

E 20577 F
99. Band Heft 1
ausgegeben am 21.02.1997

DMV

Jahresbericht

der Deutschen Mathematiker-Vereinigung

Herausgegeben von A. Krieg
unter Mitwirkung von
U. Gather, B. Kawohl,
H. Lange, H. Triebel



B. G. Teubner Stuttgart 1997

Jahresbericht

der Deutschen Mathematiker-Vereinigung

Der „Jahresbericht“ ist das offizielle Veröffentlichungsorgan der Deutschen Mathematiker-Vereinigung, für dessen inhaltliche Gestaltung im Auftrag des Präsidiums der jeweilige Herausgeber zuständig ist. Im „Jahresbericht“ sollen vornehmlich Überblicksartikel über Teilgebiete der reinen und angewandten Mathematik, Nachrufe sowie historische Artikel und Buchbesprechungen veröffentlicht werden.

Manuskripte

Alle für die Schriftleitung des Jahresberichts bestimmten Sendungen (Briefe, Manuskripte, Ankündigung von neuerscheinenden Büchern) sind an Prof. Dr. A. Krieg zu richten. Bücher, von denen eine Besprechung erfolgen soll, werden bei den Verlagen angefordert. Die Autoren werden gebeten, bei der Vorbereitung ihrer Manuskripte die „Hinweise für Autoren“ zu beachten.

Grundsätzlich sollen nur solche Manuskripte eingereicht werden, die nicht gleichzeitig an anderer Stelle zur Veröffentlichung eingereicht oder bereits veröffentlicht worden sind. Mit der Annahme zur Veröffentlichung erwirbt der Verlag das Verlagsrecht zur Vervielfältigung und Verbreitung sowie das Recht der Übersetzung in andere Sprachen.

Bezugsinformationen

Jährlich wird ein Band veröffentlicht, bestehend aus 4 Heften, die vierteljährlich erscheinen. Der Bezug ist nur bandweise möglich.

Der im voraus zahlbare Bezugspreis pro Band beträgt zur Zeit DM 148,- einschließlich Versand. Bestellungen nehmen jede Buchhandlung oder der Verlag entgegen.

Für persönliche Mitglieder der DMV, die den Jahresbericht zu beziehen wünschen, ist der zwischen DMV und Verlag vereinbarte Bezugspreis maßgebend, der im Rahmen des Mitgliedsbeitrags erhoben wird.

Verlag:

B. G. Teubner GmbH, Industriestraße 15, D-70565 Stuttgart
Postfach 8010 69, D-70510 Stuttgart, Tel. (07 11) 7 89 01-0, Telefax (07 11) 7 89 01-10
e-mail: info@teubner.de
Teubner Home Page <http://www.teubner.de>

Verantwortlich für den Anzeigenteil: Albrecht Luscher

Das Werk ist urheberrechtlich geschützt. Die dadurch begründeten Rechte, besonders die der Übersetzung, des Nachdrucks, der Bildentnahme, der Funksendung, der Wiedergabe auf photomechanischem oder ähnlichem Wege, der Speicherung und Auswertung in Datenverarbeitungsanlagen, bleiben, auch bei Verwertung von Teilen des Werkes, dem Verlag vorbehalten.

Bei gewerblichen Zwecken dienender Vervielfältigung ist an die Verwertungsgesellschaft Wort, Abteilung Wissenschaft, Goethestraße 49, 80336 München, gemäß § 54 UrhG eine Vergütung zu zahlen, deren Höhe mit der VG Wort zu vereinbaren ist.

Copying in the USA: Authorization to photocopy items for internal or personal use, or the internal or personal use of specific clients, is granted by B. G. Teubner, Stuttgart, for libraries and other users registered with the Copyright Clearance Center (CCC) Transactional Reporting Service, provided that the base fee of \$1.00 per copy

Inhalt Band 99, Heft 1

1. Abteilung

J. Zowe: Mathematik und Entwurf mechanischer Strukturen	1
G. Harder: Wittvektoren	18

2. Abteilung

Heinonen, J., Kilpeläinen, T., Martio, O., Nonlinear potential theory of degenerate elliptic equations (N. Jacob)	1
Brown, R. F., A Topological Introduction to Nonlinear Analysis (B. Fiedler)	1
Baumgärtel, H., Wollenberg, M., Causal Nets of Operator Algebras (K. Fredenhagen)	2
Roger, V. J., Phyllotaxis, A Systemic Study in Plant Morphogenesis (W. Barth)	3
Vasconcelos, W., Arithmetic of Blowup Algebras (J. Herzog)	4
Vaisman, I., Lectures on the Geometry of Poisson Manifolds (J. Hilgert)	6
Adem, A., Milgram, R. J., Cohomology of Finite Groups (P. Schmid)	8
Voss, K., Discrete Images, Objects, and Functions in \mathbb{Z}^n (H. Bieri)	9
Geddes, K. O., Czapor, St. R., Labahn, G., Algorithms for Computer Algebra (A. Kerber)	10
Hofer, H., Zehnder, E., Symplectic Invariants and Hamiltonian Dynamics (K.-H. Neeb)	11
Fischer, G., Ebene algebraische Kurven (E. Sernesi)	13
Bruno, A. D., The Restricted 3-Body Problem: Plane Periodic Orbits (H. Rießmann)	14
Akivis, M. A., Rosenfeld, B. A., Élie Cartan (1869–1951) (H. Lange)	16

In den nächsten Heften erscheinende Arbeiten:

H. Amann, H.-P. Helfrich, R. Scholz: Joachim A. Nitsche (1926–1996)

R. Berndt: Bruno Schoeneberg

R. Bölling: Georg Cantor – Ausgewählte Aspekte seiner Biographie

R. Kühnau: Herbert Grötzsch zum Gedächtnis

H. Tietz: Herbert Grötzsch in Marburg

Anschriften der Herausgeber

Prof. Dr. Aloys Krieg, Lehrstuhl A für Mathematik, RWTH Aachen,
Templergraben 55, 52056 Aachen

Prof. Dr. Ursula Gather, Fachbereich Statistik, Universität Dortmund,
Vogelthoßweg 87, 44221 Dortmund

Prof. Dr. Bernhard Kawohl, Mathematisches Institut, Universität zu Köln, 50923 Köln

Prof. Dr. Herbert Lange, Mathematisches Institut, Friedrich-Alexander-Universität
Erlangen-Nürnberg, Bismarckstraße 1 $\frac{1}{2}$, 91054 Erlangen

Prof. Dr. Hans Triebel, Mathematisches Institut, Friedrich-Schiller-Universität,
Leutragraben 1, 07743 Jena

Bezugshinweis

Früher erschienene Bände (ab Band 68) des „Jahresberichts der Deutschen Mathematiker-Vereinigung“ können durch den Buchhandel oder den Verlag bezogen werden.

Nachdruck der Bände 1 bis 40 liefert: Johnson Reprint Corp., 111 Fifth Avenue, New York, N.Y. 10003

Nachdruck der Bände 41 bis 67 liefert: Swets & Zeitlinger, Heereweg 347b, POB 810, NL-2160 SZ Lisse/Holland

Mathematik und Entwurf mechanischer Strukturen

J. Zowe, Erlangen

1 Einführung

Die Strukturoptimierung verbindet in faszinierender Weise Elemente der Mathematik und der Mechanik. Unser Beitrag möchte den Leser von diesem Anspruch überzeugen und zeigen, zu welchen Resultaten Teamarbeit von Mathematikern und Anwendern führen kann.

Wir beginnen mit der mathematisch-mechanischen Modellbildung für das diskrete Problem (Abschnitt 2), wobei wir zur Vermeidung technischer Schwierigkeiten das Modell so einfach wie möglich halten. Auch schon diese „abgespeckte“ Version verweigert sich standardmäßig verfügbarer Optimierungssoftware und zwingt Ingenieure, auf mathematisch kaum begründete Lösungsansätze zurückzugreifen. Die Hauptschwierigkeit liegt darin, daß man es mit zwei Typen von Designvariablen zu tun hat, die sich nur schwer simultan behandeln lassen.

Unser erster Lösungsvorschlag (Abschnitt 3) eliminiert einen Block der Designvariablen auf Kosten eines starken Anstiegs der Dimension. Durch geeignete mathematische „Massage“ gelingt es uns, das resultierende Problem auf eine einfache restringierte Aufgabe in den Zustandsvariablen zurückzuführen, die sich mit modernen Innere-Punkte-Methoden schnell und zuverlässig lösen läßt. Die gesuchten Designvariablen erhält man dabei „frei Haus“ als Lagrangemultiplikatoren des Systems.

In einem zweiten Zugang (Abschnitt 4) nützen wir das natürliche Zerfallen der Designgrößen in zwei Blöcke aus, um das Problem als zweistufige Aufgabe zu behandeln. Der Preis für den Strukturgewinn liegt in der Nichtglatterheit des Problems auf der oberen Ebene, was den Einsatz spezieller nichtglatter Methoden erfordert. Solche Software existiert und ist von uns in diesem Zusammenhang mit Erfolg eingesetzt worden.

In Abschnitt 5 berühren wir als neue Entwicklung den Fall kontinuierlichen Materials, ohne jedoch auf Einzelheiten einzugehen.

Eine Reihe von Beispielen soll die Tragfähigkeit und Effektivität der vorgestellten Ideen demonstrieren.

Naturgemäß ist solch angewandte Forschung das Zusammenspiel vieler. Besonders erwähnen möchte ich hier meine Mitarbeiter Dr. W. Achtziger und Dr. M. Kočvara sowie unsere Kooperationspartner im Rahmen eines BMBF-Industrieverbundprojektes Prof. A. Ben-Tal (Technion, Haifa), Prof. M. Bendsøe (Technical University of Lyngby) und Dipl.-Math. H. Hörnlein (DASA, München). Teile des vorgestellten Materials sind aus verschiedenen früheren Publikationen wie [5], [10] übernommen worden. Für eine leichtere Lesbarkeit wiederholen wir jedoch die Entwicklung, wobei wir die mathematischen Aspekte betonen.

2 Optimierung diskreter Strukturen: Mathematisch-mechanisches Modell

Unter ‚diskreten Strukturen‘ verstehen wir ein *Fach-* oder *Stabwerk* aus geraden Stäben, die in *Knoten* verbunden sind. Diese Knoten stellen reibungsfreie Gelenke dar, wodurch keine Biege- oder Torsionsmomente auftreten können. Zusätzlich greifen Kräfte nur in Knotenpunkten an. Im folgenden wird ein einfaches Modell zur Behandlung des Designs eines Stabwerks für eine einzelne, vorgegebene Last dargestellt.

Geht man von maximal N Knoten im Raum aus (räumliches Stabwerk; Dimension $d=3$) bzw. in der Ebene (planares Stabwerk; $d=2$) und maximal m Stäben, die manche der Knoten verbinden, so wird das Design des Stabwerks durch den Vektor $y \in \mathbb{R}^{N \cdot d}$ der *Knotenpositionen* und den Vektor $t \in \mathbb{R}^m$, $t \geq 0$ der *Stabvolumina* bestimmt. Bei den Knotenpositionen spricht man vom *Geometrieaspekt*, bei den Stabvolumina von *Topologieaspekt*. Zur Modellierung des Materialverhaltens wird das (vereinfachte) Materialgesetz der *linearen Elastizität* (Hookesches Gesetz) herangezogen. Dann wird das *elastische Gleichgewicht*, d. h. Gleichgewicht der am Stabwerk angreifenden Kräfte $f \in \mathbb{R}^{N \cdot d}$ mit den inneren Stabkräften, sowie der geometrische Zusammenhalt des Stabwerks unter Belastung durch die Gleichung

$$(1) \quad A(t, y)x = f$$

ausgedrückt. Dabei ergibt sich die *globale Steifigkeitsmatrix*

$$(2) \quad A(t, y) := \sum_{i=1}^m t_i A_i(y) \in \mathbb{R}^{(N \cdot d) \times (N \cdot d)}$$

als Summe der *Element-Steifigkeitsmatrizen*

$$(3) \quad t_i A_i(y) := \frac{t_i E_i}{l_i(y)^2} \gamma_i(y) \gamma_i(y)^T \in \mathbb{R}^{(N \cdot d) \times (N \cdot d)} \quad \text{für } i = 1, \dots, m.$$

Für Stab i bezeichnet E_i den Youngschen Modul des Materials, aus dem der Stab bestehen soll, $l_i(y)$ seine Länge und $\gamma_i(y) \in \mathbb{R}^{N \cdot d}$ den Vektor von (Co)Sinus-Werten, der die geometrische Lage des Stabes im Gesamtstabwerk in Abhängigkeit von den Knotenpositionen y wiedergibt. Da $E_i > 0$, ist $A_i(y)$ stets positiv semi-definit. Das elastische Gleichgewicht (1) wird durch den *Zustandsvektor* $x \in \mathbb{R}^{N \cdot d}$ der Knotenverschiebungen beschrieben, die sich bei der Belastung des Stabwerks (t, y) durch die

Kraft f einstellen. Um im Rahmen linearer Elastizität zu bleiben, werden die Komponenten von x als „klein“ angenommen.

Zur Vereinfachung arbeiten wir die Auflagebedingungen (d. h. Knoten, die gelagert sind) in $A(t, y), f$ und x ein, indem zugehörige Komponenten bzw. Zeilen und Spalten gestrichen werden. Die verbleibende Dimension n wird *Freiheitsgrad der Struktur* genannt. Weiter werden nur wenige, etwa k Komponenten von y in einem kleinen Bereich $Y \subset \mathbb{R}^k$ variiert, um ein physikalisch sinnvolles Stabwerk zu erhalten. Zusätzlich fordern wir, daß

$$(4) \quad \text{lineare Hülle } \{\gamma_1(y), \dots, \gamma_m(y)\} = \mathbb{R}^n \quad \text{für alle } y \in Y.$$

Diese Bedingung garantiert:

$$(5) \quad A(t, y) \text{ ist positiv definit für alle } t_1 > 0, \dots, t_m > 0 \text{ und alle } y \in Y.$$

Somit hat (1) für alle $y \in Y$ und $t > 0$ eine Lösung, d. h. das entsprechende Stabwerk (t, y) kann die Last f tragen.

Als zu minimierende Größe wählen wir die *Compliance* (Nachgiebigkeit) $\frac{1}{2} f^T x$. Sie ist ein gängiges Ingenieurkriterium, stellt die Verformungsenergie des Stabwerks (t, y) unter den Verschiebungen x dar und ist ein umgekehrtes Maß für die Steifigkeit der Struktur. Als natürliche „Kostenrestriktion“ betrachten wir nur Stabwerke mit maximalem Gesamtvolumen V .

In mathematischer Form erhalten wir damit als *Geometrie-Topologie-Aufgabe* (kurz: *Geo-Topo-Problem*) in $(t, x, y) \in \mathbb{R}^m \times \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^k$ zur automatischen Berechnung „optimaler“ Stabwerke

$$(6) \quad (P)_{t,x,y} \quad \min_{t,x,y} \left\{ \frac{1}{2} f^T x \mid t_i \geq 0, \sum_{i=1}^m t_i = V, \quad y \in Y \text{ und } A(t, y)x = f \right\}.$$

Um triviale Situationen auszuschließen, nehmen wir in (6) durchweg $V > 0$ und $f \neq 0_{\mathbb{R}^n}$ an.

Erwähnt werden sollte, daß kompliziertere Materialeigenschaften wie elastoplastisches Verhalten, Stabknicken, Schlankheitsbedingungen etc. prinzipiell einbeziehbar sind, dabei jedoch der im folgenden aufgezeigte Lösungsweg verloren geht. Hingegen können zusätzliche Bedingungen wie Grenzen an die Stabvolumina und Eigengewicht [5], mehrere Lastfälle [1], einseitiger Kontakt [9], unterschiedliches Materialverhalten unter Zug und Druck [2] u. a. im folgenden Rahmen berücksichtigt werden.

3 Optimierung von Stabwerken: Der Grundstrukturansatz

3.1 Problemreformulierung

Die Schwierigkeit mit Problem $(P)_{t,x,y}$ beruht weitgehend darauf, daß wir in (6) die *simultane* Optimierung bezüglich *Topologie* (t_i -Variable) und *Geometrie* (y_j -Variable) im Auge haben. Ein Blick auf (3) zeigt schnell, daß y aus (6) numerisch eine „harte Nuß“ macht und die in (t, x) vorhandene Struktur völlig zerstört. Der *Grundstruktur-Ansatz* versucht deswegen, y aus (6) zu „eliminieren“, indem man mit

einem dichten Gitter von N (festen) potentiellen Knoten startet und so eine Variation der Knoten simuliert. Natürlich muß dann analog die Zahl m der potentiellen Stäbe sehr groß gewählt werden.

Wird das Gitter der Knoten mit dem (fixierten, hochdimensionalen) Geometrievektor y_0 dicht genug gewählt, so wird die Frage nach den optimalen Knotenpositionen zumindest näherungsweise durch die Auswahl derjenigen Knoten mitbeantwortet, die im optimierten Stabwerk tatsächlich vorkommen. Problem (6) reduziert sich zu einem reinen *Topologieproblem* in $(t, x) \in \mathbb{R}^m \times \mathbb{R}^n$:

$$(7) \quad (P)_{t,x} \quad \min_{t,x} \left\{ \frac{1}{2} f^T x \mid t_i \geq 0, \sum_{i=1}^m t_i = V \text{ und } A(t, y_0)x = f \right\}.$$

Der gravierende Nachteil dieses Grundstruktur-Ansatzes liegt in der fast astronomisch hohen Zahl m potentieller Stäbe. Für realistische Problemstellungen muß oft $m \geq 10^4$ gewählt werden, um Knotenbewegungen hinreichend gut simulieren zu können. Auch ohne die hohe Dimension vermittelt (7) einen „unbequemen“ Eindruck. Die Gleichgewichtsbedingung $A(t, y_0)x = f$ ist nichtkonvex in (t, x) (und damit ist das ganze Problem nichtkonvex) und es stellen sich die Fragen:

- *Besitzt $(P)_{t,x}$ überhaupt globale Minima?*

und falls ja,

- *wie lassen sich solche Minima numerisch berechnen?*

Standardroutinen der nichtlinearen Optimierung (z. B. SQP-Verfahren) stehen (7) selbst bei kleiner Dimension machtlos gegenüber! Ferner (und das ist für die Praxis entscheidend):

- *Können wir garantieren, nicht mit einem Filigranwerk dünner Stäbe zu enden, in dem je zwei Knoten miteinander verbunden sind?*

Die Antwort auf all diese Fragen wird in den folgenden Sätzen gegeben. Die Grundidee besteht darin, (7) unter massiver Ausnutzung der Struktur in ein konvexes Problem zu transformieren, aus dem zusätzlich der hochdimensionale Topologievektor t eliminiert (!) ist. Dies überraschende Resultat geht auf [4] zurück.

3.2 Existenz einer Lösung

Wir betrachten die folgenden drei Probleme (wobei wir kurz A_i für $A_i(y_0)$ und $A(t)$ für $A(t, y_0)$ bei festem y_0 schreiben):

$$(8) \quad (P)_{t,x} \quad \min_{t \in \mathbb{R}^m, x \in \mathbb{R}^n} \left\{ \frac{1}{2} f^T x \mid t_i \geq 0, \sum_{i=1}^m t_i = V \text{ und } A(t)x = f \right\}.$$

$$(9) \quad (D)_x \quad \min_{x \in \mathbb{R}^n} F(x) := \max_{1 \leq i \leq m} \left\{ \frac{V}{2} x^T A_i x - f^T x \right\},$$

$$(10) \quad (D)_{x,\alpha} \quad \min_{x \in \mathbb{R}^n, \alpha \in \mathbb{R}} \left\{ \alpha - f^T x \mid \alpha \geq \frac{V}{2} x^T A_i x \text{ für } i = 1, \dots, m \right\}.$$

Unser erstes Resultat besagt, daß (8), (9) und (10) bis auf den Faktor -1 dieselben Minimalwerte liefern. Wir schreiben dabei im weiteren häufig $(P)_{t,x}$ für den

Minimalwert von (8) usw. Der Gebrauch von ‚min‘ statt ‚inf‘ wird durch die folgenden Sätze gerechtfertigt.

Satz 3.1 (Äquivalenz). *Es ist*

$$(11) \quad (P)_{t,x} = -(D)_x = -(D)_{x,\alpha}.$$

Beweis. Es reicht, in (8) die Designvektoren

$$(12) \quad \bar{t} \in T_V := \left\{ t \in \mathbb{R}^m \mid t_i \geq 0, \sum_{i=1}^m t_i = V \right\}$$

zu betrachten, für die $A(\bar{t})x = f$ eine Lösung x besitzt (anderenfalls ist nach Konvention $\min \emptyset = \infty$). Solch ein \bar{t} existiert nach (4), (5), und klassische Optimalitätsbedingungen zeigen

$$\min_{x \in \mathbb{R}^n} \left\{ \frac{1}{2} f^T x \mid A(\bar{t})x = f \right\} = \max_{x \in \mathbb{R}^n} \left\{ f^T x - \frac{1}{2} x^T A(\bar{t})x \right\}$$

(Die Charakterisierung des minimierenden x auf der linken Seite durch die max-Aufgabe der rechten Seite ist auch als Energiemethode bekannt).

Somit haben wir

$$\begin{aligned} (P)_{t,x} &= \min_{t \in T_V} \min_{x \in \mathbb{R}^n} \left\{ \frac{1}{2} f^T x \mid A(t)x = f \right\} \\ &= \min_{t \in T_V} \max_{x \in \mathbb{R}^n} \left\{ f^T x - \frac{1}{2} x^T A(t)x \right\}. \end{aligned}$$

Die Funktion $f^T x - \frac{1}{2} x^T A(t)x$ ist konvex-konkav in (x, t) mit konvexer, kompakter

Die Gleichung

$$(D)_x = (D)_{x,\alpha}$$

in (11) ist Standard. ■

Die (partielle) Dualisierung von $(P)_{t,x}$ zu $(D)_x$ bzw. $(D)_{x,\alpha}$ führt zu einem dramatischen Abfall der Dimension: n statt $n + O(n^2)!$ Weiter sind $(D)_x$ und $(D)_{x,\alpha}$ konvexe Aufgaben, für die wir die Existenz (globaler) optimaler Lösungen sichern können (Satz 3.2) und für die wir geeignete Software entwickelt haben. Satz 3.4 zeigt schließlich, wie wir aus Lösungen von $(D)_x$ bzw. $(D)_{x,\alpha}$ unmittelbar eine Lösung für das Ausgangsproblem $(P)_{t,x}$ erhalten.

Satz 3.2 (Existenz von Lösungen für $(D)_x$ und $(D)_{x,\alpha}$). *Die Probleme $(D)_x$ und $(D)_{x,\alpha}$ besitzen (globale) Minima x^* bzw. (x^*, α^*) .*

Beweis. Mit der Funktion F von (9) setzen wir

$$S := \{x \in \mathbb{R}^n \mid F(x) \leq 0\}.$$

Die Menge S ist nichtleer (z. B. $0 \in S$) und somit

$$\min_{x \in \mathbb{R}^n} F(x) = \min_{x \in S} F(x).$$

Als Maximum quadratischer Terme ist F konvex (also stetig), und die Existenz eines optimalen x^* für $(D)_x$ folgt, falls wir zeigen können:

(13) S ist kompakt.

Hierzu sei τ_0 der kleinste Eigenwert der symmetrischen $n \times n$ -Matrix $A(\bar{t})$ für $\bar{t} := (\frac{V}{m}, \dots, \frac{V}{m})^T \in \mathbb{R}^m$. Nach (5) ist $A(\bar{t})$ positiv definit, also $\tau_0 > 0$, und wir erhalten für beliebiges x in der Euklidischen Norm:

$$\begin{aligned} F(x) &= \max_{1 \leq i \leq m} \left\{ \frac{V}{2} x^T A_i x - f^T x \right\} \\ &\geq \frac{1}{2} x^T \left(\sum_{i=1}^m \frac{V}{m} A_i \right) x - f^T x \\ &= \frac{1}{2} x^T A(\bar{t}) x - f^T x \\ &\geq \frac{1}{2} \tau_0 \|x\|^2 - \|f\| \|x\| \\ &= \left(\frac{1}{2} \tau_0 \|x\| - \|f\| \right) \|x\|. \end{aligned}$$

Es folgt $\|x\| \leq \frac{2\|f\|}{\tau_0}$ für $x \in S$, was (13) zeigt und damit die Existenz des gesuchten x^*

Die entsprechende Aussage für $(D)_{x,\alpha}$ folgt, da jedes für $(D)_x$ optimale x^* mit

$$\alpha^* := \max_{x^*} \frac{V}{2} x^{*T} A_i x^*$$

eine Optimallösung (x^*, α^*) für $(D)_{x,\alpha}$ definiert. ■

$(D)_{x,\alpha}$ ist ein konvexes, restringiertes Problem, das trivialerweise die Slaterbedingung erfüllt. Die sog. *Karush-Kuhn-Tucker-Bedingungen* charakterisieren somit die Optimalität eines Punktes (x^*, α^*) (siehe z. B. [11]). Mit der Bezeichnung T_V von (12) und der *aktiven Menge*

$$I(x^*) := \left\{ i \in \{1, \dots, m\} \mid \frac{V}{2} x^{*T} A_i x^* = \max_{1 \leq j \leq m} \frac{V}{2} x^{*T} A_j x^* \right\}$$

erhält man:

Satz 3.3 (Charakterisierung der Optimalität). *Der Punkt $(x^*, \alpha^* = \max_{1 \leq j \leq m} \frac{V}{2} x^{*T} A_j x^*)$ löst $(D)_{x,\alpha}$ genau dann, wenn es ein $t^* \in \mathbb{R}^m$ gibt mit*

(14a) $t^* \in T_V,$

(14b) $\sum_{i=1}^m t_i^* A_i x^* = f,$

(14c) $t_i^* = 0$ für $i \notin I(x^*).$

Beweis. Die Karush-Kuhn-Tucker-Bedingungen für $D_{x,\alpha}$ sagen: es gibt $\lambda^* \in \mathbb{R}^m$ so, daß

(15a) $\lambda_i^* \geq 0$ für $i = 1, \dots, m$ und $1 - \sum_{i=1}^m \lambda_i^* = 0,$

(15b) $-f + \sum_{i=1}^m \lambda_i^* V A_i x^* = 0,$

(15c) $\lambda_i^* \left(\max_{1 \leq j \leq m} \frac{V}{2} x^{*T} A_j x^* - \frac{V}{2} x^{*T} A_i x^* \right) = 0$ für $i = 1, \dots, m.$

Offensichtlich sind (14) und (15) gleich bis auf einen Faktor. ■

Der nächste Satz setzt das x^* von Satz 3.2 und das t^* aus (14) miteinander in Beziehung und liefert das gewünschte Endresultat.

Satz 3.4 (Reproduktion einer Lösung von $(P)_{t,x}$ aus der Lösung von $(D)_{x,\alpha}$). *Sei (x^*, α^*) eine Optimallösung von $(D)_{x,\alpha}$ mit dem Lagrangemultiplikator λ^* . Dann liefern $t^* := V \lambda^*$ und x^* ein globales Minimum von $(P)_{t,x}$.*

Beweis. Wähle λ^* und $t^* := V \lambda^*$ wie in Satz 3.3. Nach (14) ist (t^*, x^*) zulässig für $(P)_{t,x}$. Weiter zeigt Satz 3.1 (mit $(P)_{t,x}$ und $(D)_{x,\alpha}$ als Minimalwert von (8) und (10))

$$\begin{aligned}
(P)_{t,x} &= -(D)_{x,\alpha} \\
&= -\alpha^* + f^T x^* \\
&= - \max_{i \in I(x^*)} \frac{V}{2} x^{*T} A_i x^* + f^T x^* \\
&= - \sum_{i=1}^m t_i^* \frac{1}{2} x^{*T} A_i x^* + f^T x^* \quad \text{wegen (14c)} \\
&= -\frac{1}{2} f^T x^* + f^T x^* \quad \text{wegen (14b)} \\
&= \frac{1}{2} f^T x^*.
\end{aligned}$$

Es folgt die Optimalität von (t^*, x^*) für $(P)_{t,x}$. ■

Wir erwähnen als interessantes Nebenresultat, daß die Grundstrukturtechnik nicht zu einem Filigranwerk $O(n^2)$ dünner Stäbe führt. Für das λ^* von (15) gilt

$$0 = \sum_{i \in I(x^*)} \lambda_i^* (VA_i x^* - f) \in \text{conv}\{VA_i x^* - f \mid i \in I(x^*)\},$$

wobei ‚conv‘ die konvexe Hülle bezeichnet. Offensichtlich ist diese Menge kompakt, und der Satz von Carathéodory ([11, Thm.17.1]) impliziert für $t^* := \lambda^* V$:

Satz 3.5 *Es gibt immer ein globales Minimum (x^*, t^*) für $(P)_{t,x}$ mit höchstens $n + 1$ Komponenten $t_i^* \neq 0$.*

Die obige Analysis überträgt sich mit leichten technischen Modifikationen auf ein Modell, das unter anderem das *Eigengewicht* der Stäbe berücksichtigt und *obere* und *untere Schranken* für die Querschnitte der Träger erlaubt [5]. Sogar der *Mehrfachlastfall* (im Sinne von ‚worst case‘) läßt sich im obigen Rahmen behandeln [1].

Wir erwähnen einen weiteren interessanten Punkt. Unter Ausnutzung der dyadischen Struktur der Elementsteifigkeitsmatrizen (s. (3)) läßt sich beweisen, daß in (7) optimale Stabwerke gleichzeitig *gewichtsmminimal* unter allen Designs sind, die Kräftegleichgewicht und Spannungsrestriktionen genügen [5].

3.3 Numerik und Beispiele

Der obige Zugang macht aus dem *nichtkonvexen* $(P)_{t,x}$ in $n + O(n^2)$ Unbekannten *konvexe* Probleme $(D)_x$ oder $(D)_{x,\alpha}$ in n bzw. $n + 1$ Variablen. In [3] haben wir nichtglatte Methoden zur Minimierung der Funktion F aus (9) eingesetzt. Als wesentlich schneller und dabei sehr zuverlässig erwies sich jedoch eine Innere-Punkte-Technik zur Minimierung von $(D)_{x,\alpha}$ und somit von $(P)_{t,x}$. Die Idee besteht in einer Relaxierung der Bedingung (14c) bzw. (15c) zu

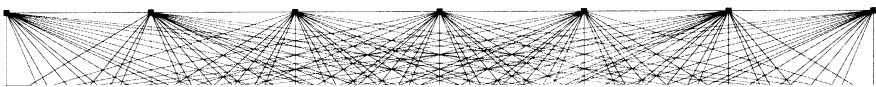
$$(16) \quad t_i^* \left(\max_{1 \leq j \leq m} \frac{V}{2} x^{*T} A_j x^* - \frac{V}{2} x^{*T} A_i x^* \right) = r_k \quad \text{für } i = 1, \dots, m$$

und der Berechnung von Näherungslösungen für das System (14a), (14b) und (16) mittels Newton-Schritten für eine positive r_k -Folge mit $r_k \rightarrow 0$ für $k \rightarrow \infty$. Wir haben dazu eine (*primal-duale*) *Innere-Punkte-Methode* implementiert und damit auf einer Standard-Workstation Stabwerke mit einigen Hunderttausend von potentiellen

Trägern optimiert [8].

Einige Beispiele sollen die Effizienz unseres Zugangs unterstreichen. Dabei steht im folgenden „schwarz“ für Träger unter Zug und „grau“ für Träger unter Druck. Wir erinnern weiter daran, daß der optimale Compliance-Wert $f^T x^*$ ein reziprokes Maß für die Steifigkeit der Struktur ist.

Beispiel 1. Wir suchen das optimale Stabwerk zum Tragen einer Brücke, die an den beiden Endpunkten festgemacht ist und deren Straßenknoten unter vertikaler Last stehen. Abb. 1(a) zeigt als Beispiel einer Ausgangs-Grundstruktur ein Gitter aus 7×5 Knoten und 386 Trägern.





Wir betonen, daß unser Ansatz keine *a priori*-Annahmen über die äußere Gestalt der Brücke macht. Diese soll vielmehr das Resultat der Optimierung selber sein! Abb. 1(b) zeigt die Lösung für eine Grundstruktur von 11×64 potentiellen Knoten und (ohne Mehrfachzählung) 150 031 potentiellen Trägern. Ganz offensichtlich ist der „Bogen“ optimal geeignet zum Tragen der Straße.

Beispiel 2. Wir fragen, wie sich die obige Gestalt ändert, wenn die Brücke zusätzlich in der Mitte abgestützt werden kann. Besitzer einer Bahncard werden einen simplen Doppelbogen erwarten (symmetrische Wiederholung des Bogens). Die Optimierung einer Grundstruktur aus $19 \times 19 = 361$ Knoten und 39 723 potentiellen Trägern führt jedoch auf eine sehr viel raffiniertere und effizientere Struktur, was ein Vergleich der Compliance-Werte zeigen würde.

Beispiel 3. Beim Design eines hochmanövrierbaren Flugzeugs spielen Versteifungsteile, sog. Spanten, welche quer zur Längsachse das Flugzeug durchlaufen, die entscheidende Rolle. Diese Spanten stehen bei extremen Flugmanövern unter Höchstbelastung, da sehr große Kräfte von den Flügelmomenten her wirken. Abb. 3(a) zeigt ein Halbmodell des Spantes (mit leicht schrägem Blickwinkel) und Abb. 3(b) eine FE-Diskretisierung.

Klassisch wird der aus Membranelementen aufgebaute „optimale“ Spant mit Hilfe von aufwendigen FE-Analysen berechnet. Das Design des Spantes ist, neben den geometrischen Nebenbedingungen, im wesentlichen durch die Positionierung der aufsitzenden „Versteifungsrippen“ (sog. *Stiffeners*) bestimmt. Diese Stiffeners sollen die Spannungen so durch den Spant leiten, daß etwa kein Beulen der Membranelemente auftritt. Es liegt daher nahe, die Hauptspannungslinien durch den Grundstruktur-Ansatz zu ermitteln, um dann die Situation vom Stabwerk auf den Membran-Spant zu übertragen. Abb. 3(c) zeigt die Stabwerk-Lösung, welche sich für zwei Lastfälle (pos. und neg. Flügelmoment) auf einer Grundstruktur mit $N = 87$ Knoten und $m = 1876$ pot. Stäben ergibt. Die Übertragung auf ein so „optimiertes“ FE-Gitter zeigt Abb. 3(d), welche das Pendant zu Abb. 3(b) darstellt. Eine neuerliche Analyse des resultierenden Spantes als Membran-Element ergibt auf Antrieb eine signifikante Reduzierung des Gesamtgewichts bei Erfüllung der geforderten Festigkeitsrestriktionen.

4 Optimierung von Stabwerken: Behandlung als zweistufiges Problem

4.1 Problemreformulierung und numerischer Ansatz

Im Grundstrukturansatz haben wir die Geo-Variable y durch Einbettung der Ausgangsstruktur in ein dichtes Netz potentieller Knoten und Träger „eliminiert“. Der Preis dafür liegt in einer Aufblähung der Dimension (Zahl der Knoten und Kanten), die diesen Zugang für \mathbb{R}^3 -Probleme praktisch ausschließt. Wir haben deswegen in einem zweiten Ansatz versucht, die Variablen im Ausgangsproblem $(P)_{t,x,y}$ künstlich zu separieren und hierarchisch zu behandeln.

Nach Abschnitt 3.2 besitzt das Topo-Problem $(P)_{t,x}$ für jedes feste $(y_0 =) y$ aus der Menge Y der zulässigen Knotenpositionen ein globales Minimum $t(y)$ und $x(y)$,

das wir schnell und zuverlässig berechnen können. Um die Abhängigkeit von y anzudeuten, schreiben wir auch $(P)_{t,x}^{y \text{ fest}}$. Sei $h(y)$ der resultierende Minimalwert, d. h.

$$(17) \quad h(y) := \min_{t,x} \left\{ \frac{1}{2} f^T x \mid t \in T_V \text{ und } A(t,y)x = f \right\}.$$

Dann reduziert sich unser Geo-Topo-Problem (6) auf die Minimierung der Funktion h nach dem (gewöhnlich niedrigdimensionalen) y :

$$(18) \quad \min_{y \in Y} h(y).$$

Aus der Störungstheorie ist bekannt, daß h *nichtkonvex* (und *nichtglatt*) von dem „Störparameter“ y abhängt; folglich müssen wir uns bei (18) mit lokalen Minima bescheiden. Der folgende Satz präzisiert die Beziehung zwischen (6) und (17), (18). Wir verzichten auf den elementaren Beweis.

Satz 4.1 *Die folgenden Aussagen sind äquivalent:*

- (i) *Der Punkt (t^*, x^*, y^*) ist eine Optimallösung des Geo-Topo-Problems $(P)_{t,x,y}$, die lokal ist in Bezug auf y und global bezüglich (t, x) .*
- (ii) *Es ist y^* lokale Lösung von (18) und (t^*, x^*) ein globales Minimum von (17), d. h. des Topo-Problems $(P)_{t,x}^{y^*}$ mit festem y^* .*

Wie oben schon erwähnt ist die Funktion h nichtkonvex und nichtglatt, und damit erfordert (18) entsprechende Software. *Bundle-Methoden* sind das geeignete Werkzeug. Diese Iterationsverfahren verlangen in jedem Iterationspunkt y^k neben dem Funktionswert $h(y^k)$ die Kenntnis eines *Subgradienten* g^k aus dem sog. *Subdifferential* von h in y^k :

$$\partial h(y^k) := \text{conv} \left\{ g \in \mathbb{R}^n \mid g = \lim \nabla h(y_i), y_i \rightarrow y^k \text{ und } \nabla h(y_i) \text{ existiert, } \nabla h(y_i) \text{ konvergiert} \right\}.$$

Für lokale Lipschitzfunktionen ist letztere Menge nie leer. Unter Standardregularitätsannahmen (deren Erfülltsein wir allerdings nicht a priori garantieren können) läßt sich die Lipschitzstetigkeit von h zeigen und damit die Existenz eines Subgradienten g^k für jeden Iterationspunkt y^k . Die *Bundle-Methoden* bestimmen aus $g^k \in \partial h(y^k)$ und einem „Bündel“ von Vorgängersubgradienten eine Richtung, längs der eine eindimensionale Minimierung zu einem y^{k+1} mit $h(y^{k+1}) < h(y^k)$ führt. In keinem der folgenden Beispiele hatte die *Bundleimplementierung* BT (die die *Bundleidee* mit dem *Trustregionkonzept* kombiniert, s. [12]) Schwierigkeiten, lokale Minima von h aufzuspüren. Unter kleineren technischen Annahmen, die wir hier unterdrücken, lassen sich Konvergenzaussagen für diese Methode machen, die den üblichen Sätzen für Gradientenverfahren im glatten Fall entsprechen; siehe [12]. Wie angedeutet erfordert die BT-Minimierung von h auf der *oberen* Ebene in jedem Iterationspunkt y^k die Bereitstellung

(19a) *des Funktionswertes $h(y^k)$*

und

(19b) *eines Subgradienten g^k .*

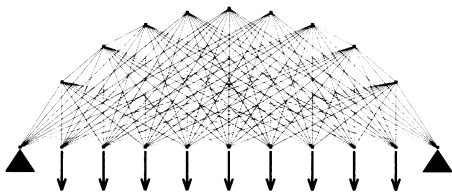
(19a) ist selber wieder ein Optimierungsproblem vom Typ (7), mit $y_0 := y^k$, das auf der unteren Ebene für jedes y^k zu lösen ist. Nach Abschnitt 3.3 verfügen wir über einen effizienten Algorithmus für diese Aufgabe. Dabei liefert die Berechnung von $h(y^k)$ zugleich ‚frei Haus‘ ein $g^k \in \partial h(y^k)$. Unter gewissen Regularitätsannahmen gilt nämlich (siehe z. B. [6]).

$$\partial h(y^k) = \text{conv} \left\{ \sum_{i=1}^m t_i^k \gamma_i(y^k)^T x^k \mid t_i^k, x^k \text{ lösen (7) für } (y_0 =) y^k \right\},$$

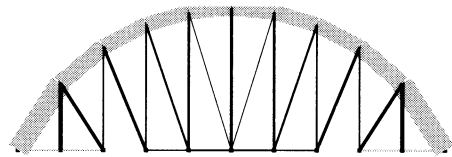
was uns unmittelbar ein gesuchtes g^k an die Hand gibt.

4.2 Beispiele

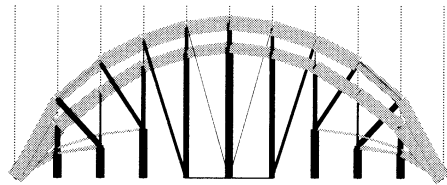
Im folgenden steht „Geo-Topo-Resultat“ für Lösungen, die wir über den Zweistufenansatz 4.1 erhalten haben. Dabei sind die erzielten Strukturen umso steifer, je kleiner die angegebenen optimalen Compliancewerte $f^T x^*$ sind. „Schwarz“



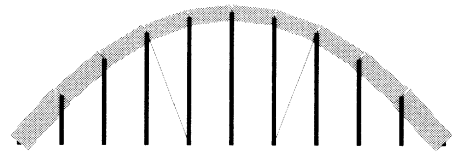
a Startstruktur



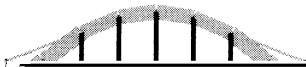
b Topo-Resultat, $f^T x^* = 61.63$

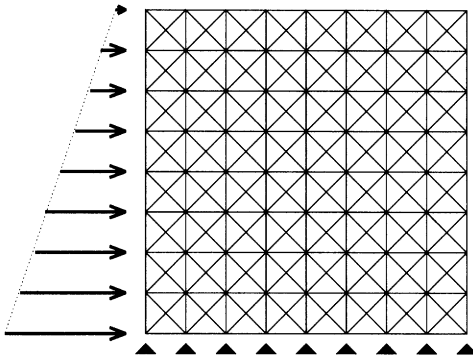


c Grundstruktur-Resultat, $f^T x^* = 59.39$

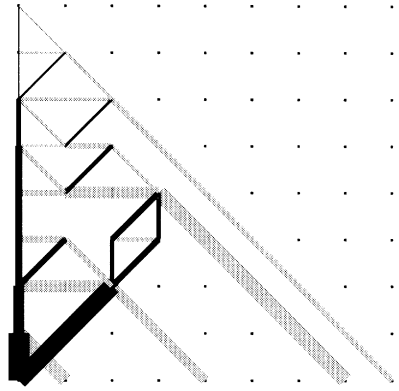


d Geo/Topo-Resultat, $f^T x^* = 59.39$

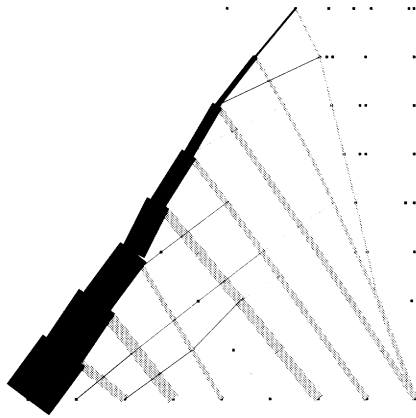




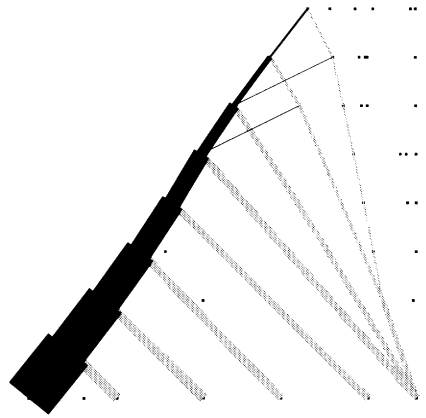
a Startstruktur



b Topo-Resultat, $f^T x^* 20.25$



c Geo/Topo-Resultat, $f^T x^* 10.63$



d Geo/Topo-Resultat, $f^T x^* 10.23$

Abb. 5. Verstärkung eines ‚Dammes‘

1. In der ersten Zeile des Textes sind die Begriffe „Trägerunterbau“ und „Trägerunterbau“ zu finden. Wenn wir davon

4(d). Man beachte, welch dichtes Ausgangsgitter beim Grundstrukturansatz nötig ist (150031 potentielle Träger!), um den Compliancewert von 4(c) zu erreichen.

In 4(e), (f) lassen wir vertikale Bewegungen *aller* Bogenknoten zu, ein-

schließlich beschneiden die Struktur P an einer senkrechten Wand

Eine nähere Analyse erweist, daß der optimale Elastizitätstensor ein dyadisches Produkt ist und in unserem Zusammenhang vollständig durch seine Spur bestimmt wird. Diese ist ein Maß für die Steifigkeit des Materials unter vertikalem und horizontalem Zug und Druck bzw. gegenüber von Scherung. Mit der ‚Dichte‘ des Materials in einer Zelle (modelliert durch die Spur des Elastizitätstensors) als Designvariable läßt sich das Problem so massieren, daß man eine Formulierung analog zum diskreten Fall erhält; s. z. B. [7, 9].

Somit lassen sich auch im kontinuierlichen Fall die oben erwähnten, für das diskrete Problem entwickelten effektiven Algorithmen einsetzen. Während jetzt die Zahl der Zellen (Dimension m des Designvektors) moderat ist, taucht die hohe Dimension im Zustandsvektor auf (Auslenkung der Zellen unter Last). Im 2D-Fall führt ein Finite-Elemente-Ansatz mit acht Ansatzfunktionen pro Zelle zu einem Zustandsvektor, dessen Dimension n das Sechsfache der Zahl der Zellen m beträgt. Räumliche Aufgaben führen zu einer weiteren Aufblähung der Dimension, jedoch stellen Probleme mit einigen Tausend Zellen für die Numerik kein Problem dar.

Beispiel 6. Abb. 6(a) zeigt das berechnete Design einer quadratischen Platte (im \mathbb{R}^2 , d. h. ohne Dicke), die an ihrer Unterseite arretiert ist und auf die von links eine gestaffelte Kraft analog zum Damm in Bsp. 5 wirkt (s. Abb. 5(a)). Der Grauwert jeder Zelle (s. Skala in Abb. 6(a)) symbolisiert die Spur des optimierten Elastizitätstensors und gibt damit Aufschluß über die Dichte des optimierten Materials in dieser Zelle (Schwarz = festes Material, Weiß = Nullmaterial, Grau Zwischenwert). Abb. 6(b) zeigt für jede Zelle die aus dem optimierten Elastizitätstensor ablesbaren (senkrecht aufeinander stehenden) Hauptdehnungsrichtungen des jeweiligen Materials. Die Richtungen und ihre Größe sind durch kleine Linien veranschaulicht. Wie zu erwarten erhält man *orthotropes* Material.

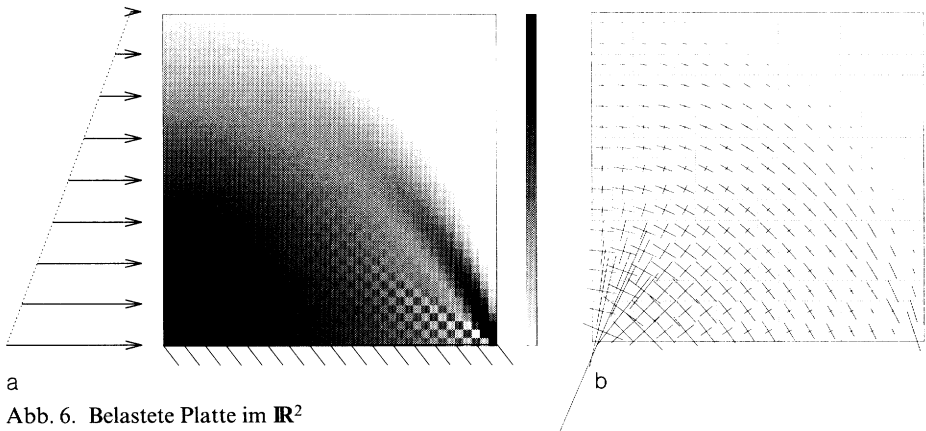


Abb. 6. Belastete Platte im \mathbb{R}^2

6 Zusammenfassung und Ausblick

Automatisierte Entwurfstechniken finden mehr und mehr Zugang in der Industrie. Selbst die Materialoptimierung hat ihre ersten industriellen Anwendungen (in der Autoindustrie) bereits hinter sich. Die weltweit erzielten, jüngsten wissenschaftlichen Ergebnisse belegen, daß zumindest in Teilbereichen der Entwurfstechniken eine Wachablösung bevorsteht. Eine breite Anwendung mathematisch fundierter Design-Methoden in zukünftigen Fabrikationsprozessen ist daher bereits vorgezeichnet.

Literatur

- [1] Achtziger, W.: Minimax compliance truss topology subject to multiple loadings. In: Bendsøe, M.; Mota-Soares, C. (eds): Topology optimization of trusses, pages 43–54. Dordrecht: Kluwer Academic Press 1993
- [2] Achtziger, W.: Truss topology optimization including bar properties different for tension and compression. Structural Optimization 1996. To appear
- [3] Achtziger, W.; Ben-Tal, A.; Bendsøe, M.; Zowe, J.: Equivalent displacement based formulations for maximum strength truss topology design. IMPACT of Computing in Science and Engineering 4 (1992) 315–345
- [4] Ben-Tal, A.; Bendsøe, M.: A new iterative method for optimal truss topology design. SIAM J. Optimization 3 (1993) 322–358
- [5] Ben-Tal, A.; Bendsøe, M.; Zowe, J.: Optimization methods for truss geometry and topology design. Structural Optimization 7 (1994) 141–159
- [6] Ben-Tal, A.; Kočvara, M.; Zowe, J.: Two non-smooth approaches to simultaneous

Wittvektoren

G. Harder, Bonn

In seiner Arbeit „Zyklische Körper und Algebren der Charakteristik p vom Grad p^n “, die in dem berühmten Band 176 (1937) des Crelle Journals erschienen ist, konstruiert Witt die nach ihm benannten Wittvektoren. Diese Konstruktion ist von fundamentaler Bedeutung für die moderne Algebra und einige der aktuellsten Entwicklungen in der arithmetischen algebraischen Geometrie.

Frau I. Kersten, die die gesammelten Werke von E. Witt herausgibt, und der Springer Verlag haben mich gebeten, einen Aufsatz über die Auswirkungen dieser Arbeit zu schreiben. Dem bin ich sehr gerne nachgekommen. Ich habe meinen Aufsatz auf Deutsch geschrieben. In den gesammelten Werken von Witt, erscheint eine von B. und Ch. Deninger vorgenommene Übersetzung ins Englische. Die hier vorliegende Fassung ist im wesentlichen meine ursprüngliche Version. Ich bin den Herausgebern des Jahresberichtes der DMV dankbar, daß sie diese deutsche Fassung publizieren.

Als persönliche Bemerkung möchte ich voranschicken, daß ich mich in meiner Laufbahn als Mathematiker niemals so richtig mit diesen Wittvektoren auseinandergesetzt habe. Mir war natürlich klar, daß dies ein schwerwiegendes Versäumnis war. Ich bin daher sehr dankbar, daß ich nun gezwungen worden bin, mich mit diesem sehr schönen und außerordentlich wichtigen Gegenstand intensiv zu beschäftigen. Hinzu kommt, daß ich ziemlich genau zu diesem Zeitpunkt bei meinen eigenen Bemühungen, gewisse Sachverhalte aus der Theorie der Shimura-Varietäten zu verstehen, das oben beklagte Versäumnis recht bitter zu spüren bekam.

Dieser Aufsatz ist wie folgt aufgebaut: Er hat drei Hauptabschnitte. Im ersten berichte ich über die Arbeit von Witt und einige weitere Arbeiten von ihm zu diesem Thema.

Im zweiten Abschnitt erläutere ich die Bedeutung der Konstruktion von Witt für die Theorie der kommutativen affinen algebraischen Gruppen.

Im letzten und längsten Abschnitt werde ich dann darlegen, welche grundlegende Rolle die Wittvektoren den hochaktuellen Entwicklungen der (arithmetischen) algebraische Geometrie spielen.

Natürlich werde ich viele andere Dinge, bei denen die Wittvektoren eine Rolle spielen, übersehen haben. Aber der Aufsatz ist sowieso schon viel zu lang.

Auch das Literaturverzeichnis am Ende ist in vieler Hinsicht sicher etwas willkürlich. Im wesentlichen verweise ich nur auf die Literatur, die ich direkt für diesen Aufsatz benutzt habe. Manchmal habe ich dann noch solche Titel mit

aufgenommen, in denen der Name Witt direkt mit auftauchte, obwohl ich auf den Inhalt dieser Artikel in diesem Aufsatz nicht eingehe.

Die Konstruktion und fundamentale Eigenschaften

Ich möchte damit beginnen, daß ich kurz den Inhalt der Arbeit von Witt schildere. Das mag in Anbetracht der Klarheit der Originalarbeit überflüssig zu sein. Aber ich sehe mich außerstande, die Auswirkungen des Artikels zu beschreiben, wenn ich ihren Inhalt nicht mit eigenen Worten darstellen darf.

Schon die Einleitung ist sehr interessant, und, wie man heute so sagt, sehr motivierend geschrieben. Man fühlt sich durch sie eingeladen, die Arbeit zu lesen. In den Arbeiten [Ar] und [Ar-Sc] untersuchen Artin und Artin-Schreier das Problem, diejenigen Körper K zu charakterisieren, die eine algebraisch abgeschlossene quadratische Erweiterung besitzen. Ein solcher Körper ist der Körper \mathbb{R} der reellen Zahlen. Allgemein werden solche Körper reell abgeschlossen genannt. Diese Körper werden in der Arbeit [Ar-Sc] charakterisiert, und es wird gezeigt, daß man ihren algebraischen Abschluß immer durch Adjunktion der Wurzel aus -1 erhält.

Artin und Schreier untersuchen dann, ob es auch für andere Primzahlen $p > 2$ Körper K geben kann, für die die Galoisgruppe $\text{Gal}(\bar{K}/K)$ ihres algebraischen Abschlusses zyklisch von der Ordnung p ist. Man kann ziemlich schnell sehen, daß dann die Charakteristik des Körpers K gleich der vorgegebenen Primzahl p sein muß. Es ergibt sich also die Frage: Wenn K_1/K eine zyklische Erweiterung vom Grad p ist, kann es dann sein, daß K_1 algebraisch abgeschlossen ist?

Artin und Schreier beantworten diese Frage mit nein und formulieren gleich die nächste, nämlich, ob es unter der obigen Annahme immer einen Körperturm $K_1 \subset K_2 \subset \dots \subset K_n \subset K$ gibt, so, daß K_n/K zyklisch vom Grad p^n ist.

Artin und Schreier zeigen, daß der erste Schritt einer Folge erhalten wird, indem man für geeignetes $a \in K$ die Nullstellen des sogenannten Artin-Schreier Polynoms $X^p - X - a$ zu K adjungiert.

Damit scheint das weitere Vorgehen zur Konstruktion des Turmes von Erweiterungen klar. Wir wählen ein $a_1 \in K_1$ und betrachten die Erweiterung von K_1 , die man durch Adjunktion der Nullstellen von $X^p - X - a_1$ bekommt. Man schreibe dann die Bedingung dafür hin, daß diese Erweiterung über K normal ist. Wenn man das erreicht hat, ist der zweite Schritt getan, der Körper K_2 ist konstruiert. Das steht schon bei Artin und Schreier.

Albert hat in [Al] gezeigt, daß man auf diese Weise voranschreiten kann, wobei er sich allerdings in einem recht unübersichtlichen Gestrüpp von Formeln herumschlagen mußte.

Witt zeigt in seiner Arbeit, daß diese Formeln absolut irrelevant sind, sondern daß man ein Objekt konstruieren kann, dessen strukturelle Eigenschaften eine glasklare Lösung des obigen Problems ermöglichen.

Er konstruiert einen Ring $W(K)$, dessen Elemente er $\text{Gal}(\bar{K}/K)$ Vektoren

$$x = (x_0, x_1, \dots, x_n, \dots) \quad x_i \in K$$

nennt und dessen Addition und Multiplikation durch universelle Formeln gegeben

sind

$$x + y = (x_0 + y_0, S_1(x_0, x_1, y_0, y_1), S_2(x_0, x_1, x_2, y_0, y_1, y_2), \dots)$$

$$x \cdot y = (x_0 y_0, M_1(x_0, x_1, y_0, y_1), \dots),$$

wobei $S_1(x_0, x_1, y_0, y_1), S_2(x_0, x_1, x_2, y_0, y_1, y_2), \dots, M_1(x_0, x_1, y_0, y_1), \dots$ Polynome in den angedeuteten Variablen und mit Koeffizienten aus dem Primkörper \mathbb{F}_p sind.

Natürlich soll dieser Ring einige zusätzliche Eigenschaften haben, so möchte man sicher nicht, daß Addition und Multiplikation einfach komponentenweise definiert sind.

Ich will kurz andeuten, durch welche Prinzipien Witt zur Konstruktion und Festlegungen der Eigenschaften dieses Ringes gekommen ist. Zunächst ist vom Konzept her klar, daß der Ring $W(K)$ funktoriell von K abhängen sollte: wenn man einen Morphismus $K \rightarrow L$ hat, dann bekommt man eine Einbettung $W(K) \rightarrow W(L)$.

Insbesondere kann man für $K = \mathbb{F}_{p^N}$ einen endlichen Körper nehmen. Es

Zahlen in einer unverzweigten Erweiterung $\mathbb{Q}_{p,N}/\mathbb{Q}_p$ vom Grad N . Dieser Ring ist ein vollständiger, diskreter Bewertungsring, dessen maximales Ideal von p erzeugt wird und dessen Restklassenkörper zu dem vorgegebene endlichen Körper \mathbb{F}_{p^N} isomorph ist. Dadurch ist er bis auf Isomorphie festgelegt. Das Ziel der Konstruktion von Witt ist, den Ring der Wittvektoren $W(\mathbb{F}_{p^N})$ so zu konstruieren.

Es ist klar, daß $a_0 = \bar{a} = a \bmod p$. Der nächste Entwicklungskoeffizient ist

$$a_1 = \overline{(a - a_0)/p} = \overline{(a - a^{p^N})/p}.$$

Den Koeffizienten a_2 bekommen wir, wenn wir modulo p^3 rechnen und bedenken, daß $((a - a^{p^N})/p)^{p^N} \equiv [a_1] \bmod p^2$, also aus

$$a \equiv a^{p^{2N}} + \left(\frac{a - a^{p^N}}{p}\right)^{p^N} p + a_2 p^2 \bmod p^3,$$

und so geht das dann weiter.

Wir fragen uns, was mit dieser Entwicklung passiert, wenn man Elemente in $\mathcal{O}_{p,N}$ addiert und multipliziert. Ich will diese Rechnung andeuten, insbesondere weil sich herausstellt, daß unser Ansatz *nicht der richtige ist*.

Dazu betrachten wir zwei Elemente $a = [a_0] + [a_1]p + \dots$, $b = [b_0] + [b_1]p + \dots \in \mathcal{O}_{p,N}$. Wir wollen die Koeffizienten der Entwicklung von $c = a + b$ bestimmen. Wir rechnen mod p^2 , d.h. wir wollen nur die ersten beiden Terme ausrechnen.

Element $a \in \mathcal{O}_{p,N}$ in die Reihe

$$a = [a_0] + [a_1^{1/p}]p + [a_2^{1/p^2}]p^2 \dots$$

Mit anderen Worten, wir ordnen den Vektoren $a = (a_0, a_1, a_2, \dots)$, $b = (b_0, b_1, b_2, \dots)$ die Elemente

$$a = [a_0] + [a_1^{1/p}]p + [a_2^{1/p^2}]p^2 + \dots$$

$$b = [b_0] + [b_1^{1/p}]p + [b_2^{1/p^2}]p^2 + \dots$$

in dem Ring $\mathcal{O}_{p,N}$ zu. Dann müssen wir in der obigen Formel für den zweiten Koeffizienten die Elemente c_1, a_1, b_1 durch ihre p -ten Wurzel ersetzen und dann die Formel in die p -te Potenz erheben. Die Zahlen $\binom{p}{\mu}/p$ liegen in \mathbb{F}_p und bemerken das Potenzieren mit p nicht. Das ergibt dann die richtige Formel

$$c_1 = a_1 + b_1 - \sum_{\mu=1}^{p-1} \left(\binom{p}{\mu} / p \right) a_0^{p-\mu} \cdot b_0^\mu.$$

Es ist nun eins der ersten Hauptergebnisse der Arbeit von Witt, daß wir für $a + b, ab$ in dem Ring $\mathcal{O}_{p,N}$ Entwicklungen

$$a + b = [a_0 + b_0] + [(S_1(a_0, a_1, b_0, b_1))^{1/p}]p + \dots$$

und

$$x \cdot y = [a_0 \cdot b_0] + [(M_1(a_0, a_1, b_0, b_1))^{1/p}]p + \dots$$

bekommen, wobei $S_1, S_2, \dots, M_1, \dots$ universelle Polynome sind mit Koeffizienten in \mathbb{Z} oder \mathbb{F}_p sind (Es kommt nur auf die Polynome mod p an). Das Polynom $S_1(a_0, a_1, b_0, b_1)$ haben wir oben ausgerechnet. Es ist klar, daß diese universellen Polynome eindeutig bestimmt sind, weil die Konstruktion für alle N funktionieren soll. Der Nachweis, daß diese Polynome auch existieren, ist schwieriger.

Eigenschaften der Wittvektoren

Witt erläutert dann alle die fundamentalen Eigenschaften seiner Konstruktion, die in den aktuellen Anwendungen eine Rolle spielen. Wir können für jeden Körper K mit der Charakteristik $p > 0$ den Witttring $W(K)$ hinschreiben. Darin ist dann die Multiplikation mit p durch

$$p(a_0, a_1, \dots) = (0, a_0^p, a_1^p, \dots)$$

gegeben. (Das folgt aus der obigen Aussage, daß $W(\mathbb{F}_{p,N}) = \mathcal{O}_{p,N}$, der Tatsache, daß in diesem Ring dies die richtige Formel für die Multiplikation mit p ist, und der Universalität der Polynome). Wenn K perfekt ist, können wir sagen, daß

$$p^m W(K) = \{(0, \dots, 0, a_m, a_{m+1}, \dots)\},$$

und $W(K)$ ist dann ein vollständiger diskreter Bewertungsring mit maximalen Ideal

(p) und Restklassenkörper K . Auch wenn K nicht perfekt ist, gilt, daß

$$I_m = \{0, \dots, 0, a_m, a_{m+1}, \dots\}$$

ein Ideal ist, und $W(K)/I_m = \{(a_0, \dots, a_{m-1})\} = W_m(K)$ ist der gestutzte Witttring der Wittvektoren der Länge m .

Auf dem Witttring ist stets die Abbildung (der Frobenius)

$$\mathbf{F} : (a_0, a_1, \dots) \rightarrow (a_0^p, a_1^p, \dots)$$

ein Endomorphismus (Automorphismus, falls K perfekt ist). Das braucht man nicht nachzurechnen, sondern das folgt aus der Beschreibung von $W(\mathbb{F}_p)$. Außerdem hat man noch die additive Abbildung der Verschiebung

$$\mathbf{V} : (a_0, a_1, \dots) \rightarrow (0, a_0, a_1, \dots)$$

(Dieser Terminus ist international üblich), und es ist

$$\mathbf{F} \circ \mathbf{V} = \mathbf{V} \circ \mathbf{F} = p \cdot \text{Id}.$$

Der Witttring $W(\mathbb{F}_p) = \mathbb{Z}_p$ kann dann als die Menge der Elemente $x \in W(K)$ charakterisiert werden, für die gilt $\mathbf{F}(x) = x$.

Entsprechend finden wir $\mathbb{Z}/p^n\mathbb{Z}$ im gestutzten Witttring $W_n(K)$ wieder (in der folgenden Formel nutze ich die Gelegenheit eine praktische Notation einzuführen)

$$\mathbb{Z}/p^n\mathbb{Z} = \{x \in W_n(K) \mid \mathbf{F}(x) = x\} = W_n(K)(\mathbf{F} = 1).$$

Diese Tatsache werden wir noch häufig anwenden, sie ist es, die die elegante Lösung des eingangs formulierten Problems, zyklischen Erweiterungen vom Grad p^n zu konstruieren, ermöglicht. Auf dem gestutzten Witttring $W_n(K)$ studieren wir die Artin-Schreier Gleichung

$$\mathbf{F}(x) - x = a$$

mit $a \in W_n(K)$. Die Koordinaten einer Lösung liegen in einer endlichen Erweiterung L/K , und wenn für $\alpha \in W_n(L)$ gilt $\mathbf{F}(\alpha) - \alpha = a$, dann bekommen wir die anderen Lösungen, indem wir α durch $\alpha + b$ mit $b \in W_n(\mathbb{F}_p) = \mathbb{Z}/p^n\mathbb{Z}$ ersetzen. Die Galoisgruppe ist also $\mathbb{Z}/p^n\mathbb{Z}$, wenn die Gleichung

$$x_0^p - x_0 = a_0$$

für die nullte Komponente irreduzibel ist. Alle zyklischen Erweiterungen von K werden auf diese Weise erhalten.

Wir werden sehen, daß in denjenigen Anwendungen der Konstruktion von Witt, die ich in diesem Aufsatz erläutern werde, fast immer auch der Frobenius und die Verschiebung mit auf der Bühne stehen. Die Rolle, die sie dann spielen, ist immer genau dieselbe, die ihnen von Witt auf den Leib geschrieben wurde.

Witt wendet seine Konstruktion auf einige weitere Probleme an, insbesondere konstruiert er zyklische Algebren vom Grad p^n . Dabei geht er von einem Vektor $\beta = (\beta_0, \beta_1, \dots, \beta_{n-1})$ und einem Element $\alpha \in K^*$ aus und bildet wie oben die kommutative K -Algebra

$$K[\Theta] \text{ mod } (\mathbf{F}(\Theta) = \beta).$$

(Das muß man nur richtig lesen). Er adjungiert eine weitere Größe u mit $u^{p^n} = \alpha$ und fordert, daß die Konjugation mit u gerade die Wirkung $u\Theta u^{-1} = \Theta + (1, 0, 0 \dots)$. Auf diese Weise erhält er eine zentrale einfache Algebra vom Grad p^n , die er mit $(\alpha, \beta]$ bezeichnet. Die Konstruktion ist ganz analog zu der Konstruktion von solchen Algebren durch Hilbertsymbole, nur daß hier die zweite Variable additiv zu interpretieren ist. Er benutzt dies, um Elemente der Ordnung p^n in der Brauergruppe eines Potenzreihenkörpers $\mathbb{F}_q((t))$ zu produzieren. Wenn ich ihn richtig verstehe (das ist mir ja nicht immer gelungen) ist $(t, (1, 0, \dots, 0))$ ein solches Element, falls $p = q$.

Die ersten Anwendungen

Eine der ersten Anwendungen der Wittvektoren finden wir in einer gemeinsamen Arbeit von H.L. Schmid und Witt, die im gleichen Band des Crelle-Journals erschienen ist und sogar das gleiche Eingangsdatum hat. In dieser Arbeit gehen die Autoren von einem Funktionenkörper K einer Variablen über einem perfekten Konstantenkörper aus. Sie studieren die abelschen, unverzweigten Erweiterungen vom Exponenten p^n des Körpers K . Ich will den Inhalt dieser Arbeit kurz skizzieren, weil sie von großer Aktualität ist und ich Ergebnisse aus dieser Arbeit im späteren Teil dieses Aufsatzes benötige.

In unserer heutigen Sprache bedeutet das, daß wir uns eine glatte, irreduzible Kurve X/k vorgeben und wir uns ihre unverzweigten abelschen Überlagerungen p -Potenzgrad ansehen wollen. Dabei nehmen wir der Einfachheit halber an, daß k algebraisch abgeschlossen ist.

In der älteren Arbeit von Hasse und Witt wird der Fall des Exponenten p betrachtet. Wir haben schon gesehen, daß wir zyklische Erweiterungen vom Grad p bekommen, wenn wir Gleichungen der Form

$$f^p - f = h$$

lösen, dabei ist h aus dem Funktionenkörper $K = k(X)$. Wann ist diese Erweiterung unverzweigt? Offensichtlich genau dann, wenn sich die Gleichung

$$f_p^p - f_p = h$$

an jeder Stelle p in der Kompletzierung K_p lösen läßt. Das ist immer an denjenigen Stellen möglich, an denen h ganz ist, d.h. $\text{ord}_p(h) \geq 0$. Wenn dagegen h an einer Stelle p einen Pol hat und wir h an dieser Stelle nach einem uniformisierenden Element entwickeln

$$h = a_{-n_0} \pi_p^{-n_0} + \dots a_{-1} \pi_p^{-1} \dots, a_{n_0} \neq 0$$

dann muß n_0 durch p teilbar sein – wir schreiben $n_0 = pm_0$ –, und die folgende Gleichung

$$(b_{-m_0} \pi_p^{-m_0} + \dots)^p - (b_{-m_0} \pi_p^{-m_0} + \dots) = h$$

muß lösbar sein. Das ist offensichtlich eine Einschränkung an die Entwicklung von h . (Wenn z.B. $m_0 = 1$ ist, dann muß die Entwicklung von h so aussehen $a_{-1}^p \pi_p^{-p} - a_{-1} \pi_p^{-1} + \dots$).

Um diese Situation zu verstehen, betrachten wir nur solche h , die nur an einer vorgegebenen Stelle p einen Pol haben, man stellt leicht fest, daß das genügt. Wir haben auf X die Strukturgabe \mathcal{O}_X , und die ist enthalten in der Garbe $\mathcal{O}_X(-\infty p)$ derjenigen Funktionen, die bei p einen Pol beliebiger Ordnung haben dürfen. Wir erhalten eine Sequenz

$$0 \rightarrow H^0(X, \mathcal{O}_X) \rightarrow H^0(X, \mathcal{O}_X(-\infty p)) \rightarrow \mathcal{L}_p \xrightarrow{\delta} H^1(X, \mathcal{O}_X) \rightarrow 0,$$

wobei \mathcal{L}_p die negativen Laurententwicklungen bei p sind. Die Dimension des k -Vektorraums $H^1(X, \mathcal{O}_X)$ ist das Geschlecht g der Kurve X .

Die Abbildung $\mathbf{F} : f \rightarrow f^p$ induziert auf den ersten drei k -Vektorräumen eine Abbildung. Diese Abbildung ist σ -linear, d.h. es ist $\mathbf{F}(af) = a^p \mathbf{F}(f)$ für $a \in k$. Dabei steht σ auch für den Frobenius $\sigma : a \rightarrow a^p$ auf dem Körper k . Das liefert uns eine Abbildung

$$\mathbf{F} : H^1(X, \mathcal{O}_X) \rightarrow H^1(X, \mathcal{O}_X),$$

die σ -linear ist.

Ein wenig σ -lineare Algebra zeigt uns, daß der Kern der Abbildung

$$1 - \mathbf{F} : H^1(X, \mathcal{O}_X) \rightarrow H^1(X, \mathcal{O}_X)$$

ein \mathbb{F}_p -Vektorraum der Dimension $\gamma \leq g$, wobei γ der Rang von \mathbf{F} ist. (Auch das Bild einer σ -linearen Abbildung ist ein k -Vektorraum).

Wenn nun $\xi \in \mathcal{L}_p$ eine Laurentreihe ist, für die $\delta(\xi) \in \ker(1 - \mathbf{F})$, dann ist klar, daß die Laurententwicklung $\xi^p - \xi$ von einer meromorphen Funktion $h \in H^0(X, \mathcal{O}_X(-\infty p))$ herkommt. Wir sehen, daß uns h eine unverzweigte Erweiterung gibt, wenn wir

$$f^p - f = h$$

lösen, und diese Erweiterung ist zyklisch vom Grad p . Wir sehen also, daß die Galoisgruppe der maximalen, abelschen, unverzweigten Erweiterung vom Exponenten p isomorph zu $(\mathbb{Z}/p\mathbb{Z})^\gamma$ ist.

Wir haben die Dualität (Serre-Dualität), die uns eine nicht entartete Paarung

$$H^0(X, \Omega_X) \times H^1(X, \mathcal{O}_X) \rightarrow k$$

liefert ($\langle \omega, \xi \rangle = \text{Res}(\tilde{\xi}\omega)$ mit $\tilde{\xi} \in \mathcal{L}_p$ und $\tilde{\xi} \xrightarrow{\delta} \xi$). Diese liefert uns eine Paarung

$$H^0(X, \Omega_X) \times \ker(1 - \mathbf{F}) \rightarrow k.$$

Das ist kurz der Inhalt der Arbeit von Hasse-Witt. Die obige Abbildung $\mathbf{F} : H^1(X, \mathcal{O}_X) \rightarrow H^1(X, \mathcal{O}_X)$ ist die Hasse-Witt-Matrix.

Nun komme ich zu der gemeinsamen Arbeit mit H.-L. Schmid zurück. Hier werden diese Ergebnisse auf den Fall des Exponenten p^n erweitert, wobei der grundsätzliche Ansatz aus der Arbeit über Wittvektoren herangezogen wird. Die Rolle der Funktion h wird dann von einem Wittvektor

$$h = (h_0, h_1, \dots, h_n) \in W(K)$$

übernommen. Der Wittvektor h heißt unverzweigt, wenn sich die Gleichung

$$F(f_p) - f_p = h$$

lokal an allen Stellen lösen läßt. Die Autoren zeigen, daß sich jeder unverzweigte „Anfang eines Wittvektors“ zu einem beliebig langen unverzweigten Wittvektor fortsetzen läßt.

Damit ist dann ziemlich klar, daß die Galoisgruppe der maximalen, unverzweigten abelschen Erweiterung vom Exponenten p^n von K isomorph zu $(\mathbb{Z}/p^n\mathbb{Z})^\gamma$ ist.

Wir können diese Galoisgruppe natürlich auch in der Jacobischen Mannigfaltigkeit $J(X) = A$ unserer Kurve sehen. Wenn wir dort die Multiplikation mit p^n betrachten, dann bilden die k -wertigen Punkte des Kerns die Gruppe $J^{ét}(X)[p^n] = (\mathbb{Z}/p^n\mathbb{Z})^\gamma$, und es gibt einen kanonischen Isomorphismus

$$J^{ét}(X)[p^n] \xrightarrow{\sim} \text{Gal}(K_n/K).$$

Dies wird für uns später in der folgenden Situation wichtig sein. Wenn unsere Kurve X/k die Reduktion einer projektiven glatten Kurve $\mathcal{X}/W(k)$ ist, dann bekommen wir eine Paarung

$$\int \gamma: H^0(\mathcal{X}_n/W_n(k), \Omega_{\mathcal{X}_n/W_n(k)}) \times J^{ét}(X)[p^n] \rightarrow W(k)$$

auf die folgende Weise: Einem Element $\eta \in J^{ét}(X)[p^n]$ ordnen wir nach der Konstruktion von Schmidt-Witt einen Wittvektor $(\xi_0, \xi_1, \dots, \xi_{n-1}) = \xi$ von Laurententwicklungen zu. Wenn nun $\omega \in H^0(\mathcal{X}_n/W_n(k))$, dann bilden wir einfach

$$\langle \omega, \eta \rangle = \text{Res}(\omega \cdot \xi) \in W_n(k)$$

und damit haben wir die Paarung. Der Residuenvektor wird schon in Witts Arbeit behandelt. Mit Hilfe von Satz 18 in [Wi1] hat Fontaine [Fo2] kürzlich einen einfachen Zugang zu einem neueren Ergebnis von Bloch-Kato [Bl-Ka2, Th. 2.1.] gefunden.

Weitere Arbeiten von Witt

Witt ist noch einmal auf das Thema in seiner Arbeit [Wi2] mit dem Titel „ p -Algebren und Pfaffsche Formen“ zurückgekommen. In dieser Arbeit beschreibt Witt die p -Komponente der Brauergruppe eines Körpers der Charakteristik p mit Hilfe von Differentialformen auf dem Ring $W = \cup W(k^{1/p^n})$ zu beschreiben. (Siehe auch [Ke]) Die Ideen aus dieser Arbeit spielen eine Rolle in der Arbeit von K. Kato [Ka], in der die höherdimensionale lokale Klassenkörpertheorie entwickelt wird. Es geht dabei darum, eine Klassenkörpertheorie für vollständige diskret bewertete Körper zu entwickeln, für die der Restklassenkörper k positive Charakteristik hat und von höherer Dimension ist. Dazu benötigt man Einsichten in die Galoiskohomologie dieses Restklassenkörpers, und dazu ist der erste Schritt das Studium der Brauergruppe.

Dieser Zugang war wohl auch unabhängig von anderen Mathematikern gefunden worden. Hierzu verweise ich auf die Einleitung von dem Buch von Demazure und Gabriel und auf das Kapitel V in deren Buch. Witt selbst hat seine Ergebnisse nicht publiziert, er hat aber am Dienstag den 23. Juni 1964 im Mathematischen Seminar einen Kolloquiumsvortrag gehalten. Seine handschriftlichen Eintragungen im Kolloquiumsbuch sind diesem Aufsatz vorangestellt. Er zeigt, daß man einen „universellen“, von der Charakteristik p unabhängigen Witttring konstruieren kann, indem man jedem Vektor $x = (x_1, x_2, \dots)$ die Potenzreihe

$$f_x(t) = \prod_{n=1}^{\infty} (1 - x_n t^n)$$

zuordnet und dann die Addition und die Multiplikation durch Multiplikation und Faltung im Potenzreihenring erklärt. Das steht so in dem Buch.

Ich komme nun dazu die Rolle der Wittvektoren in neueren Entwicklungen zu beschreiben.

Wittvektoren und unipotente, kommutative algebraische Gruppen

Eine ausführliche Darstellung der Zusammenhänge zwischen der Theorie der unipotenten, kommutativen algebraischen Gruppen und den Wittvektoren findet man in [De-Ga], Chap. V oder auch in dem Buch von Hazewinkel [Ha].

Ich beginne mit der Theorie der unipotenten, kommutativen linearen algebraischen Gruppen über einem Körper k . Die einfachste solche Gruppe ist die Gruppe

$$G_a/k = \text{Spec}(k[x])/k$$

wobei die Komultiplikation durch

$$\Delta : x \mapsto 1 \otimes x + x \otimes 1$$

gegeben ist. Allgemein heißt eine affine algebraische Gruppe G/k unipotent, wenn es für jeden Normalteiler H/k , der von eins verschieden ist, einen nicht trivialen Homomorphismus von H/k nach G_a/k gibt.

Wenn die Charakteristik des Grundkörpers k gleich Null ist, dann ist die Kategorie dieser unipotenten, kommutativen, affinen Gruppen leicht zu verstehen. In diesem Fall ist jede solche Gruppe von der Form G_a^d , mit anderen Worten: Die Kategorie kommutativen, unipotenten algebraischen Gruppen ist äquivalent zur Kategorie der Vektorräume über k , insbesondere ist sie halbeinfach.

Das ändert sich dramatisch, wenn die Charakteristik des Grundkörpers k eine Primzahl $p > 0$ ist. Dann ist die obige Kategorie nicht mehr halbeinfach. Der gestutzte Witttring W_2 ist eine kommutative unipotente Gruppe und sitzt in einer Sequenz

$$\begin{array}{ccccccc} 0 & \rightarrow & G_a & \rightarrow & W_2 & \xrightarrow{\pi_1} & G_a & \rightarrow & 0 \\ & & y & \rightarrow & (0, y) & & & & \\ & & & & (x, y) & \rightarrow & x & & \end{array} .$$

In [Se] (und in [De-Ga]) wird gezeigt, daß W_2 ein erzeugendes Element der Gruppe $\text{Ext}^1(G_a, G_a)$ ist. Man kann dies auch etwas anders interpretieren. Wenn man versucht, die Sequenz zu spalten, dann muß man einen Homomorphismus $s : G_a \rightarrow W_2$ finden, der ein Schnitt ist, d.h. $s \circ \pi_1 = \text{Id}$. Ein sich anbietender Schnitt ist durch $s_1 : x \rightarrow (x, 0)$ gegeben. Aber das ist kein Homomorphismus, weil für Elemente $w_1 = (x_1, 0), w_2 = (x_2, 0)$ im Witttring gilt

$$s(w_1 + w_2) - w_1 - w_2 = (0, - \sum_{\mu=1}^{p-1} \binom{p}{\mu} / p x_1^{p-\mu} \cdot x_2^\mu).$$

Das interpretiert man dann so, daß der nichtlineare Anteil in dem universellen Polynom S_1 einen 2-Kozykel definiert, der nicht Null ist und die fragliche Erweiterungsgruppe erzeugt.

Die kommutativen, unipotenten Gruppen kann man nun mit Hilfe der Wittvektoren wie folgt verstehen.

Wir betrachten den direkten Limes

$$W_1 \rightarrow W_2 \rightarrow W_3 \rightarrow \dots,$$

wobei die Inklusionen durch die Verschiebung gegeben sind, d.h.

$$\begin{aligned} x &\mapsto (0, x) \\ (x, y) &\mapsto (0, x, y). \end{aligned}$$

Dies ist ein gerichtetes System von unipotenten algebraischen Gruppen über k , den Limes bezeichnen wir mit W/k . Dann kann man zu jeder unipotenten algebraischen Gruppe U/k (der Körper k sei perfekt) die Gruppe

$$D(U) = \varinjlim \text{Hom}(U, W_n) = \text{Hom}(U, W)$$

betrachten. Auf den zweiten Variablen haben wir die Operationen durch Frobenius und Verschiebung. Wir führen nun den Dieudonné-Ring $\mathbf{ID}_k = W(k)[\mathbf{F}, \mathbf{V}]$ ein. Dieser Ring ist nicht kommutativ, er entsteht aus $W(k)$ durch Adjunktion zweier neuer Variabler, die aber mit den Skalaren nicht vertauschen. Um das genauer zu erklären, ändern wir unsere Notation noch ein wenig ab: Die Operation Frobenius auf $W(k)$ sei jetzt mit

$$\sigma(a) = a^{(p)} = (a_0^p, a_1^p, \dots)$$

notiert. Dann soll für \mathbf{F}, \mathbf{V} und $a \in W(k)$ gelten

$$\mathbf{F}a = \sigma(a)\mathbf{F}, \mathbf{V}\sigma(a) = a\mathbf{V}, \mathbf{V}\mathbf{F} = \mathbf{F}\mathbf{V} = p.$$

Der Ring \mathbf{ID}_k ist also so konstruiert, daß $D(U)$ ein Modul über diesem Ring wird. Wir bekommen also einen kontravarianten Funktor von der Kategorie der kommutativen unipotenten algebraischen Gruppen in die Kategorie der Dieudonné-Moduln.

Man kann sich dann leicht klar machen, daß die erhaltenen Dieudonné-Moduln endlich erzeugt sind und daß sie „auslöschar“ sind, d.h. zu jedem $m \in D(U)$

gibt es ein n mit $V^{nm} = 0$. Der Funktor landet also in der Kategorie der endlich erzeugten auslöschbaren Dieudonné-Moduln. Der Struktursatz über unipotente, kommutative, algebraische Gruppen besagt jetzt:

Der Funktor

$$U/k \rightarrow D(U)$$

ist eine Antiäquivalenz von Kategorien.

Wenn wir zum Beispiel für $U = W_n/k$ selbst einsetzen, dann bekommen wir

$$D(U) = \text{Hom}(W_n, W_n) = \text{End}(W_n).$$

Es ist klar, daß V^n in $\text{End}(W_n)$ gleich Null ist, wir bekommen also eine Abbildung

$$\mathbf{ID}_k/V^n\mathbf{ID}_k \rightarrow \text{End}(W_n),$$

und diese Abbildung ist ein Isomorphismus. ($V^n\mathbf{ID}_k$ ist ein zweiseitiges Ideal). Wählen wir noch $n = 1$, dann stellt man leicht fest, daß

$$\mathbf{ID}_k/\mathbf{ID}_kV = k[\mathbf{F}]$$

gilt und dann besagt die obige Aussage, daß

$$\begin{aligned} k[\mathbf{F}] &\rightarrow \text{End}(G_a/k) \\ \Sigma a_i \mathbf{F}^i &\rightarrow (x \rightarrow \Sigma a_i x^{p^i}) \end{aligned}$$

ein Isomorphismus ist.

Ich nehme mir jetzt die Freiheit, einige Konsequenzen aus dem Struktursatz zu ziehen, die eventuell schon zu seinem Beweis benutzt worden sind.

Wir wollen uns überlegen, welches die einfachen Objekte in der Kategorie der unipotenten Gruppen sind, d.h. diejenigen Objekte, die kein nichttriviales Unterobjekt besitzen. (Falls k ein Körper der Charakteristik 0 ist, dann sind es die eindimensionalen Gruppen G_a/k).

Dazu müssen wir einfache \mathbf{ID}_k -Moduln M betrachten, die auslöschbar sind. Dann können es aber nur $\mathbf{ID}_k/\mathbf{ID}_kV$ -Moduln, also $k[\mathbf{F}]$ -Moduln sein. Natürlich ist $\mathbf{F}(M) \subset M$ wieder ein solcher Modul, also gilt $\mathbf{F}(M) = 0$ oder $\mathbf{F}(M) = M$. Im ersten Fall ist klar, daß M ein eindimensionaler k -Vektorraum sein muß. Dann finden wir als zugehöriges einfaches Objekt in der Kategorie der Gruppen

$$\alpha_{k,p} = \ker[G_a \xrightarrow{x \rightarrow x^p} G_a]$$

also

$$\alpha_{k,p} = \text{Spec}(k[x]/(x^p)).$$

Dies ist ein Beispiel einer infinitesimalen Gruppe, d.h. ihre Algebra ist ein lokaler Ring, das maximale Ideal ist nilpotent.

Im zweiten Fall finden wir, daß die einfachen Objekte über k endlich dimensionale k -Vektorräume V zusammen mit einem semilinearen Automorphismus

$$\begin{aligned} \mathbf{F} : V &\rightarrow V \\ \mathbf{F}(av) &= a^p \mathbf{F}(v) \end{aligned}$$

sind. Dies ist ein einfaches Objekt, wenn es keinen invarianten Unterraum gibt.

Wenn nun k auch noch algebraisch abgeschlossen ist, dann sieht man, daß jedes einfache Objekt von der Form

$$(V, \mathbf{F}) = (k, \sigma)$$

ist.

Dem entspricht dann auf der Seite der unipotenten Gruppen die unzusammenhängende étale Gruppe

$$\left(\frac{1}{p}\mathbb{Z}/\mathbb{Z}\right)_k,$$

d.h. die affine Algebra ist

$$A(G) = \bigoplus_{x \in \frac{1}{p}\mathbb{Z}/\mathbb{Z}} k = \bigoplus_{x \in \frac{1}{p}\mathbb{Z}/\mathbb{Z}} k e_x$$

mit komponentenweiser Multiplikation und der Komultiplikation

$$\Delta : e_x \rightarrow \sum_{r+t=x} e_r \otimes e_t.$$

Die Gruppe heißt étale, weil ihre Algebra eine Summe von Körpern ist.

Wenn wir die Annahme, daß k algebraisch abgeschlossen sein soll, fallen lassen, dann ist die Klassifikation einfacher auf der Seite der Gruppen zu führen. Die einfachen Objekte der Kategorie sind dann

$$G = \left(\frac{1}{p}\mathbb{Z}/\mathbb{Z}\right)^d$$

zusammen mit einer irreduziblen Darstellung

$$\mathrm{Gal}(\bar{k}/k) \rightarrow \mathrm{Aut}(G) = \mathrm{GL}_d(\mathbb{F}_p).$$

Wir können allgemein endliche, abelsche p -Gruppen G zusammen mit einem Homomorphismus

$$\mathrm{Gal}(\bar{k}/k) \rightarrow \mathrm{Aut}(G)$$

betrachten, diese bilden die Kategorie der kommutativen, endlichen, étalen, unipotenten Gruppenschemata. Man erkennt sie daran, daß der Frobenius $\mathbf{F} : \mathbf{ID}(G) \rightarrow \mathbf{ID}(G)$ ein Isomorphismus ist (wenn k perfekt ist). Dies ist in einem gewissen Sinn der einfachste Teil der Kategorie.

Die Wittvektoren liefern uns auch den Schlüssel zum Verständnis der endlichen Gruppenschemata über dem perfekten Körper k der Charakteristik $p > 0$. Zunächst möchte ich noch einige weitere solcher Gruppenschemata vorstellen. Wir betrachten das Gruppenschema der multiplikativen Gruppe

$$G_m/k = \mathrm{Spec}(k[T, T^{-1}])$$

mit der Komultiplikation

$$\Delta : T \rightarrow T \otimes T.$$

Darin haben wir das Unterschema, das durch den Kern der Abbildung

$$x \rightarrow x^{p^n}$$

gegeben wird. Die affine Algebra ist dann $k[X]/(X^{p^n} - 1)$. Dies Gruppenschema heißt μ_{p^n}/k . Es ist infinitesimal und multiplikativ. Allgemeiner vertauscht die Cartier-Dualität die infinitesimalen, multiplikativen Gruppen und die étalen unipotenten, erstere müssen also auch als einfacher Teil der Kategorie angesehen werden.

Zu einem beliebigen endlichen Gruppenschema G/k mit affiner Algebra $A(G)/k$ kann man die Cartier - duale Gruppe G^\vee definieren, ihre affine Algebra ist als k -Vektorraum $A(G^\vee) = \text{Hom}(A(G), k)$ und die Multiplikation und die Komultiplikation vertauschen die Rollen. Die Cartier-duale Gruppe zu μ_{p^n} ist das étale unipotente Gruppenschema $\frac{1}{p^n}\mathbb{Z}/\mathbb{Z}$, das wir schon weiter oben beschrieben haben.

Wir wollen nun die Kategorie derjenigen endlichen kommutativen Gruppenschemata betrachten, die von einer genügend hohen p -Potenz annulliert werden. In [De-Ga] wird gezeigt, daß wir für jedes solche Gruppenschema eine kanonische Spaltung besitzt

$$G = G^{\text{mult}} \times G^{\text{unipt}} = G^{\text{mult}} \times G^{\text{étal,unipt}} \times G^{\text{inf,unipt}}.$$

Nach Übergang zum algebraischen Abschluß von k wird G^{mult} zu einem Produkt von μ_{p^n} und $G^{\text{étal,unipt}}$ ein Produkt von $\frac{1}{p^n}\mathbb{Z}/\mathbb{Z}$. Diese Anteile der Kategorie sind leichter zu verstehen und werden von der Cartier-Dualität vertauscht. Schwerer zu verstehen ist der dritte Faktor.

Einem solchen Gruppenschema G ordnen wir dann zu

$$\text{Hom}(G \times_k \bar{k}, G_m) \times \text{Hom}(G, \mathcal{W}) = X(G) \times D_u(G),$$

wobei der erste Faktor gleich $\text{Hom}(G^{\text{mult}} \times_k \bar{k}, G_m)$ ist, auf dem $\text{Gal}(\bar{k}/k)$ operiert. Der zweite Faktor der Dieudonné-Modul, den wir oben schon hatten. Dieser Dieudonné-Modul ist jetzt natürlich von endlicher Länge.

Der Modul $X(G)$ ist ein endlicher \mathbb{Z}_p -Modul, mit einer Operation der Galoisgruppe. Wir können daraus auch einen Dieudonné-Modul machen. Dazu bilden wir $X(G) \otimes W(k)$. Darauf müssen wir noch \mathbf{F}, \mathbf{V} erklären. Wir gehen zur dualen Gruppe $(G^{\text{mult}})^\vee$ über. Diese ist dann étale und unipotent, und ihr Dieudonné-Modul ist $X^\vee = \text{Hom}(X(G), W(k) \overset{[1]}{p} / W(k))$, und darauf haben wir die Operation von Frobenius und Verschiebung. Die dazu adjungierten Endomorphismen auf $X(G) \otimes W(k)$ sind dann die Verschiebung und der Frobenius. Damit haben wir auch einer multiplikativen Gruppe G einen Dieudonné-Modul $D_m(G)$ zugeordnet, und wir haben ganz allgemein $D(G) = D_m(G) \times D_u(G)$ definiert.

Nun haben wir wieder einen Struktursatz

Der Funktor $G \rightarrow D(G) = D_m(G) \times D_u(G)$ definiert eine Antiäquivalenz zwischen der Kategorie der kommutativen endlichen Gruppenschemata, die von einer hohen Potenz von p annulliert werden und der Kategorie der \mathbf{ID}_k -Moduln, die als $W(k)$ -Modul von endlicher Länge sind.

Die Rolle der Wittvektoren in der arithmetischen algebraischen Geometrie

Die Witttringe bilden einen Grundstein für viele Konstruktionen in der modernen algebraischen Geometrie.

In den frühen sechziger Jahren haben A. Grothendieck, M. Artin und andere die étale Kohomologie der algebraischen Varietäten entwickelt. (siehe z. B. [Mil]) So erhält man zum Beispiel für eine algebraische Varietät X über einen Körper k und jede Primzahl ℓ , die von der Charakteristik von k verschieden ist, étale Kohomologiegruppen

$$H_{\text{ét}}^i(X \times_k \bar{k}, \mathbf{Z}/\ell^n \mathbf{Z}),$$

deren Kompletzierung

$$\varprojlim H_{\text{ét}}^i(X \times_k \bar{k}, \mathbf{Z}/\ell^n \mathbf{Z}) = H_{\text{ét}}^i(X \times_k \bar{k}, \mathbf{Z}_\ell)$$

und schließlich

$$H_{\text{ét}}^i(X \times_k \bar{k}, \mathbf{Q}_\ell) = H_{\text{ét}}^i(X \times_k \bar{k}, \mathbf{Z}_\ell) \otimes \mathbf{Q}_\ell.$$

Diese Kohomologiegruppen haben eine Reihe von formalen Eigenschaften und insbesondere sind sie Moduln unter der Operation der Galoisgruppe $\text{Gal}(\bar{k}/k)$ und als solche von großen arithmetischen Interesse.

Das einfachste Beispiel eines solchen Galoismoduls läßt sich aus der multiplikativen Gruppe G_m/k konstruieren. Der Kern der Abbildung $x \rightarrow x^{\ell^n}$ ist das Schema der ℓ^n -ten Einheitswurzeln, also

$$G_m[\ell^n] = \{x \in G_m(\bar{k}) \mid x^{\ell^n} = 1\} \xrightarrow{\sim} \mathbf{Z}/\ell^n \mathbf{Z}.$$

Man \blacksquare bekommt ein projektives System

$$\ell^r : G_m[\ell^{n+r}] \rightarrow G_m[\ell^n]$$

und bildet den Tatemodul

$$T_\ell(G_m) = \varprojlim G_m[\ell^n] \xrightarrow{\sim} \mathbf{Z}_\ell.$$

Darauf operiert dann die Galoisgruppe durch den sogenannten zyklotomischen Charakter, der manchmal auch Tate-Charakter genannt wird.

$$\alpha : \text{Gal}(\bar{k}/k) \rightarrow \mathbf{Z}_\ell^*,$$

der durch

$$\sigma(\zeta) = \zeta^{\alpha(\sigma)}$$

für alle ℓ^n -ten Einheitswurzeln definiert ist. Man nennt diesen Galoismodul $T_\ell(G_m) = \mathbf{Z}_\ell(1)$, und dann ist es nicht schwer zu sehen, daß

$$H_{\text{ét}}^1(G_m \times_k \bar{k}, \mathbf{Z}_\ell) = \mathbf{Z}_\ell(-1) = \text{Hom}(\mathbf{Z}_\ell(1), \mathbf{Z}_\ell)$$

ist.

Wir bekommen ein etwas komplizierteres Beispiel, wenn A/k eine abelsche Varietät ist. Dann können wir

$$A[\ell^n] = \{x \in A(\bar{k}) \mid \ell^n x = 0\}$$

betrachten und davon den projektiven Limes nehmen,

$$\varprojlim A[\ell^n] = T_\ell(A),$$

das ist dann ein freier \mathbb{Z}_ℓ -Modul vom Rang $2g$ mit $g = \dim A$.

Ganz entsprechend wie im Fall G_m/k findet man dann

$$H_{\text{ét}}^1(A \times_k \bar{k}, \mathbb{Z}_\ell) = \text{Hom}(T_\ell(A), \mathbb{Z}_\ell(-1)),$$

man beachte, daß man den Tate-Modul als Homologie interpretieren muß.

Wie schon oben erwähnt wurde, haben diese Kohomologiegruppen sehr schöne formale Eigenschaften. Insbesondere hat man unter geeigneten Voraussetzungen die Möglichkeit des Basiswechsels, und das erlaubt uns, das Verhalten der Operation der Galoisgruppe bei Reduktion mod p zu verstehen. Das soll kurz erläutert werden.

Wir gehen von einer algebraischen Varietät X/\mathbb{Q} aus und nehmen an, daß sie an einer Stelle p gute Reduktion hat, d.h. wir haben ein glattes Schema $\mathcal{X}/\mathbb{Z}_{(p)}$, dessen allgemeine Faser X/\mathbb{Q} ist. Dann gilt unter bestimmten weiteren Annahmen (z.B. : $\mathcal{X}/\mathbb{Z}_{(p)}$ ist eigentlich), daß

$$H_{\text{ét}}^i(X \times_{\mathbb{Q}} \bar{\mathbb{Q}}, \mathbb{Z}_\ell) \xrightarrow{\sim} H_{\text{ét}}^i(\mathcal{X} \times_{\mathbb{F}_p} \bar{\mathbb{F}}_p, \mathbb{Z}_\ell)$$

falls $p \neq \ell$. Das hat zur Folge, daß die Operation der Galoisgruppe $\text{Gal}(\bar{\mathbb{Q}}/\mathbb{Q})$ an der Stelle p unverzweigt ist, d.h. die Trägheitsgruppe $I_p \subset \text{Gal}(\bar{\mathbb{Q}}_p/\mathbb{Q}_p)$ operiert trivial auf $H_{\text{ét}}^i(X \times_{\mathbb{Q}} \bar{\mathbb{Q}}, \mathbb{Z}_\ell)$, weil die Gruppenaktion über

$$\text{Gal}(\bar{\mathbb{Q}}_p/\mathbb{Q}_p)/I_p = \text{Gal}(\bar{\mathbb{F}}_p/\mathbb{F}_p)$$

operiert. Wir können daher nach der Operation des Frobenius $\Phi_p \in \text{Gal}(\bar{\mathbb{F}}_p/\mathbb{F}_p)$ auf $H^i(\mathcal{X} \times_{\mathbb{F}_p} p\bar{\mathbb{F}}_p, \mathbb{Z}_\ell)$ fragen. Dies können wir für alle $p \neq \ell$ tun, an denen wir gute Reduktion haben, und das liefert uns zum Beispiel, daß die Operation der Galoisgruppe an fast allen Stellen unverzweigt ist. Diese Information ist auch wichtig, wenn wir der Varietät eine L -Funktion zuordnen wollen.

Wir können aber für jede Primzahl p die Kohomologie $H_{\text{ét}}^i(X \times_{\mathbb{Q}} \bar{\mathbb{Q}}, \mathbb{Z}_p)$ studieren, weil \mathbb{Q} die Charakteristik 0 hat. Wenn wir wie oben die Operation der Trägheitsgruppe $I_p \subset \text{Gal}(\bar{\mathbb{Q}}_p/\mathbb{Q}_p)$ auf dieser Kohomologie betrachten wollen, stoßen wir auf das Problem, daß nach der Reduktion modulo p die Kohomologie $H_{\text{ét}}^i(X \times_{\mathbb{F}_p} \mathbb{Z}_p)$ nicht definiert ist. Wir haben keine Möglichkeit Aussagen über die Operation der Trägheitsgruppen $\text{Gal}(\bar{\mathbb{Q}}_p/\mathbb{Q}_p)$ auf $H^1(X \times_{\mathbb{Q}} \bar{\mathbb{Q}}, \mathbb{Z}_p)$ zu bekommen. Es stellt sich heraus, daß diese Operationen kompliziert werden können, daß es aber Methoden gibt, sie zu verstehen.

Die ℓ -adischen Kohomologiegruppen werden nach Konstruktion dadurch gewonnen, daß man zunächst mit Torsionskoeffizienten mod ℓ , mod ℓ^2 , ... arbeitet und dann zum Limes übergeht, um schließlich torsionsfreie Koeffizienten \mathbb{Z}_ℓ zu

bekommen. Dabei ist es notwendig, daß die Primzahl ℓ von der Charakteristik des Grundkörpers verschieden ist. Wir sehen also, daß es notwendig ist, eine Kohomologietheorie zu entwickeln, die für Varietäten über einem Körper k der Charakteristik $p > 0$ definiert ist und deren Koeffizientenring als Limes von Ringen mit p^n -Torsion entsteht. An dieser Stelle sind dann die Ringe der Wittvektoren $\mathcal{W}(k)$ genau die richtigen Koeffizientenringe. Im Unterschied zur ℓ -adischen Kohomologie geht der Grundkörper k , über dem die Varietät definiert ist, in die das Koeffizientensystem ein.

Wir sehen uns noch einmal die Beispiele an. Wenn wir über einem Körper der Charakteristik p sind, dann gibt es keine p -ten Einheitswurzeln, der Tatemodul

$$T_p(G_m) = \varprojlim G_m[p^n]$$

ist scheinbar trivial.

Aber man kann den Kern der Abbildung

$$x \rightarrow x^{p^n}$$

als Gruppenschema der p^n -ten Einheitswurzeln $\mu_{p^n} = G_m[p^n]$ über k interpretieren. Dies ist dann ein endliches Gruppenschema über k für jedes n , und der direkte Limes

$$G_m[p^\infty] = \varinjlim G_m[p^n]$$

ist dann das erste Beispiel einer p -divisiblen Gruppe. Die Gruppe heißt p -divisibel, weil die Multiplikation mit p eine surjektive Abbildung $p : G_m[p^{n+1}] \rightarrow G_m[p^n]$ liefert.

Ein weiteres Beispiel einer solchen p -divisiblen Gruppe wird uns durch die Schemata der p^n -Teilpunkte $A[p^n]$ einer abelschen Varietät A gegeben. Die zugehörigen k -Algebren haben dann den Grad p^{2ng} . Wir bekommen die p -divisible Gruppe, indem wir den direkten Limes über alle n bilden.

Die Struktur dieser p -divisiblen Gruppen wird nun sehr kompliziert. Sie enthalten sehr viel mehr Information über die abelsche Varietät als die Tatemoduln mit zu der Charakteristik teilerfremden Koeffizienten.

Der Schlüssel zum Verständnis der p -divisiblen Gruppen wird nun wieder durch die Dieudonné-Moduln geliefert (Siehe z. B. auch [Od]). Die einzelnen endlichen Gruppenschemata sind schon im vorangehenden Abschnitt mit den Dieudonné-Moduln in Verbindung gebracht worden, wir bilden jetzt einfach die Limiten. Es sei weiterhin zunächst k perfekt.

Zu der p -divisiblen Gruppe der p -Torsionspunkte der abelschen Varietät A über k betrachtet man dann den Dieudonné-Modul

$$D_p(A) = \varprojlim \text{Hom}(A[p^n], G_m \times \mathcal{W}).$$

Nach dem im vorangehenden gesagten schreibt sich

$$\begin{aligned} A[p^n] &= A[p^n]^{\text{mult}} \times A[p^n]^{\text{unipt}} = \\ &= A[p^n]^{\text{mult}} \times A[p^n]^{\text{étal, unipt}} \times A[p^n]^{\text{inf, unipt}}. \end{aligned}$$

Wenn wir nun zur dualen abelschen Varietät A^\vee übergehen, dann ist deren Gruppe der p^n -Torsionspunkte auch gerade die duale Gruppe von $A[p^n]$, d.h. die beiden ersten Faktoren sind vertauscht. Da nun die duale abelsche Varietät bekanntlich zu A isogen ist folgt, daß

$$A[p^n] \xrightarrow{\sim} \mu_{p^n}^\gamma \times \left(\frac{1}{p^n} \mathbb{Z}/\mathbb{Z}\right)^\gamma \times A[p^n]^{\text{inf,unipt}},$$

und wir bekommen als Dieudonné-Modul

$$D_p(A) = W(k)^\gamma \oplus W(k)^\gamma \oplus D_p(A)^{\text{inf,unipt}},$$

wobei

(1) \mathbf{F} auf dem ersten Summanden von der Form $p \cdot \varphi$ mit einem σ -linearen Automorphismus φ , auf dem zweiten Summanden ein σ -linearer Isomorphismus ist. Entsprechendes gilt für \mathbf{V} , wenn man die Summanden vertauscht (bedenke $\mathbf{FV} = \mathbf{VF} = p$).

(2) auf dem Summanden $D_p(A)^{\text{inf,unipt}}$ ist dann \mathbf{F} topologisch nilpotent

Wir bemerken, daß $D_p(A)^{\text{inf,unipt}}/p(D_p(A)^{\text{inf,unipt}})$ ein k -Vektorraum der Dimension $2(g - \gamma)$ ist, wenn wir also mod p rechnen, dann wird der Frobenius nilpotent.

Wenn der Grundkörper k algebraisch abgeschlossen ist, dann kann man annehmen, daß \mathbf{F} auf den beiden Summanden $W(k)^\gamma$ die σ -lineare Fortsetzung der Identität (bzw. $p \times$ Identität auf $W(\mathbb{F}_p)^\gamma$) ist. Der zweite Summand kann eigentlich als Rest der étalen Kohomologie angesehen werden.

Auf dem Teil $D_p(A)^{\text{inf,unipt}}$ ist auch bei algebraisch abgeschlossenem Grundkörper die im Dieudonné-Modul enthaltene Information sehr viel feiner als in den Tatemoduln $T(A)$, der nur die Dimension von A kennt. Wenn zum Beispiel $\gamma = 0$ ist, dann wird der Frobenius \mathbf{F} auf $D_p(A)/p(D_p(A))$ nilpotent. Wenn er nun sogar nilpotent von der Stufe 2 ist, d.h. $\mathbf{F}(D_p(A)) = p(D_p(A))$ dann nennt man die abelsche Varietät supersingulär. Man bekommt zu jedem k -Teilraum $Y \subset D_p(A)/\mathbf{F}(D_p(A))$ eine abelsche Varietät B_Y mit einer Isogenie $A \rightarrow B_Y$, die gerade $D_p(B_Y)$ auf Y abbildet. Man kann also Familien von supersingulären abelschen Varietäten konstruieren, es ist nicht schwer zu sehen, daß die Zuordnung

$$Y \rightarrow \text{Isomorphieklasse des Dieudonne-Moduls } (Y, \mathbf{F})$$

endliche Fasern hat, d.h. diese Familien sind nicht trivial.

Abelsche Varietäten über endlichen Körpern

Die Konstruktion der Dieudonné-Moduln spielt eine fundamentale Rolle beim Studium von abelschen Varietäten über endlichen Körpern. John Tate bewies (siehe [Ta1]), daß für eine abelsche Varietät A/\mathbb{F}_{p^N} und $\ell \neq p$ der Tatemodul $T_\ell(A)$ zusammen mit der Operation des Frobenius $\Phi_{p^N}: T(A) \rightarrow T(A)$ (das ist natürlich auch die Operation der Galoisgruppe) die abelsche Varietät A bis auf Isogenie bestimmt. Es gilt

$$\text{Hom}(A, B) \otimes \mathbb{Q}_\ell \xrightarrow{\sim} \text{Hom}_{\text{Gal}(\overline{\mathbb{F}}_p/\mathbb{F}_{p^N})}(T_\ell(A), T_\ell(B)) \otimes \mathbb{Q}_\ell.$$

Die analoge Aussage gilt dann auch für die Dieudonné-Moduln

$$\mathrm{Hom}(A, B) \otimes \mathbb{Z}_p \xrightarrow{\sim} \mathrm{Hom}_{\mathbb{D}_k}(D_p(B), D_p(A)).$$

Dabei muß man natürlich bedenken, daß $\mathrm{Hom}_{\mathbb{D}_k}(D_p(B), D_p(A))$ ein \mathbb{Z}_p -Modul ist, denn wenn $\varphi : D_p(B) \rightarrow D_p(A)$ und $\varphi \circ \mathbf{F} = \mathbf{F} \circ \varphi$, dann darf man φ nur um skalare Faktoren $\lambda \in \mathbb{Z}_p$ abändern, sonst verliert man die Vertauschbarkeit mit \mathbf{F} .

Diese Resultate und ihre Erweiterung durch die Sätze von Honda (siehe [Ta-B],[Wa-Mi]) spielen eine Rolle bei der Beschreibung des Modulraums polarisierter abelscher Varietäten über einem endlichen Körper \mathbb{F}_p . In diesem Zusammenhang taucht zum Beispiel das Problem auf, die Menge $\mathcal{A}_g(\overline{\mathbb{F}}_p)$ der über $\overline{\mathbb{F}}_p$ definierten polarisierten abelschen Varietäten der Dimension g mit einer Niveaustuktur zu beschreiben. Ganz grob ordnet man einer solchen abelschen Varietät $A \in \mathcal{A}_g(\overline{\mathbb{F}}_p)$ die Kollektion der kohomologischen Daten

$$A \rightarrow \{ \{ T_\ell(A), \Phi_\ell^N \}_{\ell \neq p}, D_p(A), \mathbf{F} \}$$

zu, wobei Φ_ℓ^N eine hohe Potenz des ℓ -adischen Frobenius ist. Diese Menge wird noch durch eine Isogeniegruppe $I(\mathbb{Q})$ dividiert, die man lokal an allen Stellen aus den kohomologischen Daten bestimmen kann. Dieser Quotient ist dann, wenn man noch über die möglichen Isogeniegruppen und „zulässige“ Operationen dieser Isogeniegruppen vereinigt, gerade $\mathcal{A}_g(\overline{\mathbb{F}}_p)$. Dies Modulschema ist über \mathbb{F}_p definiert, und daher operiert auf der Punktmenge $\mathcal{A}_g(\overline{\mathbb{F}}_p)$ der Frobenius Φ_p . Das äußert sich in den kohomologischen Daten dadurch, daß man $D_p(A)$ durch $\mathbf{F}(D_p(A))$ ersetzt. Alles was ich an dieser Stelle sagen will, ist, daß es entscheidend ist, daß wir für alle Primzahlen q eine q -adische Kohomologietheorie definiert haben, und daß gerade durch die p -adische Komponente entscheidende Informationen geliefert werden. Hierfür verweise ich auf die Arbeiten von Langlands und Rapoport [La-Ra] und von Milne [Mi2].

Die kristalline Kohomologie

Damit haben wir so ungefähr gesehen, wie man für abelsche Varietäten über einem Körper der Charakteristik $p > 0$ eine erste p -adische (Ko-)homologiegruppe definieren kann. Es stellt sich dann die Aufgabe, dies auf möglichst viele Varietäten zu verallgemeinern. Das Ergebnis ist die sogenannte kristalline Kohomologie, deren Konstruktion auf Berthelot zurückgeht. Ich will darüber kurz berichten, wobei ich mich ganz eng an den Artikel [II] von Illusie anschließe.

Wir können auf einer glatten Varietät über k natürlich immer noch die de-Rham Kohomologie

$$H_{\mathrm{DR}}^\bullet(X) = H_{\mathrm{Zar}}^\bullet(X, \Omega_X^\bullet)$$

eingeführen, das ist die Hyperkohomologie des Komplexes der Differentialformen bezüglich der Zariski-Topologie auf X . Diese de-Rham-Kohomologie gestattet in Charakteristik 0 einen Vergleichsisomorphismus mit der étalen Kohomologie, wenn man den Koeffizientenkörper der Kohomologiegruppen erweitert (Siehe den Abschnitt über Periodenringe).

Aber wenn k die Charakteristik $p > 0$ hat, dann ist $H_{\text{DR}}(X)$ ein Vektorraum über k , hat also Exponenten p , aber die gesuchten Kohomologiegruppen sollen torsionsfreie Koeffizientenringe haben. Die allernaivste Idee ist dann, das X zu einem Schema über W_n „auszudehnen“ und dann dort die de-Rham Kohomologie zu studieren, auf diese Weise hätte man dann als Koeffizientenring $W_n(k)$. Das funktioniert aber nicht immer. Statt dessen geht man wie folgt vor. Man definiert eine neue Grothendieck-Topologie, den kristallinen Situs. Ausgangspunkt ist die Bemerkung, daß das maximale Ideal $pW(k)$ dividierte Potenzen erlaubt, denn $p^n/n! \in W(k)$. Man betrachtet nun Zariski-offene Mengen $U \subset X$ zusammen mit einer Verdickung

$$\begin{array}{ccc} U & \hookrightarrow & U_n \\ \downarrow & & \downarrow \\ \text{Spec}(k) & \rightarrow & \text{Spec}(W_n), \end{array}$$

d.h. man darf für $x \in I_n$ immer $\gamma_k(x) = x^k/k! \in I_n$ hinschreiben. Diese dividierten Potenzen sollen mit den dividierten Potenzen auf W_n verträglich sein. Man macht sich dann leicht klar, daß I_n ein nilpotentes Ideal sein muß. Die Kategorie dieser Objekte ist dann der gesuchte kristalline Situs.

Man betrachtet dann Garben auf diesem Situs, sie werden durch Zariski Garben $(U \hookrightarrow U_n) \rightarrow F(U_n)$ beschrieben. Insbesondere ist $\mathcal{O}_{X/W_n} : (U \rightarrow U_n) \rightarrow \mathcal{O}(U_n)$ eine solche Garbe und man kann die Kohomologie bezüglich diese Topologie

$$H_{\text{cris}}^i(X/W_n, \mathcal{O}_{X/W_n})$$

Dies definiert uns eine Abbildung

$$\mathbf{F} : H_{\text{cris}}^i(X^{(p)}/W) \rightarrow H_{\text{cris}}^i(X/W),$$

die W -linear ist. Aber man kann nun zeigen, daß

$$H_{\text{cris}}^i(X^{(p)}/W) = H_{\text{cris}}^i(X/W) \otimes_{W,\sigma} W,$$

wobei wir W über σ als W -Algebra auffassen. Ein Element in $H_{\text{cris}}^i(X/W) \otimes_{W,\sigma} W$ ist also von der Form $h \otimes w$, und für $w_1 \in W$ gilt

$$w_1 h \otimes w = h \otimes \sigma(w_1)w.$$

Also ist die lineäre Abbildung \mathbf{F} oben dasselbe wie eine σ -lineare Abbildung

$$\mathbf{F} : H_{\text{cris}}^i(X/W) \rightarrow H_{\text{cris}}^i(X/W),$$

die durch $\mathbf{F}(h) = \mathbf{F}(h \otimes 1)$ definiert ist.

Wenn A/k eine abelsche Varietät ist, dann ist

$$(D_p(A), \mathbf{F}) \xrightarrow{\sim} (H_{\text{cris}}^1(A/W), \mathbf{F}).$$

Die p -adischen Galoisdarstellungen

Ich komme nun auf das weiter oben formulierte Problem zurück. Wir gehen von einer etwas allgemeineren Situation aus. Es sei K ein Körper der Charakteristik Null. Es sei $A \subset K$ ein vollständiger diskreter Bewertungsring in K (mit K als Quotientenkörper) und der Restklassenkörper $k = A/\mathfrak{p}$ habe die Charakteristik $p > 0$. Er sei perfekt. Dann sind der Witttring $W(k)$ und sein Quotientenkörper K_0 in K enthalten.

Wenn wir nun eine algebraische Varietät X/K haben, dann möchten wir die Operation der Galoisgruppe $\text{Gal}(\bar{K}/K)$ auf den p -adischen Kohomologiegruppen $H^i(X \times_k \bar{K}, \mathbb{Z}_p)$ oder $H^i(X \times_k \bar{K}, \mathbb{Z}_p)$ verstehen. Ich hatte schon angedeutet, daß wir mit Komplikationen rechnen müssen, auch dann, wenn wir in der optimalen Situation sind: Die Varietät X/K ist die allgemeine Faser eines projektiven glatten Schemas \mathcal{X}/A .

Jetzt haben wir die Möglichkeit, die kristalline Kohomologie der speziellen Faser \mathcal{X}_0/k zu studieren. Wir bekommen die $W(k)$ -Moduln

$$H_{\text{cris}}^i(\mathcal{X}_0/k),$$

die von endlichem Typ sind und die mit einem σ -linearen Endomorphismus

$$\mathbf{F} : H_{\text{cris}}^i(\mathcal{X}_0/k) \rightarrow H_{\text{cris}}^i(\mathcal{X}_0/k)$$

versehen sind. Dieses strukturelle Datum hängt nur von der speziellen Faser ab. Aber im Gegensatz zum ℓ -adischen Fall können wir nicht erwarten, daß wir daraus die Operation der Galoisgruppe ablesen können.

Ein Beispiel:

Ich möchte hierzu ein Beispiel diskutieren, an dem man schon viele der Phänomene sehen kann. Wir gehen von einer elliptischen Kurve \mathcal{E}/A aus, ihre allgemeine Faser sei E/K und die spezielle Faser E_0/k . Dieses sei eine ordinäre Kurve, dann haben wir als Dieudonné-Modul

$$(D_p(E_0), \mathbf{F}) = W(k) \oplus W(k)$$

wie oben, d.h. \mathbf{F} ist ein Isomorphismus auf dem zweiten Summanden, und auf dem ersten Summanden ist \mathbf{F} das p -fache eines Isomorphismus. Das Objekt spaltet also in eine direkte Summe.

Wenn wir den $\text{Gal}(\bar{K}/K)$ -Modul $T_p(\mathcal{E})$ betrachten, dann bemerken wir, daß er in einer Sequenz sitzt

$$0 \rightarrow \mathbb{Z}_p(1) \rightarrow T_p(\mathcal{E}) \rightarrow \mathbb{Z}_p(0) \rightarrow 0,$$

wobei $\text{Gal}(\bar{K}/K)$ über den Quotienten $\text{Gal}(\bar{k}/k)$ auf dem zweiten Term operiert. (Man betrachte die Reduktion mod p der p^n -Teilpunkte. Diese hat in unserem Fall einen Kern und das Bild ist in diesem Fall die étale Gruppe der p^n -Teilpunkte in der speziellen Faser. Dann folgt aus einem Dualitätsargument, daß der Kern multiplikativ sein muß.)

Wir sehen also, daß die extremen Terme als Galoismodul bekannt sind. Wir haben aber keine Information über die Erweiterungsklasse dieser Sequenz von Galoismoduln. Diese Erweiterungsklasse wird durch ein Element aus

$$H^1(\text{Gal}(\bar{K}/K), \mathbb{Z}_p(1))/\mathbb{Z}_p^* = \varprojlim_{\leftarrow} K^*/(K^*)^{p^n}/\mathbb{Z}_p^*$$

bestimmt. Diese Erweiterung hängt dann in der Tat von der allgemeinen Faser E/K und nicht nur von E_0/k ab. Mit anderen Worten, der Galoismodul wird nicht so spalten, wie ihm von der kristallinen Kohomologie der speziellen Faser nahegelegt wird.

Grothendieck hat dann darauf hingewiesen, daß die „Ausbreitung“ von \mathcal{E}_0/k zu einer Kurve \mathcal{E}/A noch zu einem weiteren Strukturmerkmal auf $H_{\text{cris}}^1(\mathcal{E}_0/k)$ führt, nämlich der Hodge-Filtrierung \mathcal{F} . Die allgemeine Theorie liefert einen Vergleichsisomorphismus

$$H_{\text{cris}}^1(\mathcal{E}_0/k) \otimes_{W(k)} A \simeq H_{\text{DR}}^1(\mathcal{E}/A)$$

Dies gibt uns einen Homomorphismus

$$H^0(\mathcal{E}, \Omega_{\mathcal{E}}) \rightarrow H_{\text{cris}}^1(\mathcal{E}_0/k) \otimes A,$$

Diese Hodge-Filtrierung erhält man aus dem sehr abstrakten Vergleichs- isomorphismus. Ich möchte kurz erklären, wie man sie in dieser Situation auch direkter erhalten kann. Wir haben gesehen, daß

$$H_{\text{cris}}^1(\mathcal{E}_0/k) = D_p(\mathcal{E}_0)$$

$$\mathcal{E}_0[p^n] = \mathcal{E}_0[p^n]^{\text{mult}} \times \mathcal{E}_0[p^n]^{\text{étal, unipt}}$$

und wir müssen also jeder 1-Form $\omega \in H^0(\mathcal{E}_n/W_n, \Omega)$ zwei Homomorphismen

$$\begin{aligned} \omega^{\text{ét}} &: \mathcal{E}_0^{\text{étal, unipt}}[p^n] \rightarrow W_n \\ \omega^{\text{mult}} &: \mathcal{E}^{\text{mult}}[p^n] \rightarrow G_m \end{aligned}$$

zuordnen.

Es war für mich sehr schön zu sehen, daß $\omega^{\text{ét}}$ sich in ganz natürlicher Weise aus der Arbeit von H.-L. Schmid und E. Witt ergibt. Diese lineare Abbildung wird durch die mit den Residuen aus Differentialformen und Wittvektoren von Laurententwicklungen gewonnen, so wie ich das weiter oben dargestellt habe. Um ω^{mult} zu konstruieren benutzt man die Ideen von Tate über p -divisible Gruppen (Siehe [Ta2]): Schreibe „Elemente“ von $\mathcal{E}_0^{(\text{mult})}[p^n]$ als $\text{Exp}(tX)$ mit X aus dem Tangentialraum von \mathcal{E} und setzt

$$\omega^{\text{mult}}(\text{Exp } tX) = \text{Exp } t\omega(X).$$

Grothendieck stellt dann in [Gr] fest, daß die p -divisible Gruppe $\mathcal{E}[p^n]/A$ bis auf Isogenie sowohl durch den Galoismodul $T_p(\mathcal{E})$ als auch durch

$$(H_{\text{cris}}^1(E_0), \mathbf{F}, \mathcal{F})$$

bestimmt ist. Also sollten sich diese beiden Objekte auseinander ausrechnen lassen und Grothendieck stellte dies als Problem.

In der vorliegenden Situation scheint mir es mir dafür eine ganz einfache konsistente Lösung zu geben. Der Wittvektor $W(t)$ ist in A enthalten und wir haben das

$H^0(E_0/k, \Omega_{E_0})$ annulliert, also muß der Vektor f dergestalt sein, daß β eine Einheit ist und $\alpha \equiv 0 \pmod p$. Wir können also ansetzen $f = (\alpha, 1)$, wobei $\alpha = \alpha(E) \in pA$ und bis auf Multiplikation mit einer Einheit aus \mathbb{Z}_p bestimmt ist. Aus diesem Element müssen wir dann ein Element aus $u(E) \in (K^* \otimes \mathbb{Z}_p) \mathbb{Z}_p^*$ machen. Da drängt sich dann die Möglichkeit

$$u(E) = \text{Exp}(\alpha(E))$$

auf und dies ist dann in der Tat die gesuchte Lösung (Siehe [Me]).

Der allgemeine Fall (Periodenringe)

Das allgemeine Problem ist dann von Fontaine, Messing, Faltings, Kato und Hyodo mit großem Erfolg behandelt worden. Hierbei spielen dann noch einmal die Wittvektoren eine große Rolle. Der Ansatz besteht darin, einen Vergleichsisomorphismus zwischen der étalen Kohomologie in Charakteristik 0 und der kristallinen-de-Rham-Kohomologie zu finden.

Für solche Vergleichsisomorphismen gibt es Modelle. Wenn wir zum Beispiel von einer algebraischen Varietät X/\mathbb{Q} ausgehen, dann können wir statt der endlichen Stelle p auch die unendliche Stelle ∞ betrachten.

Wir haben dann die die Betti-Kohomologie $H^i(X(\mathbb{C}), \mathbb{D})$ und die de-Rham

Kohomologiegruppen $H_{\text{DR}}^i(X)$.

Beides sind Vektorräume über \mathbb{Q} und Grothendieck hat gezeigt, daß es unter bestimmten Voraussetzungen einen Vergleichsisomorphismus gibt, nachdem wir sie mit \mathbb{C} tensoriert haben, d.h. wir bekommen

$$\Phi : H^i(X(\mathbb{C}), \mathbb{Q}) \otimes \mathbb{C} \xrightarrow{\sim} H_{\text{DR}}^i(X) \otimes \mathbb{C}.$$

Wir müssen also den Koeffizientenbereich erweitern, und wenn wir auf beiden Seiten eine Basis der \mathbb{Q} -Vektorräume wählen, dann ist die Matrix zu Φ die sogenannte Periodenmatrix in \mathbb{C} .

Wenn man dies zum Beispiel für die projektive Gerade macht, dann wird die Betti-Kohomologie $H^2(\mathbb{P}^1(\mathbb{C}))$ über eine Randabbildung von der Klasse $\frac{1}{2\pi i} \frac{dx}{x}$ aufgespannt, während die de-Rham-Kohomologie als erzeugendes Element die Differentialform 3. Gattung $\frac{dx}{x}$ als Basiselement besitzt. Der Eintrag in die Periodenmatrix ist dann $2\pi i$.

Wir gehen zurück ins p -adische, die komplexen Zahlen werden durch Periodenringe ersetzt.

Ich betrachte wieder eine allgemeine Situation, ein Schema $\mathcal{X}/\text{Spec}(A)$ mit allgemeiner Faser X/K und spezieller Faser X_0/k .

Wie wir gesehen haben, ist $H_{\text{cris}}^i(X_0/k)$ ein $W(k)$ -Modul mit einem Frobenius

$$F : H_{\text{cris}}^i(X_0/k) \rightarrow H_{\text{cris}}^i(E_0/k),$$

und auf

$$H_{\text{cris}}^i(X_0/k) \otimes_{W(k)} K \xrightarrow{\sim} H_{\text{DR}}^i(X/K)$$

haben wir die de-Rham-Filtrierung \mathcal{F} .

Die Kohomologie $H^i(K, \mathcal{O}(n))$ für $n \geq 0$ ist $H^i(K, \mathcal{O}(n)) = H^i(\mathbb{P}^1, \mathcal{O}(n))$

Wir bilden zunächst den algebraischen Abschluß \bar{K} von K , und diesen komplettieren wir zu einem Körper C . J. Tate ([Ta2]) hat gezeigt, daß C algebraisch abgeschlossen ist. Auf C operiert die Galoisgruppe $\text{Gal}(\bar{K}/K)$. Als weiteren Galoismodul kennen wir $\mathbb{Z}_p(i)$, und wir setzen $C(i) = \mathbb{Z}_p(i) \otimes_{\mathbb{Z}_p} C$. Dann gilt nach Tate

$$H^0(\text{Gal}(\bar{K}/K), C) = C^{\text{Gal}(\bar{K}/K)} = K,$$

und für $i \neq 0$

$$H^0(\text{Gal}(\bar{K}/K), C(i)) = H^1(\text{Gal}(\bar{K}/K), C(i)) = 0$$

$$H^1(\text{Gal}(\bar{K}/K), C) = 0.$$

In C haben wir den Ring \mathcal{O}_C der ganzen Zahlen und den Restklassenring $\mathcal{O}_C/(p)$,

der natürlich viele nilpotente Elemente enthält. Man hat surjektive Homomorphismen $\sigma : \mathcal{O}_C/(p) \rightarrow \mathcal{O}_C/(p)$, die durch $\sigma(x) = x^p$ gegeben sind. Wir bilden den Ring R , der projektiver Limes des Systems

$$\leftarrow \mathcal{O}_C/(p) \leftarrow \mathcal{O}_C/(p) \leftarrow \mathcal{O}_C/(p) \leftarrow$$

ist. Dieser Ring hat dann keine Nullteiler mehr, und er ist ein Unterring von $(\mathcal{O}_C/(p))^{\mathbb{N}}$. Wir bekommen dann also ein Diagramm

$$\begin{array}{ccc} \mathcal{O}_C^{\mathbb{N}} & \xrightarrow{\pi} & (\mathcal{O}_C/(p))^{\mathbb{N}} \\ \cup & & \cup \\ \mathcal{R} & \rightarrow & R, \end{array}$$

wobei \mathcal{R} aus denjenigen Folgen (c_0, c_1, \dots) mit $c_n = c_{n+1}^p$ besteht. Man macht sich dann leicht klar, daß die Einschränkung von π auf \mathcal{R} ein Isomorphismus ist, ihre Umkehrung wird durch eine Teichmüller-Konstruktion gegeben: Wir liften ein $r \in R$ zu einem Element \tilde{r} und bilden $\hat{r} = \lim \tilde{r}^{p^n}$.

Etwas expliziter sieht das dann so aus: Wir schreiben ein Element aus R als Vektor

$$r = (\xi_0, \xi_1, \dots, \xi_n \dots),$$

und \hat{r} ist dann

$$\hat{r} = (r^{(0)}, r^{(1)} \dots r^{(n)}, \dots) \in \mathcal{O}_C^{\mathbb{N}}$$

wobei

$$r^{(n)} = \lim(\hat{r}_{n+m})^{p^m}$$

und \hat{r}_{n+m} eine Liftung von ξ_{n+m} nach C ist. Wie oben schon gesagt wurde, können wir \hat{r} als einen Teichmüller-Repräsentanten von $r \in R$ ansehen.

Unser Integritätsbereich R hat nach wie vor die Charakteristik p , und er ist perfekt. Es gilt $r = (\xi_0, \xi_1, \dots, \xi_n \dots) = (\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_{n+1} \dots)^p$. Wir bilden den Ring der Wittvektoren $W(R)$. Dieser Ring ist nun in einem gewissen Sinn zweidimensional,

weil R selber auch ein Bewertungsring ist. Wir definieren einen Homomorphismus

$$\theta : W(R) \rightarrow C,$$

der wie folgt definiert ist: Für ein Element $x \in W(R)$ schreiben wir $x = (r_0, r_1, \dots, r_n, \dots)$ und wir setzen

$$\theta(x) = \sum r_n^{(n)} p^n.$$

Dies ist in der Tat ein Homomorphismus, weil wir $W(R)$ als Unterring von

unser Homomorphismus ist die Projektion auf die 0-te Komponente.

$$x = [r_0] + [r_1^{1/p}]p + [r_2^{1/p^2}]p^2 \dots$$

und dann werden die Entwicklungen für $x + y, xy$ durch die universellen Polynome wie im ersten Abschnitt gegeben.

Dieser Homomorphismus setzt sich zu $\theta : W_K(R) = K \otimes_{W(k)} W(R)$ fort, und

Die Ringe $W(R)$ und $W[R]_{[p]}^{\lfloor 1 \rfloor}$ sind vollständig bezüglich der p -adischen Topologie, sei

$$A_{\text{cris}} = \overline{A}_{\text{cris}}^f \subset W(R) \left[\frac{1}{p} \right].$$

Der Ring A_{cris} enthält unser Element t , wir setzen $B_{\text{cris}}^+ = A_{\text{cris}} \left[\frac{1}{p} \right]$ und $B_{\text{cris}} = B_{\text{cris}}^+ \left[\frac{1}{t} \right]$. Wir bekommen also die folgenden Inklusionen

$$\begin{array}{ccccccc} & & A_{\text{cris}}^f & & & & \\ & & \bigcap & & & & \\ & & A_{\text{cris}} & \subset & B_{\text{cris}}^+ = A_{\text{cris}} \left[\frac{1}{p} \right] & \subset & B_{\text{cris}} = B_{\text{cris}}^+ \left[\frac{1}{t} \right] \\ & & \bigcap & & & & \\ W(R) \subset & W_{K_0}(R) & = & W(R) \left[\frac{1}{p} \right] & \subset & B_{\text{DR}}^+ & \subset B_{\text{DR}} \\ & & & & & \downarrow \theta & \\ & & & & & C. & \end{array}$$

Auf allen Ringen operiert $\text{Gal}(\bar{K}/K)$, der Ring B_{DR} hat eine mit \mathbb{Z} indizierte Filtration, die eine Filtration auf allen anderen Ringen, also insbesondere auf B_{cris} , induziert.

Der Frobenius $x \rightarrow x^p$ auf R induziert einen Frobenius \mathbf{F} auf $W(R)$, und dieser induziert einen Frobenius auf allen Ringen in dem Diagramm, außer auf den Ringen $B_{\text{DR}}^+ \subset B_{\text{DR}}$, weil diese den größeren Körper K in ihrer Konstruktion enthalten. Es gilt für das Element t die Formel $\mathbf{F}(t) = pt$.

Der Ring B_{cris} hat jetzt die Eigenschaften, die wir von einem Periodenring erwarten. Es ist

$$\begin{aligned} B_{\text{cris}}^{\text{Gal}(\bar{K}/K)} &= W(k) \left[\frac{1}{p} \right] \\ \mathbb{Q}_p &= \mathcal{F}^0 B_{\text{cris}}(\mathbf{F} = 1). \end{aligned}$$

Faltings hat nun einen sehr weitgehenden Satz bewiesen, dessen Inhalt ich kurz skizzieren möchte.

Für ein glattes, eigentliches Schema $\mathcal{X}/\text{Spec}(A)$ gibt es einen funktoriellen Isomorphismus

$$H^i(X \times_K \bar{K}, \mathbb{Q}_p) \otimes B_{\text{cris}} \xrightarrow{\sim} H_{\text{cris}}^i(X_0/k) \otimes_{W(k)} B_{\text{cris}},$$

der mit der Operation der Galoisgruppe und dem Frobenius verträglich ist, d.h.

$$\begin{aligned} g \otimes g &\longleftrightarrow 1 \otimes g \\ 1 \otimes \mathbf{F} &\longleftrightarrow \mathbf{F} \otimes \mathbf{F}. \end{aligned}$$

Wenn man beide Seiten über B_{cris} mit B_{DR} tensoriert, dann wird er auch mit der Filtration verträglich.

Man gewinnt den Galoismodul zurück als

$$\begin{aligned} H^i(X \times_K \bar{K}, \mathbb{Q}_p) &\simeq \{x \in B_{\text{cris}} \otimes H_{\text{cris}}^i(X_0/k) \mid \mathbf{F}(x) = x, \\ &1 \otimes x \in \mathcal{F}^0(B_{\text{DR}} \otimes_{B_{\text{cris}}} H_{\text{cris}}^i(X/K))\} \end{aligned}$$

und

$$H_{\text{cris}}^i(X_0/k) = (B_{\text{cris}} \otimes H^i(X \times_K \bar{K}, \mathbf{Q}_p))^{\text{Gal}(\bar{K}/K)}$$

$$H_{\text{DR}}^i(X/K) = B_{\text{DR}} \otimes H^i(X \times_K \bar{K}, \mathbf{Q}_p)^{\text{Gal}(\bar{K}/K)}.$$

Ich habe diesen Satz von Faltings als Paradigma für eine ganze Reihe von Sätzen formuliert. Es gibt noch weitere Periodenringe, für die analoge Sätze gelten oder zumindest vermutet werden. In diesem Zusammenhang möchte ich aber doch noch auf den oben eingeführten Ring B_{HT} zurückkommen. Wenn für eine Kohomologiegruppe $H^m(X \times_K \bar{K}, \mathbf{Q}_p)$ das Analogon des obigen Satzes von Faltings gilt, dann sagt man, daß diese Darstellung vom Hodge-Tate-Typ ist. Das kann man dann auch etwas einfacher formulieren: Wenn der Galoismodul vom Hodge-Tate-Typ ist, dann bekommt man eine mit der Operation der Galoisgruppe verträgliche Zerlegung

$$H^m(X \times_K \bar{K}, \mathbf{Q}_p) \otimes C = \bigoplus_{0 \leq i \leq m} C(i) \otimes_K H^{m-i}(X, \Omega^i).$$

Im Hinblick auf die weiter oben formulierten Eigenschaften von C folgt hieraus unter anderem, daß die Hodge-Zahlen durch die Galoisoperation bestimmt sind. Tate hat in [Ta1] gezeigt, daß im Fall guter Reduktion für $m = 1$ die Kohomologie vom Hodge-Tate-Typ ist und dieser Satz war das richtungsweisende Ergebnis. Für weitere Resultate in dieser Richtung verweise ich auf den Artikel von Fontaine und Illusie.

Wenn wir den obigen Satz von Faltings auf den Fall der projektiven Geraden

Literatur

- [Ar] A. A. Albert: „Cyclic fields of degree p^n over F of Characteristic p “, Bull of Am. Math. Soc. 40, (1934)
- [Ar] E. Artin: „Eine Kennzeichnung des Körpers der reellen Zahlen“, Abh. Math. Sem. Hamburg 3 (1924)
- [Ar-Sc] E. Artin und O. Schreier: „Über eine Kennzeichnung der reell abgeschlossenen Körper“, Abh. Math. Sem. Hamburg 5 (1927)
- [Be] P. Berthelot: „Cohomologie cristalline“: Springer Lecture Notes, 407 (1974)
- [Bl-Ka] S. Bloch und K. Kato: „ p -adic étale cohomology“, Publ. Math. IHES 63, 107-152 (1986)
- [De-Ga] M. Demazure und P. Gabriel: Groupes Algébriques, Tome I, Masson & Cie, North-Holland Amsterdam
- [Fa] G. Faltings: „Crystalline cohomology and p -adic étale cohomology“, Algebraic Analysis, Geometry and Number Theory, The Johns Hopkins Univ. Press, 1989, p. 25-80. Math. Ann. 278 (1987), 133-149
- [Fo1] J.-M. Fontaine: „Sur certains types de représentations p -adiques du groups de Galois d'un corps local; construction d'un anneau de Barsotti-Tate“, Ann. Math. 115, 529-577 (1982)
- [Fo2] J.-M. Fontaine: „Appendice: Sur un théorème de Bloch et Kato (lettre à B. Perrin-Riou)“, Invent. Math. 115 (1994), 151-161
- [Fo-II] J.-M. Fontaine und L. Illusie: „ p -adic periods: A survey“, Prépublications, Université de PARIS-SUD, Mathématiques
- [Fo-Me] J.-M. Fontaine und W. Messing: „ p -adic periods and p -adic étale cohomology, in Current Trends in Arithmetical Algebraic Geometry“, Contemporary Math. vol. 67, S. 179-207, AMS 1987
- [Gr] A. Grothendieck: „Groupes de Barsotti-Tate et Cristaux“, Actes, Congres intern. math. 1970, Tome I, p. 431-436
- [Ha] M. Hazewinkel: „Formal Groups and Applications“, Academic press 1978
- [Ha-Wi] H. Hasse und E. Witt: „Zyklische unverzweigte Erweiterungskörper vom Primzahlgrad über einem algebraischen Funktionenkörper der Charakteristik p “, Mh. Math. Phys. 43 (1936)
- [II1] L. Illusie: „Report on Crystalline Cohomology“, Proc. of Symp. in Pure Math., vol. 29, S. 459-478 (1975)
- [II2] L. Illusie: „Finiteness, duality, and Künneth theorems in the cohomology of the de Rham Witt complex“, Algebraic Geometry, Proc. of the Japan-France Conference, SLN 1016, 1983, p. 20-72
- [II3] L. Illusie: „Complexe de de Rham-Witt et cohomologie cristalline“, Ann. sci. ENS (4) 12 (1979), 501-661
- [Ka] K. Kato: A generalization of lcal class field theory using K -groups I,II“ J. Fac. Sci. Tokyo. Ser. IA 26, (1979) 303-376, II: J. Fac. Sci. Tokyo. Ser. IA 27, (1980) 603-683
- [Ke] I. Kersten: „Ernst Witt 1911-1991“, Jber. d. Dt. Math.-Verein. 95 (1993) S. 166-180. B.G. Teubner Stuttgart
- [La-Ra] R. Langlands und M. Rapoport. „Shimuravarietäten und Gerben“, Journal für die reine und angewandte Mathematik, Band 378, 1987, S. 113-220
- [Me] W. Messing: „The Crystals Associated to Barsotti-Tate Groups“, Springer Lect. Notes in Math. 264 (1972)
- [Mi1] J. S. Milne: „Étale Cohomology“, Princeton Univ. Press 1980
- [Mi2] J. S. Milne: „The Conjecture of Langlands and Rapoport for Siegel Modular varieties“, Bull. of the Am. Math. Soc., vol 24, Nr 2, 1991, p.335-341
- [Od] T. Oda „The first de Rham cohomology group and Dieudonné- Modules“, Ann. Sci. Ecole Norm. Sup. (4) 2, (1969), S. 63-135
- [Sc-Wi] H.L. Schmid und E. Witt: „Unverzweigte abelsche Körper vom Exponenten p^n über einem algebraischen Funktionenkörper der Charakteristik p “, Journal für die reine und angewandte Mathematik, Band 176, S. 168-173, (1937)

- [Se] J.-P. Serre: „Groupes algébriques et corps de classes“, Hermann, Paris 1958
- [Ta1] J. Tate: „ p -Divisible Groups“, in Proc. Conf. Local Fields, Driebergen 1966, S. 158-183, Springer-Verlag 1967
- [Ta2] J. Tate: „Endomorphisms of Abelian Varieties over finite fields I ... Inv. Math. 2. (1966), 134-144
- [Ta-B] J. Tate: „Classes d'isogénie des variétés abéliennes sur un corps fini (d'après T. Honda)“ Séminaire Bourbaki, vol. 1968/69, Exposé 352, Springer LN 179
- [Wa-Mi] W. C. Waterhouse and J. S. Milne „Abelian Varieties over finite fields, „ Proc. of Symp. in Pure Math., 1969 Number Theory Institute, vol. 20, S. 53-64, (1971)
- [Wi 1] E. Witt: „Zyklische Körper und Algebren der Charakteristik p vom Grad p^n “, Journal für die reine und angewandte Mathematik, Band 176 S. 126-140 (1937)
- [Wi 2] E. Witt: „ p -Algebren und Pfaffsche Formen“, Abh. Math. Sem. Univ. Hamburg 22 (1958) 308-315
- [Wi 3] E. Witt: „Vektorkalkül und Endomorphismen der Einspotenzreihengruppe“ unveröffentlicht

Günter Harder
Mathematisches Institut der
Universität Bonn
Beringstraße 6
53115 Bonn
harder@diophant.iam.uni-bonn.de

(Eingegangen 16. 4. 1996)

Buchbesprechungen

Heinonen, J., Kilpeläinen, T., Martio, O., Nonlinear potential theory of degenerate elliptic equations, Oxford: Oxford Mathematical Monographs, Oxford Science Publisher – Clarendon Press, 1993, 363 Seiten, £ 40.00

Die nichtlineare Potentialtheorie muß m. E. in zwei Teile untergliedert werden. Einerseits geht es darum, typische potentialtheoretische Begriffe beim Studium nichtlinearer (entarteter) elliptischer Gleichungen zweiter Ordnung zum Einsatz zu bringen, z. B. Kapazität, Ober- und Unterlösung, Energieintegral, harmonisches Maß, Fegen, etc. Andererseits gibt es Bestrebungen, eine axiomatische Theorie aufzubauen, die Analogien zur Theorie der harmonischen Räume aufzeigt. Der erste Teil scheint mir der wichtige, und obwohl die vorliegende Monographie sich zu beiden Teilen äußert, liegt ihr Schwerpunkt deutlich auf dem ersten Teil. Insbesondere wird sehr ausführlich und gut lesbar die Theorie der (entarteten) elliptischen Gleichungen $-\operatorname{div} A(x, \nabla u(x)) = 0$ dargestellt. Es werden Hilbert-Raum-Methoden mit potentialtheoretischen Methoden verglichen, bzw. ihr Zusammenspiel benutzt, um viele schöne Resultate zu beweisen. Resultate, die zum großen Teil auf die Schule von Olli Martio zurückgehen.

Es liegt eine empfehlenswerte, konkrete Einführung in die nichtlineare Potentialtheorie vor, eine Pflichtlektüre für jeden, der auf diesem Gebiet arbeiten möchte.

Erlangen

N. Jacob

Brown, R. F., A Topological Introduction To Nonlinear Analysis, Basel: Birkhäuser Verlag 1993, 146 S., pb., SFR 48.00

In dem Büchlein geht es um das bereits klassisch gewordene globale Verzweigungsergebnis von Paul Rabinowitz (1971). Zur Erinnerung: für reelle Parameter λ wird im Banachraum X die Gleichung

$$\lambda x = F(x)$$

gelöst; $x \in X$. Dabei ist F stetig differenzierbar, $F(0) = 0$. Vor allem aber sind F und $T := F'(0)$ kompakt vorausgesetzt. Wenn nun λ^* ein Eigenwert ungerader Vielfachheit von T ist, so erstreckt sich nach Rabinowitz ein Kontinuum nicht-trivialer Lösungen (λ, x) mit $x \neq 0$ vom Verzweigungspunkt $(\lambda^*, 0)$ aus bis zu einem weiteren Verzweigungspunkt der Form $(\lambda, 0)$ oder aber bis nach Unendlich.

Das Buch ist dem Beweis dieses Satzes und seinem methodischen Umfeld gewidmet. Das Umfeld besteht aus etwas Topologie (Brouwer-Grad, Leray-Schauder-Grad) und Funktionalanalysis (Spektrum kompakter Operatoren). Als Anwendung wird die Eulersche Stabknickung betrachtet.

Das Buch zeigt sehr schön die innige Verflechtung von Denkweisen, die Studenten üblicherweise leider nur zerhackt in scheinbar ganz verschiedenen Vorlesungen begegnen. Dadurch hat das Buch hohes erzieherisches Potential. Das Buch scheint so sorgfältig und ausführlich geschrieben zu sein, daß es sich möglicherweise sogar für ein Proseminar eignet – ausprobiert habe ich das aber noch nicht. Ein früherer Text ganz ähnlicher Intention und Richtung wäre übrigens in diesem Zusammenhang zu nennen: „Nichtlineare Gleichungen und Abbildungsgrade“ von Klaus Deimling (1974) sowie sein späteres Buch von 1985. Leider enthält das Büchlein von Brown nur sehr sparsame Literaturhinweise.

Dementsprechend erfährt der Leser auch kaum, was sich eigentlich nach 1971 auf diesem Gebiet noch ereignet hat.

Berlin

B. Fiedler

Baumgärtel, H., Wollenberg, M., Causal Nets of Operator Algebras. Berlin: Akademie Verlag 1992, 460 S., DM 164

Der algebraische Zugang zur Quantenfeldtheorie hat sich nach seinen Anfängen in den 60er Jahren zu einem wichtigen Gebiet entwickelt, in dem tiefe strukturelle Fragen der Physik diskutiert und beantwortet werden können. Kennzeichnend für die Methode dieses Gebiets ist eine professionelle Benutzung der Mathematik der Operatoralgebren. Im Laufe der Zeit ist es zu vielen fruchtbaren Wechselwirkungen zwischen Mathematik und Physik in diesem Bereich gekommen; am bedeutendsten sind wohl die Zusammenhänge zwischen der modularen Theorie der von-Neumann-Algebren und der Gleichgewichtsthermodynamik über den Begriff des KMS-Zustands sowie zwischen der Theorie der Superauswahlsektoren, der Dualitätstheorie kompakter Gruppen und der Inklusionstheorie von von-Neumann-Algebren.

Lange Zeit lagen die Resultate der Theorie nur in der Form von Originalarbeiten vor, von den Büchern von Emch, Bratteli & Robinson und Horuzhy abgesehen, die aber nur einen kleinen Teil des Gebiets abdeckten. Es ist deshalb sehr erfreulich, daß jetzt gleich 2 Monographien erschienen sind, die das ganze Gebiet zusammenfassend darstellen, das Buch „Local Quantum Physics“ von Rudolf Haag, der als Begründer des ganzen Gebiets angesehen werden kann, und das hier zu besprechende Buch „Causal Nets of Operator Algebras“ von Baumgärtel und Wollenberg, die beide seit mehreren Jahren wichtige Beiträge zu diesem Gebiet geleistet haben. Beide Bücher ergänzen sich aufs schönste. Während das Buch von Haag ganz vom Standpunkt des Physikers geschrieben ist, mit starker Betonung der physikalischen Konzepte und Beschränkung des mathematischen Formalismus auf das notwendige Maß, gehen Baumgärtel und Wollenberg von der Seite der Mathematik an das Gebiet heran. Für mich war es eine Überraschung, zu sehen, daß auch ohne den durch die Physik vermittelten Zusammenhang die verschiedenen Aspekte des Gebiets bereits in ihrer mathematischen Struktur in natürlicher Weise verbunden sind.

Das Buch beginnt mit einer knapp gefaßten Einführung in die Mathematik der Operatoralgebren, beschreibt dann Familien von Algebren mit geeigneten Eigenschaften (Haag-Kastler-Axiome), bevor in Kapitel 3 die Theorie der Superauswahlsektoren abgehandelt wird. Hier wird sehr ausführlich die Doplicher-Roberts-Theorie der Dualität kompakter Gruppen dargestellt. In Kapitel 4 wird der Zusammenhang der operatoralgebraischen Formulierung mit der Wightmanschen Formulierung der Quantenfeldtheorie beschrieben, ein Gebiet, zu dem die beiden Autoren selbst viel beigetragen haben. Im letzten Kapitel werden die aus der allgemeinen Struktur folgenden Eigenschaften der lokalen Algebren diskutiert.

Das Buch ist sehr sorgfältig, manchmal etwas technisch geschrieben und eignet sich sehr gut zur Einarbeitung in das Gebiet. Es enthält einen weitgehend vollständigen Überblick über den aktuellen Stand. Kennzeichnend ist das Bemühen, Resultate nur aus den jeweilig benötigten Voraussetzungen herzuleiten. Diese an sich verdienstvolle Anstrengung macht allerdings das Lesen manchmal etwas mühsam, zumal die Bedeutung der so erreichten Verallgemeinerung kaum erörtert wird. Etwas schade ist, daß die Theorie der Subfaktoren und die damit zusammenhängende Superauswahlstruktur in 2 und 3

Dimensionen, insbesondere die von konformen Feldtheorien, nur kurz in einem Anhang behandelt wird, doch waren diese Entwicklungen zur Zeit der Fertigstellung des Buches noch nicht abgeschlossen. Lücken dieser Art sind bei einem Buch über ein lebendiges Gebiet wohl unvermeidlich.

Die physikalische Bedeutung der beschriebenen Strukturen wird kaum diskutiert. Für den hieran interessierten Leser empfiehlt sich ein Studium des erwähnten Buches von Haag. Trotz des Verzichts auf die Beschreibung der bei der Entstehung der Theorie maßgeblichen physikalischen Ideen wirkt das Gebiet in dieser Darstellung einheitlich. Dies hängt damit zusammen, daß in diesem Gebiet, wie in kaum einem anderen, mathematische und physikalische Fragestellungen eng verwandt sind; praktisch alle relevanten mathematischen Strukturen haben eine unmittelbare physikalische Übersetzung und umgekehrt. Es ist zu hoffen, daß dieses Buch zu weiteren Forschungen auf diesem Gebiet anre-

meisten Platz dafür ist. Dieses Prinzip wird stark verfeinert mit der Definition einer Art von Entropie, die Pflanzen bei ihrem Wachstum minimieren.

Kapitel III (Origin of phyllotactic patterns) schließlich greift über den Rahmen der Biologie hinaus. Es wird der Organisation von Mustern auf molekularem Niveau u. a. in Proteinen und Kristallen nachgespürt.

Für einen Mathematiker ist das Buch eine schwierige Lektüre. Das liegt zunächst an der Fülle von ungewohnten Fachausdrücken. In stärkerem Maß aber liegt es an der für Mathematiker ungewohnten Fragestellung: Was ist das „richtige“ Modell zum Verständnis der betrachteten Phänomene. Das Schwergewicht liegt dabei nicht auf dem mathematischen Aufbau, der relativ einfach ist. Das Problem ist vielmehr das Auffinden des richtigen Standpunktes, und hat damit historische und wissenschaftliche Aspekte.

Aspekte.

Aber so ist das wirkliche Leben nun halt einmal.

Erlangen

W. Barth

Vasconcelos, W., Arithmetic of Blowup Algebras, (London Math. Soc. Lectures Note Series 195), Cambridge University Press 1994, 329 S., pb, £ 22.95

Die vorliegende Monographie gibt eine Einführung in neuere Entwicklungen der Theorie der sogenannten „blowup algebras“. Darunter versteht man Rees-Algebren und assoziierte graduierte Ringe eines Ideals, aber auch symbolische Rees-Algebren und symmetrische Algebren von Moduln.

Der Name „blowup algebra“ erklärt sich aus der Tatsache, daß das zugehörige projektive Schema einer Rees-Algebra $R[I]$ die Aufblasung von $\text{Spec } R$ in der durch I definierten Singularität ist. Dieser geometrische Gesichtspunkt, der zum Teil die Bedeutung von Rees-Algebren erklärt, spielt in dem vorliegenden Buch nur eine untergeordnete Rolle. Vielmehr werden algebraische Eigenschaften untersucht, wie zum Beispiel die Krull-

werden Sequenzen studiert, deren zugehörige Ideale von linearem Typ sind. Die wichtigsten Sequenzen in diesem Zusammenhang sind die sogenannten d -Sequenzen, die von Huneke Anfang der achtziger Jahre eingeführt wurden.

Das dritte Kapitel behandelt die sogenannten Approximationskomplexe. Das sind Komplexe, die aus dem Koszulkomplex abgeleitet sind, und deren 0-te Homologie je nach Voraussetzungen und je nach Wahl des Komplexes entweder die symmetrische Algebra, die Rees-Algebra oder den assoziierten graduierten Ring eines Ideals liefert. Der Autor geht in diesem Kapitel auch eingehend auf entsprechende Konstruktionen für Moduln ein. Vermöge der Approximationskomplexe werden die Blow-up-Algebren mit der Koszulho-

die betreffenden Algebren Cohen-Macaulay oder Gorenstein sind. Freilich ist für diese Schlüsse Exaktheit der Approximationskomplexe erforderlich, was zum Beispiel dann der Fall ist, wenn das betreffende Ideal von einer d -Sequenz erzeugt wird, oder wenn die Koszulhomologie Cohen-Macaulay ist, und das Ideal geeignete \mathcal{F} -Bedingungen erfüllt.

Dies führt zum Inhalt des vierten Kapitels, in dem Linkage-Theorie soweit dargestellt wird, wie erforderlich, um die Anwendungen für die Koszulhomologie, und damit für Rees-Algebren, zu erläutern. Durch die hier dargestellten Methoden erhält man wichtige Beispielklassen, auf welche die zuvor entwickelte Theorie angewandt werden kann.

Das fünfte und umfangreichste Kapitel des Buches nennt der Autor „Arithmetic Koszulhomologie“ und versteht darunter vor allem die Untersuchung numerischer Invari-

Das Buch gibt einen ausgezeichneten Überblick über Rees-Algebren und damit verwandte Objekte und spiegelt die wichtigsten Aspekte der Theorie, wie sie sich in den letzten fünfzehn Jahren entwickelt haben, wieder. Für Mathematiker, die auf dem Gebiet der kommutativen Algebra arbeiten, wird das Buch eine wichtige Referenz sein. Erfreulicherweise hat sich der Autor bemüht, ein verhältnismäßig komplettes Literaturverzeichnis zu erstellen. Das Buch ist sicherlich auch eine gute Arbeitsgrundlage für ein Seminar oder eine Vorlesung, setzt jedoch beim Leser sehr solide Kenntnisse in kommutativer Algebra voraus.

Essen

J. Herzog

Vaisman, I., Lectures on the Geometry of Poisson Manifolds, (Progress in Math. 118), Basel u. a.: Birkhäuser 1994, 205 S., DM 88.–

In der theoretischen Mechanik betrachtet man die Poissonklammer $\{f, g\}$ zweier Funktionen in $2n$ Variablen (p_i, q^i) :

$$(1) \quad \{f, g\} = \sum_{i=1}^n \left(\frac{\partial f}{\partial p_i} \frac{\partial g}{\partial q^i} - \frac{\partial f}{\partial q^i} \frac{\partial g}{\partial p_i} \right)$$

Auf diese Weise erhält man eine Lie-Algebren-Struktur auf dem Raum $C^\infty(\mathbb{R}^{2n})$ der glatten Funktionen auf \mathbb{R}^{2n} , die folgende Kompatibilität mit der (assoziativen) punktweisen Multiplikation von Funktionen aufweist (Leibniz-Regel):

$$(2) \quad \{h, fg\} = \{h, f\}g + f\{h, g\}.$$

Eine Poisson-Mannigfaltigkeit ist eine glatte Mannigfaltigkeit M zusammen mit einer Lie-Klammer $\{f, g\}$ auf $C^\infty(M)$, die die Eigenschaft (2) hat. Eine wichtige Klasse von Poisson-Mannigfaltigkeiten sind die symplektischen Mannigfaltigkeiten, d. h. glatte Mannigfaltigkeiten mit einer nicht ausgearteten geschlossenen 2-Form ω . Für solche Mannigfaltigkeiten definiert man eine Poisson-Klammer durch $\{f, g\} = \omega(\nabla_{\text{symp}} f, \nabla_{\text{symp}} g)$. Dabei ist ∇_{symp} der analog zum Riemannschen Fall aus der nichtausgearteten Bilinearform ω gewonnene „symplektische Gradient“. Wenn $(g, [\cdot, \cdot])$ eine reelle endlich-dimensionale Lie-Algebra ist, dann ist der Dualraum \mathfrak{g}^* von \mathfrak{g} eine Poisson-Mannigfaltigkeit bzgl. der Klammer $\{f, g\}(\lambda) = \lambda([df(\lambda), dg(\lambda)])$, wobei man die Kotangentialräume von \mathfrak{g}^* alle mit \mathfrak{g} identifiziert. Dualräume von Lie-Algebren sind keine symplektischen Mannigfaltigkeiten, lassen sich aber in symplektische Mannigfaltigkeiten zerlegen. Läßt man die zu \mathfrak{g} gehörige adjungierte Lie Gruppe $\text{Ad}(G)$ auf \mathfrak{g}^* wirken, erhält man in natürlicher Weise symplektische Strukturen auf den Bahnen. Dies ist typisch für Poisson-Mannigfaltigkeiten: Jede Poisson-Mannigfaltigkeit hat eine kanonische Blätterung, deren Blätter symplektische Mannigfaltigkeiten sind (die Dimension der Blätter sind i. a. nicht konstant). Poisson-Geometrie sind also eine Verallgemeinerungen der symplektischen Geometrie, die einerseits nicht allzu weit von der symplektischen Geometrie entfernt ist, andererseits aber interessante zusätzliche Beispielklassen aufweist.

Die ersten Ansätze für das Studium von Poisson-Mannigfaltigkeiten gehen auf Sophus Lie zurück. Aber erst in den vergangenen 15 Jahren sind Poisson-Mannigfaltigkeiten intensiv untersucht worden, insbesondere von Alan Weinstein und seinen Mitarbeitern. Neben den Motivation aus der analytischen Mechanik und der geometrischen Quantisierung bezieht das Gebiet auch Popularität aus der Nähe zu den sogenannten Quantengruppen (man kann Lie-Gruppen mit Poisson-Struktur als klassische Limites von Quantengruppen auffassen). Bislang lagen auch zentrale Resultate zumeist nur in Form von Zeitschriftenartikeln oder Vorlesungsmitschriften vor. Der Versuch, wesentliche

Aspekte der Theorie in Buchform zusammenzufassen, ist daher sehr zu begrüßen. Das hier zu besprechende Buch konzentriert sich auf die Differentialgeometrie von Poisson-Mannigfaltigkeiten. Beim Leser werden Kenntnisse der allgemeinen Differentialgeometrie sowie der symplektischen Geometrie vorausgesetzt. Andererseits werden nur grundlegende Resultate vollständig bewiesen. Speziellere Ergebnisse und Entwicklungen werden oft nur skizziert oder es wird auf die Literatur verwiesen. Auf diese Weise hat es der Autor geschafft, in einem Buch von etwa 200 Seiten eine lesbare Einführung und einen nützlichen Wegweiser zur Poisson-Geometrie unterzubringen. Interessant ist das Buch in erster Linie als Einstiegslektüre für Mathematiker, die sich näher mit Poisson-Mannigfaltigkeiten beschäftigen möchten.

Die Leibniz-Regel (2) zeigt, daß Poisson-Klammern tensorielle Objekte sind. Genauer gesagt, man findet zu jeder Poisson-Klammer einen Bivektor $w \in \Lambda^2 TM$, für den gilt $\{f, g\} = w(df, dg)$. Das erste Kapitel behandelt die Frage, wie man die Bivektoren, die von Poisson-Klammern kommen, differentialgeometrisch charakterisieren kann. Im zweiten Kapitel findet man eine ausführliche Darstellung der oben erwähnten symplektischen Blätterungen und im dritten Kapitel werden diverse Beispiele von Poisson-Mannigfaltigkeiten diskutiert.

Der Bivektor w induziert einen Bündelhomomorphismus $\#: T^*M \rightarrow TM$ via $\beta(\alpha^\#) = w(\alpha, \beta)$. Über diesen Homomorphismus kann man auf dem Raum der 1-Formen eine Lie-Algebren Struktur $\{\cdot, \cdot\}$ definieren, für die gilt $\{df, dg\} = d\{f, g\}$, und für die $\#$ einen Lie-Algebren Homomorphismus von den 1-Formen in die Vektorfelder mit der Lie-Klammer induziert. Damit findet man in Analogie zum gewöhnlichen äußeren Differential ein „kontravariantes“ äußeres Differential $\Lambda^k(TM) \rightarrow \Lambda^{k+1}TM$. In den Kapiteln 4 und 5 werden der resultierende Kalkül und die zugehörige (Poisson)-Kohomologietheorie

ausführlich besprochen.

In Kapitel 6 stellt der Autor zwei verschiedene Quantisierungsansätze für Poisson-Mannigfaltigkeiten vor. Der erste folgt der Philosophie der geometrischen Quantisierung, die zuerst aus den geometrischen Daten Geradenbündel konstruiert („Präquantisierung“) und dann versucht aus Räumen von Schnitten Hilberträume zu konstruieren. Dabei stellt sich heraus, daß kohomologischen Präquantisierungsbedingungen an ω für symplektische Mannigfaltigkeiten hier durch Poisson-kohomologische Bedingungen an w ersetzt werden müssen. Der zweite Quantisierungsansatz, die Deformation der kommutativen punktweisen Multiplikation in Form von formalen Potenzreihen, wird nur kurz angerissen.

Ein wichtiger Begriff in der symplektischen Geometrie ist die „Reduktion“. Sie ist eine Abstrahierung der Methode, die Anzahl der Variablen in einem mechanischen System zu reduzieren, wenn das System über Symmetrien verfügt. In Kapitel 7 des Buches wird erklärt, in welcher Form Reduktion für Poisson-Mannigfaltigkeiten auftritt. Insbesondere werden Gruppenwirkungen und Impulsabbildungen besprochen.

Eine differenzierbare Abbildung φ zwischen zwei Poisson-Mannigfaltigkeiten heißt Poisson-Morphismus, wenn das Zurückziehen von Funktionen mit φ ein Homomorphismus von Lie-Algebren ist. Eine symplektische Realisierung einer Poisson-Mannigfaltigkeit M ist surjektive Poisson-Abbildung $\varphi: N \rightarrow M$, die überall vollen Rang hat, wobei N eine symplektische Mannigfaltigkeit ist. Lokal ist jede Poisson-Mannigfaltigkeit symplektisch realisierbar. In den Kapiteln 8 und 9 findet man weitere Ergebnisse über symplektische Realisierungen, insbesondere durch symplektische Mannigfaltigkeiten mit einer zusätzlichen Gruppoid-Struktur.

Das letzte Kapitel ist eine Einführung in die Theorie der Poisson-Lie-Gruppen. Insbesondere werden die Yang-Baxter Gleichungen und die sogenannte „Dressing“-Transformation erklärt.

Adem, A., Milgram, R. J., Cohomology of Finite Groups (Grundlehren der math. Wissenschaften **309**) Berlin u. a.: Springer Verlag 1994, 327 Seiten, DM 128,-

Das Buch von Adem und Milgram steht in Konkurrenz zu den erst kürzlich erschienenen Monographien von D. J. Benson und L. Evens; siehe dazu die Rezensionen im Jahresbericht der DMV, Band 96, Heft 3. Während bei Benson die modulare Darstellungstheorie („Green Ring“) das eigentliche Anliegen ist, steht bei Evens die Diskussion des Cohomologierings im Mittelpunkt.

Adem und Milgram beschreiben einen topologischen Zugang zur Cohomologietheorie über klassifizierende Räume, und sie bemühen sich auch sonst, Alternativen und Ergänzungen aufzuzeigen. Überlappungen, insbesondere mit Evens, sind allerdings offensichtlich. Auch hier steht der Cohomologiering im Mittelpunkt des Interesses, werden die grundlegenden Sätze von Serre (Kap. III), Quillen-Venkov und Evens-Venkov (Kap. IV) eingehend diskutiert. Weitergehend sind dann allerdings die anschließenden Abschnitte, in denen zunächst eine kurze Einführung in die Theorie der G -Komplexe assoziiert zu einer endlichen Gruppe G gegeben wird (Kap. V) und dann die Cohomologieringe der symmetrischen und alternierenden Gruppen, der Gruppen vom Lie-Typ sowie einiger sporadischer einfacher Gruppen (Mathieu, Janko, O’Nan) berechnet werden.

Diese expliziten Kalkulationen scheinen mir ein Höhepunkt des Buches. Hier wird dem Leser nicht nur an vielen Beispielen die Anwendung der allgemeinen Theorie vorgeführt, sondern auch eine dichte Beschreibung der Gruppen selbst. Vielleicht ermöglicht die Cohomologie (über \mathbb{F}_2) letztlich doch ein besseres Verständnis der (quasi-)einfachen Gruppen.

Es gibt viele Anwendungen der Cohomologie in der Darstellungstheorie endlicher Gruppen. („Cohomology is representation theory“ hat J. L. Alperin einmal formuliert). Die Autoren greifen im abschließenden Kapitel X ein nach ihrer Meinung besonders geeignetes Thema der Galois-Cohomologie auf. Der ganze Abschnitt ist der Berechnung der sogenannten Schur-Untergruppe $S(F)$ der Brauer-Gruppe $B(F)$ eines Kreiskörpers F (über \mathbb{Q}) gewidmet. $S(F)$ besteht aus den Brauerklassen, die durch F -zentrale einfache Faktoren der Gruppenalgebra einer endlichen Gruppe repräsentiert werden. Diese Schur-Gruppe wurde eingehend von Yamada, Janusz et al. untersucht. Die Resultate sind im wesentlichen dieselben. Grundlage ist in jedem Fall der (Induktions-)Satz von Brauer-Witt.

(Wer sich für konkrete Rationalitätsfragen bzw. Schur-Indizes von Charakteren endlicher Gruppen interessiert, wird hier vielleicht enttäuscht sein. Der Satz von Brauer-Witt wird nur für den Nachweis benötigt, daß die Cohomologieklassen in $S(F)$ gerade durch F -zentrale Kreiskörper (mit Faktorenresten unendlicher Ordnung) repräsentiert

net, zusammen mit den zusätzlich erwähnten Büchern, in der Tat ein „weites Paradies“ (C. M. Ringel) an mathematischen Ideen und Theorien.

Tübingen

P. Schmid

Voss, K., Discrete Images, Objects, and Functions in \mathbb{Z}^n (Algorithms and Combinatorics Vol. 11), Berlin u. a.: Springer 1993, 270 S., DM 128,-

Im Vorwort seines früheren Buches „Theoretische Grundlagen der digitalen Bildverarbeitung“ [Voss88] sagt der Autor deutlich, worum es ihm offensichtlich auch in seinem neuen Werk geht: Er hat „Bildverarbeitung ohne Computer“ im Sinn, interessiert sich für allgemeine Gesetzmäßigkeiten in den Datenstrukturen der digitalen Bilder und fragt sich, welche Grundbegriffe auf welchem Abstraktionsniveau als wesentlich anzusehen sind. Beide Werke sind vom Themenkreis, vom Niveau und vom ansprechenden, etwas philosophisch angehauchten Stil her ähnlich, allerdings steht jetzt nicht mehr der Raum \mathbb{Z}^2 im Vordergrund, sondern allgemeiner der \mathbb{Z}^n , und verschiedene Problemstellungen – vor allem auch neuere – werden jetzt erstmals behandelt. Erfreulich ist das viel umfangreichere Literaturverzeichnis im neuen Buch, weniger erfreulich das holprige Englisch, das ich allerdings eher dem Verlag ankreiden möchte.

Der Aufbau des Buchs ähnelt dem früheren: Zuerst werden Nachbarschaftsstrukturen behandelt, und als Anwendungen insbesondere das Bestimmen von Zusammenhangskomponenten sowie die Dilatations- und Erosions-Operatoren diskutiert. Dann folgen Inzidenzstrukturen, welche ein Hauptforschungsgebiet des Autors und seiner Mit-

Referenzen:

- [Franç91] Françon, J.: Topologie de Khalimski et Kovalevski et algorithmique graphique. Université Louis Pasteur, Strasbourg, Département d'informatique, R91/10
- [KhKM90] Khalimsky, E.; Kopperman, R.; Meyer, P. R.: Computer graphics and connected topologies on finite ordered sets. *Topology and its Applications* **26** (1990) 1–17
- [KoRo89] Kong, T. Y.; Rosenfeld, A.: Digital topology – introduction and survey. *Computer Vision, Graphics, and Image Processing* **48** (1989) 357–393
- [Kova89] Kovalevsky, V. A.: Finite topology as applied to image analysis. *Computer Vision, Graphics, and Image Processing* **46** (1989) 141–161
- [Voss88] Voss, K.: Theoretische Grundlagen der digitalen Bildverarbeitung. Berlin: Akademie-Verlag 1988

Bern

H. Bieri

Geddes, K. O., Czapor, St. R., Labahn, G., Algorithms For Computer Algebra, Dordrecht u. a.: Kluwer Academic Publishers 1992, 585 S., Dfl. 275.00

Das vorliegende Buch ist der *algorithmischen Algebra* gewidmet. Der sehr enge Zusammenhang dieser beiden Gebiete wird schon aus der Tatsache deutlich, daß die Worte *Algebra* und *Algorithmus* ein und demselben Buchtitel entstammen (*Algebra* stammt aus dem Titel, *Algorithmus* kommt vom Namen des Autors her). Dazwischen schiebt sich hier das Wort *Computer*, auch das ist kein Wunder, denn Computer sind algebraische Maschinen, algebraische Methoden sind deshalb genau die richtigen Methoden zu ihrem Einsatz, das Wort *Computeralgebra* nahezu eine Tautologie.

Computer sind – in rapide wachsendem Ausmaß – ein wesentliches Handwerkszeug des arbeitenden Mathematikers, in Lehre, Forschung und am Arbeitsplatz. Infolgedessen ist die Computeralgebra in ihrer Bedeutung kaum zu überschätzen, auch wenn sie heute noch in der Lehre weit unterrepräsentiert ist. Computeralgebrasysteme haben bereits einen deutlichen Anteil am Softwaremarkt, Hunderttausende von Nutzern haben allein die beiden führenden Systeme für allgemeine Zwecke, das sind MAPLE und MATHEMATICA. Neben der Unterrepräsentation in der Lehre hinkt auch die Entwicklung solcher Systeme in Deutschland hinterher. MUPAD ist hier wohl die einzige rühmliche Ausnahme, was Systeme für allgemeine Zwecke betrifft, GAP ist „das MAPLE der Gruppentheorie“ (Zitat), hinzukommen einige kleinere Spezialsysteme. Die von GI, DMV und GAMM gegründete Fachgruppe für Computeralgebra wird hier hoffentlich bald eine Wandlung zum Besseren herbeiführen.

Soviel zu Titel und Themenkreis des vorliegenden Buches. Die Autoren des Buches sind besonders kompetent, gehören sie doch zu dem Kreis der Designer vom MAPLE. Man erhält also aus erster Hand einen Einblick in Strukturen und Methoden des führenden Computeralgebra-Systems, was allein schon die Bedeutung dieses Buches beweist. Das Buch ist sorgfältig geschrieben und sehr gut lesbar. Theorie und Praxis sind

gut durchmischt und ausführlich mit Beispielen illustriert. Der Inhalt gliedert sich in 12 Kapitel mit den Titeln:

1. Introduction to Computer Algebra
2. Algebra of Polynomials, Rational Functions, and Power Series
3. Normal Forms and Algebraic Representations
4. Arithmetic of Polynomials, Rational Functions, and Power Series
5. Homomorphisms and Chinese Remainder Algorithms

6. Newton's Iteration and the Hensel Construction
7. Polynomial GCD Computation
8. Polynomial Factorization
9. Solving Systems of Equations
10. Gröbner Bases for Polynomial Ideals
11. Integration of Rational Functions
12. The Risch Integration Algorithm

Die Überschriften zeigen, daß die verbreitetsten Methoden der *klassischen* Computeralgebra beschrieben werden. Sie zeigen aber auch, daß ganz wesentliche Teile fehlen, insbesondere gruppentheoretische Methoden, die heute eine wachsende Rolle spielen in der konstruktiven Theorie diskreter Strukturen und deren Anwendungen sowie generell bei dem Kampf gegen die kombinatorische Komplexität vieler Aufgabenstellungen. (Die Unerfahrenheit der Autoren auf diesem Gebiet läßt sie bei der Schilderung der Entwicklung der Computeralgebrasysteme auf dem Glatteis der Historik ausrutschen, insbesondere was die Ursprünge von CAYLEY angeht.) Dennoch ist das vorliegende Buch als *das* Standardwerk der klassischen Computeralgebra zu bezeichnen. Zusammen mit den Handbüchern zu MAPLE V, die kürzlich im Springer-Verlag erschienen, sollte es zum Handwerkszeug fast jeden Mathematikers gehören.

Bayreuth

A. Kerber

Hofer, H., Zehnder, E., Symplectic Invariants and Hamiltonian Dynamics, Basel u. a.: Birkhäuser 1994, 342 S., DM 88,-

Eines der grundlegenden Probleme in der symplektischen Geometrie ist die Klassifikation der symplektischen Mannigfaltigkeiten bis auf symplektische Diffeomorphismen. Um diesem Ziel näher zu kommen, hat man symplektische Invarianten zu konstruieren. Für kompakte symplektische Mannigfaltigkeiten ist das Volumen bzgl. der kanonischen Volumenform so eine Invariante. Das Hauptthema des vorliegenden Buches, das aus Vorlesungen der Autoren an der Rutgers University, der RUB Bochum, der ETH Zürich (1991) und dem Borel-Seminar in Bern (1992) entstanden ist, bildet eine neue Klasse von Invarianten, die erst in den letzten Jahren entwickelt wurde: die symplektischen Kapazitäten. Das Ziel des Buches ist es, diese Invarianten, sowie ihre Anwendungen auf Starrheitssätze, Klassifikationsprobleme und insbesondere auf Existenzprobleme für periodische Lösungen Hamiltonscher Systeme zu beschreiben.

Die symplektischen Kapazitäten sind ein Bindeglied zwischen globalen Periodizitätsphänomenen bei Hamiltonschen Systemen und bemerkenswerten Starrkeitseigenschaften symplektischer Abbildungen, die zum Beispiel davon zeugen, daß die Natur symplektischer Abbildungen von der volumenerhaltender Abbildungen wesentlich verschieden ist. Eine zentrale Methode, mit der man symplektische Kapazitäten konstruiert, basiert auf dem Prinzip der minimalen Wirkung aus der klassischen Mechanik: Eine Schleife γ im Phasenraum ist genau dann eine periodische Lösung der Hamiltonschen Gleichungen, wenn sie ein singulärer Punkt des Funktionals

$$F(\gamma) = \int_{\gamma} pdq - \int_0^1 H(t, \gamma(t)) dt$$

ist. Diese Prinzip durchzieht das ganze Buch wie ein roter Faden.

Das Buch besteht aus 6 Kapiteln und einem Anhang, in dem technische Hilfsmittel wie z. B. Stetigkeitseigenschaften der Alexander-Spanier-Kohomologie, der Cauchy-

Riemann Operator auf der Sphäre und Wirkungswinkelkoordinaten bereitgestellt werden.

Im ersten Kapitel wird grundlegendes Material in einer, wie auch die Autoren anmerken, etwas unsystematischen Weise zusammengestellt. Hier findet man zum Beispiel die Klassifikation der zweidimensionalen kompakten symplektischen Mannigfaltigkeiten durch Volumen und Euler-Charakteristik. Ebenso werden hier die später immer wieder verwendeten Variationsmethoden und die besetzten Sobolevräume schon eingeführt.

man eine auf Ljusternik-Schnirelman zurückgehende Theorie um deren Anzahl abzuschätzen. Eine Variation dieser Methode führt schließlich zu einem Beweis der Arnoldschen Vermutung unter der Voraussetzung, daß die Klasse $[\omega]$ der symplektischen Form auf $\pi_2(M)$ verschwindet. In den letzten beiden Abschnitten wird zunächst Floers Beweis für die Arnoldsche Vermutung unter zusätzlichen Regularitätsvoraussetzungen beschrieben. An diesem Punkt wird die Floersche Homologie eingeführt und letztendlich der auf Hofer und Floer zurückgehende Rahmen für eine symplektische Homologietheorie beschrieben, die auf einer Kombination der Floerschen Homologie-Konstruktion mit der c_0 -Kapazität beruht.

Auch wenn die meisten analytischen Hilfsmittel im Anhang zusammengestellt sind, so wird dem Leser doch an einigen Stellen, insbesondere im letzten Kapitel, eine gewisse Vertrautheit mit der Differentialrechnung in unendlichdimensionalen Funktionsräumen, diversen Gradargumenten (Brouwer, Leray-Schauder, Smale) und Fredholmtheorie abverlangt.

Was an dem Buch als besonders ansprechend auffällt, sind die schönen Einleitungen zu den jeweiligen Abschnitten, die jeweils sehr gut den momentanen Standpunkt beschreiben und dem Leser so einen Eindruck vermitteln, wo er gerade steht. Genauso wird der Leser durch die häufigen Standortbestimmungen auch durch technisch sehr komplizierte Beweise geführt ohne den roten Faden zu verlieren. Am Ende eines jeden Abschnitts findet man dann eine Beschreibung der weiterführenden Literatur. Die Beweise sind sehr sorgfältig ausgeführt und man findet nur sehr wenige Druckfehler. Ein besonderer Vorteil dieses Stils ist es, daß er es dem Leser relativ leicht macht, auch lokal zu lesen.

Das Buch ist jedem, der sich für symplektische Geometrie und Hamiltonsche Systeme sowie die neuesten Entwicklungen auf diesen Gebieten interessiert, wärmstens zu empfehlen.

Erlangen

K.-H. Neeb

Fischer, G., Ebene algebraische Kurven (vieweg studium Aufbaukurs Mathematik), Wiesbaden u. a.: Vieweg 1994, 177 S., kart., DM 38,-

There are several books devoted to Plane Algebraic Curves, like for example those by Brieskorn-Knorrer, Fulton, Seidenberg, Walker, just to mention a few. The approach of the book under review differs from those, being expressly intended as a textbook for a first course on the subject, deliberately remaining at an introductory level.

In some detail the contents are the following. Chapter 0 to 5 are devoted to the basic notions: affine and projective curves, tangents, singularities, intersections, Bezout theorem, duality, Plücker formulas. The treatment of these topics is quick and elementary: the proof of Bezout theorem uses the properties of resultants, leaving out the delicate question of invariance of the definition of intersection multiplicity under projective transformations, but enabling the reader to use and appreciate this important result very soon. A more satisfactory discussion of this matter is given later in the book.

Chapter 6 to 8 deal with the local analytic geometry of plane algebraic curves. A chapter on generalities of local analytic geometry (formal and convergent power series, Weierstrass preparation theorem, implicit function theorem) is followed by another devoted to the local parametrization of curve branches by Puiseux series. Then the local intersection of branches is studied and the Bezout theorem revisited. This part of the book is more technical and deeper than the previous one; the geometry is used as a motivation for studying the analytic tools.

The last chapter 9 introduces the notion of Riemann surface. Assuming the topological classification of compact orientable surfaces, the author proves the Riemann-Hurwitz formula, which enables to calculate the genus of a plane curve, and discusses several examples.

The book is closed by six Appendices. The first are devoted to elimination theory, coverings, implicit function theorem, Newton polygons and the local analytic properties of a singularity. The last one is a short treatment of real algebraic curves with a proof of the theorem of Harnack.

Examples and figures abound, giving an overall impression of concreteness: in the beginning part they are used to help in getting a feeling of what is going on; their importance increases in the final chapters, where more advanced topics are treated; in contrast, almost no exercises are proposed.

This is an excellent textbook for an introductory course on plane curves, and it can represent a valid substitute of some of the more classical texts available. It is carefully organized for this purpose, not yielding to the temptation to give a systematic treatment, but at the same time giving a satisfactory view of a classical topic. The treatment is rigorous; the algebraic and the analytic techniques are well blended by the geometric motivations.

Rom

E. Sernesi

Bruno, A. D., The Restricted 3-Body Problem: Plane Periodic Orbits (de Gruyter Expositions in Mathematics 17), Berlin u. a.: de Gruyter 1994, 362 S., Leinen, DM 248,-

Um dieses Buch besprechen zu können, muß ich ein paar Bemerkungen zum restringierten Dreikörperproblem machen. Es handelt sich bei diesem Problem um folgende Aufgabe:

Zwei Massenpunkte P und Q bewegen sich in einer Ebene auf Kreisbahnen mit gleichförmiger Geschwindigkeit um ihren gemeinsamen Schwerpunkt aufgrund ihrer gegenseitigen Anziehung nach dem Newtonschen Gravitationsgesetz.

Ein dritter Massenpunkt M bewegt sich in derselben Ebene. Seine Masse wird als verschwindend klein angenommen, so daß er die Kreisbewegung der Punkte P und Q nicht beeinflusst. Man soll die möglichen Bahnen des Punktes M beschreiben

Beispiele aus der Realität, denen das restringierte Dreikörperproblem näherungsweise als mathematisches Modell entspricht, sind

1. Die Bahn des Mondes M , dessen Masse klein ist gegenüber den Massen der Sonne P und der Erde Q .

Punkte P und Q , als Parameter auffaßt, der für den Wert $q=0$ ein Zweikörperproblem liefert, das bekanntlich vollständig elementar integriert werden kann und für das daher periodische Bahnen leicht zu finden sind. Diese können unter gewissen Voraussetzungen zu periodischen Bahnen $q \neq 0$ fortgesetzt werden.

In den vergangenen 100 Jahren seit Poincaré ist eine reichhaltige Literatur über periodische Lösungen des restringierten Dreikörperproblems entstanden. Eine systematische Beschreibung des gesamten Materials, die sehr erwünscht wäre, steht jedoch noch aus. Es war das Ziel des Autors, diesem Mangel teilweise abzuhelpfen und wenigstens in einem Teilbereich eine methodisch möglichst einheitliche Klassifikation durchzuführen. Die Idee der Klassifikation, die auf Poincaré zurückgeht, besteht darin, die periodischen Bahnen ihrem Verhalten beim Grenzübergang $q \rightarrow 0$ nach zu unterscheiden, also zunächst in einer Klassifikation der periodischen Bahnen des Zweikörperproblems P, M , wobei die Lage eines dritten Punktes Q mit der Masse $q=0$ zu berücksichtigen ist. Demzufolge besteht das Buch aus drei Teilen:

Part I Mathematical means

Part II Solutions of the limiting problem $q=0$

Part III Regular generating solutions

Der erste Teil ist den Normalformen Hamiltonscher Systeme in der Nähe eines singulären Punktes, einer periodischen Bahn bzw. eines zweidimensionalen invarianten Torus gewidmet. Die Transformationen in eine Normalform spielen ganz allgemein bei der Untersuchung des Phasenbilds eines dynamischen Systems eine fundamentale Rolle. In dem Zusammenhang hier kann die Methode der Transformation in eine Normalform als eine Variante der oben erwähnten Poincaréschen Kontinuitätsmethode angesehen werden. Die wichtigsten Sätze über Normalformen werden in voller Allgemeinheit formuliert. Da der Autor ein Experte mit vielen wichtigen eigenen Forschungsergebnissen auf diesem Gebiet ist, wird dieser Teil des Buches eine wertvolle Informationsquelle für jeden sein, der sich mit Normalformen beschäftigt, unabhängig von einem Interesse an Himmelsmechanik.

Der zweite Teil beschäftigt sich mit der Klassifikation der periodischen Bahnen des Zweikörperproblems P, M mit Rücksicht auf den Punkt Q mit verschwindender Masse q . Besondere Aufmerksamkeit erfahren dabei die Kollisionsbahnen, welche Q enthalten. Eine große Anzahl von Computergraphiken und Tabellen tragen zum Verständnis der theoretischen Ausführungen bei.

Der dritte Teil des Buches endlich ist den periodischen Bahnen des restringierten Dreikörperproblems gewidmet. Die Beweise für die klassischen Existenzsätze werden mit Hilfe der Normalformen-Methode aus dem ersten Teil erbracht. Jedoch wird auch die auf Barrar zurückgehende Beweismethode diskutiert. Der Leser, der nach den anfangs erwähnten Hillschen Bahnen der Mondtheorie sucht, wird das allerdings vergeblich tun. Denn diese Bahnen liegen außerhalb des vom Autor für seine Systematik gezogenen Rahmens. Andererseits werden auch nichtperiodische (quasiperiodische, unbeschränkte) Bahnen betrachtet, soweit sie sich in diesen Rahmen einfügen.

Jedem Kapitel sind Notes angefügt, in denen die relevante Literatur kritisch beleuchtet und insbesondere auf Fehler (theoretischer ebenso wie rechnerischer Art) hingewiesen wird.

Das Buch ist sehr gediegen und jedem einschlägig Interessierten zu empfehlen.

Akivis, M. A., Rosenfeld, B. A., Élie Cartan (1869–1951) (übersetzt aus dem Russischen von V. V. Goldberg) (Translations of Math. Monographs 123), American Mathematical Society 1993, 317 S., £ 127

Élie Cartan gilt als einer der bedeutendsten Mathematiker der ersten Hälfte unseres Jahrhunderts. Seine Publikationen über Liegruppen und Lie-Algebren, assoziative Algebren, Differentialgleichungen und Differentialgeometrie waren bahnbrechend. Sie sind allerdings nicht leicht zugänglich. Beispielsweise schreibt Hermann Weyl in einer Buchbesprechung: „Nevertheless, I must admit that I found the books, like most of Cartan's papers, hard reading.“ (Bull; AMS 44 (1938), p. 601). Deshalb, aber nicht nur aus diesem Grunde, ist die vorliegende Monographie äußerst hilfreich und nützlich. Sie gibt nicht nur eine detaillierte Beschreibung des Inhalts fast aller Arbeiten und Bücher Cartans, darüber hinaus werden auch neuere Entwicklungen aufgezeigt, die sich aus Cartans Ideen ergeben haben.

Zum Inhalt: Kapitel 1 gibt einen kurzen Überblick über Leben und Arbeit Élie Cartans. Kapitel 2 enthält seine wichtigsten Ergebnisse auf den Gebieten der Liegruppen, Lie- und assoziativen Algebren. Das dritte Kapitel behandelt Realisierungen projektiver Räume, deren Geometrie und Metriken über verschiedenen Basisbereichen. Im nächsten Kapitel wird Cartans Klassifikation der unendlich-dimensionalen Analoga der Liegruppen, der Lie-Pseudogruppen und die damit zusammenhängenden Theorie der Pfaffschen Differentialgleichungen beschrieben. Diese führten Cartan dazu, die Methode der „Moving frames“ auf die Differentialgeometrie anzuwenden, was eine vollständige Verwandlung dieses Gebietes zur Folge hatte. Dies ist der Inhalt des fünften Kapitels. Kapitel 6 enthält Cartans Ergebnisse über Riemannsche Mannigfaltigkeiten sowie seine Theorie der Symmetrischen Räume. Schließlich werden im letzten Kapitel Cartans Verallgemeinerte Räume behandelt, das sind Räume mit verschiedenartigen Zusammenhängen, etwa euklidischen, affinen, isotropen, projektiven, konformen oder symplektischen. Hierbei wird deutlich die Rolle vom Einsteins Allgemeiner Relativitätstheorie sowie der Versuch der Konstruktion einer einheitlichen Feldtheorie bei der Entwicklung dieser Geometrien herausgearbeitet.

In demselben Kapitel wird versucht, die Hauptentwicklungen der jeweiligen Gebiete zu beschreiben, die sich aus Cartans Ideen für die folgenden Generationen von Mathematikern ergeben haben. Das ist in einigen Fällen recht gut gelungen. Es läßt sich jedoch ein leichter Hang der Autoren zu abstrakteren und weniger wichtigen mathematischen Strukturen nicht übersehen.

Am Ende des Buches werden eine Chronologie der Hauptereignisse von Élie Cartans Leben sowie eine ausführliche Liste seiner Publikationen gegeben. Schließlich enthält die Monographie 4 sehr interessante Appendizes: (1) Poincarés Gutachten von 1912 über Cartans Arbeiten für die Fakultät der Universität von Paris, aufgrund dessen Cartan Professor an der Sorbonne wurde (und das nicht in Poincarés gesammelte Werke aufgenommen wurde), (2) eine noch unveröffentlichte Arbeit Cartans mit dem Titel „Sur une dégénérescence de la géométrie euclidienne“, (3) Cartans Rede anlässlich der Feier seines siebenzigsten Geburtstages 1939 an der Sorbonne und (4) die englische Übersetzung eines Vortrages von Cartan mit dem Titel „The influence of France in the development of Mathematics“, gehalten 1940 in Belgrad, der bislang nur auf Serbisch erschienen ist.

Zusammenfassend läßt sich sagen: Es handelt sich um eine hervorragend edierte Monographie. Sie ist nicht nur für mathematik-historisch interessierte Leser zu empfehlen, sondern kann auch als Einführung in einige wichtige mathematische Gebiete angesehen werden. Ich kann sie uneingeschränkt empfehlen.

Neuerscheinungen zu Mathematik und Statistik

Hans Niels Jahnke / Norbert
Knoche / Michael Otte (Hg.)
**History of Mathematics
and Education**

Ideas and Experiences

With contributions by William Aspray, Helmut Behr, Maria G. Bartolini Bussi Et Marcello Pergola, Karine Chemla, Joseph W. Dauben, Craig G. Fraser, Hans Niels Jahnke, Marta Menghini, Michael Otte, Marco Panza, Erhard Scholz, Anna Sierpinska, Horst Struve, Michael Toepell. Studien zur Wissenschafts-, Sozial- und Bildungsgeschichte der Mathematik, Band 11. 1996. XIII, 346 Seiten mit 32 Figuren, kartoniert DM 98,- / öS 715,- / SFr 89,- ISBN 3-525-40318-6

Die Geschichte der Mathematik kann in vielfältiger Weise Lehren und Lernen beeinflussen und unterstützen. Die Lernenden erfahren Mathematik als etwas, das von Menschen gemacht wurde, und das stärkt ihr persönliches Verhältnis zu dieser Wissenschaft. Darüber hinaus werden in der historischen Perspektive Zusammenhänge sichtbar, die bei einer rein systematischen Darstellung häufig verloren gehen. Dies betrifft sowohl innermathematische Zusammenhänge, als auch die Beziehungen zu den Anwendungen, zum kulturellen Umfeld und zur Philosophie. Das Buch dokumentiert die Beiträge zu einer Tagung, die im Herbst 1992 Mathematiker, Didaktiker und Historiker der Mathematik zusammengeführt hat. Es umfaßt historische Fallstudien, konzeptionelle Überlegungen zur Beziehung von Mathematik und Geschichte und Erfahrungsberichte mit der Einbeziehung von historischen Inhalten in die Lehre an Schule und Universität.

Susanne Rässler

**Stichprobenverfahren
bei sukzessiver Auswahl mit
unterschiedlichen
Wahrscheinlichkeiten im
Wirksamkeitsvergleich**

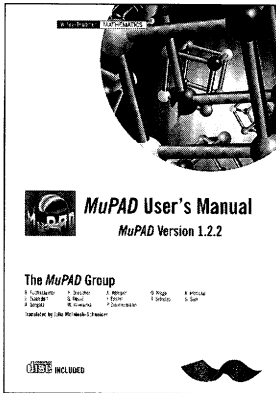
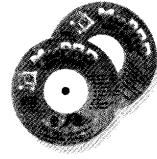
Angewandte Statistik und Ökonometrie, Band 41. 1996. XIV, 156 Seiten mit 26 Abbildungen und 43 Tabellen, kartoniert
DM 60,- / öS 438,- / SFr 54,50
ISBN 3-525-11406-0

Ein zentrales Thema der Stichprobentheorie ist die Steigerung der Effizienz eines Schätzverfahrens. Als sehr wirkungsvoll erweist sich die Auswahl mit unterschiedlichen Wahrscheinlichkeiten, bei der jedes Element der Grundgesamtheit eine individuelle Wahrscheinlichkeit besitzt, in eine Stichprobe zu gelangen. Man versucht, vorhandene Vorinformationen bestmöglich auszunutzen, wobei es eine Reihe von rechentechnischen Problemen zu bewältigen gilt. Betrachtet werden sukzessive Auswahlverfahren, dazu erfolgt zum einen ein Vergleich der Effizienzen verschiedener Verfahren unter den konträren Annahmen der fixierten Grundgesamtheiten und der Superpopulationen. Zum anderen wird der Effizienzverlauf jedes Verfahrens für alle Auswahlsätze von 0% bis 100% diskutiert, was zum Teil unerwartete Ergebnisse liefert.

V&R
Vandenhoeck
& Ruprecht

MuPAD User's Manual + CD ROMs

Multi-Processing Algebra Data Tool – MuPAD Version 1.2.2



The MuPAD Group –

B. Fuchssteiner, K. Drescher, A. Kemper,
O. Kluge, K. Morisse, H. Naundorf,
G. Oevel, F. Postel, T. Schulze,
G. Siek, A. Sorgatz, W. Wiwianka, and
P. Zimmermann

Universität – GH Paderborn, Germany

Translated by Julia McIntosh-Schneider

1996. XIV, 572 pages, 16,8 x 24,4 cm.
Bound DM 98,- / OS 715,- / SFr 88,-
ISBN 3-519-02114-5
Coproducton Wiley-Teubner

Developments in computer algebra systems will help shape the way mathematical models and techniques will be used in future applications of mathematics in science and engineering. At the forefront of these developments, MuPAD is a powerful computer algebra system designed to handle mathematical problems and computations of a new order of magnitude. The MuPAD User's Manual provides a detailed survey of the system's capabilities and contains:

- A complete description of the MuPAD programming language.
- Guidelines on how to produce graphics with MuPAD.
- A survey of the functions of the MuPAD standard library.

Designed as a parallel system it will also run on sequential computers, from small size machines to more powerful workstations. The advantages over other computer algebra systems are that

- MuPAD is a system that offers a window-based user-interface (hypertext on-line help, graphics and a source code debugger) on all platforms.
- MuPAD is the first system that provides native parallel instructions to the user.
- MuPAD offers tools for the dynamical linking of binary code objects.

Students, researchers and professionals in all quantitative disciplines will find MuPAD to be a user-friendly and invaluable aid to their work. The accompanying CDs include a hypertext version of the manual and the full MuPAD system for the following platforms:

- PC (Linux)
- Sun 4
- Apple Macintosh
- Silicon Graphics
- Hewlett-Packard
- DECstation



B. G. Teubner Stuttgart · Leipzig

Postfach 80 10 69 · 70510 Stuttgart

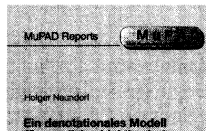
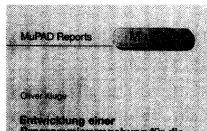
MuPAD Reports

M u P A D

Multi Processing Algebra Data Tool

Herausgegeben von Benno Fuchssteiner

MuPAD Reports informiert über die grundlegenden Strukturen und Wirkungsweisen von Computeralgebra-Systemen am Beispiel von MuPAD. Die Reihe gibt Einblick in die technischen und theoretischen Grundlagen des Entwurfs von Systemen zur symbolischen Verarbeitung mathematisch-technischer Sachverhalte.





Walter de Gruyter
Berlin · New York

Lectures in Real Geometry

Editor: Fabrizio Broglia

1996. 24 x 17 cm. XIV, 268 pages.

Cloth DM 198,- / öS 1.445,- / sFr 176,-

ISBN 3-11-015095-6

de Gruyter Expositions in Mathematics - Volume 23

Includes elaborated versions of lectures given by the authors at the Winter School in Real Geometry, held in Universidad Complutense de Madrid, January 2-7, 1994.



Walter de Gruyter
Berlin · New York

Helmut Wielandt

Now complete in 2 Volumes

Mathematische Werke / Mathematical Works

Editors:

Bertram Huppert, Mainz, Germany

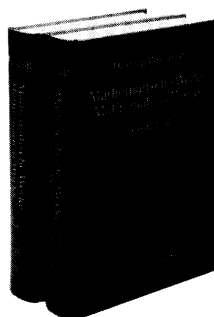
Hans Schneider, Madison (Wisconsin), USA

Volume 2: Linear Algebra and Analysis

1996. 24 x 17 cm. XX, 632 pages.

Cloth DM 348,- / öS 2.540,- / sFr 310,-

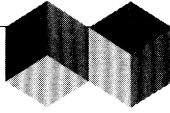
ISBN 3-11-012453-X



Helmut Wielandt (* 1910) is one of the few mathematicians who has worked not only in the fields of algebra and analysis but applications as well. His mathematical work is unique since it contains outstanding results in two almost completely unrelated fields: group theory and matrix theory.

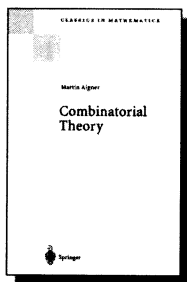
The first volume comprises Wielandt's contributions to group theory, where his influence is apparent throughout. It is divided into six sections devoted to distinct themes. Each of the first five sections has an introduction written by a specialist in the respective field setting the content in perspective. In addition to the published works, this volume contains most of Wielandt's lecture notes on various topics in group theory, including a revised reprint of his famous book on finite permutation groups. For technical reasons, Wielandt's 1973 Tübingen lecture notes on selected topics of permutation groups are published as an appendix in the second volume.

Volume 2 contains all the other mathematical works, most of which are on matrix theory. Research papers are arranged chronologically and often accompanied by comments from acknowledged experts describing the context and outlining further developments. Also included are the



New Classics for the New Year

∞ CIM CLASSICS IN MATHEMATICS



M. Aigner

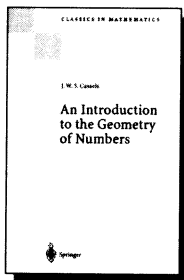
Combinatorial Theory

X, 484 pages.
Softcover DM 59,-
ISBN 3-540-61787-6

From the reviews:

"This book presents a very good introduction to combinatorics. It covers most aspects of enumeration and order theory ... This book will warmly be recommended first of all to students

interested in combinatorics. A two semester course can also be based on it." *Publicaciones Mathematicae Debrecen*
Due January 1997



J.W.S. Cassels

An Introduction to the Geometry of Numbers

X, 344 pages.
Softcover DM 59,-
ISBN 3-540-61788-4

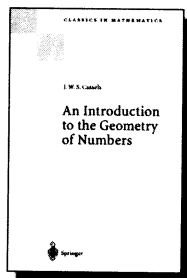
From the reviews:

"The work is carefully written. It is well motivated,

and interesting to read, even if it is not always easy ... the author has written an excellent account of an interesting subject."

Mathematical Gazette

Due January 1997



P. Dembowski

Finite Geometries

XIV, 378 pages.
Softcover DM 59,-
ISBN 3-540-61786-8

From the reviews:

"The author deserves unstinting praise for the skill, energy, and perseverance which he devoted to his work. The finished product confirms what his many earlier

contributions to the subject of finite geometry have already indicated, namely, that he is an undisputed leader in his field."

Mathematical Reviews

Due January 1997

Already available:

A. Dold

Lectures on Algebraic Topology

1995. XIII, 377 pages. 10 figures.
Softcover DM 59,-
ISBN 3-540-58660-1

H. Federer

Geometric Measure Theory

1996. XIV, 676 pages.
Softcover DM 59,-
ISBN 3-540-60656-4

F. Hirzebruch

Topological Methods in Algebraic Geometry

1995. XI, 234 pages.
Softcover DM 59,-
ISBN 3-540-58663-6

K. Itô, H. McKean

Diffusion Processes and their Sample Paths

1996. XV, 321 pages.
Softcover DM 59,-
ISBN 3-540-60629-7

T. Kato

Perturbation Theory for Linear Operators

1995. XXI, 624 pages.
Softcover DM 59,-
ISBN 3-540-58661-X

S. Kobayashi

Transformation Groups in Differential Geometry

1995. VIII, 182 pages.
Softcover DM 59,-
ISBN 3-540-58659-8

S. MacLane

Homology

1995. X, 422 pages. 7 figures.
Softcover DM 59,-
ISBN 3-540-58662-8

J. Lindenstrauss, L. Tzafriri

Classical Banach Spaces I and II

Sequence Spaces;
Function Spaces
1996. XX, 432 pages.
Softcover DM 59,-
ISBN 3-540-60628-9

D. Mumford

Algebraic Geometry I Complex Projective Varieties

1995. X, 186 pages.
Softcover DM 59,-
ISBN 3-540-58657-1

C.-L. Siegel, J.K. Moser

Lectures on Celestial Mechanics

1995. XII, 290 pages.
Softcover DM 59,-
ISBN 3-540-58656-3

A. Weil

Basic Number Theory

1995. XVIII, 315 pages.
Softcover DM 59,-
ISBN 3-540-58655-5

K. Yosida

Functional Analysis

1995. XII, 501 pages.
Softcover DM 59,-
ISBN 3-540-58654-7

O. Zariski

Algebraic Surfaces

1995. XI, 270 pages.
Softcover DM 59,-
ISBN 3-540-58658-X

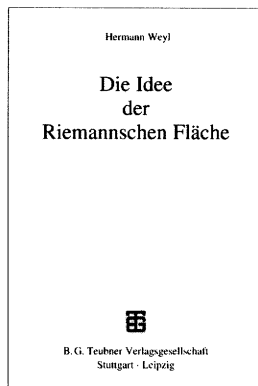
Prices subject to change without notice.
In EU countries the local VAT is effective.



Springer

Please order by
Fax: +49 - 30 - 827 87 - 301
e-mail: orders@springer.de
or through your bookseller

Hermann Weyl
**Die Idee der
Riemannschen
Fläche**



Hermann Weyls im Verlag B.G. Teubner
in Leipzig erschienenenes Jugendwerk
»Die Idee der Riemannschen Fläche«
war bahnbrechend für die Entwicklung
der Mathematik des 20. Jahrhunderts.
Es ist aus Weyls Vorlesuna vom Winter-

Herausgegeben von
Prof. Dr.
Reinhold Remmert
Universität Münster

Mit Beiträeden von