn es heißt: „For a map f of variables $\xi_1, \ldots, \xi_m$ we write $f \in C^{k_1,\ldots,k_m}_{\xi_1,\ldots,\xi_m}$ if f is of class C^{k_j} with respect to ξ_j". Der Index am Ende hat zwei Spalten, ist also so gut wie nicht vorhanden. Das Literaturverzeichnis von 40 Einträgen wird im allgemeinen ziemlich pauschal zitiert, ohne Angabe von Satz oder Seite. Aber wo es sich gelegentlich nur um die genauere Ausführung einer einfachen Überlegung handelt, wie daß ein Vektorfeld, das am Rande eines Rechtecks überall nach außen zeigt, im Innern eine Nullstelle haben muß, da sieht sich der Student durch dessen zitiert, aber eigentlich nur, weil den Autor offenbar die Geduld verlassen hat, gewisse einfache Bastelarbeiten durchzuführen (S. 85). In Ch. 8 geht es um das berühmte Closing-Lemma von Pugh, das besagt, daß man einen nicht wandernden Punkt durch beliebig kleine Störung des Vektorfeldes zu einem Punkt auf einem geschlossenen Orbit machen kann. Bewiesen wird der Satz allerdings nur für C^0-kleine Störungen, was sehr elementar ist. In Ch. 9 wird (unter etwas verstärkten Differenzierbarkeitsannahmen) gezeigt, daß strukturell stabile Systeme Kupka-Smale-Systeme sind. In Ch. 10 ist von transversen homoklinischen Punkten die Rede, allerdings werden nur Systeme auf der Ebene unter zusätzlich technisch erleichternden Annahmen (Linearität um den Fixpunkt) diskutiert, und es wird nur gezeigt, daß es beliebig nahe an dem homoklinischen Punkt Orbits beliebig hoher Periode gibt. In Ch. 11 folgt eine Einführung in die Geometrie der Morse-Smale-Systeme. Das 12. Kapitel ist das eigentliche Ziel, der Hauptteil des Buches. Es wird bewiesen, daß Anosov-Systeme strukturell stabil sind. Hier ist der Autor in seinem Element, in seinem eigenen Arbeits- und Fachgebiet, was sich allerdings auch daran zeigt, daß die Darlegungen immer skizzenhafter werden, und alle Hinweise und Erklärungen gänzlich wegbleiben, wo sie am dringendsten nötig wären. Dieses Kapitel ist sicher besonders interessant für den Experten, und es im Einzelnen auszuführen wäre schon eine tüchtige Diplomarbeit. In einem Appendix wird ein Beweis des Satzes von Hartman und Grobman über die topologische lokale Linearisierung eines Flusses um eine hyperbolischen Punkt mit geometrischen Methoden geführt.

Viel Inhalt und Substanz also, auf engem Raum von weniger als 200 Seiten, ein Leitfaden für den Fachmann, der imstande ist, in einer Vorlesung vieles im Einzelnen auszuführen, zu erklären und mit Beispielen oder gar Aufgaben anzureichern.

Regensburg Th. Bröcker

Saad, Y, Numerical Methods for Large Eigenvalue Problems, Manchester: Manchester University Press 1992, 346 S., $ 69.–

Die numerische Lösung von Eigenwertproblemen ist ein wichtiger Bestandteil der Lösung vieler Anwendungsprobleme, z. B. in der Strukturmechanik, Quantenchemie, bei der Modellierung elektrischer Netzwerke, in der Regelungstechnik und in vielen anderen Anwendungen. Während die numerischen Methoden für kleine Eigenwertprobleme (Dimension $n < 500$) heute ausgereift und in numerischen Softwarepaketen enthalten sind, ist die Lösung von sehr großen Eigenwertproblemen, insbesondere mit unsymmetrischen Matrizen, ein weit offenes Gebiet und Gegenstand aktueller Forschung. Da die Anwendungsprobleme vielfach auf Probleme der Dimensionen $n > 10^6$ führen, spielen für die numerische Lösung sowohl Überlegungen zur effektiven Speicherung durch spezielle Datenstrukturen als auch die Anpassung der Algorithmen an die vorhandene Rechnerarchitektur eine wichtige Rolle. Die mathematische Literatur zur Behandlung insbesondere sehr großer Eigenwertprobleme ist noch sehr beschränkt. Neben Abschnitten über Eigenwertprobleme in Lehrbüchern der Numerischen Linearen Algebra wie etwa die Bücher von Bunse/Bunse-Gerstner [1], Zurmühl/Falk [8], Golub/Van Loan [4] und Watkins [6] sind als Spezialliteratur zur numerischen Lösung von Eigenwertproblemen eigentlich nur die Klassiker von Wilkinson [7] und Parlett [5], sowie die Bücher von Chatelin [2] und Cullum/Willoughby [3] verbreitet.

Das hier vorgestellte Buch schließt hier eine Lücke und dokumentiert insbesondere die Entwicklungen in den letzten 10 Jahren.

Nach einer Einführung in die benötigten Grundkonzepte der Linearen Algebra und Kapiteln über dünn besetzte Matrizen, sowie einer ausführlichen Betrachtung der Störungstheorie und Fehleranalyse für das Standardeigenwertproblem werden dann die verschiedenen Methoden für große Eigenwertprobleme beschrieben. Dabei sind von der Potenzmethode und inversen Iteration, über Unterraumiteration bis zu den Krylovraummethoden alle wichtigen Methoden diskutiert. Dazu kommen Teilabschnitte über Beschleunigungs- und Präkonditionierungstechniken. An Schluß folgen noch ein Kapitel über verallgemeinerte Eigenwertprobleme und ein motivierendes Kapitel über Anwendungen von Eigenwertproblemen.

Das Buch dokumentiert im wesentlichen vollständig den aktuellen Stand der large areas of mathematics: index theory for elliptic operators, gauge theory, characteristic classes and geometric quantization in a broad sense for Lie groups. One can hardly overestimate the importance and depth of this circle of ideas, for which the Atiyah-Singer Index Theorem remains a cornerstone.

In recent years we have witnessed a remarkable maturing and clarification of index theorems for Dirac operators. First, elementary and direct geometrical-analytical proofs are available, primarily due to Bismut and the authors of the present book; here the approach is via the heat equation, pioneered by Gilkey and Patodi. Second, the framework and philosophy (attributed to Quillen by the authors) emerges as one of quantization: Dirac operators are a quantization of the theory of connections, and the Chern character quantizes as the supertrace of the heat kernel of the square of the Dirac operator. In the same way, the equivariant index may be expressed in terms of equivariant differential forms corresponding to what happens in Weyl's character formula and in Kirillov's formula. Let us consider the basic setup: M is an oriented $2l$-dimensional Riemannian manifold with cotangent bundle T^*M and corresponding exterior algebra bundle ΛT^*M. $C_x(M)$ denotes the Clifford algebra generated by T_x^*M and relations

$$\alpha_1\alpha_2+\alpha_2\alpha_1=-2(\alpha_1,\alpha_2).$$

We have the canonical symbol map

$$\sigma_x(\alpha_1\ldots\alpha_j)=\alpha_1\wedge\ldots\wedge\alpha_j \qquad (\alpha_1,\ldots,\alpha_j \text{ orthogonal})$$

giving a linear isomorphism from $C_x(M)$ to ΛT^*M. A Clifford module is a $\mathbb{Z}_2$-graded bundle $E=E^+\oplus E^-$ with a bundle map

$$c: T^*M\mapsto End(E)$$

satisfying the conditions

$$c(\alpha_1)c(\alpha_2)+c(\alpha_2)c(\alpha_1)=-2(\alpha_1,\alpha_2), \qquad \text{and}$$

$c(\alpha)$ exchanges the bundles E^+ and E^-.

It is a crucial remark, that a section k of the bundle $End(E)$ via the symbol map becomes a differential form $\sigma(k)$ with values in $End_{C(M)}(E)$. (if M is spin and E the spinor bundle, $\sigma(k)$ is an ordinary differential form.) Assume that on E there is given a connection ∇^E satisfying

$$[\nabla^E_X, c(\alpha)]=c(\nabla_X\alpha)$$

where X is a vector field, α an one-form, and ∇ the Levi-Civita connection on M.

Now we can write down the Dirac operator D associated to ∇^E:

$$D=c\circ\nabla^E$$

where ∇^E maps sections of E to sections of $T^*M\otimes E$, and $c: T^*M\otimes E\mapsto E$ is the Clifford multiplication. D is an elliptic first-order differential operator acting on sections of E. Examples of kernels of such Dirac operators are: the de Rham cohomology of M, sheaf cohomology with coefficients in a holomorphic vector bundle (M Kähler), and harmonic spinors on M (M spin).

The heat equation method studies the semigroup e^{-tD^2} $(t>0)$ which is a smoothing operator given by an integral kernel $H(t,x,y)$. The central object is the symbol of its diagonal values:

$$\sigma(H(t,x,x))$$

which is a differential form with values in $End_{C(M)}(E)$.

affection for the material and enthusiasm for the beauties of the subject. One hardly notices the lack of exercises, because the text is so rich.

Of course, even this book is not the final word on index theory. It is written from the point of view of analysis and Lie group theory and not from say a topological point of view. There is no K-theory and no general elliptic operators; but for the analytical and explicit geometrical side (presumably also important for applications in string theory) it is outstanding, both as a text for advanced graduate students and for mathematicians interested in learning this fascinating idea of finding local formulas for objects in global analysis. Berline, Getzler and Vergne have paved the way for the next 30 years of index theory: character formulas, analytical torsion, eta-invariants, string theory, topological quantum field theory?

Odense B. Ørsted

Orlik, P., Terao, H., Arrangements of Hyperplanes (Grundlehren der mathematischen Wissenschaften, Band 300), Berlin u. a.: Springer-Verlag 1992, 325 S., DM 118,–

Daß Hyperebenen-Arrangements eine hochinteressante Sache sind, ist das bekannt? Sie sind es, auch deshalb, weil sie einen Schnittpunkt von so vielen Entwicklungslinien der Mathematik bilden, so viele Fragen, Methoden, Resultate und Theorien (Geometrie, algebraische Topologie, Kombinatorik, Algebra und Gruppentheorie) zusammenführen, die sich nahekommen, ohne sich alle im selben Punkt zu schneiden: so daß man die Struktur der Theorie selbst als Arrangement auffassen könnte. Daß dabei nicht alle Entwicklungen völlig geradlinig verlaufen, daß es sich mehr um ein „Pseudoarrangement" handelt, macht all dies nur interessanter.

Der Grundlehren-Band von Orlik und Terao erzählt davon schon in seiner wunderbaren Einleitung, erzählt von den einfachen Ursprüngen der Theorie: dem Zählen der Regionen, in die der $\mathbb{R}^3$ durch n Schnitte geteilt wird, die Konstruktion von simplizialen Geradenkonfigurationen in der Ebene, der Berechnung der Kohomologie des Raums aller Punkte des $\mathbb{C}^n$ mit n verschiedenen Koordinaten (dem klassifizierenden Raum der gefärbten Zopfgruppe), und anderen. Er skizziert die verschiedenen Entwicklungslinien, die neuen Methoden, die allgemeineren Fragestellungen, die im Laufe der Zeit dazugekommen sind. Und er nennt Höhepunkte, darunter

- die allgemeine Zähltheorie für reelle Arrangements von Zaslavsky [14],
- die Klassifikation der reellen und der unitären Spiegelungs-Arrangements [10] (siehe auch [4, 3, 9]!).
- die kombinatorische Konstruktion der Kohomologie-Algebra des Komplements für komplexe Hyperebenen-Arrangements, von Orlik & Solomon [7],
- der Satz von Deligne [5], daß für reelle, simpliziale Hyperebenen-Arrangements das komplexifizierte Komplement ein $K(\pi, 1)$-Raum ist,
- und der Faktorisierungssatz von Terao [12] für „freie" Hyperebenen-Arrangements.

Der Hauptteil des Bandes konzentriert sich dann auf drei große Teilbereiche:

- die Theorie der freien Hyperebenen-Arrangements,
- die Topologie von komplexen Hyperebenen-Arrangements und
- die Struktur der Arrangements von unitären Spiegelungsgruppen.

In diesen Gebieten wird die Theorie gründlich und umfassend erklärt. Das Buch ist eine verläßliche Grundlage für verschiedene Vorlesungen, wobei man sich bei der Fülle des dargebotenen Stoffes auf Teile beschränken muß – der Band ist aus Vorlesungen von Solomon, Orlik und Terao sowie aus CBMS-Lectures von Orlik [6] entstanden und enthält genug Material für mehrere Vorlesungen. „Arrangements of Hyperplanes“ ist aber auch eine Einladung zum Selberlesen, zum Schmökern und zum Weiterarbeiten. Auch die ausführliche und verläßliche Biographie hilft dann weiter.

Fortschritt der Theorie zeigt sich nicht nur in „großen neuen Sätzen“, sondern auch darin, daß im Lauf der Zeit Resultate viel greifbarer werden, sich neue Zusammenhänge auftun, elementarere Beweise stärkere Schlußfolgerungen zulassen, und auch die schwierigen Höhepunkte der Theorie „lehrbuchfähig“ werden. So wird der Faktorisierungssatz von Terao hier mit einem neuen Beweis dargestellt, der von Solomon & Terao [10] stammt. In der Theorie der komplexen Spiegelungsgruppen wird jetzt systematisch bewiesen, was früher von der Shephard-Todd-Klassifikation abhing.

Leider macht der vorliegende Band nicht immer von den neuen Möglichkeiten Gebrauch. So werden insbesondere die kombinatorischen Methoden zur topologischen Analyse sowohl des Durchschnitts-Verbandes [1] (besonders im affinen Fall [13]) wie des Komplements eines Arrangements [2] nicht ausgereizt. Ich hätte mir auch mehr über reelle Arrangements und die Zaslavsky-Theorie gewünscht. Auch den Satz von Deligne hätte man, in der Version von Paris [8], beweisen können.

Zuletzt sei noch erwähnt, daß in der Theorie der Hyperebenen-Arrangements grundlegende Probleme offen sind, und das vorliegende Buch auch zur Beschäftigung mit ihnen einladen sollte. So ist in der reell-kombinatorischen Theorie die Klassifikation von simplizialen Arrangements völlig ungelöst. In der algebraischen Theorie reizt Teraos Vermutung: ob ein Arrangement „frei“ ist, hängt danach in fester Charakteristik nur von der Kombinatorik des Durchschnitts-Verbandes ab. Im topologischen Bereich ist die Frage offen, ob der Homotopietyp des Komplements aus dem Durchschnitts-Verband rekonstruiert werden kann. Und schließlich ist zu klären, ob das Komplement eines freien Arrangements immer ein $K(\pi, 1)$-Raum ist – sogar für den Spezialfall von unitären Spiegelungs-Arrangements ist dies noch für einige exzeptionelle Gruppen offen.

Literatur

[1] Björner, A.: Homology and shellability of matroids and geometric lattices, in: Matroid Applications (ed. N. White). Cambridge University Press 1992, pp. 226–283

[2] Björner, A.; Ziegler, G. M.: Combinatorial stratification of complex arrangements. J. Amer. Math. Soc. **5** (1991) 105–149

[3] Cohen, A. M.: Finite complex reflection groups. Annales Scientifiques École Normale Supérieure **9** (1976) 379–436

[4] Coxeter, H. S. M.: Finite groups generated by unitary reflections. Abh. aus dem Math. Seminar der Universität Hamburg **31** (1967) 125–135

[5] Deligne, P.: Les immeubles des groupes de tresses généralisés. Inventiones math. **17** (1972) 273–302

[6] Orlik, P.: Introduction to Arrangements. CBMS Regional Conference Series in Mathematics **72**. Providence RI: Amer. Math. Soc. 1989

[7] Orlik, P.; Solomon, L.: Combinatorics and topology of complements of hyperplanes. Inventiones math. **56** (1980) 167–189

[8] Paris, L.: Universal cover of Salvetti's complex and topology of simplicial arrangements of hyperplanes. Preprint 1991; Transactions Amer. Math. Soc., to appear

[9] Popov, V. L.: Discrete complex reflection groups. Communications Math. Inst., Rijksuniversiteit Utrecht 15–1982 (1982), 89 pages

[10] Shephard, G. C.; Todd, J. A.: Finite unitary reflection groups. Canadian J. Math. **6** (1954) 274–304

[11] Solomon, L.; Terao, H.: A formula for the characteristic polynomial of an arrangement. Advances in Mathematics **64**, 305–325

[12] Terao, H.: Generalized exponents of a free arrangement of hyperplanes and Shephard-Todd-Brieskorn formula. Inventiones math. **63** (1981) 159–179

[13] Wachs, M. L.; Walker, J. W.: On geometric semilattices. Order **2** (1986) 367–385

[14] Zaslavsky, T.: Facing up to arrangements: face-count formulas for partitions of space by hyperplanes. Memoirs Amer. Math. Soc. No. 154, **1** (1975)

Nachsatz. Seit der Fertigstellung dieser Besprechung gab es zu den beiden zuletztgenannten topologischen Fragen entscheidenden Fortschritt:

- G. L. Rybnikov (Moskau) konnte die Komplemente von zwei Arrangements mit demselben Durchschnitts-Verband durch subtile Analyse der Fundamentalgruppen unterscheiden.
- P. Edelman und V. Reiner (Minneapolis) konstruierten ein (überraschend einfaches!) 3-dimensionales Arrangement das „frei" ist, aber nicht $K(\pi, 1)$. Die Frage für unitäre Spiegelungsgruppen bleibt aber offen.

Berlin G. M. Ziegler

Shparlinski I. E., Computational and Algorithmic Problems in Finite Fields, Dordrecht: Kluwer 1993, 225 S., Dfl. 175.00

In den letzten zehn Jahren hat die Theorie der endlichen Körper einen enormen Aufschwung erlebt. Das ist einerseits auf die vielen neuen Anwendungen endlicher Körper in der algebraischen Informationstheorie, insbesondere in der Kryptologie und der Codierungstheorie, zurückzuführen, und andererseits auf die vermehrten Anforderungen algorithmischer Natur, die aus dem rapid wachsenden Gebiet der Computeralgebra gestellt werden. Daher ist es gewiß nicht verwunderlich, daß gerade die rechnerischen und konstruktiven Aspekte der endlichen Körper in letzter Zeit mit besonderer Intensität studiert wurden. Die dabei meist auch unter Einbeziehung des komplexitätstheoretischen Standpunktes erzielten Fortschritte waren spektakulär.

Das vorliegende Buch ist sicher das erste, das ganz den algorithmischen Problemen im Bereich der endlichen Körper gewidmet ist. Dabei sind die Grenzen sehr weit gesteckt, denn es kommen auch verwandte Fragen in Restklassenringen ganzer Zahlen, in algebraischen Zahlkörpern und in algebraischen Funktionenkörpern zur Sprache, und es wird auch immer wieder ein breites Spektrum von Anwendungen aufgefächert. Die Fülle von Informationen, die der Autor sowohl bei den theoretischen als auch bei den angewandten Aspekten bietet, ist beeindruckend.

Es wäre wohl unfair, dieses Buch mit den Maßstäben zu messen, die üblicherweise an Lehrbücher angelegt werden, denn ein solches will es offensichtlich nicht sein. Das merkt man schon auf den ersten Seiten, auf denen der Verfasser gleich ohne viel Federlesens *in medias res* geht. Vielmehr sollte man dieses Werk als Ergebnisbericht betrachten, der sich an Forscher und Studenten höherer Semester richtet, die bereits über ein solides Grundwissen verfügen. Dieser Eindruck eines Ergebnisberichtes wird auch durch die Art der Aufbereitung des Stoffes verstärkt, die mehr an den Stil eines umfassenden Übersichtsartikels erinnert. So werden Resultate meist ohne Beweis angeführt, und in den Ausnahmefällen werden nur die wichtigsten Beweisideen skizziert. Ordnet man aber diese Monographie in die Kategorie der Ergebnisberichte ein, so muß man sie als hervorragende Repräsentantin für Polynome in einer oder mehreren Variablen behandelt, wobei die Betonung auf neueren Resultaten liegt. Dem verwandten Problem der Konstruktion irreduzibler und primitiver Polynome über endlichen Körpern, das für die explizite Konstruktion von Körpererweiterungen eine wesentliche Bedeutung hat, ist das zweite Kapitel gewidmet. Im nächsten Kapitel wird über Verteilungseigenschaften von irreduziblen und primitiven Polynomen bezüglich spezifischer Teilmengen des Polynomrings berichtet.

Das praktische Erfordernis der Kryptologie, auch in endlichen Körpern sehr großer Ordnung schnell rechnen zu können, hat zu einem starken Interesse an Algorithmen zur Beschleunigung der Arithmetik in endlichen Körpern geführt. Für das effiziente Rechnen in Körpererweiterungen sind vor allem spezielle Basen wie etwa Normalbasen und selbstduale Basen von Nutzen. Kapitel 4 behandelt die Frage der Konstruktion solcher spezieller Basen, sowie unter anderem noch das Problem der Berechnung diskreter Logarithmen und die Komplexität der Polynommultiplikation.

Ein weiteres sehr aktuelles Thema, über das im Kapitel 5 referiert wird, sind die algebraisch-geometrischen Codes von Goppa, die aus geeigneten algebraischen Kurven über endlichen Körpern abgeleitet werden. Trotz des ansehnlichen Ausmaßes des erreichten Wissensstandes sind hier in der Zukunft noch viele tiefliegende Entwicklungen zu erwarten. Algebraische Kurven vom Geschlecht 1, also elliptische Kurven, werden gesondert im Kapitel 6 behandelt. Diese Kurven gestatten bekanntlich vielfältige Anwendungen, etwa auf Faktorisierungsalgorithmen für ganze Zahlen und in der Kryptographie. Ein Zusammen- [illegible]

besprochen werden.

Die Reichhaltigkeit der Anwendungen endlicher Körper wird im Kapitel 8 unterstrichen, wo das Spektrum von der Kryptologie über die Graphentheorie bis zu kombinatorischen Problemen in Vektorräumen reicht. Im Kapitel 9 werden Restklassenringe ganzer Zahlen zugrundegelegt und Anwendungen auf Quasi-Monte-Carlo-Methoden, auf die Erzeugung von Pseudozufallszahlen und auf die Arithmetik ganzer Zahlen mittels modularer Techniken besprochen. Kapitel 10 gibt einen Abriß algorithmischer Probleme in anderen Bereichen, die mit den Hauptthemen des Buches zusammenhängen, etwa Primzahltests, Faktorisierung ganzer Zahlen, Fragen der algorithmischen algebraischen über Funktionenalgebren). Durch den engen Zusammenhang mit verschiedenen Indexsätzen kommen darüber hinaus auch noch ganz andere nichtkommutative Algebren in natürlicher Weise ins Spiel (etwa Algebren von Pseudodifferentialoperatoren). Weitere Entwicklungen der Indextheorie in immer weniger „kommutativen“ Situationen sind stichwortartig z. B. mit den Namen Brown-Douglas-Fillmore, Miscenko und Fomenko, Kasparov, Connes und Skandalis verbunden.

Auf der anderen Seite hat die K-Theorie aber auch weniger bekannte Wurzeln in den klassischen Arbeiten von Murray-von Neumann über Operatoralgebren und Faktoren. In diesen Arbeiten aus den 30er Jahren wird in der Tat die K_0-Gruppe für endliche Faktoren unter dem Namen „Dimension“ eingeführt und bestimmt. Diese Gruppe kann für Faktoren nur die Werte $\mathbb{Z}$, $\mathbb{R}$ oder $\{0\}$ annehmen und hat eine grundlegende Bedeutung in der Klassifikationstheorie von von Neumann Algebren (die K_1-Gruppe hingegen ist für von Neumann Algebren immer trivial). Im Lauf der 70er Jahre stellte es sich dann in verschiedenen Zusammenhängen heraus, daß die K-Theorie auch ganz hervorragend als fundamentales Hilfsmittel zur Klassifikation von C^*-Algebren („nichtkommutativen lokalkompakten Räumen“) geeignet ist. Insbesondere wurden in dieser Zeit eine Reihe von Methoden entwickelt, die es erlaubten, die K-theoretischen Invarianten für C^*-Algebren ganz erstaunlich gut zu berechnen. Der krönende Abschluß dieser Methoden ist die KK-Theorie von Kasparov.

Das Ziel des vorliegenden Buches ist nach eigenen Worten ein „pedestrian approach“ zur K-Theorie für C^*-Algebren. Es gibt eine unterhaltsame und witzige Einführung in die grundlegenden Definitionen und einfachsten Eigenschaften (lange exakte Folgen, Bott-Periodizität, verallgemeinerter Fredholm-Index, verallgemeinerter Satz von Kuiper, Beispiele) der K-Theorie im Rahmen der C^*-Algebren. Darüberhinaus enthält es aber auch eine gute Einführung in wichtige Aspekte der Theorie der C^*-Algebren und in die Denkweise der nichtkommutativen Operatoralgebren, sowie eine Anleitung in „nichtkommutativer Intuition“, deren Fehlen oft ein Haupthindernis für das Eindringen in die Theorie ist. Die tieferliegenden und weiterführenden Ergebnisse der K- und KK-Theorie werden allerdings nicht behandelt.

Das Buch stellt eine attraktive Ergänzung für Studenten zu einer Vorlesung dar. Es enthält viele Übungsaufgaben und Anregungen. In mancher Hinsicht ist es vergleichbar mit dem „Hilbert space problem book“ von Halmos. Für eine Vorlesung dagegen enthält es zu viele Details und ist auch oft zu umständlich. Etwas schade ist, daß die exakte Folge von Pimsner-Voiculescu nur ohne Beweis angegeben wird (obwohl einfache Beweise existieren). Diese Folge gehört zu den grundlegenden Methoden der K-Theorie und erlaubt es, die K-Theorie von vielen wichtigen Beispielen von C^*-Algebren zu berechnen.

Meiner Meinung nach ist das Buch, vor allem für Studenten, sehr zu empfehlen, wenn auch einige Zusammenhänge etwas schief dargestellt sind und manche Aussagen, insbesondere solche zu allgemeineren Gesichtspunkten, manchmal mit Vorsicht zu genießen sind.

Heidelberg J. Cuntz

Weil, A., The Apprenticeship of Mathematician, Basel, u. a.: Birkhäuser-Verlag 1992, 197 S., SFR 58,–

Einer der großen Mathematiker dieses Jahrhunderts blickt aus der Distanz etlicher Jahrzehnte auf seine „Lehr- und Wanderjahre“ zurück. Er berichtet in sieben Kapiteln:

(I; 1906–22) Von Elternhaus und Gymnasialzeit, die er mit 16 Jahren beendet. In der kulturellen Metropole Paris hat der ausgezeichnete Schüler A.W. nicht nur bemerkenswerte Lehrer, er kann sich auch schon als 15jähriger des persönlichen Rats des Mathematikers J. Hadamard und des Indologen S. Lévy erfreuen. – (II; 1922–25) Über die Studienzeit an der Ecole Normale Supérieure, während der er durch die Lektüre der Meister und das „einzigartige" Seminar von Hadamard zum Mathematiker wird. – (III; 1925–29) Von Reisejahren, in denen er, von eher bescheidenen Stipendien lebend, die Städte Rom, Göttingen, Frankfurt, Stockholm (und viele andere), die Mathematiker Volterra, Dehn, Siegel, Zariski (u. v. a.) kennen und schätzen lernt. In diese Zeit fällt auch die Vollendung seiner Thèse über Diophantische Gleichungen (1928). – (IV; 1930–32) Mit besonderer Wärme über seine Jahre in Indien, die in die Zeit fielen, in der sich moderne mathematische Kultur in den indischen Universitäten durchsetzte. Er begegnet vielen Hauptbeteiligten der Befreiungsbewegung und gewinnt Freunde unter ihnen. – (V; 1933–39) Von den Jahren als Professor in Strasbourg und von der Zeugung Bourbakis aus der Frage (von H. Cartan), in welcher Allgemeinheit man die Stokessche Formel unterrichten solle. Der Bericht von den Kinderjahren Bourbakis bestätigt manche Sage; allmählich ist der Nebel von dieser Kunstfigur gewichen. – (VI; 1939–41) Über die „komische Oper" seiner Kriegserlebnisse – eine nicht ungefährliche Odyssee durch Finnland (mit Verhaftung als sowjetischer Spion), Schweden, Frankreich (wo er im Gefängnis die „Riemannsche" Vermutung für algebraische Funktionenkörper mit endlichem Konstantenkörper beweist), England, Vichy-Frankreich, die im März 41 in New York endet. – (VII; 1941–47) Von den Schwierigkeiten, eine halbwegs angemessene Stellung in den USA zu finden, die zu einem Zwischenspiel in São Paulo führen, bis sie glücklich mit einer Professur in Chicago enden.

Das Buch wendet sich nicht nur an Mathematiker; wohl deswegen werden die A.W. jeweils beschäftigenden mathematischen Themen nur summarisch mitgeteilt. Über seine wissenschaftliche Entwicklung erfährt man Eingehenderes aus seinen Kommentaren in den Gesammelten Werken. Hingegen zeigt sich auch in diesen Erinnerungen die ungewöhnliche Bildung ihres Autors. Sein scharfer Witz (Hellinger zu Weil: Sie haben die spitzeste Zunge, die ich kenne (p. 50)) scheint jedoch durch Abstand und Altersweisheit zu Ironie gemildert. Etliche Fotos – vom kindlichen Geschwisterpaar André und Simone bis zum Bourbaki-Gruppenbild – schmücken das Buch.

Aufgabe, die Menge der Alternativen durch geeignete Nebenbedingungen und die Bewertung durch eine Zielfunktion mathematisch zu beschreiben und für das erhaltene Optimierungsproblem einen Lösungsalgorithmus zu entwickeln. Diese mathematische Aufgabenstellung wird für die wichtigsten OR-Anwendungen im vorliegenden Buch behandelt. Es entstand durch Neubearbeitung der bekannten und bewährten dreibändigen „Operations-Research-Verfahren“ von K. Neumann.

Dabei wurde insbesondere das verstärkte Interesse der OR-Anwender an der Lösung von Optimierungsproblemen mit einer endlichen (aber sehr umfangreichen) Menge von Alternativen berücksichtigt. Dieser Problemklasse, zu der die Optimierung auf Graphen, die ganzzahlige und kombinatorische Optimierung und letztlich auch die lineare Optimierung gehören, sind die ersten drei der insgesamt fünf verfahrensorientierten Kapitel und damit rund 500 von 700 Seiten gewidmet:

Kapitel 1: Lineare Optimierung (Beispiele und Grundbegriffe, Simplexverfahren mit Sonderformen, Dualität, Sensitivitätsanalyse und parametrische Optimierung, Vektoroptimierung und Goalprogramming, Zwei-Personen-Nullsummenspiele; rund 140 Seiten, 6 Algorithmen).
Kapitel 2: Graphen und Netzwerke, (Grundbegriffe, Graphen und Digraphen auf Rechnern, Minimalgerüste, Kürzeste Wege, Netzplantechnik, Flüsse, Matchings und Zuordnungen, Umladeproblem und Neztwerksimplexmethode, Briefträgerproblem; rund 200 Seiten, 20 Algorithmen).
Kapitel 3: Ganzzahlige und kombinatorische Optimierung (Ganzzahlige Optimierung, Lösungsmethoden für kombinatorische Optimierungsprobleme, Rucksackproblem, Verschnittproblem, Handlungsreisendenproblem und Tourenplanung, Maschinenbelegungsplanung, Ressourcenplanung; rund 160 Seiten, 20 Algorithmen).
Kapitel 4: Nichtlineare Optimierung (Grundbegriffe, Optimalitätsbedingungen, Lösungsverfahren, Quotenoptimierung; rund 50 Seiten, 3 Algorithmen).
Kapitel 5: Dynamische und stochastische Modelle und Methoden (Diskrete dynamische Optimierung, Lagerhaltung, Warteschlangen, Simulation, Entscheidungstheorie; rund 160 Seiten, 7 Algorithmen).

Abgesehen vom Kapitel 0 Einführung (Was ist OR?, typische OR-Anwendungen) enthält jedes Kapitel einen Abschnitt „Ergänzungen“, in denen neben weiteren OR-Modellen insbesondere neuere Entwicklungen vorgestellt werden.

Worin unterscheidet sich das vorliegende Buch vom alten dreibändigen Werk? Vor allem durch die Einarbeitung und ausführliche Berücksichtigung der neueren Ergebnisse auf dem Gebiet der diskreten Optimierung. So wird in der Regel die Effizienz der angegebenen Algorithmen diskutiert und durch Abschätzungen des Rechenaufwands charakterisiert. Da nach heutiger Überzeugung gewisse diskrete Optimierungsprobleme, z. B. das Rucksackproblem, wirklich „schwer“ sind, d. h., sich nicht wie die in den Kapitel 1 und 2 vorgestellten Probleme mit polynomialen Aufwand lösen lassen, haben die heuristischen Verfahren zur Lösung von schweren Problemen grundsätzlich an Bedeutung gewonnen. Deshalb werden für die im Kapitel 3 betrachteten schweren Probleme neben exakten Verfahren auch in großem Umfang Heuristiken behandelt.

Zum Ausgleich für die umfangreichere Behandlung der diskreten Optimierung werden gegenüber dem alten Werk u. a. langwierigere Beweise (z. B. vom Dualitätstheorem) und einige Stoffgebiete (z. B. die kontinuierliche dynamische Optimierung) weggelassen.

Die vorgestellten Verfahren wurden so ausgewählt, daß sie zwar effizient doch nicht zu spezialisiert und kompliziert sind. Die zum Verständnis der Verfahren nötige Theorie wird knapp aber sorgfältig dargestellt und durch Beispiele und Abbildungen veranschaulicht. Viele der Verfahren werden in einer an Pascal angelehnten Sprache als Algorithmus beschrieben. Dazu werden in Kapitel 2 einige elementare Datenstrukturen behandelt, die für ständig wiederkehrende Grundaufgaben, z. B. dem Sortieren von n reellen Zahlen nach wachsender Größe, günstige Lösungsprozeduren ermöglichen.

In den algorithmischen Verfahrensbeschreibungen können die Autoren nun verbal auf diese Grundaufgaben zurückgreifen.

Die oben ersichtliche Reihenfolge der Kapitel gibt dem Buch jetzt ein geschlossenes didaktisches Bild: Vom Leichteren zum Schwereren. Für Kapitel 1 werden vom Leser nur die üblichen Grundkenntnisse über lineare Gleichungssysteme, Vektoren und Matrizen vorausgesetzt. Alles für die übrigen Kapitel aus der Graphentheorie erforderliche wird im Kapitel 2 gebracht. Kenntnisse aus der Analysis braucht man erst für die beiden letzten Kapitel.

Zweifellos ist das Buch ein sicherer und anregender Führer durch die Ideenwelt der OR-Verfahren und eine ausgezeichnete Grundlage für Vorlesungen. Aber auch das Selbststudium wird dem Leser leicht gemacht. Denn die Aufgabenstellung und Verfahren werden gut motiviert und anschaulich erklärt. Wenn weiter vorn eingeführte Begriffe oder Fakten erneut auftreten, wird gesagt, wo sie zu finden sind, oder mehr noch: Es werden sogar Definitionen oder Teile von Verfahrensbeschreibungen in geeigneter Form erneut in den laufenden Text aufgenommen, ganz so wie man es in einer guten Vorlesung macht.

München K.-W. Gaede

Meirmanov, Anvarbek M., The Stefan Problem, Berlin u. a.: de Gruyter 1992, 244 S., DM 148,–

In den sechziger Jahren entstand in der westlichen Angewandten Analysis und Numerischen Mathematik ein starkes Interesse an freien Randwertproblemen und hier besonders am Stefan-Problem. Es handelt sich dabei in seiner klassischen Form um ein Modell für den Phasenübergang fest-flüssig, nur beschrieben aufgrund der thermischen Effekte, d. h. als Energiebilanz. Genauer wird als klassische Lösung gesucht der freie Rand, d. h. eine Hyperfläche in Raum und Zeit, der Ort der Phasenänderung, auf der die Temperatur konstant (gleich Null) und deren Normalengeschwindigkeit proportional zum Sprung des Wärmeflusses, gegeben durch das Fouriersche Gesetz, über die Hyperfläche ist. Die Temperaturen erfüllen im einfachsten Fall die Wärmeleitungsgleichung in den durch die Hyperfläche separierten Teilgebieten des Raum-Zeitzylinders. Sind die Anfangs- und Randbedingungen so, daß eines der Temperaturfelder konstant ist, spricht man vom Ein-Phasen-Problem im Gegensatz zum allgemeinen Zwei-Phasen-Problem. Im räumlich eindimensionalen Fall wurde die Theorie klassischer Lösungen schließlich zu einem weitgehenden Abschluß gebracht. Wurden hier weitgehend Wärmepotentialtechniken angewandt, erwiesen sich beim räumlich mehrdimensionalen Problem zuerst verallgemeinerte Lösungen als natürlich, die sich als Distributionslösungen der Energiebilanzgleichung zusammen mit der unstetigen Temperatur-Energie-Beziehung ergeben. Die Frage nach klassischen Lösungen konnte schließlich erst Ende der siebziger Jahre für das Ein-Phasen-Problem geklärt werden. Um so aufsehenerregender war schließlich der Beweis des Autors der vorliegenden Monographie [M], daß auch das Zwei-Phasen-Problem eine klassische Lösung, allerdings lokal in der Zeit besitzt. Eine weitere Überraschung ergab sich beim Vorliegen von verteilten Wärmequellen. Auch im eindimensionalen Fall können im Gegensatz zur klassischen Beschreibung mit einem freien Rand „mushy regions" entstehen, Gebiete zwischen den Phasen, in denen die Temperatur konstant auf Schmelztemperatur ist

Englisch erschienene dem Stefan-Problem gewidmete Monographie von 1971 [R] konzentrierte sich auf das eindimensionale Problem und hier auf Ergebnisse und Techniken der russischen Literatur ohne die oben skizzierte westliche „Renaissance" schon berücksichtigen zu können. Deren Darstellung für das eindimensionale Problem findet sich z. Teil in [C], allerdings eingeschränkt auf die Arbeiten des betreffenden Autors. In dem monumentalen Werk [F] schließlich spielte das Stefan-Problem nur eine untergeordnete Rolle. Zu nennen ist noch [EO], eine allerdings auch schon etwas in die Jahre gekommene integrierte Darstellung von Modellierung, Analysis und Numerik.

Bei genauerem Hinsehen zeigt es sich jedoch, daß das hier vorliegende Buch diese Lücke einer allgemeinen Monographie nicht schließen will. Es enthält zwar eine umfangreiche Bibliographie (wie auch [C]), auf diese wird aber im wesentlichen nur in der Einleitung Bezug genommen, die kurz die angesprochene Entwicklung skizziert. Das eigentliche Buch ist, nach einer informellen Einführung und einigen Hilfsergebnissen, eine geschlossene Darstellung der Ergebnisse des Autors. Da dies in einheitlicher Notation, mit vollständigen Beweisen und konsistent aufeinanderaufgebaut erfolgt, stellt auch unter diesem Aspekt die Monographie einen deutlichen Gewinn dar, zumal viele der Originalarbeiten nur auf russisch vorliegen.

Im einzelnen enthält Kapitel II eine Darstellung der Ergebnisse aus [M], Kapitel III die Globalität der Lösung unter einschränkenden Bedingungen, Kapitel IV einen alternativen Zugang zum Ein-Phasen-Problem. Auf diese Ergebnisse für den mehrdimensionalen Fall aufbauend wird in Kapitel V der eindimensionale Fall untersucht. Gerade hier sind Argumentation und Aussagen so dicht an den Inhalten vieler in der Bibliographie aufgenommenen Arbeiten, so daß ein entsprechender Hinweis wohl angemessen gewesen wäre. In Kapitel VI werden Auftreten und Gestalt von „mushy regions" im Eindimensionalen untersucht, Kapitel VII studiert zeitperiodische Lösungen und schließlich Kaptiel VIII einen singulären Grenzwert, entstehend durch eine spezielle dreidimensionale Situation. Der Anhang behandelt binäre Legierungen und geht somit über das Stefan-Problem hinaus.

„Die Wiederveröffentlichung von Felix Kleins ‚Vorlesungen über das Ikosaeder und die Auflösung der Gleichungen vom fünften Grade' entspricht der ständig wachsenden Nachfrage nach diesem Werk, das vor mehr als hundert Jahren in Leipzig erschien. Ein Gutteil des Interesses an Kleins Buch dürfte sicher auf die ungebrochene Aktualität von ‚Ikosaedermathematik' zurückzuführen sein, d. h. von Mathematik, in der Geometrie und Symmetrie des Ikosaeders, wie auch die der anderen Platonischen Körper und der regulären Polygone, eine wesentliche Rolle spielen. ... In jedem Fall hat Kleins ‚Ikosaederbuch' als beliebte Referenz für ‚Ikosaedermathematik' gedient und es wird diese Rolle auch weiterhin spielen."

„Wie bedeutend dieser Aspekt des Buches auch sein mag, so präsentiert er es doch nur als einen Steinbbruch, in dem man bei Gelegenheit mathematische Schätze finden kann. Will man ein vollständiges Bild des Buches haben, so hat man auch den zweiten Teil seines Titels zu beachten. Kleins Hauptziel war es nämlich, eine originelle Synthese der Theorien über die Gleichung fünften Grades zu geben, die im Jahre 1858 auf unabhängigem Weg von Hermite, Brioschi und Kronecker mit der Konstruktion tranzendentaler Lösungen geschaffen worden waren. Für Klein sollten dabei das Ikosaeder und seine Geometrie im Vordergrund stehen. ..."

„Für einen normalerweise nicht historisch arbeitenden Mathematiker ist der Versuch, einen historischen Text wie das Ikosaederbuch verstehen zu wollen, ein durchaus ungewöhnliches Unterfangen. Gewiß gibt es einen mathematischen Kern, der sich klar herausarbeiten läßt. Aber es gibt auch mannigfaltige Verzweigungen und Schattierungen, deren Bedeutung man nur im historischen Kontext erschließen kann. Wir haben hier von einer einheitlichen Darstellung dieses Umfelds Abstand genommen, da sie zu umfangreich geworden wäre. Es stehen hier auch andere Quellen zur Verfügung, ..."

Mit diesen Worten umreißt der Herausgeber die Bedeutung, die er Kleins Buch beimißt, und das Ziel, das er mit der Neuherausgabe verfolgte. Er ist selbst ein Mathematiker, dessen Arbeiten mit zur fortdauernden Aktualität des Ikosaederbuches beigetragen haben. In diese Neuauflage hat er sehr viel Mühe und Wissen investiert, sehr viel Verständnis für Inhalt und Form des Ikosaederbuches bewiesen. Wir haben allen Grund, ihm für seine Arbeit und für das gelungene Ergebnis dankbar zu sein.

In der Einleitung beschreibt Slodowy den Inhalt des Kleinschen Buches in moderner mathematischer Sprache. Dieser Inhalt ist in der Neuausgabe unverändert als Originaltext abgedruckt. Nur am Rand des Textes finden sich an denjenigen Stellen Sternchen, zu denen Slodowy später Anmerkungen macht. Diese Anmerkungen zum Text erstrecken sich über ca. 50 Seiten. Sie reichen von Korrekturen (der bei Klein häufigen) Druck- und Rechenfehler bis zu mathematischen Erläuterungen und historischen Bemerkungen. Das Buch schließt Slodowy mit einer Skizze der weiteren Entwicklungen auf diesem Gebiet (ca. 20 Seiten) und einer umfangreichen Literaturliste.

Ich glaube, dem Herausgeber ist das fast Unmögliche gelungen, einerseits den Charme und die Unbefangenheit des Originalwerkes zu erhalten, aber andereseits durch seine Ergänzungen ein Buch daraus zu machen, das den heutigen Anforderungen mathematischer Strenge Rechnung trägt.

Erlangen W. Barth

Laine, I., Nevanlinna Theory and Complex Differential Equations (de Gruyters Studies in Mathematics, 15), Berlin u. a.: de Gruyter 1992, 341 S., Leinen DM 154,–

Ludwig Bieberbachs klassisches Werk zur „Theorie der gewöhnlichen Differentialgleichungen, auf funktionentheoretischer Grundlage dargestellt" gibt uns einen Überblick über das fruchtbare Zusammenwirken der beiden genannten Gebiete. In den letzten Jahren hat insbesondere die Nevanlinnasche Theorie der meromorphen Funktionen viele neue Anwendungen gefunden. Ilpo Laine stellt diese Ergebnisse zusammen, das vorliegende Buch ist somit eine aktuelle Ergänzung zu Bieberbachs Werk.

Der Inhalt kann in drei Teile gegliedert werden. In den ersten drei Kapiteln finden wir die funktionentheoretischen Grundlagen mit den beiden Hauptsätzen von Nevanlinna

dann folgen fünf Kapitel über lineare gewöhnliche DGln im Komplexen, in den restlichen sechs Kapiteln werden nichtlineare Probleme behandelt. Einige der Themen sollen nun vorgestellt werden.

1. *Der Satz von Malmquist.* Dieses in der Differentialgleichungstheorie ungewöhnliche Ergebnis von Malmquist aus dem Jahre 1913 lautet: Gegeben sei DGl

(1) $\quad w' = R(z, w)$

mit einer rationalen Funktion R. Dann ist jede im Großen eindeutige Lösung entweder eine rationale Funktion oder es ist (1) eine Riccatische DGl.

Viele wichtige transzendente Funktionen treten als Lösungen von DGln auf. Die DGl (1) kann nur dann eine transzendente Lösung besitzen, wenn R ein Polynom in w vom Grade $\leqslant 2$ ist.

Im Jahre 1932 hat K. Yosida einen auf Nevanlinnas Theorie basierenden Beweis für den Malmquistschen Satz gefunden. Yosida hat damit die Anwendbarkeit der Nevanlinna-Theorie auf globale Fragen der Differentialgleichungstheorie erkannt, seine Idee steht am Anfang einer großen Entwicklung. Den gegenwärtigen Stand hat Ilpo Laine in seinem Buch festgehalten.

Die Einordnung des Malmquistschen Satzes in die Wertverteilungslehre ermöglicht eine Reihe von Verallgemeinerungen.

2. *Verallgemeinerungen zum Malmquistschen Satz.* Es bieten sich drei Erweiterungen an. Erstens kann die Lösungsklasse größer angesetzt werden. Neben den eindeutigen meromorphen Funktionen können auch endlich vieldeutige algebraische und algebroide Lösungen zugelassen werden. Der von I. Laine und A. und V. Mohon'ko eingeführte Begriffe der „zulässigen Lösung" ist dabei am geeignetsten. Die Zulässigkeit wird mit dem Maßstab der Nevanlinna-Theorie, der charakteristischen Funktion, gemessen.

Zweitens ist es naheliegend, auf der linken Seite in (1) allgemeinere Differentialpolynome anzusetzen,

(2) $\quad P(z, w, w', \ldots, w^{(r)}) = R(z, w).$

Man ordnet so beispielsweise die Painlevéschen DGln

(3) $\quad w'' = 2w^3 + zw + d,$

(4) $\quad ww'' - \dfrac{1}{2}(w')^2 = \dfrac{3}{2}w^4 + 4zw^3 + 2(z^2 - a)w^2 + b, \ldots$

in den Malmquistschen Fragenkreis ein. Schließlich kann die Rationalitätsforderung an R aufgegeben werden.

In den Jahren 1932 bis 34 hat K. Yosida die binomische DGl mit $P = (w')^n$ im meromorphen und algebroiden Lösungsbereich untersucht. Ilpo Laine und der Referent haben 1976 in einer gemeinsamen Arbeit die DGl (2) in beiden Bereichen behandelt und den Malmquistschen Satz verallgemeinert: Die DGl (2) kann nur dann eine zulässige meromorphe Lösung besitzen, wenn R ein Polynom in w vom Grade $\leqslant \Delta$ ist. Δ ist das reduzierte Gewicht von P. Bei (3) und (4) ist $\Delta = 3$ bzw. 4. Im algebroiden Fall kann der Nennergrad von R bzgl. w positiv sein. Bieberbach erwähnt, daß der ursprüngliche Malmquistsche Satz für algebroide Integrale bestehen bleibt. Dies ist nicht richtig. Die Konstruktion eines Gegenbeispiels mit positivem Nennergrad bei R war der Ausgangspunkt unserer Zusammenarbeit. Gleichzeitig und unabhängig hat S. Strelitz die verallgemeinerte Aussage für die DGl (2) im meromorphen Lösungsbereich gefunden. Im Jahre 1978 konnte N. Steinmetz den Beweis im meromorphen Bereich ohne die Rationalitätsvoraussetzung auf der rechten Seite in (2) führen.

In Kapitel 10 des vorliegenden Buches wird die binomische DGl behandelt. Die von N. Steinmetz gefundenen zulässigen Gleichungstypen werden angegeben. In Kapitel 13 wird die DGl (2) untersucht und der verallgemeinerte Malmquistsche Satz bewiesen. Der endlich vieldeutige algebroide Fall wird leider nicht mitbehandelt.

3. *Die Painlevéschen DGln.* Viele Spezialisten glauben, daß die Painlevéschen Transzendenten im 21. Jahrhundert neue Mitglieder in der Familie der speziellen Funktionen sein werden (nach K. Iwasaki et al.). Die Painlevéschen Funktionen werden in Kapitel 9 im Sinne der Wertverteilungslehre untersucht. Ilpo Laine und der Referent haben gezeigt, daß bei einer Lösung w der DGl $P = \sum_{n=0}^{\Delta} a_n(z)w^n$ für die Schmiegefunktion

$$m\left(r, \frac{1}{w-c}\right) = S(r, w) \tag{5}$$

gilt, falls $\sum_{n=0}^{\Delta} a_n(z)c^n \not\equiv 0$ ist. Aus (4) folgt offensichtlich, daß bei der vierten Painlevéschen Transzendenten im Falle $b \neq 0$ alle Werte c die Eigenschaft (5) haben, im Falle $b = 0$ kann höchstens $c = 0$ Ausnahmewert sein, siehe Theorem 9.2.4. Der Experte wird bemerken, daß bei unserem Beweis das Lemma von Clunie eingeht, während im Beweis von Steinmetz aus dem Jahre 1982 das Lemma von Mohon'ko benutzt wird – und daß die Zitierehrlichkeit noch gefördert werden kann. Interessante Bemerkungen über die Bedeutung der beiden Lemmata findet man auf den Seiten 41 und 182 des vorliegenden Buches.

4. *Der Höldersche Satz über die Γ-Funktion.* Otto Hölder hat seinen berühmten Satz, daß die Γ-Funktion keiner algebraischen DGl genügt, im Jahre 1886 veröffentlicht. L. Bieberbach und I. Laine gehen jeweils im letzten Abschnitt auf dieses Ergebnis ein. Es ist interessant, die in den letzten Jahren vor allem von Bank und Kaufman erzielten Fortschritte zu sehen. Ein entsprechendes Resultat für die Riemannsche ζ-Funktion könnte das Ziel sein.

Abschließende Bemerkungen: Im vorliegenden Buch werden die vielfältigen neuen Ergebnisse übersichtlich zusammengestellt. Studenten, die dieses Gebiet erlernen wollen, kann das Buch empfohlen werden. Aber auch Fachleute auf dem Gebiet und Dozenten, die eine Vorlesung über Funktionentheorie und/oder Differentialgleichungen vorbereiten, können manche Anregung daraus entnehmen.

Berlin F. Gackstatter

Hemions, G., The Classifications Of Knots And 3-Dimensional Spaces (Oxford Sciences Publication), Oxford University Press 1992, 162 S., £ 25

Das Buch widmet sich verdienstvoll einem wichtigen und grundsätzlichen Aspekt der Theorie der 3-dimensionalen Mannigfaltigkeiten, das insbesondere im englischen Sprachbereich eine empfindliche Lücke schließt. Kernpunkt ist eine ausführliche Diskussion der Normalflächentheorie von Wolfgang Haken. Diese, ergänzt durch den im Appendix angefügten eigenen Beitrag des Autors über die Klassifikation von Flächenhomöomorphismen, gestattet eine wichtige Klasse von 3-Mannigfaltigkeiten – die Hakenmannigfaltigkeiten – durch einen Algorithmus zu klassifizieren. Allerdings ist darüberhinaus sowohl die Normalflächentheorie als auch die Klassifikation von Flächenhomöomorphismen in verschiedenen Zusammenhängen von eigenem Interesse. Die inkompressiblen Flächen in 3-Mannigfaltigkeiten hatten einen entscheidenden Einfluß auf die Weiterentwicklung der Theorie, wie sie von F. Waldhausen erreicht wurde. Was den Beitrag des [illegible]

Seine Überlegungen sind allerdings auf einem wesentlich einfacheren Niveau zugänglich als die Thurstons. Zum Inhalt: Im ersten Teil werden – mehr im Erzählton – Grundbegriffe der Polyedertopologie erläutert, es werden das Knotenproblem und die Klassifikation kompakter Flächen beschrieben. Der zweite Teil enthält eine recht vollständige Darstellung und Analyse des Hakenschen Normalflächenverfahrens mit den einschlägigen Überlegungen über Lösungen von Systemen Diophantischer Gleichungen. Dieser Abschnitt erscheint gut

Spannende Mathematik im Trend zur Praxisnähe

A. Bachem, M. Jünger, R. Schrader,
Universität Köln

Algebraic Geometry from Springer