E 20577 F
100. Band Heft 4
ausgegeben am 15.12.1998

DMV

Jahresbericht
der Deutschen Mathematiker-Vereinigung

Herausgegeben von A. Krieg
unter Mitwirkung von

H. Lange, H. Triebel

Jahresbericht
der Deutschen Mathematiker-Vereinigung

Der „Jahresbericht" ist das offizielle Veröffentlichungsorgan der Deutschen Mathematiker-Vereinigung, für dessen inhaltliche Gestaltung im Auftrag des Präsidiums der jeweilige Herausgeber zuständig ist. Im „Jahresbericht" sollen vornehmlich Überblicksartikel über Teilgebiete der reinen und angewandten Mathematik, Nachrufe sowie historische Artikel und Buchbesprechungen veröffentlicht werden.

Manuskripte

Alle für die Schriftleitung des Jahresberichts bestimmten Briefe und Manuskripte sind an Prof. Dr. A. Krieg zu richten. Für Buchbesprechungen ist Prof. Dr. H. Lange zuständig. Bücher, von denen eine Besprechung erfolgen soll, werden bei den Verlagen angefordert. Autoren von Buchbesprechungen und Artikeln werden gebeten

Jahresbericht

der Deutschen Mathematiker-Vereinigung

Herausgegeben von A. Krieg
unter Mitwirkung von
U. Gather, E. Heintze, B. Kawohl,
H. Lange, H. Triebel

100. Band

B. G. Teubner Stuttgart · Leipzig 1998

Printed in Germany – ISSN 0012-0456
Satz: Elsner & Behrens GdbR, Oftersheim
Druck: pagina media gmbh, Hemsbach

Inhalt

1. Abteilung

2. Abteilung

Jahresbericht
der Deutschen Mathematiker-Vereinigung

Inhalt Band 100, Heft 4

1. Abteilung

2. Abteilung

In den nächsten Heften erscheinende Arbeiten:

A. Bergmann, H. W. Knobloch: Hermann Schmidt 1902–1993
G. Harder: Galoismoduln und Shimura-Varietäten
H. Karcher: Eingebettete Minimalflächen und ihre Riemannschen Flächen
P. Slodowy: The early development of the representation theory of semisimple Lie groups: A. Hurwitz, I. Schur, H. Weyl
M. Wiegner: The Navier-Stokes Equations – a Neverending Challenge?
J. Zabczyk: Infinite Dimensional Diffusions in Modelling and Analysis

---

Anschriften der Herausgeber

Prof. Dr. Aloys Krieg, Lehrstuhl A für Mathematik, RWTH Aachen, Templergraben 55, 52056 Aachen
email: krieg@rwth-aachen.de

Prof. Dr. Ursula Gather, Fachbereich Statistik, Universität Dortmund, Vogelpothsweg 87, 44221 Dortmund
email: gather@omega.statistik.uni-dortmund.de

Prof. Dr. Ernst Heintze, Institut für Mathematik, Universität Augsburg, 86135 Augsburg
email: heintze@math.uni-augsburg.de

Prof. Dr. Bernhard Kawohl, Mathematisches Institut, Universität zu Köln, 50923 Köln
email: kawohl@mi.uni-koeln.de

Prof. Dr. Herbert Lange, Mathematisches Institut, Friedrich-Alexander-Universität Erlangen-Nürnberg, Bismarckstraße 1½, 91054 Erlangen
email: lange@mi.uni-erlangen.de

Prof. Dr. Hans Triebel, Mathematisches Institut, Friedrich-Schiller-Universität, Ernst-Abbe-Platz 1–4, 07740 Jena
email: triebel@minet.uni-jena.de

Bezugshinweis

Früher erschienene Bände (ab Band 68) des „Jahresberichts der Deutschen Mathematiker-Vereinigung" können durch den Buchhandel oder den Verlag bezogen werden.

Nachdruck der Bände 41 bis 67 liefert: Swets & Zeitlinger, Heereweg 347b, POB 810, NL-2160 SZ Lisse/Holland

Jber. d. Dt. Math.-Verein. © 1998 B. G. Teubner Stuttgart
100 (1998) 253–283
Mathematics Subject Classification: 11F11, 11F12, 11F30, 11F37, 11F46, 11F66, 11F72, 14G10, 30F35
Keywords: automorphic form, modular form, Hecke operator, Petersson scalar product, Poincaré series, Ramanujan–Petersson conjecture, Siegel modular form

The Petersson Scalar Product

J. Elstrodt, Münster, F. Grunewald, Düsseldorf

Dedicated to Walter Roelcke on the occasion of his seventieth birthday

Introduction

In 1939, the presumably best known work of Hans Petersson (1902–1984) *on a metrization of the entire modular forms* appeared in the *Jahresbericht der Deutschen Mathematiker-Vereinigung* [113]. In this work Petersson gives "a condensed survey on some applications of a new principle from the theory of automorphic functions". The *new principle* refers to the scalar product which is nowadays named after Petersson himself. The *applications* now belong to the highlights of the classical theory and have since proved their power also in other contexts such as the theory of Siegel modular forms, the theory of Jacobi forms and the theory of real analytic automorphic forms. In order to "let the leading idea come to the fore as clearly as possible" Petersson [113] restricts to the simplest and most important special case, "the case of entire modular forms of even dimension [= − weight] with multiplier 1". Being relieved from technicalities Petersson's ideas indeed gain convincing clarity and hence it cannot come as a surprise that [113] probably is the best known and most frequently quoted among his numerous works (see [158]).

The echo in the mathematical literature is unequivocal: To-day one will find a section on the Petersson scalar product and its applications in virtually every introductory book on modular or automorphic forms. There are also comments in appreciation of the progress tied up with the introduction of the scalar product. Thus J. Lehner notes in the historical introduction to his book [84] of 1964: "The most important contributor to the theory of automorphic functions in recent times is

H. Petersson, whose investigations begin about 1930. He was a student of Hecke and much of his work consists in extending to more general discontinuous groups what Hecke developed for congruence subgroups of the modular group ... In 1939 Petersson introduced the very important scalar product of automorphic forms ... Thus the ... [space] of all cusp forms becomes a Hilbert space ... under the scalar product ... Petersson's investigations of the new Hilbert spaces revolutionized the theory of automorphic forms of negative dimension. Formerly difficult theorems could now be proved by methods of linear algebra." R.A. Rankin concurs with this view (see [124], p. 191): "The foundations of the theory of general Poincaré series were laid by Petersson ... It is to Petersson also ... that the idea of metrizing the space of cusp forms by introducing an inner product is due and this has transformed the whole theory."

In what follows we first give a very brief sketch of the development before Petersson's discovery. Then we describe the contents of [113] and report on some progress which was advanced by Petersson's work. Since the relevant literature is immense only a somewhat subjective selection of material can be made here.

1 Beginning of the theory of automorphic forms

Roughly speaking the theory of automorphic forms was established since about 1880 by F. Klein (1849–1925) and H. Poincaré (1854–1912). A kind of scientific competition came up among these two researchers similar to the contest between N.H. Abel (1802–1829) and C.G.J. Jacobi (1804–1851) in the course of the foundation of the theory of elliptic functions during the years 1827–1829. In a brief period of time Klein and Poincaré conjured up a vast and many-faceted theory in which ideas from geometry, group theory, complex analysis, theory of Riemann surfaces, theory of differential equations and number theory are forged into a new whole. The collected works of Klein [56] and Poincaré [121] give a vivid impression of the enormous creativity of these mathematicians, and the correspondence between Klein and Poincaré (see [56]) offers a fascinating glimpse into the mathematical workshop of the correspondents. Large parts of Klein's ideas were elaborated and completed by R. Fricke (1861–1930) in four long monographs [35], [57]; these are supplemented by Fricke's books on algebra (3 vols.), elliptic functions (2 vols.) and his articles in the *Encyklopädie der mathematischen Wissenschaften* (II.B.3, II.B.4).

The rapid progress in knowledge soon ran far ahead of the available methods of exact proof. Klein's way of thinking was based on admirable geometric intuition. But his methods were not sufficient for a rigorous proof say of the uniformization theorem. A period of consolidation was necessary during which the relevant foundational work had to be done. This led around 1910 to the great works of Poincaré and P. Koebe (1882–1945) giving the first satisfactory proofs of the uniformization theorem. A rigorous foundation of the theory of Riemann surfaces was laid in 1913 by the juvenile H. Weyl (1885–1955) in his masterpiece [157].

2 Petersson's early work on automorphic forms

Since there is deplorable confusion with respect to the terminology in the recent literature we think it fits to recall the classical definitions and some basic facts. A discrete subgroup $\Gamma < \mathrm{SL}_2(\mathbb{R})$ (or $\Gamma < \mathrm{PSL}_2(\mathbb{R})$) is called a *Fuchsian group* in Poincaré's terminology and a *Hauptkreisgruppe* in Klein's naming. Γ is called a *Fuchsian group of the first kind* if its set of limit points is equal to the *principal circle* $\mathbb{R} \cup \{\infty\}$. Equivalently, Γ is a Fuchsian group of the first kind if Γ acts *discontinuously* on the upper half-plane

$$\mathbb{H} := \{z \in \mathbb{C} : \operatorname{Im} z > 0\}$$

and not discontinuously at any point of $\mathbb{R} \cup \{\infty\}$. Such a group was named a *Grenzkreisgruppe* by Klein and a *horocyclic group* by Rankin [123]. A Fuchsian group is said to be *of the second kind* if it acts discontinuously at some point of $\mathbb{R} \cup \{\infty\}$. A Fuchsian group is *finitely generated and of the first kind* if and only if it has a *fundamental domain D* of finite hyperbolic area

$$\omega(D) = \iint\limits_D \frac{dx\,dy}{y^2} \,.$$

Such a group was named a *Grenzkreisgruppe erster Art* by Klein and is frequently called a *cofinite group* by recent authors. A well-known theorem says that Γ is cofinite if and only if the *Riemann surface* $\Gamma \setminus \mathbb{H}$ becomes *compact* on inclusion of the parabolic cusps. A *Grenzkreisgruppe* is called *von zweiter Art* by Klein if it has a fundamental domain of infinite hyperbolic area. The confusing disagreement in the meaning of the predicaments "of the first/second kind" (for Fuchsian groups) and "von erster/zweiter Art" (for Grenzkreisgruppen) has caused considerable disorder in the literature where the name "Fuchsian group of the first kind" is now often used with the tacit understanding that the group be finitely generated. – For a modern account of the theory of Fuchsian groups see Beardon [5].

Petersson's first papers of note are devoted to the theory of representations of natural numbers by quadratic forms and the investigation of the number of lattice-points in higher-dimensional ellipsoids ([102], [103]). In these researches he naturally came across the theta functions and Eisenstein series of half-integral weight as introduced by Hardy [41] and Mordell [99], [100]. Klein and his disciples had avoided a careful discussion of the special technical problems connected with the introduction of automorphic forms of non-integral weight. The state of the theory as left behind by Poincaré, Klein and Fricke obviously did not satisfy the standards of rigour of the mid-twenties. Indeed, the weighty monograph [57] was some 25 years later characterized to the point by a sharp Gallic tongue as «l'ouvrage classique monumental et illisible». Hence Petersson felt it necessary to reconsider the subject from scratch and he found a wide and fertile area for his lifelong research.

In his first contribution [104] to the general theory of automorphic forms Petersson starts off with the proper definition: Let $\Gamma < \mathrm{SL}_2(\mathbb{R})$ be a Fuchsian group of the first kind, k a real or complex number and v a *multiplier system* on Γ of *weight*[1] k.

[1] Petersson usually calls the number $-k$ the *dimension* of the multiplier system or the automorphic form, respectively.

A meromorphic function f on $\mathbb{H}$ is called an *automorphic form on* Γ *of weight* k *for the multiplier* v if f satisfies the transformation rule

$$(2.1)\quad f\left(\frac{a\tau+b}{c\tau+d}\right)=v(M)(c\tau+d)^k f(\tau)$$

for all $M=\left(\begin{smallmatrix}a&b\\c&d\end{smallmatrix}\right)\in\Gamma$, $\tau\in\mathbb{H}$, and f satisfies the natural condition of meromorphicity[2] in the cusps (parabolic fixed points) of Γ. Here, the multiplier v is defined so as to fulfil the consistency conditions following from (2.1) if this rule holds for some $f\neq 0$. These consistency relations come up if one writes down (2.1) for $M=-I$ and for the product MN with $M,N\in\Gamma$ (see [96]). Moreover, Petersson fixes the power w^k for $0\neq w\in\mathbb{C}$ once and for all by the prescription $-\pi<\arg w\leq\pi$. Introducing his stroke operator

$$(2.2)\quad f\mid M(\tau):=(c\tau+d)^{-k}f(M\tau)$$

he may write (2.1) in the concise form

$$(2.3)\quad f\mid M=v(M)f\quad (M\in\Gamma)\,.$$

The problem of existence of non-trivial automorphic forms is settled in [104] for groups with parabolic elements and for real weight $k>2$, $|v|=1$ by means of a new kind of Poincaré series "which are intermediate between the Eisenstein series and the Poincaré series". The main result of [104] asserts that any automorphic form of weight $k>2$ for the multiplier v (with $|v|=1$) on a finitely generated Fuchsian group of the first kind may be represented as the Poincaré series of some rational function. This result extends a classical theorem of Poincaré. Much of Petersson's later work aims at simplifying the construction of automorphic forms by various Poincaré series and proving a corresponding completeness theorem. In addition, he worked out general formulae (involving Kloosterman sums and Bessel functions) for the Fourier coefficients of Poincaré series [105] and used them to prove growth estimates for the Fourier coefficients of modular forms. The same results were reported on by the juvenile A. Selberg in 1938 ([135], p. 35–37).

In a report published in the *Jahresbericht* [106] Petersson summarizes his great work [108]–[112] on the foundation of the theory of automorphic forms. The main object of these papers is a close investigation of the relations between the theory of automorphic forms on Γ and the theory of meromorphic functions and differentials on the Riemann surface $\Gamma\setminus\mathbb{H}$. A highlight of these papers is the Riemann–Roch theorem for automorphic forms of arbitrary weight and its consequences and ramifications. (For more details see [158].)

3 The Petersson scalar product and its applications to Poincaré series

Two major problems in the theory of automorphic forms were left open around 1938:

(A) *Which systems of Poincaré series constitute a basis of the space of cusp forms?*

(B) *Does there exist a basis of the space of cusp forms of even integral weight* $k\geq 12$ *on*

[2] This will be explained in sect. 3.

the modular group $\mathrm{SL}_2(\mathbb{Z})$ *consisting of simultaneous eigenforms of the Hecke operators* T_n*?*

Both problems were most elegantly solved by means of Petersson's natural scalar product on the space of cusp forms. From the point of view of 1998 the introduction of a scalar product in a finite-dimensional vector space is quite an elementary matter since a course on abstract linear algebra now belongs to the basic training of every mathematician and concepts of linear algebra are virtually omnipresent. Hence it may come as a surprise to many that the *abstract* notion of a vector space appeared in print only in 1922 in papers by S. Banach and H. Hahn. The emerging functional analysis clearly demanded this abstract notion, and the new quantum mechanics as embodied e.g. in J. v. Neumann's classic [101] proved the enormous practical superiority of the abstract notion over the classical approach limited to coordinate spaces say $\mathbb{R}^n$ or $\mathbb{C}^n$.

To set the stage for the following developments we fix some notation: Let $\Gamma < \mathrm{SL}_2(\mathbb{R})$ $(-I \in \Gamma)$ be a cofinite group, $k \in \mathbb{R}$ and v a multiplier system on Γ of weight k with $|v| = 1$. Assume that $\zeta = A^{-1}\infty$ $(A \in \mathrm{SL}_2(\mathbb{R}))$ is a cusp of Γ and choose $\lambda > 0$ such that $-I$ and $P := A^{-1}\left(\begin{smallmatrix}1 & \lambda\\ 0 & 1\end{smallmatrix}\right)A$ generate the stabilizer Γ_ζ of ζ in Γ. Put $v(P) = \exp(2\pi i\kappa)$ with $0 \le \kappa < 1$. Any holomorphic function f on $\mathbb{H}$ satsfying (2.1) for all $M \in \Gamma$ has the property that $f|A^{-1}|\left(\begin{smallmatrix}1 & \lambda\\ 0 & 1\end{smallmatrix}\right) = v(P)f \mid A^{-1}$ and hence has a Fourier development of the form

$$(3.1)\qquad f \mid A^{-1}(z) = \sum_{n\in\mathbb{Z}} a_n e^{2\pi i(n+\kappa)z/\lambda} \quad (z \in \mathbb{H})\,.$$

The meromorphicity of f in the cusp ζ alluded to in sect. 2 means that $a_n = 0$ for all $n < n_0$ with some suitable $n_0 \in \mathbb{Z}$. Now f is called an *entire* automorphic form if in (3.1) all coefficients a_n with $n + \kappa < 0$ vanish, and f is named a *cusp form* if $a_n = 0$ for all n with $n + \kappa \le 0$. (This is required to hold for all cusps of Γ.) We denote the finite-dimensional vector spaces of entire automorphic forms or cusp forms for Γ, k, v by $\mathcal{G}(\Gamma, k, v)$ and $\mathcal{C}(\Gamma, k, v)$, respectively.

For $f, g \in \mathcal{G}(\Gamma, k, v)$ the function $z \mapsto f(z)\overline{g(z)}y^k$ $(z \in \mathbb{H}, y = \mathrm{Im}\, z)$ is Γ-invariant. Integrating this function over a (measurable) fundamental domain D of Γ with respect to the $\mathrm{SL}_2(\mathbb{R})$-invariant hyperbolic area measure $y^{-2}\,dx\,dy$ on $\mathbb{H}$ we obtain the *Petersson scalar product*

$$(3.2)\qquad (f,g) := \iint_D f\overline{g}\,y^{k-2}\,dx\,dy\,.$$

If this integral exists as a Lebesgue integral for one choice of a fundamental domain then it exists for any other choice and its value remains the same. The scalar product (3.2) exists for the entire forms f, g whenever $f\overline{g}$ vanishes at all cusps of Γ, that is, whenever at any cusp of Γ at least one of the functions f, g behaves like a cusp form. The Petersson scalar product really is a scalar product in the usual sense on the space $\mathcal{C}(\Gamma, k, v)$ of cusp forms. But as noticed above the symbol (f, g) makes sense and is useful to consider under more general assumptions, e.g. if one of the forms $f, g \in \mathcal{G}(\Gamma, k, v)$ is a cusp form. The entire forms f, g are called *orthogonal* whenever (f, g) exists and is equal to zero.

When Petersson introduced his scalar product in 1938 the idea of invariant integration was somehow in the air. A breakthrough in this area were the proofs of the existence of a left invariant locally finite measure on any locally compact topological group by A. Haar in 1932, the subsequent proofs of uniqueness by J. v. Neumann and the more general proof of existence and uniqueness of such a measure by A. Weil around 1936. In fact, the Petersson scalar product is very closely related with the Haar measure on $G := \mathrm{SL}_2(\mathbb{R})$: For f as above define $\tilde{f} : G \to \mathbb{C}$ by

$$\tilde{f}(M) := f \mid M(i) \quad (M \in G)$$

and similarly $\tilde{g}$ for g. Then the function $\tilde{f}\bar{\tilde{g}}$ is left Γ-invariant and for a suitable choice of the Haar measure μ on the (unimodular) group G we have for the Petersson product

$$(f, g) = \int_{\Gamma\backslash G} \tilde{f}\bar{\tilde{g}}\, d\mu$$

(see Borel [7], p. 63 f.).

Petersson published his pioneering discoveries in several influential papers. The results of the famous report [113] in the *Jahresbericht* gave rise to a first series of papers [114]–[116] on the simultaneous diagonalization of Hecke operators. Another series of works on applications to the theory of Poincaré series was started with [117] and [118] and was continued in various directions over a period of approximately 20 years (see [158]).

We first give some applications of the Petersson scalar product to the theory of Poincaré series. Let the data $\Gamma, k, v, \zeta = A^{-1}\infty, \lambda, \Gamma_\zeta = \langle -I, P\rangle, v(P) = e^{2\pi i\kappa}$ be as above and $k > 2, n \in \mathbb{Z}$. Consider Petersson's *Poincaré series of parabolic type*

$$(3.3) \quad G_n(z) := \sum_{M=\left(\begin{smallmatrix} \cdot & \cdot \\ c & d\end{smallmatrix}\right)} \frac{e^{2\pi i(n+\kappa)Mz/\lambda}}{v(M)(cz+d)^k} \quad (z \in \mathbb{H}) .$$

The sum over $M = AL$ is carried out in such a way that L runs through a representative system of $\Gamma_\zeta \setminus \Gamma$, and $v(M)$ is defined suitably ([117], p. 469). The series converges normally on $\mathbb{H}$ since $k > 2$, and G_n is an automorphic form on Γ of weight k for the multiplier v. In fact, G_n is entire if $n + \kappa \geq 0$ and a cusp form if $n + \kappa > 0$. In the special case $v(P) = 1, n = 0$ the series G_0 reduces to the familiar *Eisenstein series* for the cusp $\zeta = A^{-1}\infty$:

$$(3.4) \quad E_A(z) = \sum \frac{1}{v(M)(cz+d)^k} \quad (z \in \mathbb{H}) .$$

Γ-equivalent cusps give rise to essentially the same Poincaré series. The obvious behaviour of these series in the cusps of Γ implies the following reduction theorem: *For any $f \in \mathcal{G}(\Gamma, k, v)$ there exists a linear combination E of the Eisenstein series such that $f - E$ is a cusp form.* In other words,

$$(3.5) \quad \mathcal{G}(\Gamma, k, v) = \mathcal{E}(\Gamma, k, v) \oplus \mathcal{C}(\Gamma, k, v)$$

where $\mathcal{E}(\Gamma, k, v)$ denotes the space generated by the Eisenstein series. Maintaining the previous notations and assumptions we have

Theorem 3.1 (Petersson's coefficient formulae) *Assume that* $f \in C(\Gamma, k, v)$ *has the Fourier expansion* (3.1) *at* ζ *and let* $k > 2$. *Then*

$$(3.6) \quad (f, G_n) = \begin{cases} \frac{\varepsilon(A)\lambda^k \Gamma(k-1)}{(4\pi(n+\kappa))^{k-1}} a_n & \text{if } n + \kappa > 0\,, \\ 0 & \text{if } n + \kappa = 0 \end{cases}$$

where $\varepsilon(A)$ *is a known constant of modulus* 1.

This theorem is a key result for the theory of Poincaré series. It was proved by Petersson in [117] and [118]; the result was almost simultaneously proved in a different way by Selberg ([135], p. 42–53) for principal congruence subgroups of the modular group.

Theorem 3.1 immediately implies a remarkable criterion on the non-vanishing of Poincaré series: Let $n + \kappa > 0$ and

$$(3.7) \quad G_n \mid A^{-1}(z) = \sum_{m+\kappa>0} \gamma_n(m) e^{2\pi i(m+\kappa)z/\lambda}$$

be the Fourier expansion of G_n at $\zeta = A^{-1}\infty$. *Then we have* $G_n(\cdot) \neq 0$ *if and only if* $(G_n, G_n) \neq 0$, *that is, if and only if* $\gamma_n(n) \neq 0$. Unfortunately, there is no simple criterion for the non-vanishing of $\gamma_n(n)$. The complicated sum formulae for the Fourier coefficients of Poincaré series developed in [117], Satz 7, p. 474 yield growth estimates for the Fourier coefficients but are unsuited for the solution of the problem of non-vanishing. – The Fourier coefficients in (3.7) exhibit a symmetry in m and n which drops out on choosing $f = G_m$ in (3.6). One may even choose the G_m for another cusp of Γ. Petersson uses the coefficient formula (3.6) for the proof of a somewhat subtle vanishing criterion for an arbitrary linear combination of Poincaré series (belonging to the same cusp). This gives an answer to problem (A).

A famous *example* is the space C_{12} of cusp forms on $\Gamma := \mathrm{SL}_2(\mathbb{Z})$ of weight 12 for the multiplier $v = 1$. The space C_{12} is one-dimensional and spanned by the discriminant function

$$(3.8) \quad \Delta(z) = q \prod_{n=1}^{\infty} (1 - q^n)^{24} = \sum_{n=1}^{\infty} \tau(n) q^n \quad (q = e^{2\pi i z}, z \in \mathbb{H})$$

where the coefficients $\tau(n) \in \mathbb{Z}$ are known as the *Ramanujan numbers* ([122], p. 151 ff.). By the above remarks we have for all $n \geq 1$ that $\tau(n) \neq 0$ if and only if $G_n \neq 0$, where

$$G_n(z) = \sum_{M \in \Gamma_\infty \backslash \Gamma} \frac{e^{2\pi i n M z}}{(cz + d)^{12}} \quad (z \in \mathbb{H})$$

is the n-th Poincaré series of weight 12 on the modular group. It is known that in fact $\tau(n) \neq 0$ for $1 \leq n \leq 113\,740\,230\,287\,998$. The famous *Lehmer conjecture* asserts that $\tau(n) \neq 0$ for all $n \geq 1$. This conjecture is still open despite considerable efforts to prove it. The analogous conjecture is also open for all one-dimensional spaces of cusp forms on the modular group, that is for $C(\mathrm{SL}_2(\mathbb{Z}), k, 1)$ with $k = 12, 16, 18, 20, 22, 26$.

The first line of (3.6) has a suggestive geometric meaning: Fix n such that $n + \kappa > 0$ and let $\mathcal{N}_n$ denote the set of cusp forms such that in (3.1) a_n equals zero. Then $\mathcal{N}_n$ either is equal to $C(\Gamma, k, v)$ or is a hyperplane in $C(\Gamma, k, v)$ with normal vector G_n.

The second line in (3.6) says that $\mathcal{C}(\Gamma, k, v)$ is orthogonal to $\mathcal{E}(\Gamma, k, v)$, and it is easy to see that any entire form which is orthogonal to $\mathcal{C}(\Gamma, k, v)$ belongs to $\mathcal{E}(\Gamma, k, v)$. *Hence* (3.5) *is an orthogonal decomposition* (in a somewhat wider sense since (3.2) is not a scalar product on $\mathcal{G}(\Gamma, k, v)$ in the usual sense). By (3.5) the completeness problem for the space of entire forms (and $k > 2$) is reduced to the completeness problem for the space of cusp forms. This is solved by Petersson's Completeness Theorem.

Theorem 3.2 (Completeness Theorem) *For $k > 2$, every cusp form $f \in \mathcal{C}(\Gamma, k, v)$ is a linear combination of the Poincaré series $G_n \quad (n + \kappa > 0)$.*

Proof. The cusp forms G_n with $n + \kappa > 0$ generate a (finite-dimensional) subspace U of the (finite-dimensional) unitary space $\mathcal{C}(\Gamma, k, v)$. Assume that $f \in \mathcal{C}(\Gamma, k, v)$ is orthogonal to U. Then all Fourier coefficients of f vanish by (3.6), hence $f = 0$. $\square$

Besides the Poincaré series of parabolic type (3.3) Petersson introduced analogous series of elliptic and hyperbolic types which correspond to the expansions of an automorphic form in a point of the upper half-plane or in a pair of hyperbolic fixed points, respectively. The theory is expounded in a unified way by Petersson in his work [118]. Leaving aside here the hyperbolic case we concentrate on the elliptic case and start off with a holomorphic function f on $\mathbb{H}$ satisfying (2.1) for all $M = \left(\begin{smallmatrix} a & b \\ c & d \end{smallmatrix}\right) \in \Gamma$ where Γ is no longer assumed to contain parabolic elements. For any $z \in \mathbb{H}$ we have an expansion of the form

$$(3.9) \quad f(\tau) = (\tau - \bar{z})^{-k} \sum_{n=0}^{\infty} b_n \left(\frac{\tau - z}{\tau - \bar{z}}\right)^n \quad (\tau \in \mathbb{H}) .$$

Applying the stroke operator (2.2) to the typical term $(\tau - \bar{z})^{-k} \left(\frac{\tau - z}{\tau - \bar{z}}\right)^n$ of (3.9) and summing over $M \in \Gamma$ we obtain Petersson's *Poincaré series of elliptic type*

$$(3.10) \quad H_n(\tau) := \sum_{M \in \Gamma} \frac{\left(\frac{M\tau - z}{M\tau - \bar{z}}\right)^n}{v(M)(c\tau + d)^k (M\tau - \bar{z})^k}$$

($n \geq 0, n \in \mathbb{Z}; k > 2$). These functions are cusp forms for Γ, k, v and Theorems 3.1, 3.2 hold analogously for the expansion (3.9) and the series (3.10). The coefficient formula here reads as follows: *For any $f \in \mathcal{C}(\Gamma, k, v) (k > 2)$ with expansion* (3.9) *we have*

$$(3.11) \quad (f, H_n) = \frac{8\pi}{(4 \operatorname{Im} z)^k} \frac{n! \Gamma(k-1)}{\Gamma(k+n)} b_n \quad \textit{for all } n \geq 0 .$$

The coefficient b_0 in (3.9) equals $f(z)$ up to a trivial factor. Defining

$$(3.12) \quad \Omega(\tau, z) := H_0(\tau) = \sum_{M \in \Gamma} \frac{1}{v(M)(c\tau + d)^k (M\tau - \bar{z})^k}$$

we hence obtain from (3.11):

Theorem 3.3 (Reproducing Formula) *For all $f \in \mathcal{C}(\Gamma, k, v) (k > 2)$ we have*

$$(3.13) \quad (f, \Omega(\cdot, z)) = \frac{8\pi}{2^k (k-1)} e^{\frac{\pi i}{2} k} f(z) \quad (z \in \mathbb{H}) .$$

This result is contained in [118], p. 56. A different approach to (3.13) was suggested by Elstrodt [29], Sect. 10: The function Ω may be regarded as a limit of the resolvent kernel for the automorphic Laplacian of weight k on $\mathbb{H}$. Evaluating the limit of the resolvent equation one obtains (3.13), and differentiating (3.13) suitably with respect to z one obtains (3.11) (even under more general hypotheses than those given above). Many variants and generalizations of (3.13) have been proved; see [29], p. 121 for some pertinent references.

For *example* let $\Gamma = \mathrm{SL}_2(\mathbb{Z})$ and $k \geq 4$ be an even integer, $v = 1$. By Theorem 3.1, the function

$$\Psi(\tau, z) := \sum_{n=1}^{\infty} n^{k-1} G_n(\tau) e^{-2\pi i n \bar{z}}$$

also satisfies the reproducing formula (3.13) though with a different constant factor on the right-hand side. Hence Ψ and Ω agree up to a constant factor and on equating constants one finds

$$\sum_{n=1}^{\infty} n^{k-1} G_n(\tau) e^{-2\pi i n \bar{z}} = \frac{(k-1)!}{2(2\pi i)^k} \Omega(\tau, z) .$$

This beautiful result is contained in [113], p. 60.

4 Simultaneous diagonalization of the Hecke operators

Probably the most spectacular breakthrough that became possible by means of the Petersson scalar product is the proof of the simultaneous diagonalization of the Hecke operators. For the rest of this section let $\Gamma = \mathrm{SL}_2(\mathbb{Z})$ denote the modular group, $k \geq 4$ an even integer and $v = 1$. For any entire modular form f of weight k Hecke ([45], p. 583, 635, 655) defined around 1935 the linear operator T_n by

$$(4.1) \quad T_n f(\tau) := n^{k-1} \sum_{\substack{ad=n \\ d>0 \\ b \bmod d}} d^{-k} f\left(\frac{a\tau + b}{d}\right)$$

($n \geq 1$). This operator maps the space $\mathcal{G}_k$ of entire modular forms of weight k into itself leaving the space $\mathcal{C}_k$ of cusp forms invariant. Hecke immediately recognized the following fundamental properties:

a) The operators $T_n (n \geq 1)$ commute.
b) For all $m, n \geq 1$,

$$(4.2) \quad T_m T_n = \sum_{d|(m,n)} d^{k-1} T_{\frac{mn}{d^2}} ;$$

in particular:

$$(4.3) \quad T_m T_n = T_{mn} \quad \text{if } (m, n) = 1 .$$

c) If $f = \sum_{m=0}^{\infty} a_m q^m \in \mathcal{G}_k \quad (q = e^{2\pi i \tau})$ then

$$(4.4) \quad T_n f = \sum_{m=0}^{\infty} \left(\sum_{d|(m,n)} d^{k-1} a_{\frac{mn}{d^2}} \right) q^m .$$

d) The operator-valued Dirichlet series

$$\Phi(s) := \sum_{n=1}^{\infty} T_n n^{-s}$$

has an Euler product expansion

$$\Phi(s) = \prod_p (I - T_p p^{-s} + p^{k-1-2s} I)^{-1}$$

if $\operatorname{Re} s \gg 0$. The function Φ admits a meromorphic continuation to the entire complex plane with only one (simple) pole at $s = k$ and satisfies the functional equation

$$(2\pi)^{-s} \Gamma(s) \Phi(s) = (-1)^{\frac{k}{2}} (2\pi)^{s-k} \Gamma(k-s) \Phi(k-s) .$$

Hecke well realized that the simultaneous eigenfunctions of the Hecke operators correspond (up to constant factors) to Dirichlet series with an Euler product of the form

$$\prod_p (1 - \lambda_p p^{-s} + p^{k-1-2s})^{-1} ,$$

and he raised the problem of simultaneous diagonalization of the T_n ([45], p. 586 f., 637, 667). Looking for examples he found out that the Eisenstein series of weight k on the modular group

$$(4.5) \quad E_k(\tau) = -\frac{B_k}{2k} + \sum_{m=1}^{\infty} \sigma_{k-1}(m) q^m$$

($B_k = k$-th Bernoulli number, $\sigma_{k-1}(m) = \sum_{d|m} d^{k-1}$) is a simultaneous eigenfunction of the T_n with associated Dirichlet series $\zeta(s)\zeta(s-k+1)$. He also checked that the spaces C_k of low dimension in fact possess bases of simultaneous eigenfunctions, but [illegible] left open [illegible] general problem of the existence of an eigenbasis of C_k. This problem [illegible]

(4.8) $T_n G_m = \sum_{d|(m,n)} d^{k-1} G_{\frac{mn}{d^2}}$.

Combining (4.8) with (3.6) one finds that (4.6) is true whenever f, g are Poincaré series of the form (4.7), and Theorem 3.2 implies that (4.6) holds in general. – Petersson's *second proof* of (4.6) is based on a skillful shift of the application of T_n in (4.6) from f to g (see [114], p. 408 ff.). – An easy modern proof is contained in Lang's book [81].

Corollary 4.2 *For every even integer $k \geq 4$ there exists an orthonormal basis of $\mathcal{C}_k$ consisting of simultaneous eigenfunctions of the Hecke operators $T_n (n \geq 1)$.*

Combining this corollary with Hecke's results Petersson ([113], [114]) can summarize the

Theorem 4.3 (Main Theorem on Hecke Operators) *Let $k \geq 4$ be an even integer and $d = \dim \mathcal{C}_k$.*[4] *Then there exists an orthogonal basis $f_0, \dots, f_d$ of $\mathcal{G}_k$,*

(4.9) $f_j = \sum_{m=0}^{\infty} a_{jm} q^m$,

normalized by the condition

(4.10) $a_{j1} = 1 \quad (j = 0, \dots, d)$

and consisting of simultaneous eigenfunctions of the Hecke operators

(4.11) $T_n f_j = \lambda_j(n) f_j \quad (j = 0, \dots, d\,;\, n \geq 1)$

such that the following hold:

a) $a_{jn} = \lambda_j(n)$ *for all* $j = 0, \dots, d; n \geq 1$.

b) *The function* f_0 *equals the Eisenstein series* (4.5). *The Dirichlet series associated with* f_0 *is*

$$
\begin{aligned}
D_0(s) &:= \sum_{n=1}^{\infty} \sigma_{k-1}(n) n^{-s} \\
&= \zeta(s)\zeta(s-k+1) \qquad (4.12) \\
&= \prod_p \left(1 - \frac{1+p^{k-1}}{p^s} + \frac{p^{k-1}}{p^{2s}}\right)^{-1} .
\end{aligned}
$$

c) *The functions* $f_1, \dots, f_d$ *constitute an orthogonal basis of* $\mathcal{C}_k$. *The Dirichlet series*

$$D_j(s) = \sum_{n=1}^{\infty} a_{jn} n^{-s}$$

associated with f_j *is an entire function and has the Euler product expansion*

(4.13) $D_j(s) = \prod_p \left(1 - \frac{\lambda_j(p)}{p^s} + \frac{p^{k-1}}{p^{2s}}\right)^{-1} \quad (j = 1, \dots, d)$.

[4] As is well known, $d = \left[\frac{k}{12}\right] - 1$ for $k \equiv 2 \bmod 12$ and $d = \left[\frac{k}{12}\right]$ for $k \not\equiv 2 \bmod 12$.

d) *The functions* $f_0, \ldots, f_d$ *are uniquely determined up to order.*
e) *The functions*

(4.14) $R_j(s) := (2\pi)^{-s}\Gamma(s)D_j(s)$

satisfy the functional equation

[illegible]

$(j = 0, \ldots, d)$. *The series* $D_j (j = 0, \ldots, d)$ *constitute a basis of the vector space of ordinary Dirichlet series satisfying the natural regularity conditions*[5] *and the functional equation* (4.14), (4.15)*; the functions of this distinguished basis possess the Euler product expansions* (4.12), (4.13).
f) *The eigenvalues* $\lambda_j(n)$ *are totally real algebraic integers.*

Looking for interesting invariants of the operators T_n on $\mathcal{C}_k$ one might e.g. try to determine the characteristic polynomial of T_n, but no simple general result has been found so far. (However, considering the identity I and T_p as linear operators on $\mathcal{C}_k$, Ihara [52] expressed the closely related "Hecke polynomial" $\det(I - XT_p + p^{k-1}X^2I)$ by means of congruence zeta-functions of suitable algebraic varieties over $\mathbb{F}_p$.) Yet it is possible to give an interesting simple expression for the *trace* of T_n, and here again Petersson's work [113] is crucial: Let $g_1, \ldots, g_d$ be an *orthonormal* basis of $\mathcal{C}_k$ consisting of simultaneous eigenfunctions of the Hecke operators $T_n (n \geq 1)$. Consider the kernel

$$K(\tau, z) := \sum_{j=1}^{d} g_j(\tau)\overline{g_j(z)} \; .$$

Applying T_n with respect to the variable τ we get

$$T_nK(\tau, z) = \sum_{j=1}^{d} \lambda_j(n)g_j(\tau)\overline{g_j(z)}$$

and hence

$$\mathrm{tr}\, T_n = \int_D T_nK(\tau, \tau)y^{k-2}\, dx\, dy$$

where D denotes a fundamental domain of the modular group. But K is a reproducing kernel on $\mathcal{C}_k$, that is,

$$(f, K(\cdot, z)) = f(z) \quad (f \in \mathcal{C}_k, z \in \mathbb{H}) \; .$$

Hence Theorem 3.3 implies

$$K(\tau, z) = \frac{(-1)^{k/2}}{\pi} 2^{k-3}(k-1)\Omega(\tau, z) \; .$$

Letting again T_n act on the variable τ we find

$$\Omega_n(\tau, z) := n^{1-k}T_n\Omega(\tau, z) = \sum_{a,b,c,d \in \mathbb{Z}} (c\tau + d)^{-k}\left(\frac{a\tau + b}{c\tau + d} - \bar{z}\right)^{-k} ,$$

and collecting terms we obtain the crucial formula

$$\operatorname{tr} T_n = \frac{(-1)^{k/2}}{\pi} 2^{k-3}(k-1)n^{k-1} \int_D \Omega_n(\tau, \tau) y^{k-2}\, dx\, dy \, .$$

The latter integral was ingeniously evaluated by Selberg in 1956 (see [135], p. 461); the result reads as follows.

Theorem 4.4 (Eichler–Selberg Trace Formula) *Let $k \geq 4$ be an even integer and $n \geq 1$ a natural number. Then the trace of T_n on the space $\mathcal{C}_k$ of cusp forms of weight k on $\mathrm{SL}_2(\mathbb{Z})$ is given by*

$$\operatorname{tr} T_n = -\frac{1}{2} \sum_{|m| \leq 2\sqrt{n}} P_k(m, n) H(4n - m^2) - \frac{1}{2} \sum_{d|n} \left(\min\left(d, \frac{n}{d}\right)\right)^{k-1}$$

where the following notations apply:

$$P_k(m, n) := \frac{\rho^{k-1} - \overline{\rho}^{k-1}}{\rho - \overline{\rho}}$$

where ρ is defined by

$$\rho + \overline{\rho} = m \, , \ \rho\overline{\rho} = n \, .$$

Moreover, $H(d) = 0$ for $d < 0$, $H(0) := -\frac{1}{12}$ and for $d > 0$, $H(d)$ equals the number of $\mathrm{SL}_2(\mathbb{Z})$-equivalence classes of positive definite binary integral quadratic forms $ax^2 + bxy + cy^2$ with discriminant $b^2 - 4ac = -d$. Here, forms equivalent to a multiple of $x^2 + y^2$ are counted with weight $\frac{1}{2}$, forms equivalent to a multiple of $x^2 + xy + y^2$ with weight $\frac{1}{3}$.

This theorem was proved by Zagier [159]–[161]; in fact, Zagier's proof seems to be the most elementary proof that is available in the literature. A more general result, very much in the vein of Theorem 4.4 and its proof, was proved by Zagier [162]. The trace formula is also contained in Eichler's papers. However, his work is designed on a much broader scale than necessary just for the proof of Theorem 4.4; see [23]–[27]. Eichler [27] even computed the trace of the Hecke operators acting on $\mathcal{C}(\Gamma_0(N), k, \chi)$ where $k > 1$, N is a square-free integer,

$$\Gamma_0(N) = \left\{ \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in \mathrm{SL}_2(\mathbb{Z}) : c \equiv 0 \bmod N \right\} ,$$

and χ is a Dirichlet character $\bmod N$ (defining the multiplier). The latter work was extended to arbitrary level N by Hijikata [47]; see also Hijikata, Pizer and Shemanske [48] and Cohen [12]. Traces of Hecke operators for quaternion groups were likewise already computed by Eichler (loc. cit.); see also Miyake [98] and Hijikata, Saito, Yamauchi [49]. The last mentioned paper also contains some examples of characteristic polynomials of Hecke operators. Traces of more general Hecke operators were determined by Shimizu [137], Saito [128] and Shimura [141]. It seems hardly possible to strive for a reasonably complete list of references on this topic here. Moreover, we don't repeat here the list of references for the Selberg trace formula (see Elstrodt [30]).

5 Hecke operators on $\Gamma_0(N)$

Hecke ([45], p. 672 ff.) already initiated the theory of Hecke operators on congruence subgroups of $\mathrm{SL}_2(\mathbb{Z})$ and his work was promptly pushed forward by Petersson ([115], [116], [119]) by means of his scalar product. These researches did however not lead to a fully satisfactory generalization of Theorem 4.3 since important assertions such as the uniqueness of the simultaneous eigenfunctions and the decomposition of the associated Dirichlet series into complete Euler products don't hold unrestrictedly. The latter problems were resolved only much later by Atkin–Lehner [3], Miyake [97], Pizer [120], Li [85], [86] and Shimura [139]. Needless to say: Petersson's scalar product is a crucial tool in these works. Since the details of the theory are somewhat involved we can give here only a rough sketch of some basic facts.

The theory of Hecke operators on congruence subgroups of $\mathrm{SL}_2(\mathbb{Z})$ essentially boils down to the theory of Hecke operators on

$$\Gamma_0(N) := \left\{ \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in \mathrm{SL}_2(\mathbb{Z}) : c \equiv 0 \bmod N \right\}$$

where N is a natural number. For any Dirichlet character χ mod N we denote by $\mathcal{G}_k(N,\chi)$ the space of entire modular forms on $\Gamma_0(N)$ satisfying the transformation law

$$f\left(\frac{a\tau+b}{c\tau+d}\right) = \chi(d)(c\tau+d)^k f(\tau)$$

for all $\left(\begin{smallmatrix} a & b \\ c & d \end{smallmatrix}\right) \in \Gamma_0(N)$ and $\tau \in \mathbb{H}$. The weight k here is an integer satisfying the consistency relation $\chi(-1) = (-1)^k$. Let $\mathcal{C}_k(N,\chi)$ be the space of cusp forms contained in $\mathcal{G}_k(N,\chi)$. It turns out that the orthogonal complement of $\mathcal{C}_k(N,\chi)$ in $\mathcal{G}_k(N,\chi)$ can be described in terms of Eisenstein series (if k is sufficiently large) and that the associated Dirichlet series reduce to products of L-functions (see Miyake [98]). This means that the main difficulties are embodied in $\mathcal{C}_k(N,\chi)$ and we shall largely restrict to the discussion of the latter space.

The general theory of Hecke operators is most satisfactorily formulated in terms of abstract Hecke algebras (see e.g. Shimura [139], Krieg [75], Miyake [98], Diamond and Im [17]). For the sake of brevity we restrict to the consideration of the Hecke operators T_p for primes p. A special new ingredient of the theory for $\Gamma_0(N)$ is that one has to distinguish between the primes $p \nmid N$ and the primes $q \mid N$. For primes $p \nmid N$ and $f \in \mathcal{G}_k(N,\chi)$ we define

$$T_p f(\tau) := p^{k-1}\left(\sum_{b=0}^{p-1} f\left(\frac{\tau+b}{p}\right) + \chi(p) f(p\tau)\right)$$

($\tau \in \mathbb{H}$). This operator maps $\mathcal{G}_k(N,\chi)$ into itself leaving $\mathcal{C}_k(N,\chi)$ invariant. There is also a natural analogue of (4.4) for $T_p f$ $(p \nmid N)$. For distinct primes p, p' not dividing N the operators $T_p, T_{p'}$ commute. The following key results are due to Petersson ([115], p. 50 f.).

Theorem 5.1 (Petersson) *For $f, g \in \mathcal{C}_k(N, \chi)$ and $p \nmid N$ we have*

$$(T_p f, g) = \chi(p)(f, T_p g) .$$

Hence the operator $T_p : \mathcal{C}_k(N, \chi) \to \mathcal{C}_k(N, \chi)$ is normal.

Corollary 5.2 (Petersson) *There exists an orthonormal basis of $\mathcal{C}_k(N, \chi)$ consisting of common eigenfunctions of the operators T_p for all primes $p \nmid N$.*

For primes $q \mid N$ the associated Hecke operator on $\mathcal{G}_k(N, \chi)$ is often denoted by U_q. Its action on a modular form $f(\tau) = \sum_{m=0}^{\infty} a_m e^{2\pi i m \tau} \in \mathcal{G}_k(N, \chi)$ is defined by

$$U_q f(\tau) := \sum_{m=0}^{\infty} a_{mq} e^{2\pi i m \tau} .$$

The operator U_q also maps $\mathcal{G}_k(N, \chi)$ into itself leaving $\mathcal{C}_k(N, \chi)$ invariant. Moreover, T_p $(p \nmid N)$ and U_q $(q \mid N)$ commute.

Two major problems come up with regard to Corollary 5.2: (i) The orthonormal basis of common eigenfunctions of the $T_p(p \nmid N)$ cannot necessarily be chosen also as a simultaneous eigenbasis of the $U_q(q \mid N)$. (ii) The simultaneous eigenspaces in Corollary 5.2 need not be one-dimensional for the following trivial reason: Let $m \mid N$ and suppose that χ is a Dirichlet character mod m. Regarding χ also as a Dirichlet character mod N we have $\mathcal{G}_k(m, \chi) \subset \mathcal{G}_k(N, \chi)$ and similarly for the cusp forms. Now if d is a natural number such that $md \mid N$ and $f \in \mathcal{C}_k(m, \chi)$ then $f(d\tau) \in \mathcal{C}_k(N, \chi)$. The forms on $\Gamma_0(N)$ coming up in this way from forms of lower level m $(m \mid N, m \neq N)$ such that χ is a character mod m span a certain subspace $\mathcal{C}_k^{\text{old}}(N, \chi)$ which was called the space of *oldforms* by Atkin and Lehner [3]. For any $p \nmid N$ the operator T_p preserves $\mathcal{C}_k^{\text{old}}(N, \chi)$. Hence $\mathcal{C}_k^{\text{old}}(N, \chi)$ decomposes as an orthogonal sum of common eigenspaces of all T_p with $p \nmid N$. Maintaining the previous notation, if $f \in \mathcal{C}_k(m, \chi)$ is a common eigenfunction of all $T_p(p \nmid N)$ then so is $f(d\tau)$ whenever $md \mid N$, and the corresponding eigenvalues are the same. Hence every common eigenspace of the $T_p(p \nmid N)$ in $\mathcal{C}_k^{\text{old}}(N, \chi)$ has dimension greater than one.

The orthogonal complement of $\mathcal{C}_k^{\text{old}}(N, \chi)$ in $\mathcal{C}_k(N, \chi)$ with respect to the Petersson scalar product is called $\mathcal{C}_k^{\text{new}}(N, \chi)$. Obviously,

$$\mathcal{C}_k(N, \chi) = \mathcal{C}_k^{\text{old}}(N, \chi) \oplus \mathcal{C}_k^{\text{new}}(N, \chi) .$$

The space $\mathcal{C}_k^{\text{new}}(N, \chi)$ may be regarded as the really interesting part of $\mathcal{C}_k(N, \chi)$. By Theorem 5.1, $\mathcal{C}_k^{\text{new}}(N, \chi)$ is also invariant under all T_p $(p \nmid N)$ and hence has an orthonormal basis consisting of simultaneous eigenfunctions of all $T_p(p \nmid N)$. The common eigenforms of the $T_p(p \nmid N)$ contained in $\mathcal{C}_k^{\text{new}}(N, \chi)$ are called *newforms*. Basically it now turns out that the main assertions of Theorem 4.3 hold analogously for the Hecke operators acting on $\mathcal{C}_k^{\text{new}}(N, \chi)$. If $f(\tau) = \sum_{n=1}^{\infty} a_n e^{2\pi i n \tau} \in \mathcal{C}_k^{\text{new}}(N, \chi)$ is a newform then $a_1 \neq 0$; if $a_1 = 1$, f is called *normalized.*

Theorem 5.3 *Suppose that $f(\tau) = \sum_{n=1}^{\infty} a_n e^{2\pi i n \tau} \in \mathcal{C}_k^{\text{new}}(N, \chi)$ is a normalized newform $(a_1 = 1)$. Then the following hold:*

a) *$T_p f = a_p f$ for all $p \nmid N$, that is, a_p is the eigenvalue of f for T_p.*

b) *Let q be a prime dividing N. Then*

$$U_q f = a_q f$$

and there are two possibilities:

(i) $|a_q| = q^{(k-1)/2}$ *if χ is not a character* mod N/q.

(ii) *If χ is a character* mod N/q *then $a_q = 0$ if $q^2 \mid N$ and $a_q^2 = \chi(q)q^{k-2}$ if $q^2 \nmid N$.*

c) *The Dirichlet series*

$$D(s,f) := \sum_{n=1}^{\infty} a_n n^{-s}$$

associated with f splits into a complete Euler product:

$$D(s,f) = \prod_{p \nmid N} (1 - a_p p^{-s} + \chi(p) p^{k-1-2s})^{-1} \cdot \prod_{q|N} (1 - a_q q^{-s})^{-1} \, .$$

Moreover,

$$R_N(s,f) := \left(\frac{2\pi}{\sqrt{N}}\right)^{-s} \Gamma(s) D(s,f)$$

is holomorphic on the whole s-plane and satisfies the functional equation

$$R_N(s,f) = \lambda_f i^k R_N(k-s, f^*)$$

for some constant λ_f where

$$f^*(\tau) = \sum_{n=1}^{\infty} \overline{a}_n e^{2\pi i n \tau} \in \mathcal{C}_k^{\text{new}}(N, \overline{\chi})$$

is a normalized newform.

d) *Let $g(\tau) = \sum_{n=1}^{\infty} b_n e^{2\pi i n \tau} \in \mathcal{C}_k^{\text{new}}(M, \chi)$ also be a normalized newform of weight k and some level M for the same character χ and assume that $a_p = b_p$ for all primes p with at most finitely many exceptions. Then $f = g$ and $M = N$ (strong multiplicity one theorem). Hence the simultaneous eigenspaces of the $T_p (p \nmid N)$ on $\mathcal{C}_k^{\text{new}}(N, \chi)$ are one-dimensional, and the newforms constitute the unique orthogonal basis of $\mathcal{C}_k^{\text{new}}(N, \chi)$ consisting of normalized simultaneous eigenfunctions of the $T_p (p \nmid N)$.*

Detailed proofs of these and many more statements may be drawn from Atkin–Lehner [3], Diamond–Im [17], Lang [81], Li [85]–[87], Miyake [97], [98], Pizer [120], Rankin [124], Rohrlich [127], Shimura [139]. We also refrain from a discussion of Weil's converse theorem (see Weil [156], Li [87], Miyake [98]).

Of course, more detailed information on the eigenvalues of the Hecke operators would be highly desirable. For *example*, in the special case $k = 12$ the modular form Δ (see (3.8)) constitutes the unique basis of $\mathcal{C}_{12}$ as described in the Main Theorem 4.3, and we have $T_n \Delta = \tau(n) \Delta$. It was already conjectured by Ramanujan [122], p. 153 in 1916 that the polynomial $X^2 - \tau(p)X + p^{11}$ (p a prime number) never has two distinct real roots, that is

$$|\tau(p)| \leq 2p^{\frac{11}{2}} \quad \text{for all } p$$

(Ramanujan conjecture). Petersson [115], p. 45 noted that the Ramanujan conjecture can be immediately extended to the polynomial $X^2 - \lambda_j(p)X + p^{k-1}$ (compare (4.11), (4.13)). This led him to the *Ramanujan–Petersson conjecture*

$$(5.1)\quad |\lambda_j(p)| \leq 2p^{\frac{k-1}{2}} \quad \text{for } j = 1, \ldots, d$$

which he formulated in the even more general context of modular forms of level N (see [115], p. 62). Petersson also noted the "remarkable analogy" between (5.1) and the "Riemann conjecture for the congruence zeta-functions of elliptic function fields". The latter functions were introduced in pioneering work of E. Artin [2] and F.K. Schmidt [134], and the Riemann conjecture for them was proved in 1933 by H. Hasse ([44], Sect. VII). A. Weil [152], [153] considerably extended these investigations and proved the Riemann–Roch theorem and the analogue of the Riemann conjecture for curves, and this led him in 1949 to his famous conjectures [155] on the zeta-functions of algebraic varieties over finite fields. For an excellent account on the state of the art as of 1956 with respect to the Weil conjectures see Deuring [16]. Grothendieck's fundamental reshaping of algebraic geometry finally opened the way for Deligne's sensa-

919–940). The breakthrough came with a great paper by Shimura [140]. In this work, Shimura constructs an adequate theory of Hecke operators for modular forms of half-integral weight and he demonstrates the existence of a surprising lifting property for modular forms of half-integral weight. Starting from the Euler product associated with a common eigenfunction of the Hecke operators Shimura constructs a map taking cusp forms of half-integral weight to holomorphic modular forms of even integral weight such that common eigenfunctions of the Hecke operators are lifted to common eigenfunctions. This lifting has been studied in great detail. It can be obtained by taking the Petersson inner product of the original cusp form against a suitable theta kernel in two variables (see e.g. Cipra [10] and the references given there). A representation theoretic approach to the Shimura correspondence was elaborated on by Waldspurger [149], [151].

A striking difference between modular forms of half-integral weight and those of integral weight is the amazing fact that – roughly speaking – the Fourier coefficients of modular forms of half-integral weight are expressible in terms of L-functions. In fact, Waldspurger [150] has shown that if $f(z) = \sum_{n=1}^{\infty} a(n)e^{2\pi inz}$ is a normalized newform of even weight k for a congruence subgroup of $\mathrm{SL}_2(\mathbb{Z})$ and if $g(z) = \sum_{n=1}^{\infty} c(n)e^{2\pi inz}$ is the cusp form of weight $(k+1)/2$ associated with f under the Shimura correspondence, then (under certain technical conditions)

$$(5.2)\quad c(|D|)^2 = \omega |D|^{\frac{k-1}{2}} L(f, D, \tfrac{k}{2}).$$

Here, D denotes a fundamental discriminant, ω is a suitable constant and

$$L(f, D, s) := \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{D}{n}\right) a(n) n^{-s}$$

is the Dirichlet series associated with f twisted by the character $(\frac{D}{\cdot})$ (Kronecker symbol). For $f \in C_k$ the form g is a cusp form of weight $(k+1)/2$ on $\Gamma_0(4)$, and Kohnen and Zagier [73] gave the following refined version of (5.2) involving the Petersson scalar products (f,f) and (g,g):

$$(5.3)\quad \frac{c(|D|)^2}{(g,g)} = \frac{(\frac{k}{2}-1)!}{6\pi^{k/2}} |D|^{\frac{k-1}{2}} \frac{L(f, D, \frac{k}{2})}{(f,f)}$$

if $(-1)^{k/2} D > 0$. Kohnen ([67], [68]) even generalized (5.3) to the case of forms f of arbitrary odd level and gave a similar formula for $c(m)\overline{c(n)}$ involving a cycle integral instead of the value of the L-series at the center of the critical strip. For more information and interesting applications we refer the reader to [39], [40], [65]–[69], [73], [74], [145].

6 Applications to the theory of real analytic automorphic functions

Let $\Gamma < \mathrm{SL}_2(\mathbb{R})$ be a cofinite discrete group and $L^2(\Gamma \backslash \mathbb{H})$ the Hilbert space of measurable Γ-invariant functions on $\mathbb{H}$ which are square integrable with respect to the hyperbolic area measure $d\omega = y^{-2} dx\, dy$. $L^2(\Gamma \backslash \mathbb{H})$ is equipped with the Petersson scalar product

$$(f,g) = \int_{\mathcal{F}} f\overline{g}\, d\omega \quad (f,g \in L^2(\Gamma \setminus \mathbb{H}))$$

where $\mathcal{F}$ is a measurable fundamental domain of Γ. The Laplace–Beltrami operator

$$\Delta = y^2\left(\frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2}\right)$$

for the hyperbolic metric on $\mathbb{H}$ is known to be essentially self-adjoint on the space $C_0^\infty(\Gamma \setminus \mathbb{H})$ of Γ-invariant C^∞-functions on $\mathbb{H}$ such that the projection of the support of f to $\Gamma \setminus \mathbb{H}$ is compact. The closure $-\tilde{\Delta}$ of $-\Delta$ is self-adjoint and positive. The problem of determining the spectral decomposition of $-\tilde{\Delta}$ and related topics are known as the *eigenvalue problem of automorphic functions.* This problem arose 50 years ago from pioneering work of H. Maaß (1911–1992) (see [90], [91], [94]) and was subsequently developed into a fascinating theory in landmark papers by W. Roelcke ([125], [126]) and A. Selberg ([135]). Some pertinent references include Fischer [32], Hejhal [46], Iwaniec [54], Kubota [77], Terras [144], Venkov [146]–[148].

Whereas the continuous part of the spectral decomposition of $-\tilde{\Delta}$ can be fully described in terms of the analytically continued real analytic Eisenstein series the eigenfunctions of $-\tilde{\Delta}$ are still highly mysterious. Only very few eigenfunctions are explicitly known, and for cocompact groups and for groups of arithmetic type such as the modular group and its congruence subgroups it is known that infinitely many linearly independent eigenfunctions of $-\tilde{\Delta}$ (often called *Maaß forms*) exist; the eigenvalues even satisfy Weyl's asymptotic law in the aforementioned cases. (Recall that a subgroup $\Gamma < \mathrm{SL}_2(\mathbb{Z})$ is named a *congruence subgroup* whenever Γ contains a principal congruence subgroup of level N

$$\Gamma(N) := \left\{\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in \mathrm{SL}_2(\mathbb{Z}) : \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \equiv \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \bmod N\right\}$$

for some N.) In view of arithmetical applications the following conjecture of A. Selberg ([135], p. 518–519) is of fundamental importance.

Selberg's $\frac{1}{4}$-Conjecture *For any congruence subgroup Γ of $\mathrm{SL}_2(\mathbb{Z})$ the smallest positive eigenvalue λ_1 of $-\tilde{\Delta}$ satisfies*

$$\lambda_1 \geq \frac{1}{4}\,.$$

This conjecture is still open though Selberg (loc. cit.) already took an important step and proved

Theorem 6.1 (Selberg) *For any congruence subgroup $\Gamma < \mathrm{SL}_2(\mathbb{Z})$ the smallest positive eigenvalue λ_1 of $-\Delta$ satisfies*

$$\lambda_1 \geq \frac{3}{16}\,.$$

The *proof* of this theorem is based on an ingenious application of the methods provided by the scalar product. We briefly indicate some of the leading ideas: Selberg introduces the real analytic Poincaré series

$$(6.1) \quad U_m(z,s) = \sum_{M \in \Gamma_\infty \backslash \Gamma} (\operatorname{Im} Mz)^s e^{2\pi i m \frac{\operatorname{Re} Mz}{q} - 2\pi |m| \frac{\operatorname{Im} Mz}{q}}$$

where $z \in \mathbb{H}, m \in \mathbb{Z}$ and $\left(\begin{smallmatrix}1 & q\\ 0 & 1\end{smallmatrix}\right)$ (and possibly $-I$) generate Γ_∞. The series (6.1) converges for $\operatorname{Re} s > 1$ and we have $U_m(\cdot, s) \in L^2(\Gamma \setminus \mathbb{H})$ for $m \neq 0$ (whereas U_0 is a real analytic Eisenstein series). The series U_m play a role similar to that of the Poincaré series (3.3) in the holomorphic theory. Let $f \in L^2(\Gamma \setminus \mathbb{H}) \cap C^2(\Gamma \setminus \mathbb{H})$ satisfy the differential equation $-\Delta f = \lambda f$. Then f has a Fourier expansion at the cusp ∞ of the form

$$(6.2) \quad f(x+iy) = a_0 y^s + b_0 y^{1-s} + \sum_{n \neq 0} a_n y^{\frac{1}{2}} K_{ir}\left(\frac{2\pi|n|y}{q}\right) e^{\frac{2\pi i n x}{q}}$$

where $\lambda = s(1-s) = \frac{1}{4} + r^2$ and where K_{ir} denotes the usual Bessel function (vanishing exponentially at infinity). Then the following version of Petersson's coefficient formulae holds good: For any $m \neq 0$ there exists a (known) constant $C_m(s) \neq 0$ depending only on m, s, Γ such that

$$(6.3) \quad (f, U_m(\cdot, \bar{s})) = C_m(s) a_m \,.$$

The key idea in proving Theorem 6.1 is to compute the inner product $(U_m(\cdot, s), U_n(\cdot, \bar{t}))$ for $\operatorname{Re} t > \operatorname{Re} s > 1$ and $m \neq 0 \neq n$. One obtains a multiple of the *Kloosterman–Selberg zeta function*

$$(6.4) \quad Z(m,n;s) = \sum_{c \neq 0} \frac{S(m,n;c)}{|c|^{2s}}$$

and some more terms which don't disturb the rest of the argument. Now Weil's estimate [154] of the Kloosterman sum $S(m,n;c)$ proves that (6.4) converges absolutely even for $\operatorname{Re} s > \frac{3}{4}$. Assume now that there exists an eigenvalue λ_1 of $-\tilde{\Delta}$ in $]0, \frac{3}{16}[$ and write $\lambda_1 = s_1(1-s_1)$ with $\frac{3}{4} < s_1 < 1$. The known spectral theory of the operator $-\tilde{\Delta}$ and (6.2), (6.3) imply that one may choose m such that $(U_m(\cdot, s), U_m(\cdot, \bar{t}))$ has a pole at $s = s_1$. This contradicts the holomorphicity of (6.4) for $\operatorname{Re} s > \frac{3}{4}$.

The details of the preceding arguments are elaborated in Goldfeld–Sarnak [38], Kuznetsov [78] and Sarnak [129], [130]. It is even possible to generalize Selberg's result on λ_1 to congruence subgroups of the group Spin$(n,1)$ acting on a hyperbolic space of arbitrary dimension. This was shown by Elstrodt, Grunewald and Mennicke [31]. The same bound for λ_1 was obtained independently for congruence subgroups of $\mathrm{SO}(n,1)$ by Cogdell et al. [11]. The first mentioned paper uses a classical approach in the vein of Selberg whereas the second uses the adelic point of view.

The theory of Hecke operators on $\Gamma_0(N)$ holds in the case of Maaß forms in very much the same way as in the holomorphic case (see Iwaniec [54]). There is also an analogue of the Ramanujan–Petersson conjecture which came up first in representation theory. A representation theoretic generalization of the Ramanujan–Petersson conjecture due to Pyatetskii-Shapiro [= Piatetski-Shapiro] is stated in Gel'fand, Graev and Pyatetskii-Shapiro [37], p. 356 ff. and its relation with the classical version is established. The same interpretation was suggested by Satake [133]. Briefly, the interpretation is that the local constituents of the automorphic representation associated to a classical cusp form should be tempered (see also Langlands [4], Vol. II, p. 208). Since holomorphic cusp forms and Maaß wave forms come up on equal terms in representation theory Satake points out that "one can also make the analogous conjecture for the Fourier coefficients of these [Maaß] forms". The Ramanujan–Petersson conjecture for non-holomorphic cusp forms on the modular group

$$f(z) = \sum_{n\neq 0} a_n y^{\frac{1}{2}} K_{ir}(2\pi|n|y)e^{2\pi inx} \quad (z = x + iy \in \mathbb{H})$$

which are normalized eigenfunctions of the Hecke operators (i.e., $a_1 = 1$) says

$$|a_p| \leq 2 \quad \text{for all primes } p$$

(and similarly for Maaß forms on congruence subgroups). This conjecture is still open. As mentioned above, the Selberg $\frac{1}{4}$-Conjecture is still open as well. Only quite recently could Selberg's $\frac{3}{16}$-bound be improved to $\lambda_1 \geq \frac{171}{784}$ by Luo, Rudnick and Sarnak [89]; for a nice survey see Sarnak [132]. As we understand it today, the Selberg $\frac{1}{4}$-Conjecture is also part of the general Ramanujan type conjectures of representation theory. A striking approach to these general conjectures was suggested by Langlands [82]. This approach is based on the study of L-functions (see e.g. the contributions by Casselman, Langlands, Howe, Piatetski-Shapiro in [4] and see Gelbart, Shahidi [36]). For some recent developments on the Ramanujan conjectures see Burger, Li and Sarnak [8], [9]. For a timely report on various versions of the Ramanujan–Petersson conjecture in the setting of representations of Galois groups associated to modular forms see Taylor [143].

The Ramanujan–Petersson conjecture for cuspidal automorphic representations of $\mathrm{GL}_2(\mathbb{A})$ over a global field of characteristic p was proved by Drinfeld [19]. This work was recently extended to $\mathrm{GL}_r(\mathbb{A})$ by Lafforgue [79], [80].

7 The Petersson scalar product in the theory of modular forms of several variables

In recent years the notion of automorphic form has been vastly generalized. This development was started by Hilbert, Siegel and Maaß and pushed ahead by Borel, Gelfand, Godement, Harish-Chandra, Jacquet, Langlands, Piatetski-Shapiro, Selberg, Weil and many others. An *automorphic form* nowadays is a function from the symmetric space of a real semisimple linear Lie group G to a G-space V which satisfies a certain transformation law for all elements of a discrete cofinite subgroup $\Gamma < G$ (see e.g. Borel [6], the contribution by Borel and Jacquet in [4] and Harish-Chandra [42]). In each case the Haar measure on G induces a Petersson scalar product on the space of cusp forms for G and Γ. This is heavily used in the analysis of general Eisenstein and Poincaré series (see e.g. [42]). In the following section we discuss mainly the case of Siegel modular forms where the theory is, thanks to the work of Siegel, Maaß, Klingen and many others, developed in more detail than in the general case. For simplicity we restrict to the case of the full Siegel modular group.

Let $n \geq 1$ be a natural number. *Siegel's half-space* $\mathbb{H}_n$ of degree n is defined to be the set of all $n \times n$ complex symmetric matrices $Z = X + iY$ such that the imaginary part Y of Z is positive definite. Considering the independent entries z_{jk} $(1 \leq j \leq k \leq n)$ of Z as coordinates we may regard $\mathbb{H}_n$ as a domain in $\mathbb{C}^{n(n+1)/2}$. In what follows we tacitly decompose any $2n$-rowed square matrix M into n-rowed square blocks according to $M = \begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix}$, and we put $J = \begin{pmatrix} 0 & I_n \\ -I_n & 0 \end{pmatrix}$ where I_n is the n-rowed identity matrix. The *symplectic group* of degree n

$$\mathrm{Sp}_n(\mathbb{R}) := \{M \in \mathrm{GL}_{2n}(\mathbb{R}) : M^t JM = J\}$$

acts as a group of biholomorphic automorphisms on $\mathbb{H}_n$ via

$$Z \longmapsto M\langle Z\rangle := (AZ + B)(CZ + D)^{-1} .$$

In fact, Siegel has shown that $\mathrm{Sp}_n(\mathbb{R})/\{\pm I_{2n}\}$ is equal to the full group of biholomorphic automorphisms of $\mathbb{H}_n$. The discrete subgroup

$$\Gamma_n := \mathrm{Sp}_n(\mathbb{Z}) < \mathrm{Sp}_n(\mathbb{R})$$

is known as *Siegel's modular group*. A holomorphic function $f : \mathbb{H}_n \to \mathbb{C}$ is called a *Siegel modular form of weight k* ($k \in \mathbb{Z}$) whenever f satisfies the transformation law

$$(7.1) \quad f(M\langle Z\rangle) = \det(CZ + D)^k f(Z)$$

for all $M = \begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix} \in \Gamma_n$ and $Z \in \mathbb{H}_n$ and is bounded on Siegel's fundamental domain of Γ_n. (The last condition is relevant only for $n = 1$ since it is automatically satisfied for $n \geq 2$ by Koecher's principle [63].) We denote the linear space of Siegel modular forms of weight k and degree n by $\mathcal{M}_{k,n}$. Clearly, $\mathcal{M}_{k,n}$ is different from zero only if kn is even. Historically it is a remarkable coincidence that Siegel introduced his modular forms of degree n in the very same year as Petersson introduced his scalar product.

Every $f \in \mathcal{M}_{k,n}$ admits a Fourier expansion of the form

$$(7.2) \quad f(Z) = \sum_{T \geq 0} a(T) e^{2\pi i \operatorname{tr}(TZ)}$$

where the summation with respect to T extends over all symmetric positive semi-definite half-integral n-rowed matrices. (Recall that a symmetric matrix $T = (t_{jk})$ is called half-integral whenever $t_{kk} \in \mathbb{Z}$ and $2t_{jk} \in \mathbb{Z}$ for all j, k with $j \neq k$.) The form $f \in \mathcal{M}_{k,n}$ is called a *cusp form* if $a(T) = 0$ for all T with $\det T = 0$. We denote the space of cusp forms contained in $\mathcal{M}_{k,n}$ by $\mathcal{C}_{k,n}$.

Petersson's method of forming Poincaré series of parabolic type (3.3) was extended to the case of Siegel modular forms by Maaß ([92], [95]). For T as above and $k \equiv 0 \bmod 2$ define

$$(7.3) \quad G_T(Z) := \sum_M e^{2\pi i \operatorname{tr} TM\langle Z\rangle} \det(CZ + D)^{-k} .$$

The sum extends over a maximal system of matrices $M \in \Gamma_n$ such that the terms of (7.3) are different. By way of example, for $T = 0$ the series (7.3) is the Siegel Eisenstein series

$$(7.4) \quad E(Z) = \sum_M \det(CZ + D)^{-k}$$

where the sum extends over all $M \in \Gamma_{n,0} \setminus \Gamma_n$; $\Gamma_{n,0}$ is the set of all elements of Γ_n of the block form $\begin{pmatrix} * & * \\ 0 & * \end{pmatrix}$. It was shown by Maaß that (7.3) converges normally on $\mathbb{H}_n$ and represents a Siegel modular form of weight k if $k \equiv 0 \bmod 2$ and $k > n + 1 + \operatorname{rank} T$. The laborious convergence proof for (7.3) was notably simplified by Klingen [59].

Now one may extend the notion of Petersson scalar product to Siegel modular forms and prove an analogue of Theorem 3.1. This was done by Maaß ([92], [95]) and in greater generality by Godement ([136]). The space $\mathbb{H}_n$ has a natural $\mathrm{Sp}_n(\mathbb{R})$-invariant measure given by

$$d\omega(Z) = (\det Y)^{-n-1}\, dX\, dY$$

where $dX = \prod_{1\le j\le k\le n} dx_{jk}, dY = \prod_{1\le j\le k\le n} dy_{jk}$. For $f, g \in \mathcal{M}_{k,n}$ the function $f\overline{g}(\det Y)^k$ is Γ_n-invariant, and if besides $fg \in \mathcal{C}_{2k,n}$ the function $f\overline{g}(\det Y)^k$ is bounded on $\mathbb{H}_n$ and hence integrable over a measurable fundamental domain $\mathcal{F}_n$ of Γ_n since $\omega(\mathcal{F}_n)$ is finite. Hence we may define the *Petersson scalar product* of f and g by

$$(7.5)\quad (f,g) := \int_{\mathcal{F}_n} f(Z)\overline{g(Z)}(\det Y)^k d\omega(Z)\ .$$

In particular, (7.5) makes sense if at least one of the functions $f, g \in \mathcal{M}_{k,n}$ is a cusp form.

Theorem 7.1 (Maaß) *Suppose that $f \in \mathcal{C}_{k,n}$ has the Fourier expansion* (7.2)*, let T be a symmetric positive semi-definite half-integral n-rowed matrix, and assume that* $k \equiv 0 \bmod 2, k > n + 1 +$ rank$T$. *Then there exists an explicitly known positive constant $C_{k,n}(T)$ such that*

$$(7.6)\quad (f, G_T) = C_{k,n}(T)a(T) \quad \textit{if } \det T > 0$$

whereas $(f, G_T) = 0$ *if* $\det T = 0$.

Maaß ([96], p. 180) even showed that (7.6) holds analogously in the case rank $T = r$ if f belongs to the space generated by all Poincaré series G_S with rank $S = r$. And he ([92]) proved the following result.

Theorem 7.2 (Maaß) *Suppose that* $k > 2n, k \equiv 0 \bmod 2$. *Then every cusp form $f \in \mathcal{C}_{k,n}$ is a linear combination of the Poincaré series G_T with* rank $T = n$. *The orthogonal complement $\mathcal{N}_{k,n}$ of $\mathcal{C}_{k,n}$ in $\mathcal{M}_{k,n}$ with respect to the Petersson scalar product is generated by the Poincaré series G_T with* rank $T < n$.

The finer structure of $\mathcal{N}_{k,n}$ was already investigated by Maaß ([93], [95]) and beautifully worked out by Klingen ([58]–[62]). A crucial tool here is Siegel's operator $\Phi : \mathcal{M}_{k,n} \to \mathcal{M}_{k,n-1}$ defined by

Defining $\mathcal{M}_{k,0} := \mathcal{C}_{k,0} := \mathbb{C}$ for $k \ge 0$ and $\mathcal{M}_{k,0} := \mathcal{C}_{k,0} := \{0\}$ for $k < 0$ we here include also the case $n = 1$. It is well known that $f \in \mathcal{M}_{k,n}$ is a cusp form if and only if $\Phi f = 0$. The operator $\Phi : \mathcal{M}_{k,n} \to \mathcal{M}_{k,n-1}$ is *surjective* for $k > 2n, k \equiv 0 \bmod 2$. This

$Z \in \mathbb{H}_n$ let Z_r denote the upper left $r \times r$ block: $Z = \binom{Z_r\ *}{*\ \ *}$, and let $f \in \mathcal{C}_{k,r}$. Then Klingen ([58], [62]) defines the *Klingen Eisenstein series* of weight k by

$$E^f_{n,r}(Z) := \sum_{M \in \Delta_{n,r} \backslash \Gamma_n} f((M\langle Z \rangle)_r) \det(CZ + D)^{-k} .$$

These series converge normally on $\mathbb{H}_n$ whenever $f \in \mathcal{C}_{k,r}, n \geq 1, 0 \leq r \leq n$ and $k > n + r + 1$ is even. Besides, under the aforementioned assumptions we have

$$\Phi^{n-r} E^f_{n,r} = f .$$

This is a crucial step in Klingen's proof of

Theorem 7.3 (Maaß) *For* $k > 2n, k \equiv 0 \bmod 2$ *the operator* $\Phi : \mathcal{M}_{k,n} \to \mathcal{M}_{k,n-1}$ *is surjective.*

Following Maaß ([93], [95]) we introduce the spaces

$$\begin{aligned} \mathcal{M}^0_{k,0} &:= \mathcal{M}_{k,0} , \\ \mathcal{M}^r_{k,n} &:= \{ f \in \mathcal{N}_{k,n} : \Phi f \in \mathcal{M}^r_{k,n-1} \} \text{ for } 0 \leq r < n, n \geq 1 , \\ \mathcal{M}^n_{k,n} &:= \mathcal{C}_{k,n} , \end{aligned}$$

and we have the direct decomposition

$$(7.7) \quad \mathcal{M}_{k,n} = \bigoplus_{r=0}^{n} \mathcal{M}^r_{k,n} .$$

Now Klingen ([58], [62]) proved:

Theorem 7.4 (Klingen) *Let* $n \geq 1, 0 \leq r \leq n$ *and* $k > n + r + 1$ *be even. Then*

$$\mathcal{M}^r_{k,n} = \{E^f_{n,r} : f \in \mathcal{C}_{k,r}\} .$$

The proof of the inclusion relation $E^f_{n,r} \in \mathcal{N}_{k,n}$ requires the computation of the pertinent Petersson scalar product. Summarizing the main results, Klingen (loc. cit.) obtained the following representation theorem.

Theorem 7.5 (Klingen) *Let* $n \geq 0$ *and* $k > 2n, k \equiv 0 \bmod 2$. *Then we have the following direct decomposition into metrically characterized subspaces:*

$$\begin{array}{ccccccccc}
\mathcal{M}_{k,n} & = & \mathcal{M}^0_{k,n} & \oplus & \mathcal{M}^1_{k,n} & \oplus \dots \oplus & \mathcal{M}^{n-1}_{k,n} & \oplus & \mathcal{M}^n_{k,n} \\
 & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow & & \\
\mathcal{M}_{k,n-1} & = & \mathcal{M}^0_{k,n-1} & \oplus & \mathcal{M}^1_{k,n-1} & \oplus \dots \oplus & \mathcal{M}^{n-1}_{k,n-1} & & \\
\vdots & & \vdots & & \vdots & & & & \\
 & & \downarrow & & \downarrow & & & & \\
\mathcal{M}_{k,1} & = & \mathcal{M}^0_{k,1} & \oplus & \mathcal{M}^1_{k,1} & & & & \\
 & & \downarrow & & & & & & \\
\mathcal{M}_{k,0} & = & \mathcal{M}^0_{k,0} . & & & & & &
\end{array}$$

Each subspace $\mathcal{M}^r_{k,n}$ *consists of Klingen Eisenstein series* $E^f_{n,r}$ $(f \in \mathcal{C}_{k,r})$. *The vertical arrows indicate that the operator* Φ *maps bijectively here. The inverse* $\psi^r_{k,n}$ *of*

$\Phi^{n-r} : \mathcal{M}^r_{k,n} \to \mathcal{M}^r_{k,r}$ *is given by*

$$\psi^r_{k,n}(f) = E^f_{k,n} \quad (f \in \mathcal{M}^r_{k,r} = \mathcal{C}_{k,r}) \ .$$

Petersson's ideas apply equally well to other types of modular forms in several variables such as the theory of Jacobi forms as can be seen from the standard reference [28]. By way of example, Theorem 7.5 has been proved analogously for Jacobi forms by Dulinski ([20], [21]). Moreover, an analogue of the Eichler–Selberg trace formula for Jacobi forms was proved by Skoruppa and Zagier [142]. – A beautiful application of the Petersson scalar product was given by Kohnen and Skoruppa ([72]; see also [76], [70], [71]): Let $F, G \in \mathcal{C}_{k,2}$, denote by $\varphi_m, \psi_m (m \geq 1)$ the Fourier–Jacobi coefficients of F and G, respectively, and define

$$(7.8) \quad D_{F,G}(s) := \zeta(2s - 2k + 4) \sum_{m=1}^{\infty} (\varphi_m, \psi_m) m^{-s}$$

where (φ_m, ψ_m) denotes the pertinent Petersson scalar product. The series (7.8) converges absolutely for Re $s > k + 1$.

Theorem 7.6 (Kohnen and Skoruppa) *The function $D_{F,G}(s)$ has a meromorphic continuation to $\mathbb{C}$ which is holomorphic except possibly for a simple pole at $s = k$ of residue*

$$\frac{4^k \pi^{k+2}}{(k-2)!} (F, G) \ .$$

Besides, the function

$$R_{F,G}(s) := (2\pi)^{-2s} \Gamma(s) \Gamma(s - k + 2) D_{F,G}(s)$$

satisfies the functional equation

$$R_{F,G}(2k - 2 - s) = R_{F,G}(s) \ .$$

For reasons of space we must refrain from a detailed exposition of the theory of Hecke operators for Siegel modular forms. This theory was initiated by Maaß [93] and Koecher [64] and subsequently extended considerably by Andrianov et al. (see [1], [33]). Suffice it to say that again the self-adjointness of the Hecke operators with respect to the Petersson scalar product is a key tool, and that e.g. (7.7) is a decomposition into subspaces invariant under the Hecke operators.

The Dirichlet series (7.8) is closely related with spinor zeta functions of Hecke eigenforms of weight k and degree two (see [72]). Its generalization to higher degree plays an important role in the proof of the so far best estimates for Fourier coefficients of Siegel cusp forms (see Böcherer and Kohnen [5′] and Breulmann [7′]).

References

[1] Andrianov, A.N.; Zhuravlev, V.G.: Modular forms and Hecke operators. Providence, R.I.: American Mathematical Society, 1995

[2] Artin, E.: Quadratische Körper im Gebiet der höheren Kongruenzen. I, II. Math. Z. **19** (1924), 153–206, 207–246 (= Collected Papers, 1–94. Berlin etc.: Springer 1982)

[3] Atkin, A.O.L.; Lehner, J.: Hecke operators on $\Gamma_0(m)$. Math. Ann. **185** (1970), 134–160

[4] Automorphic forms, representations and L-functions. Proc. Symp. Pure Math. **33**, Part 1,2. Providence, R.I.: American Mathematical Society, 1979
[5] Beardon, A.F.: The geometry of discrete groups. Berlin etc.: Springer, 1983
[5′] Böcherer, S.; Kohnen, W.: Estimates for Fourier coefficients of Siegel cusp forms. Math. Ann. **297** (1993), 499–517
[6] Borel, A.: Introduction to automorphic forms. In: Algebraic groups and discontinuous subgroups. Proc. Symp. Pure Math. **9** (1966), 199–210. Providence, R.I.: American Mathematical Society, 1966
[7] —: Automorphic forms on $\mathrm{SL}_2(\mathbb{R})$. Cambridge: Cambridge University Press, 1997
[7′] Breulmann, S.: Estimates for Fourier coefficients of Siegel cusp forms of degree/genus three. Math. Ann. **310** (1998), 129–160
[8] Burger, M.; Li, J.S.; Sarnak, P.: Ramanujan duals and automorphic spectrum. Bull. Am. Math. Soc., New. Ser. **26** (1992), 253–257
[9] Burger, M.; Sarnak, P.: Ramanujan duals, II. Invent. Math. **106** (1991), 1–11
[10] Cipra, B.A.: On the Niwa-Shintani theta-kernel lifting of modular forms. Nagoya Math. J. **91** (1983), 49–117
[11] Cogdell, J.; Li, J.-S.; Piatetski-Shapiro, I.; Sarnak, P.: Poincaré series for $\mathrm{SO}(n,1)$. Acta Math. **167** (1991), 229–285
[12] Cohen, H.: Trace des opérateurs de Hecke sur $\Gamma_0(N)$. Séminaire de théorie des nombres de Bordeaux 1976–1977, exposé 4.
[12′] Coleman, R.F.; Edixhoven, B.: On the semi-simplicity of the U_p-operator on modular forms. Math. Ann **310** (1998), 119–127
[13] Deligne, P.: Formes modulaires et représentations l-adiques. Séminaire Bourbaki, 21e année (1968/69), no. 355. Lect. Notes Math. **179** (1971), 139–172
[14] —: La conjecture de Weil. Publ. Math., Inst. Hautes Etud. Sci. **43** (1974), 273–307
[15] Deninger, C.: Some analogies between number theory and dynamical systems on foliated spaces. In: Proc. Internat. Congress Math., Berlin, 1998, Vol. I. Doc. Math., J. DMV, Extra Volume ICM 1998, Vol. I
[16] Deuring, M.: The zeta-functions of algebraic curves and varieties. J. Indian Math. Soc. (N.S.) **20** (1956), 89–101 (= Report Internat. Colloq. Zeta-Functions, Tata Institute, Bombay 1956, p. 89–101)
[17] Diamond, F.; Im, J.: Modular forms and modular curves. In: Seminar on Fermat's Last

[30] —: Die Selbergsche Spurformel für kompakte Riemannsche Flächen. Jahresber. Dtsch. Math.-Ver. **83** (1981), 45–77
[31] Elstrodt, J.; Grunewald, F.; Mennicke, J.: Kloosterman sums for Clifford algebras and a lower bound for the positive eigenvalues of the Laplacian for congruence subgroups acting on hyperbolic spaces. Invent. Math. **101** (1990), 641–685
[32] Fischer, J.: An approach to the Selberg trace formula via the Selberg zeta-function. Lect. Notes Math. **1253** (1987). Berlin etc.: Springer, 1987
[33] Freitag, E.: Siegelsche Modulfunktionen. Berlin etc.: Springer, 1983
[34] Freitag, E.; Kiehl, R.: Etale cohomology and the Weil conjecture. Berlin etc.: Springer, 1988
[35] Fricke, R.; Klein, R.: Vorlesungen über die Theorie der automorphen Functionen, Bd. I, II. Leipzig: Teubner, 1897, 1912
[36] Gelbart, S.; Shahidi, F.: Analytic properties of automorphic L-functions. San Diego etc.: Academic Press, 1988
[37] Gel'fand, I.M.; Graev, M.I.; Pyatetskii-Shapiro, I.I.: Representation theory and automorphic functions. Philadelphia–London–Toronto: W.B. Saunders Comp., 1969
[38] Goldfeld, D.; Sarnak, P.: Sums of Kloosterman sums. Invent. Math. **71** (1983), 243–250
[39] Gross, B.; Zagier, D.: Heegner points and derivatives of L-series. Invent. Math. **84** (1986), 225–320

[60] —: On Eisenstein series and some applications. In: Automorphic Forms of Several Variables. Taniguchi Symposium, Katada, 1983. Boston etc.: Birkhäuser, 1984
[61] —: Metrisierungstheorie und Jacobiformen. Abh. Math. Sem. Univ. Hamburg **57** (1987), 165–178
[62] —: Introductory lectures on Siegel modular forms. Cambridge: Cambridge University Press, 1990
[63] Koecher, M.: Zur Theorie der Modulformen n-ten Grades, I. Math. Z. **59** (1954), 399–416
[64] —: Zur Operatorentheorie der Modulformen n-ten Grades. Math. Ann. **130** (1956), 351–385
[65] Kohnen, W.: Beziehungen zwischen Modulformen halbganzen Gewichts und Modulformen ganzen Gewichts. Bonn. Math. Schr. **131** (1981), 104 pp.
[66] —: Newforms of half-integral weight. J. Reine Angew. Math. **333** (1982), 32–72
[67] —: Fourier coefficients of modular forms of half-integral weight. Math. Ann. **271** (1985), 237–268
[68] —: A remark on the Shimura correspondence. Glasgow Math. J. **30** (1988), 285–291
[69] —: Hecke eigenforms of half-integral weight. Math. Ann. **293** (1992), 427–431
[70] —: On characteristic twists of certain Dirichlet series. Mem. Fac. Sci., Kyushu Univ., Ser. A **47** (1993), 103–117
[71] —: Jacobi forms and Siegel modular forms: Recent results and problems. Enseign. Math., II. Ser. **39** (1993), 121–136
[72] Kohnen, W.; Skoruppa, N.-P.: A certain Dirichlet series attached to Siegel modular forms of degree two. Invent. Math. **95** (1989), 541–558
[73] Kohnen, W.; Zagier, D.: Values of L-series of modular forms at the center of the critical strip. Invent. Math. **64** (1981), 175–198
[74] —; —: Modular forms with rational periods. In: Modular Forms, R.A. Rankin (ed.), pp. 197–249. Chichester: Ellis Horwood, 1984
[75] Krieg, A.: Hecke algebras. Mem. Am. Math. Soc. **435** (1990). Providence, R.I.: American Mathematical Society, 1990
[76] —: A Dirichlet series for modular forms of degree n. Acta Arith. **59** (1993), 243–259
[77] Kubota, T.: Elementary theory of Eisenstein series. New York etc.: J. Wiley & Sons, 1973
[78] Kuznetsov, N.V.: Petersson's conjecture for cusp forms of weight zero and Linnik's conjecture. Sums of Kloosterman sums. Mat. Sb., Nov. Ser. **111, (153)**, no. 3 (1980), 334–383 (Russian). English transl.: Math. USSR, Sb. **39**, no. 3 (1981), 299–342
[79] Lafforgue, L.: Chtoucas de Drinfeld et conjecture de Ramanujan–Petersson. Astérisque **243** (1997), 329 p.
[80] —: Chtoucas de Drinfeld et applications. Proc. Internat. Congress Math., Berlin, 1998, Vol. II. Doc. Math., J. DMV, Extra Volume ICM 1998, Vol. II, 563–570
[81] Lang, S.: Introduction to modular forms. Berlin etc.: Springer 1976
[82] Langlands, R.: Problems in the theory of automorphic forms. In: Lectures in Modern Analysis and Applications. Lect. Notes Math. **170** (1970), 18–61
[83] Laumon, G.: Transformation de Fourier, constantes d'équations fonctionnelles et conjecture de Weil. Publ. Math., Inst. Hautes Etud. Sci. **65** (1987), 131–210
[84] Lehner, J.: Discontinuous groups and automorphic functions. Providence, R.I.: American Mathematical Society, 1964
[85] Li, Wen-Ch'ing Winnie: Newforms and functional equations. Math. Ann. **212** (1975), 285–315
[86] —: Diagonalizing modular forms. J. Algebra **99** (1986), 210–236
[87] —: Number theory with applications. Singapore etc.: World Scientific, 1996
[88] Lubotzky, A.: Discrete groups, expanding graphs and invariant measures. Basel etc.: Birkhäuser, 1994
[89] Luo, W.; Rudnick, Z.; Sarnak, P.: On Selberg's eigenvalue conjecture. Geom. Funct. Anal. **5** (1995), 387–401
[90] Maaß, H.: Über eine neue Art von nichtanalytischen automorphen Funktionen und die Bestimmung Dirichletscher Reihen durch Funktionalgleichungen. Math. Ann. **121** (1949), 141–183

[91] —: Automorphe Funktionen von mehreren Veränderlichen und Dirichletsche Reihen. Abh. Math. Semin. Univ. Hamb. **16** (1949), 72–100
[92] —: Über die Darstellung der Modulformen n-ten Grades durch Poincarésche Reihen. Math. Ann. **123** (1951), 125–151
[93] —: Die Primzahlen in der Theorie der Siegelschen Modulfunktionen. Math. Ann. **124** (1951), 87–122
[94] —: Die Differentialgleichungen in der Theorie der elliptischen Modulfunktionen. Math. Ann. **125** (1953), 235–263
[95] —: Lectures on Siegel's modular functions. Bombay: Tata Institute of Fundamental Research, 1954–1955; reissued 1964
[96] —: Lectures on modular functions of one complex variable. Bombay: Tata Institute of Fundamental Research, 1964. Second ed., revised. Berlin etc.: Springer, 1983
[97] Miyake, T.: On automorphic forms on GL_2 and Hecke operators. Ann. Math., II. Ser. **94** (1971), 174–189
[98] —: Modular forms. Berlin etc.: Springer, 1989
[99] Mordell, L.J.: On the representation of numbers as a sum of $2r$ squares. Quart. J. Math., Oxford (2) **48** (1917), 93–104
[100] —: On the representation of a number as a sum of an odd number of squares. Trans. Camb. Philos. Soc. **22** (1919)
[101] Neumann, J.v.: Mathematical foundations of quantum mechanics. Princeton: Princeton University Press, 1955
[102] Petersson, H.: Über die Darstellung natürlicher Zahlen durch definite und indefinite quadratische Formen von $2r$ Variablen. Abh. Math. Semin. Univ. Hamb. **4** (1926), 267–296
[103] —: Über die Anzahl der Gitterpunkte in mehrdimensionalen Ellipsoiden. Abh. Math. Semin. Univ. Hamb. **5** (1927), 116–150
[104] —: Theorie der automorphen Formen beliebiger reeller Dimension und ihre Darstellung durch eine neue Art Poincaréscher Reihen. Math. Ann. **103** (1930), 369–436
[105] —: Über die Entwicklungskoeffizienten der automorphen Formen. Acta Math. **58** (1932), 169–215
[106] —: Neuere Untersuchungen über automorphe Formen komplexer Dimension. Jahresber. Dtsch. Math.-Ver. **47** (1937), 161–176
[107] —: Die linearen Relationen zwischen den ganzen Poincaréschen Reihen von reeller Dimension zur Modulgruppe. Abh. Math. Semin. Univ. Hamb. **12** (1938), 415–472
[108] —: Zur analytischen Theorie der Grenzkreisgruppen I. Math. Ann. **115** (1938), 23–67
[109] —: Zur analytischen Theorie der Grenzkreisgruppen II. Math. Ann. **115** (1938), 175–204
[110] —: Zur analytischen Theorie der Grenzkreisgruppen III. Math. Ann. **115** (1938), 518–572
[111] —: Zur analytischen Theorie der Grenzkreisgruppen IV. Math. Ann. **115** (1938), 670–709
[112] —: Zur analytischen Theorie der Grenzkreisgruppen V. Math. Z. **44** (1939), 127–155
[113] —: Über eine Metrisierung der ganzen Modulformen. Jahresber. Dtsch. Math.-Ver. **49** (1939), 49–75
[114] —: Konstruktion der sämtlichen Lösungen einer Riemannschen Funktionalgleichung durch Dirichletreihen mit Eulerscher Produktentwicklung, I. Math. Ann. **116** (1939), 401–412
[115] —: Konstruktion der sämtlichen Lösungen einer Riemannschen Funktionalgleichung durch Dirichletreihen mit Eulerscher Produktentwicklung, II. Math. Ann. **117** (1940/41), 39–64
[116] —: Konstruktion der sämtlichen Lösungen einer Riemannschen Funktionalgleichung durch Dirichletreihen mit Eulerscher Produktentwicklung, III. Math. Ann. **117** (1940/41), 277–300
[117] —: Über eine Metrisierung der automorphen Formen und die Theorie der Poincaréschen Reihen. Math. Ann. **117** (1940/41), 453–537
[118] —: Einheitliche Begründung der Vollständigkeitssätze für die Poincaréschen Reihen von reeller Dimension bei beliebigen Grenzkreisgruppen von erster Art. Abh. Math. Sem. Univ. Hamb. **14** (1941), 22–60
[119] —: Über die lineare Zerlegung der den ganzen Modulformen von höherer Stufe entsprechenden Dirichletreihen in vollständige Eulersche Produkte. Acta Math. **80** (1948), 191–221

[120] Pizer, A.: Hecke operators for $\Gamma_0(N)$. J. Algebra **83** (1983), 39–64
[121] Poincaré, H.: Œuvres, Tome II. Paris: Gauthier-Villars, 1916
[122] Ramanujan, S.: Collected papers. Cambridge: Cambridge University Press, 1927. Reprinted by Chelsea Publ. Comp., New York, N.Y., 1962
[123] Rankin, R.A.: On horocyclic groups. Proc. London Math. Soc. (3) **4** (1954), 219–234
[124] —: Modular forms and functions. Cambridge: Cambridge University Press, 1977
[125] Roelcke, W.: Über die Wellengleichung bei Grenzkreisgruppen erster Art. Sitzungsber. Heidelb. Akad. Wiss., Math.-Naturwiss. Kl., 4. Abh. (1956)
[126] —: Das Eigenwertproblem der automorphen Formen in der hyperbolischen Ebene, I. Math. Ann. **167** (1966), 292–337. II. Math. Ann. **168** (1967), 261–324
[127] Rohrlich, D.E.: Modular curves, Hecke correspondences, and L-functions. In: Modular Forms and Fermat's Last Theorem, G. Cornell et al. (eds.), pp. 41–100. Berlin etc.: Springer, 1997
[128] Saito, H.: On Eichler's trace formula. J. Math. Soc. Japan **24** (1972), 333–340
[129] Sarnak, P.: The arithmetic and geometry of some hyperbolic three manifolds. Acta Math. **151** (1983), 253–295
[130] —: Additive number theory and Maaß forms. In: Number theory, New York, 1982, Chudnovsky, D.V. et al. (eds.). Lect. Notes Math. **1052** (1984), 286–309. Berlin etc.: Springer, 1984
[131] —: Some applications of modular forms. Cambridge: Cambridge University Press, 1990
[132] —: Selberg's eigenvalue conjecture. Notices Am. Math. Soc. **42** (1995), 1272–1277
[133] Satake, I.: Spherical functions and the Ramanujan conjecture. In: Algebraic groups and discontinuous subgroups. Proc. Symp. Pure Math. **9** (1966), 258–264. Providence, R.I.: American Mathematical Society, 1966
[134] Schmidt, F.K.: Analytische Zahlentheorie in Körpern der Charakteristik p. Math. Z. **33** (1933), 1–32
[135] Selberg, A.: Collected papers, Vol. I. Berlin etc.: Springer, 1989
[136] Séminaire H. Cartan, 10e année (1957/1958): Fonctions automorphes. Vol. 1 (exposés 1 à 10), Vol. 2 (exposés 11 à 20). Paris: Secrétariat mathématique, 11 rue Pierre Curie, 1958
[137] Shimizu, H.: On traces of Hecke operators. J. Fac. Sci. Univ. Tokyo, Sect. I, **10** (1963), 1–19
[138] Shimura, G.: Correspondances modulaires et les fonctions ζ de courbes algébriques. J. Math. Soc. Japan **10** (1958), 1–28
[139] —: Introduction to the arithmetic theory of automorphic functions. Tokyo: Iwanami Shoten, Publishers; Princeton: Princeton University Press, 1971, 1994
[140] —: On modular forms of half-integral weight. Ann. Math., II. Ser. **97** (1973), 440–481
[141] —: On the trace formula for Hecke operators. Acta Math. **132** (1974), 245–281
[142] Skoruppa, N.-P.; Zagier, D.: A trace formula for Jacobi forms. J. Reine Angew. Math **393** (1989), 168–198
[143] Taylor, R.: Representations of Galois groups associated to modular forms. Proc. Internat. Congr. Math., Zürich, 1994, Vol. I, 435–442. Basel: Birkhäuser, 1995
[144] Terras, A.: Harmonic analysis on symmetric spaces and applications, I, II. Berlin etc.: Springer, 1985, 1988
[145] Ueda, M.: On twisting operators and newforms of half-integral weight. Nagoya Math. J. **131** (1993), 135–205. II. Nagoya Math. J. **149** (1998), 117–171
[146] Venkov, A.B.: Spectral theory of automorphic functions, the Selberg zeta-function, and some problems of analytic number theory and mathematical physics. Uspekhi Mat. Nauk **34**, No. 3 (1979), 69–135 (Russian). (English transl.: Russian Math. Surveys **34**, No. 3 (1979), 79–153)
[147] —: Spectral theory of automorphic functions. Trudy Mat. Inst. Steklova **153** (1981) (Russian). (English transl.: Proc. Steklov Inst. Math. 1982, Issue 4)
[148] —: Spectral theory of automorphic functions and its applications. Dordrecht–Boston–London: Kluwer Academic Publishers, 1990
[149] Waldspurger, J.-L.: Correspondance de Shimura. J. Math. Pures Appl., IX. Ser. **59** (1980), 1–133

[150] —: Sur les coefficients de Fourier des formes modulaires de poids demi-entier. J. Math. Pures Appl., IX. Ser. **60** (1981), 375–384
[151] —: Correspondances de Shimura et quaternions. Forum Math. **3** (1991), 219–307
[152] Weil, A.: On the Riemann hypothesis in function-fields. Proc. Natl. Acad. Sci. USA **27** (1941), 345–347 (= Collected Papers, Vol. I, 277–279. Berlin etc.: Springer 1980)
[153] —: Sur les courbes algébriques et les variétés qui s'en déduisent. Paris: Hermann, 1948 (Reprinted in : Courbes algébriques et variétés abéliennes. Paris: Hermann, 1971)
[154] —: On some exponential sums. Proc. Natl. Acad. Sci. USA **34** (1948), 204–207 (= Collected Papers, Vol. I, 386–389. Berlin etc.: Springer, 1980)
[155] —: Numbers of solutions of equations in finite fields. Bull. Am. Math. Soc. **55** (1949), 497–508 (= Collected Papers, Vol. I, 399–410. Berlin etc.: Springer 1980)
[156] —: Über die Bestimmung Dirichletscher Reihen durch Funktionalgleichungen. Math. Ann. **168** (1967), 149–156 (= Collected Papers, Vol. III, 165–172. Berlin etc.: Springer 1980)
[157] Weyl, H.: Die Idee der Riemannschen Fläche. Leipzig: Teubner, first ed. 1913, second ed. 1923, third ed. 1955, fourth ed. 1997
[158] Wohlfahrt, K.: Hans Petersson zum Gedächtnis. Jahresber. Dtsch. Math.-Ver. **96** (1994), 117–129
[159] Zagier, D.: Traces des opérateurs de Hecke. Séminaire Delange–Pisot–Poitou (Théorie des nombres), 17e année (1975/76), no. 23, 12 p. Paris: Secrétariat mathématique, 1976
[160] —: The Eichler-Selberg trace formula on $SL_2(\mathbb{Z})$. In: S. Lang: Introduction to modular forms, p. 44–54. Berlin etc.: Springer, 1976
[161] —: Correction to „The Eichler-Selberg trace formula on $SL_2(\mathbb{Z})$". In: Modular Functions of One Variable, VI. Proc. Internat. Conf., Bonn, 1976. Lect. Notes Math. **627** (1977), 171–173.
[162] —: Modular forms whose coefficients involve zeta-functions of quadratic fields. In: Modular Functions of One Variable, VI. Proc. Internat. Conf., Bonn, 1976. Lect. Notes Math. **627** (1977), 105–169

Jürgen Elstrodt
Mathematisches Institut
Universität Münster
Einsteinstr. 62
D-48149 Münster

Fritz Grunewald
Mathematisches Institut
Universität Düsseldorf
Universitätsstr. 1
D-40225 Düsseldorf

(*Eingegangen: 21.10.1998*)

Jber. d. Dt. Math.-Verein. © 1998 B. G. Teubner Stuttgart
100 (1998) 284–292
Mathematics Subject Classification: 01 A 70

Wolfgang Franz zum Gedächtnis[1]

G. Burde und W. Schwarz, Frankfurt

Wolfgang Franz starb am 26. April 1996 in Frankfurt. Die Trauerfeier fand am 7. Mai 1996 im Frankfurter Hauptfriedhof im kleinen Kreise statt; einer seiner Schüler, Wolfgang Metzler, spielte dabei die Orgel.

Am 30. November 1996 veranstaltete der Fachbereich Mathematik ein Gedenk-Kolloquium für Wolfgang Franz, bei dem B. Eckmann (Zürich) über *Vierdimensionale Mannigfaltigkeiten und Gruppen-Invarianten* und W. Lück (Münster) über *Ein analytischer Zugang zur Reidemeister-Franz-de-Rham-Torsion* sprachen. Die Gedenkfeier wurde durch einen biographischen Bericht aus persönlicher Sicht und Erfahrung von Wolfgang Metzler eingeleitet und mit Mozarts Kegelstatt-Trio um-

[1] Herrn Metzler sind wir für Überlassung von Photographien und persönliche Bemerkungen sehr zu Dank verpflichtet. Ebenso danken wir dem Universitätsarchiv Frankfurt und dem Universitätsarchiv Gießen.

rahmt, bei dem Herr Metzler den Klavierpart, der Prodekan Kersting die Viola und Herr Bussmann die Klarinette spielte.

Wolfgang Franz wurde am 4. Oktober 1905 in Magdeburg als Sohn des Oberstudiendirektors Prof. Dr. phil. Erich Franz und seiner Frau Marie, geb. Grahl, geboren. Nach dem Abitur (in Kiel, 3. März 1924) studierte er dort Mathematik, Physik und Philosophie (mit Auswärtssemestern in Wien, SS 1925, Berlin, SS 1926 und Halle, WS 1928/29). Die bei Ernst Steinitz[2] begonnene Dissertation *„Erweiterungen zweiter Art algebraischer Körper"* wurde durch dessen plötzlichen Tod hinfällig. Von der Persönlichkeit des damaligen Privatdozenten Helmut Hasse[3] beeindruckt, erbat Wolfgang Franz bei diesem ein neues Thema und promovierte Anfang 1930 in Halle mit der Arbeit *„Untersuchungen zum Hilbertschen Irreduzibilitätssatz"*, veröffentlicht

Wolfgang Franz glaubte, sich den Zwängen der Zeit nicht entziehen zu können;[5] um die Chance zu haben, eine Stelle an einer Universität in Deutschland annehmen oder sich habilitieren zu können, sah er für sich keine andere Alternative, als sich einer NS-Organisation anzuschließen. Wie Theodor Schneider glaubte auch Franz, die SA sei das geringste Übel, und er trat am 26. 5. 1934 dem Nachrichtensturm der SA in Marburg bei.

Die Habilitationsschrift wurde im November 1935 in Marburg eingereicht, im März 1936 erfolgte die Ernennung zum Doktor habil. Nach der öffentlichen Probevorlesung im November 1936 wurde Franz am 23. 12. 1936 eine Dozentur für Reine und Angewandte Mathematik zuerkannt.

Trotz seiner Mitgliedschaft in der SA hatte Franz in der NS-Zeit keine guten Karten. Sein Vater war im Vorstand der demokratischen Partei in Kiel und wurde 1933 vom Studiendirektor zum Studienrat degradiert und strafversetzt. Die Kontakte von Franz zu Kurt Hensel, mit dem er regelmäßig musizierte,[6] waren ihm kaum förderlich, ebenso die Kontakte zu Reidemeister, der schon gemaßregelt worden war.[7]

Von WS 35/36 bis WS 36/37 vertrat Franz Herrn Professor Krafft.[8] Seine Vorlesungen in Marburg und Gießen behandelten Analytische Geometrie (und Vektorrechnung), Wahrscheinlichkeitsrechnung, Nichteuklidische Geometrie, Differential- und Integralrechnung für Mathematiker und Naturwissenschaftler, Höhere Mathematik für Mathematiker und Naturwissenschaftler, Projektive Geometrie, Algebraische Funktionenkörper, Darstellende Geometrie, Ballistik. Seine finanziellen Verhältnisse besserten sich; Franz wurde ab 1. 8. 1937 planmäßiger Assistent in Gießen, und ab 1. 4. 1938 Oberassistent, ab 18. 9. 1937 Dozent neuer Ordnung in Gießen.

Anläßlich der Übertragung dieser Stelle schrieb der Dozentenschaftsleiter der Universität Gießen am 8. 12. 1937:

„... Von seiten des Dozentenbundes in Marburg wurde uns Franz zu Anfang dieses Jahres als ein stiller, zurückhaltender ... Charakter geschildert; er ... hat sich ... im SA-Dienst nicht besonders hervorgetan; ich habe den Eindruck, daß diese Zurückhaltung von Franz wesentlich auf seinen völlig vorwiegenden wissenschaftlichen Interessen beruht. Ich halte dies gerade für einen Mathematiker nicht für nachteilig ...“

Diese Stellungnahme könnte darauf hindeuten, daß auch der Dozentenschaftsleiter wissenschaftliche Interessen vor parteipolitische Interessen setzte und damit seiner ihm vom NS-Regime zugedachten Aufgabe dankenswerterweise nicht gerecht wurde.

[5] Man vgl. insbesondere [4] und [5].

[6] Wolfgang Franz war ein sehr guter Pianist. Mit K. Hensel hat er alle Sonaten für Violine und Klavier von W. A. Mozart gespielt ([8]). Beim Festkolloquium aus Anlaß seines 85. Geburtstages am 9. November 1990 spielte er mit Wolfgang Metzler in der Aula der Universität Mozarts Sonate D-Dur zu vier Händen.

[7] Der Spruchkammerbescheid reihte nach dem Kriege Wolfgang Franz in die Gruppe 5 der Entlasteten ein.

[8] 1889–1972. Ab 1927 nb. ao. Prof. in Marburg.

Am 19. 7. 1939 beantragten Georg Aumann[9] und William Threlfall,[10]

„... vom WS 39/40 an als Ersatz für den Dozenten Magnus Herrn Dr. Wolfgang Franz, Oberassistent in Gießen, nach Frankfurt zu ziehen. Lebenslauf und dienstliche [redacted] *seit längerer Zeit unterrichtet und scheint unsere Absicht zu billigen."*

Die Genehmigung des Reichsunterrichtsministers zum Wechsel nach Frankfurt wurde am 12. 9. 1940 gegeben; der Übertritt an die Naturwissenschaftliche Fakultät der Universität Frankfurt erfolgte mit Wirkung vom 1. Oktober 1940. Allerdings hatte sich durch den Ausbruch des Zweiten Weltkrieges die Lage völlig geändert. Am 6. 4. 1940 forderte das Oberkommando der Wehrmacht (Dechiffrierabteilung), daß Franz eine Tätigkeit beim OKW für die Dauer des Krieges aufnehme. Mit Brief vom 11. Mai 1940 widersprach die Universität, indem sie auf den großen Bedarf an Lehrpersonal sowohl in Gießen wie auch in Frankfurt hinwies – erfolglos. Wolfgang Franz wohnte ab 13. 3. 1941 in Berlin-Zehlendorf und war in Frankfurt von Vorlesungspflichten beurlaubt. Trotzdem beantragte die Naturwissenschaftliche Fakultät am 24. 2. 1943 die Ernennung von Franz zum außerplanmäßigen Professor.

„... Bedeutsam sind seine Arbeiten auf dem Gebiete der Topologie, wo er ein neuartiges Grenzgebiet zwischen Topologie und Zahlentheorie erschlossen und in ihm tiefliegende Ergebnisse von weitgehendem Interesse aufgedeckt hat. ..."

Mit Brief des Reichsministers vom 2. 10. 1943 wurde Franz außerplanmäßiger Professor in Frankfurt.

Nachdem Wolfgang Franz das Kriegsende schwer erkrankt in Helmstedt erlebt hatte, konnte er sich am 4. August 1945 beim Kuratorium zur Wiederaufnahme seines Dienstes zurückmelden. Die wissenschaftliche Arbeit fing weitgehend wieder von vorne an, denn der größte Teil seiner Manuskripte war bei Luftangriffen verbrannt.

Das Mathematische Seminar war nach dem Weggang von Threlfall nach Heidelberg personell völlig ungenügend besetzt, zumal auch der Lehrstuhl von G. Aumann vakant war. Die Naturwissenschaftliche Fakultät unter dem Dekanat von Willy Hartner handelte rasch und legte am 4. 11. 1946 eine Dreier-Liste (Max Deuring/Wolfgang Franz/Kurt Reidemeister) vor. Am 22. 11. 1946 forderte das Ministerium weitere Unterlagen an (u. a. einen politischen Meldebogen). Da Deuring einen Ruf nach Hamburg angenommen hatte und Reidemeister erklärte, daß er einem Rufe nach Frankfurt voraussichtlich nicht folgen würde, legte die Fakultät eine neue Liste

In der Laudatio für Franz heißt es:

„... die Arbeiten aus der Topologie beschäftigen sich mit den sogenannten Überdeckungen von Komplexen. Franz hat die Überdeckungen, welche im Kleinen isomorph zu hyperkomplexen Systemen und zu algebraischen Zahlkörpern sind, untersucht und durch invariante Eigenschaften vollständig charakterisiert. Die Untersuchung dieser Überdeckung setzte die gleichzeitige Beherrschung so weit auseinanderliegender Gebiete der Mathematik wie Algebra und Zahlentheorie einerseits und Topologie andererseits voraus, und diese Kenntnisse finden sich selten in einem Mathematiker vereinigt. Die Leistungen von Herrn Franz setzten aber nicht nur Breite des Wissens, sondern auch Erfindungskraft voraus, wie sich an dem eigenartigen Begriff der Torsion zeigt, der sich als so wichtig herausstellte. Mittels der Torsion gelang es ihm nämlich unter Verwendung von Sätzen über Kreiseinheiten und das Verhalten der sogenannten L-Reihen, also tiefliegenden Eigenschaften der algebraischen Zahlentheorie, die n-dimensionalen Linsenräume ($n > 3$) *zu klassifizieren. Dieses Ergebnis beweist die Tragweite der von Franz entwickelten Theorie und zeigt, daß die Überdeckungen tatsächlich eine feinere Charakterisierung von Mannigfaltigkeiten liefern als ihre klassischen Invarianten. Während des Krieges hat Franz die Fixpunktklassen von Abbildungen der Linsenräume bestimmt und damit erstmalig ein Problem dieser Art bei Räumen, die von der Sphäre verschieden sind, gelöst. Zahlreiche ausgezeichnete Referate zeigen den weiten Umfang seiner Kenntnisse und die Sicherheit seines Urteils. So fällt denn Herr Franz in Fachkreisen durch eine besonders durchgefeilte Bildung auf, die ihn befähigt, Vorlesungen auf den verschiedensten Gebieten zu halten. Er ist unter anderem auch ein guter Kenner der Grundlagenforschung und Logistik. Sein Lehrtalent und seine Liebe zum Unterricht sind stark und ursprünglich und lassen ihn im Verein mit seiner vornehmen Gesinnung und seiner hohen geistigen Kultur zum Lehrer überaus geeignet erscheinen. Während seiner Frankfurter Tätigkeit hat Herr Franz sich hervorragend bewährt und sich die vorbehaltlose Anerkennung der Kollegen ebenso wie auch der Studenten errungen."*

Im Jahre 1949 wurde Franz auf den nun schon seit 1946 vakanten Lehrstuhl berufen, als Nachfolger von Schoenflies, Siegel und Threlfall. Nun endlich, im Alter von 44 Jahren, konnte Franz als Ordinarius eine „normale" Tätigkeit als Hochschullehrer ausüben, auch wenn die Lehrbelastung sehr hoch war.

1950, jetzt in gesicherten Verhältnissen, erfolgte die Eheschließung mit Ruth-Ingeborg von Vangerow – seine 2. Ehe. Die Tochter Christine wurde 1963 geboren.

Trotz des Engagements von Franz in Forschung und Lehre hat er auch Selbstverwaltungsaufgaben mit Entschlossenheit angepackt. Er war Dekan der Naturwissenschaftlichen Fakultät 1950/1951 und wiederum 1963/1964. Im Akademischen Jahre 1964/1965 war er Rektor der Universität Frankfurt. Seine Rektoratsrede ist als [15] (Schriftenverzeichnis) veröffentlicht. In dieser behandelte Franz die axiomatische Methode und betonte zum Schluß, *„daß die in dem Werke Euklids niedergelegten Gedanken die Keimzelle einer bis heute reichenden Entwicklung sind, welche die gesamte Mathematik mit allen ihren weitreichenden Ausstrahlungen auf die Nachbarwissenschaften umfaßt."*

[redacted]

turierung der Universitäten in Hessen durch das Hessische Hochschul- und Universitätsgesetz wurde Franz Gründungsdekan des neugeschaffenen Fachbereichs Mathematik für zwei Jahre 1971–1973. Trotz seiner 66 Jahre entwickelte er eine enorme

[redacted]

Auch für Belange der Deutschen Mathematiker-Vereinigung setzte sich Franz engagiert ein. DMV-Mitglied seit 1931, holte er z. B. die Jahrestagung der DMV mit etwa 200 Teilnehmern für September 1963 nach Frankfurt. U. a. gab Borsuk aus Warschau einen Bericht über neuere Ergebnisse und Probleme aus dem Gebiet der anschaulichen Topologie.

In der Mitgliederversammlung der DMV am 6. 9. 63 wurden Wolfgang Franz und Ott-Heinrich Keller aus Halle in das Präsidium der DMV gewählt, der letztere, *obwohl* die Abspaltung einer mathematischen Gesellschaft der DDR von der DMV, von östlicher Seite forciert, bereits 1962 erfolgt war. Am 26. 11. 1966 wurde Franz für ein Jahr zum Vorsitzenden der DMV gewählt, was für ihn eine Reihe neuer Verpflich-

[redacted]

Das wissenschaftliche Interesse von Wolfgang Franz richtete sich nach dem Kriege auf Fixpunkteigenschaften. Er selbst trat dabei zugunsten einer Reihe von Schülern,[11] die er zu Arbeiten auf diesem Gebiete anregte, zurück.

Die Franzsche *Topologie* [12], [16], ein Lehrbuch der Topologie in zwei Bänden in der Sammlung Göschen, das auch in englischer und spanischer Übersetzung vorliegt, ist ein Klassiker geworden. Insbesondere der erste Band, der zwischen 1960 und 1974 vier Auflagen erlebte, war in der Hand fast jedes Mathematikstudenten – anfangs zum Preise von 3,60 DM.

1956 gelang es Franz, Reinhold Baer, der 1933 Deutschland hatte verlassen müssen, nach Frankfurt zu berufen, wo er 23 Semester wirkte. Damit begann der erfolgreiche Aufbau des Mathematischen Seminars zu der Bedeutung, die es schon einmal in den Zwanziger und Dreißiger Jahren gehabt hatte. Als Gründungsdekan des 1971 durch ministerielles Dekret neugegründeten Fachbereichs Mathematik stand Franz diesem die ersten schwierigen beiden Jahre vor und sorgte mit seiner reichen akademischen Erfahrung und mit Weltklugheit für einen vernünftigen Übergang von der alten Naturwissenschaftlichen Fakultät zu den neuen Strukturformen.

Wolfgang Franz gehört zu den Gelehrten, die den Fachbereich Mathematik und die Universität Frankfurt beim Wiederaufbau nach dem Zweiten Weltkrieg entscheidend mitprägten. Kraftvoll und mit Hingabe verhalf er seiner Wissenschaft und seiner Universität, insbesondere dem Mathematischen Seminar, zu Gedeihen und Erfolg.

Wolfgang Franz gehört als tragende Figur zur Geschichte des Fachbereichs Mathematik und des Mathematischen Seminars.

Schriftenverzeichnis von Wolfgang Franz

(zusammengestellt aus Mathematical Reviews und Zentralblatt)

[1] *Zur vorstehenden Arbeit von Herrn A. Korselt,* J. Reine Angew. Math. **164,** 63 (1931)
[2] *Untersuchungen zum Hilbertschen Irreduzibilitätssatz,* Math. Z. **33,** 275–293 (1931)
[3] *Elementarteilertheorie in algebraischen Zahlkörpern,* J. Reine Angew. Math. **171,** 149–161 (1934)
[4] *Die Teilwerte der Weberschen Tau-Funktion,* J. Reine Angew. Math. **173,** 60–64 (1935)
[5] *Überdeckungen topologischer Komplexe mit hyperkomplexen Systemen,* J. Reine Angew. Math. **173,** 174–184 (1935)
[6] *Über die Torsion einer Überdeckung,* J. Reine Angew. Math. **173,** 245–254 (1935)
[7] *Torsionsideale, Torsionsklassen und Torsion,* J. Reine Angew. Math. **176,** 113–124 (1936)
[8] *Abbildungsklassen und Fixpunktklassen dreidimensionaler Linsenräume,* J. Reine Angew. Math. **185,** 65–77 (1943)
[9] *Mindestzahlen von Koinzidenzpunkten,* Wiss. Z. Humboldt-Univ. Berlin. Math.-Nat. Reihe **3,** 439–443 (1954)
[10] *Über die Graphen der Abbildungen einer Mannigfaltigkeit in eine andere,* Archiv Math. **10,** 34–39 (1959)

[11] Man sehe die Liste seiner Doktoranden.

[11] *Der Eulersche Polyedersatz und seine neueren Verallgemeinerungen,* Bull. Soc. math. Grèce **31,** 34–40 (1959)

[12] *Topologie I. Allgemeine Topologie,* Berlin (1960)[12]

[13] *Die gegenwärtige Lage der Mathematik in der Sicht Nicolas Bourbakis,* Math. Naturwiss. Unterricht **14,** 289–292 (1961/62)

[14] *Strutture differenziali e simpliciali della varietà,* Rend. Mat. e Appl. (5) **21,** 312–321 (1962)

[15] *Euklid aus der Sicht der mathematischen und der naturwissenschaftlichen Welt der Gegenwart,* Frankfurter Universitätsreden, Heft **38,** 20 pp. (1965)

[16] *Topologie II. Algebraische Topologie,* 153 pp., Berlin (1965)[13]

[17] *Dreidimensionale und mehrdimensionale Geometrie. Die regulären Polytope,* Sitzungsberichte der Wissenschaftlichen Gesellschaft an der Univ. Frankfurt a. M., Band IX, 67–104 (1970)

[18] *In memoriam Kurt Reidemeister,* gemeinsam mit Friedrich Bachmann & Heinrich Behnke, Math. Annalen **199,** 1–11 (1972)

[19] *Über mathematische Aussagen, die samt ihrer Negation nachweislich unbeweisbar sind. Der Unvollständigkeitssatz von Gödel,* Sitzungsberichte der Wissenschaftlichen Gesellschaft an der Univ. Frankfurt a. M., Band XIV.1, 27 Seiten (1977)

[20] *Torsion und asymmetrische Räume,* Festschrift Wiss. Gesellschaft J. W. Goethe-Univ. Frankfurt/Main, 125–131 (1981)

[21] *Kryptologie, Konstruktion und Entzifferung von Geheimschriften,* Sitzungsberichte der Wissenschaftlichen Gesellschaft an der Univ. Frankfurt a. M., Band XXIV.5, 33 Seiten (1989)

Promovenden bei Wolfgang Franz[14]

Burger, Ewald, *Über Schnittzahlen von Homotopieketten,* Franz/Lorentz, 1947
Belck, Hans Boris, *Reguläre Faktoren von Graphen,* Franz/Moufang, 1949
Weier, Josef, *Fixkurven und Fixzahlen regulärer Deformationen,* Franz/Moufang, 1950
Föllinger, Otto K. H., *Ebene Variationsprobleme mit freien Endpunkten,* Franz/Boerner, 1952
Schirmer, Helga, *Mindestzahlen von Koinzidenzpunkten,* Franz/Moufang, 1954

Schlagbauer, Hartmut, *Koinzidenzen dimensionserniedrigender Abbildungen,* Franz/Bauer, 1963

Thomeier, Siegfried, *Einige Ergebnisse über Homotopiegruppen von Sphären,* Franz/Bauer, 1965

Strantzalos, Polychronis, *Fixpunktfähigkeit abgeschlossener Mengen bei Selbstabbildungen von Mannigfaltigkeiten,* Franz/Bauer, 1967

Metzler, Wolfgang, *Diffeomorphismen zwischen Produkten mit dreidimensionalen Linsenräumen als Faktoren,* Franz/Bauer, 1968

Stöcker, Ralf, *Die Whiteheadgruppe topologischer Räume,* Franz/Burde, 1968

Bauer, Joachim, *Dimensionsdefekte,* Franz/Bauer, 1970

Mrowka, Michael, *Konnektive Faserungen und Reidemeister-Torsion,* Franz/Burde, 1969

Hanusch, Ulrich, *Einfach zusammenhängende Poincaré-Komplexe der Dimension 5,* Franz/Burde, 1971

Literatur

[1] Artzy, R., *Kurt Reidemeister (1893–1971),* Jber. DMV **74,** 96–104 (1972)

[2] Gerhard Burde & Wolfgang Schwarz, *Wolfgang Franz,* Uni-Report Frankfurt, 29. Mai 1996

[3] Karl-Bernhard Gundlach, *100 Jahre Mathematisches Seminar – Ein Rückblick auf die Entwicklung der Mathematik in Marburg,* Festvortrag 25. Oktober 1985

[4] Norbert Schappacher, *Auswirkungen des Nationalsozialismus auf die mathematische Forschung in Deutschland,* Vorläufiges Material zu einer Antrittsvorlesung, Bonn 8. 6. 1988

[5] Norbert Schappacher unter Mitwirkung von Martin Kneser, *Fachverband – Institut – Staat,* in *ein Jahrhundert Mathematik* 1890–1990, Festschrift zum Jubiläum der DMV, Braunschweig/ Wiesbaden 1990, 1–82

[6] Winfried Scharlau, *Mathematische Institute in Deutschland 1800–1845,* Dokumente zur Geschichte der Mathematik Band 5, Braunschweig 1990

[7] Carl Ludwig Siegel, *Zur Geschichte des Frankfurter Mathematischen Seminars,* Vortrag am 13. Juni 1964 im Mathematischen Seminar anläßlich der 50-Jahr-Feier der Johann-Wolfgang-Goethe-Universität Frankfurt. Abgedruckt in Siegel's Gesammelten Werken, Vol. III, 462–474

[8] Friedrich Stummel, *Laudatio Wolfgang Franz,* Festvortrag am 15. Februar 1974 im Mathematischen Seminar der Universität Frankfurt, Preprint

[9] Wolfgang Schwarz & Jürgen Wolfart, Zur Geschichte des Mathematischen Seminars der Universität Frankfurt von 1914 bis 1945, Preprint 1988

Gerhard Burde
Fachbereich Mathematik
Universität Frankfurt
60054 Frankfurt am Main

Wolfgang Schwarz
Fachbereich Mathematik
Universität Frankfurt
60054 Frankfurt am Main

(*Eingegangen 16. 5. 1997, in korr. Form 2. 9. 1997*)

Buchbesprechungen

Mattila, P., Geometry of Sets and Measures in Euclidean Spaces (Cambridge studies in advanced mathematics 44), Cambridge University Press 1995, 343 S., DM 112,–

Das Buch behandelt ein zentrales Teilgebiet der geometrischen Maßtheorie, nämlich die geometrische Struktur von Borelmengen und -maßen auf dem $\mathbb{R}^n$. Einerseits werden direkte Verallgemeinerungen glatter Mannigfaltigkeiten, die rektifizierbaren Mengen und Maße, studiert. Andererseits werden „irreguläre“ Mengen untersucht, die sich von

In Kapitel 7 wird ein einfacher Satz vom Sardschen Typ und der Satz von Rademacher bewiesen, der besagt, daß Lipschitzfunktionen auf dem $\mathbb{R}^n$ fast überall differenzierbar sind. Anschließend werden weitere elementare Eigenschaften von Lipschitzabbildungen untersucht.

Kapitel 8 beschäftigt sich mit ($s-$) Energien und Rieszschen ($s-$) Kapazitäten. Die kapazitäre Dimension von Teilmengen des $\mathbb{R}^n$ wird definiert. Mit Hilfe des Frostmanschen Lemmas wird gezeigt, daß für Borelmengen die kapazitäre Dimension mit der Hausdorff-Dimension übereinstimmt. Als weitere Anwendungen des Frostmanschen Lemmas werden Aussagen über die Dimension von Produktmengen und die Existenz von Teilmengen mit endlichem Hausdorffmaß bewiesen.

Das Verhalten der Hausdorffdimension unter orthogonalen Projektionen steht in Kapitel 9 im Vordergrund. Die Hauptresultate, die im wesentlichen von Marstrand stammen, besagen, daß für eine Borelteilmenge des $\mathbb{R}^n$ mit Hausdorffdimension $s \leq m \in \mathbb{N}$ die Bilder unter fast allen Orthogonalprojektionen auf Unterräume der Dimension m die Hausdorffdimension s haben. Für $s > m$ haben diese Projektionen fast sicher positives m-dimensionales Hausdorffmaß. Als Beweishilfsmittel werden Abschätzungen für die m-Energien und Rieszschen m-Kapazitäten bewiesen. Als Anwendungen werden Dimensionsaussagen für selbstähnliche Mengen und für Bilder unter der Brownschen Bewegung bewiesen.

In Kapitel 10 wird gezeigt, daß eine s-dimensionale Teilmenge des $\mathbb{R}^n$ fast alle $(n-m)$-dimensionalen affinen Teilräume des $\mathbb{R}^n$ in einer Menge der Hausdorffdimension $\max(0, s-m)$ schneidet. Zum Beweis werden ähnliche Aussagen über Rieszsche s-Kapazitäten und Maße mit endlicher s-Energie herangezogen.

Kapitel 11 enthält Aussagen über die lokale Struktur von s-dimensionalen Mengen und Maßen. Es werden konische Dichten eingeführt und Aussagen über die Verteilung von Maßen mit endlicher Energie in kleinen Kugeln gemacht. Schließlich wird das Konzept der Porosität definiert und sein Zusammenhang mit der Hausdorffdimension untersucht.

In Kapitel 12 wird die Fourier-Transformation und ihr Zusammenhang mit Energie, Kapazität und Hausdorffdimension studiert. Die erzielten Ergebnisse werden dazu verwendet, um die Hausdorffdimension von Distanzmengen und Borelschen Unterringen von $\mathbb{R}$ abzuschätzen. Außerdem werden die Fourierdimension und Salem-Mengen, d. h. Mengen bei denen Fourier- und Hausdorffdimensionen übereinstimmen, diskutiert.

Kapitel 13 befaßt sich mit der Frage, wie für zwei Borelmengen A und B in $\mathbb{R}^n$ die Hausdorffdimension des Durchschnitts $A \cap f(B)$ aussieht, wenn f die Gruppe der Isometrien des $\mathbb{R}^n$ durchläuft.

In Kapitel 14 werden Tangentialmaße im Sinn von Preiss eingeführt und einige ihrer grundlegenden Eigenschaften erörtert. Als erste Anwendung wird dann ein Resultat von Marstrand bewiesen, das besagt, daß es für nicht-ganzzahliges s kein Radonmaß μ auf $\mathbb{R}^n$ gibt, für das die Dichte $\lim_{r\to 0} \frac{\mu(B(x,r))}{r^s}$ für μ-fast alle $x \in \mathbb{R}^n$ existiert.

In Kapitel 15 werden m-rektifizierbare Teilmengen des $\mathbb{R}^n$ als natürliche Verallgemeinerung von m-dimensionalen C^1-Mannigfaltigkeiten definiert. m-rektifizierbare Mengen sind Mengen, die sich bis auf eine Nullmenge bezüglich des m-dimensionalen Hausdorffmaßes als abzählbare Vereinigung von m-dimensionalen C^1-Mannigfaltigkeiten darstellen lassen. Es wird eine Charakterisierung der rektifizierbaren Mengen mittels der fast-sicheren Existenz von approximiert-tangentialen Hyperebenen gegeben.

Kapitel 16 enthält weitere Charakterisierungen von (m-)rektifizierbaren Mengen. Unter anderem wird Rektifizierbarkeit mit Hilfe von Tangentialmaßen charakterisiert.

Kapitel 17 befaßt sich mit dem Satz von Preiss, der Rektifizierbarkeit von Maßen durch die Existenz von Dichten charakterisiert. Beim Beweis dieses Satzes spielen Tangentialmaße eine zentrale Rolle. Allerdings wird der Beweis nur als Skizze durchgeführt.

Das Hauptresultat von Kapitel 18 ist der Projektionssatz von Besicovitch und Federer, der die Rektifizierbarkeit von Mengen mit Hilfe von Eigenschaften der Hausdorffmaße ihrer Projektionen charakterisiert.

Kapitel 19 untersucht Zusammenhänge zwischen analytischer Kapazität, hebbaren Mengen für analytische Funktionen und 1-Rektifizierbarkeit in der komplexen Ebene.

Kapitel 20 schließlich studiert natürliche singuläre Integrale und ihre Verbindung zu Rektifizierbarkeitsaussagen.

Mit der Darstellung der modernen Theorie fraktaler und rektifizierbarer Mengen in Buchform füllt der Autor eine Lücke auf dem Buchmarkt. Zwar hat Falconer in zwei Büchern (K. Falconer, The Geometry of Fractal Sets, Cambridge University Press, Cambridge 1985 und Fractal Geometry – Mathematical Foundations and Applications, John Wiley & Sons, Chicester u. a. 1990) die fraktale Geometrie und ihre Anwendungen (ohne Rektifizierbarkeit) behandelt, jedoch geht Mattilas Buch, was die allgemeine mathematische Theorie angeht, über Falconers Ausführungen hinaus. Bei Mattila fehlen allerdings die Anwendungen der fraktalen Theorie weitgehend. Überschneidungen gibt es auch zwischen dem vorliegenden Buch und Kapitel 2 und 3 der Monographie von Federer (H. Federer, Geometric Measure Theory, Springer-Verlag, Berlin u. a. 1969) insbesondere auf dem Gebiet der Rektifizierbarkeit. Mattila berücksichtigt hier aber die neueren Entwicklungen wie etwa die oben erwähnte Charakterisierung rektifizierbarer Maße durch Preiss.

Das vorliegende Buch zeichnet sich durch gute Lesbarkeit und klare Gliederung aus. Auch bei technischen Beweisen behält der Leser so die Übersicht. Im Detail sind die Beweise allerdings manchmal recht knapp gehalten, und manche Einzelschritte erfordern vom Leser angestrengtes Mitdenken. Die Hauptresultate werden durch zahlreiche Kommentare und Hinweise auf die Originalliteratur ergänzt. Das Literaturverzeichnis mit über 500 Titeln deckt dabei einen sehr großen Bereich ab und berücksichtigt auch die neuesten Publikationen. Die meisten der zitierten Artikel werden im Buch wenigstens stichpunktartig eingeordnet. Auch wenn die Lektüre formal nur Grundkenntnisse in der Maß- und Integrationstheorie voraussetzt, ist das Buch doch in erster Linie für fortgeschrittene Studenten und interessierte Mathematikkollegen geeignet. Diesem Leserkreis ist das Buch wegen seiner Eleganz und seiner Aktualität allerdings nachdrücklich zu empfehlen.

Passau S. Graf

Majid, Shahn, Foundations of Quantum Group Theory, Cambridge University Press 1995, 607 S., £ 65.00

Quantengruppen sind etwas über 10 Jahre alt. Sie sind (nach vielen Autoren) ein Synonym für Hopf-Algebren. Diese sind jedoch ca. 50 Jahre alt. Es war natürlich nicht diese Umbenennung, sondern es waren die Zusammenhänge zwischen allgemeinen Hopf-Algebren und verschiedenen Gebieten der theoretischen Physik, die das seit 1985 stark wachsende Interesse an Quantengruppen ausgelöst haben. Inzwischen ist eine Vielzahl von Monographien und Lehrbüchern zu diesem Gebiet der Quantengruppen erschienen. Die Anzahl der Veröffentlichungen dazu übersteigt inzwischen die Zahl 1000 erheblich. Man sollte an dieser Stelle wenigstens einige der wegweisenden Forscher nennen, Drinfeld, Jimbo, Woronowicz, Lusztig, Fadeev, Takhtajan, Reshetikhin, und viele weitere.

Zunächst kurz zur Definition einer Hopf-Algebra. Sie besteht aus einem Vektorraum, der eine Algebrenstruktur und eine Koalgebrenstruktur trägt. Diese beiden Strukturen sind miteinander verträglich. Hinzu kommt ein Endomorphismus, Antipode genannt, der eine mit der Inversenbildung von Gruppen verwandte Eigenschaft erfüllt.

Hopf-Algebren sind schon lange als Funktionenalgebren von affinen algebraischen Gruppen bekannt. In diesem Fall ist die zugehörige Algebrenstruktur immer kommutativ. Sie treten auch als Bialgebren von formalen Gruppen auf. Dann ist ihre Koalgebrenstruktur immer kokommutativ. Hierunter fallen sowohl Gruppenringe als auch universelle Hüllen von Lie-Algebren als besondere Beispiele.

Der wesentliche Schritt zur nichtkommutativen Geometrie, deren Funktionenalgebren nicht mehr kommutativ sein müssen, hätte schon von der klassischen Schule der algebraischen Geometrie durchgeführt werden können. Er ist heute eine der Triebfedern für die neuen mathematischen Untersuchungen von Quantengruppen. Die Hopf-Algebren, die Quantengruppen definieren, sind im allgemeinen weder kommutativ, noch kokommutativ. Je nach Anwendungsbereich tragen sie zusätzliche Strukturen, wie eine Topologie, eine $*$-Struktur, eine Bandstruktur, eine quasitrianguläre Struktur, um einige wichtige solche Strukturen zu nennen. Diese Hopf-Algebren entstehen häufig, aber bei weitem nicht ausschließlich, als Deformationen von universellen Hüllen von Lie-Algebren.

Quantengruppen operieren ähnlich wie Gruppen als Symmetrien auf geeigneten algebraischen Strukturen, z. B. Algebren oder Koalgebren. Ihre Darstellungstheorie (die Kategorie ihrer Moduln oder ihrer Komoduln) hat wie bei Gruppen oder Lie-Algebren die bemerkenswerte Eigenschaft, daß das Tensorprodukt zweier Darstellungen in kanonischer Weise wieder eine Darstellung ist. Viele Begriffe der Gruppentheorie und der Lie-Theorie finden sich in modifizierter Form bei den Quantengruppen wieder.

Der Umfang der in den letzten Jahren entstandenen Literatur verbietet es, das gesamte Gebiet in einer umfassenden Monographie darzustellen. Die zu den Quantengruppen erschienenen Monographien behandeln daher auch weitgehend disjunkte Bereiche. In dem vorliegenden Buch wird anfangs schon klar gesagt, daß kein Anspruch auf eine umfassende Darstellung erhoben wird. In diesem Buch wird vor allem die algebraische Theorie der Hopf-Algebren dargestellt. Das heißt, daß die aus der Funktionalanalysis bekannten Überlegungen zur Topologie auf Funktionenalgebren mit ganz wenigen Ausnahmen nicht weiter verfolgt werden. Das hat den Vorteil, daß die algebraischen Strukturen deutlicher herausgearbeitet werden. Viele Zusammenhänge mit der theoretischen Physik werden ...

den. Es folgen zwei Kapitel über deformierte universelle Einhüllende von Lie-Algebren und in gewissem Sinne dual dazu die Matrix-Bialgebren, die verwandt sind mit den in der Darstellungstheorie von abstrakten Gruppen betrachteten Matrix-Gruppen. Als interessante physikalische Gegenstücke tauchen hier die q-Heisenberg-Algebra, die Quanten-Yang-Baxter-Gleichung und Verbindungen zu Vertex-Modellen in der statistischen Mechanik auf. Im 5. Kapitel werden Hopf-Algebren aus kombinatorischen Problemen heraus konstruiert und die Zusammenhänge mit Quantenirrfahrten dargestellt. Mit dem 6. Kapitel beginnt ein roter Faden, der durch den größten Teil des Buches weiter verfolgt wird, die Konstruktion von semidirekten Produkten und verschränkten Produkten und Verallgemeinerungen davon, z. B. als Erweiterungen mit Faktorensystemen aus der oben erwähnten Kohomologie-Theorie, vielfache semidirekte Produkte sowohl in bezug auf die Algebren- als auch die Koalgebren-Struktur. Es werden hier auch graphische Methoden zum Umgang mit Tensorprodukten eingeführt, die in der modernen Theorie der Hopf-Algebren mit großem Erfolg verwendet worden sind, z. B. die Darstellung von gewissen Abbildungen in Form von Zöpfen. Ein weiterer Abschnitt zeigt Anwendungen auf dem Gebiet der Quantengravitation und den Zusammenhang mit der Quantenmechanik auf. Das Thema der se- [illegible]

rühmten Quantendoppel von Drinfeld fortgesetzt. Die Konstruktion von Drinfeld produziert zu jeder endlichdimensionalen Hopf-Algebra eine weitere endlichdimensionale Hopf-Algebra, die quasitriangulär ist. Im achten Kapitel werden Lie-Bialgebren behandelt, also Lie-Algebren, die auch eine geeignete Lie-Koalgebren-Struktur tragen. Diese haben enge Zusammenhänge mit Poisson-Algebren. In Kapitel 9 wird das Problem diskutiert, inwiefern die Darstellungen (die Kategorie der Moduln oder der Komoduln) eine Hopf-Algebra H bis auf Isomorphie eindeutig bestimmt. Unter der Annahme, daß gewisse Funktoren [illegible] der theoretischen Physik kennen, bevor er sich der Lektüre dieses Buches hingibt. Dann bekommt er allerdings einen guten Eindruck über die Vielfältigkeit dieses modernen Gebiets.

München B. Pareigis

Holschneider, M., Wavelets: An Analysis Tool, Oxford Science Publications, Oxford: Clarendon Press 1995, 423 S., DM 145,–

Wavelettransformationen sind neue High-Tech-Tools im Werkzeugkasten der Si-

tik, Physik und Technik etabliert. Diese Transformationen sind Verallgemeinerungen des von Haar [8] im Jahre 1910 geschaffenen Orthonormalsystem $\psi^H_{j,k}(t) := 2^{j/2}\psi^H(2^j t - k)$, welche dessen Ausgangsfunktion $\psi^H(t) = \mathrm{sgn}(\sin(2\pi t))$ durch Funktionen mit besseren Glattheitseigenschaften ersetzen. So ergeben sich in den Anwendungen schnelle Transformationen, die gute Lokalisation, geringe Komplexität und gutes Approximationsverhalten in sich vereinen.

Das vorliegende Buch bietet einen Zugang, der sich methodisch eng an der Behandlung klassischer Integraltransformationen orientiert. Es bietet sowohl eine Einführung in die Wavelettheorie als auch eine Ergänzung zu den Monographien [2], [4], [13], [15], [16] und gliedert sich in sechs Kapitel. Ausgangspunkt ist die kontinuierliche Wavelettransformation W_ψ:

tion ist dann der Operator der Operator W_ψ bis auf eine Konstante $L^2(\mathbb{R})$-normerhaltend und kann als Isometrie von $L^2(\mathbb{R})$ in $L^2(\mathcal{H}, \frac{dbda}{a^2})$ aufgefaßt werden. Die Inversionsformel (ii) ist im schwachen Sinne zu verstehen. Der Operator M_ψ ist Hilbertraumadjungierter zu W_ψ. Darüberhinaus ist Range (W_ψ) in $L^2(\mathcal{H}, \frac{dbda}{a^2})$ mit dessen Skalarprodukt ein reproduzierender Kernhilbertraum und die Wavelettransformierte der Tochterfunktionen $K(a, b, a', b') := \text{const} \cdot W_\psi(\psi_{a', b'})(a, b)$ sein reproduzierender Kern.

Kapitel 2 beschäftigt sich mit Diskretisierungen der Zeit-Frequenz-Ebene $\mathcal{H}$. Hier werden zunächst Interpolation und partielle Rekonstruktion untersucht – insbesondere $L^p(\mathbb{R})$- und punktweise Konvergenz der letzteren, sowie ein kontinuierliches Wavelet-Gibbs-Phenomen. Als Anwendung ergibt sich eine Klasse von Calderon-Zygmund-Operatoren. Poissonsche Summationsformel und Shannonscher Abtastsatz werden behandelt. Als Anwendung wird die Wavelettransformation auf dem Torus Π etabliert. Schließlich wird der zentralen Frage nachgegangen, unter welchen Bedingungen reguläre Diskretisierungen der Wavelettransformation zu stabilen Rekonstruktionen führen. Genauer, welche Bedingungen an die Mutterfunktion ψ gestellt werden müssen, damit für Diskretisierungen $(a_j, b_{j,k}) \in \mathcal{H}$ der Form $a_j := a_0^{-j}$ und $b_{j,k} := k\, b_0\, a_0^{-j}$ die Funktionenfamilie $\psi_{j,k}(t) := a_0^{j/2}\, \psi_{a_j, b_{j,k}}(t)$ einen Rahmen nach Duffin-Schaeffer [5] bildet. In diesem Fall gilt für beliebiges $s \in L^2(\mathbb{R})$ mit den Waveletkoeffizienten $c_{j,k} := (W_\psi\, s)(a_j, b_{j,k})$:

$$\text{(iii)} \qquad s(t) = \sum_{j \in \mathbb{Z}} \sum_{k \in \mathbb{Z}} c_{j,k}\, \psi_{j,k}(t) \; + \; Rs\,(t)$$

– ein diskretes Analogon zur Inversionsformel (ii), wobei der Rekonstruktionsfehler Rs von den Rahmenparametern abhängt. Für den Fall einer orthonormalen Basis verschwindet das Fehlerglied. In der Praxis und im folgenden wird der Fall $a_0 = 2$ und $b_0 = 1$ betrachtet. Als Antwort auf die Frage der stabilen Rekonstruktion werden die bekannten Kriterien von Daubechies [4] und Heil-Walnut [10] vorgestellt. Auch auf irreguläre Diskretisierungen wird kurz eingegangen. Abschluß des Kapitels bildet ein Wavelet-Funktionalkalkül für Operatoren.

In *Kapitel 3* wird das für Anwendungen äußerst wichtige Konzept der Multiresolutionsanalyse (MRA) behandelt, welches auf Mallat [14] und Meyer [16] zurückgeht. Darunter versteht man eine Folge $(V_j)_{j \in \mathbb{Z}}$ von abgeschlossenen Unterräumen von $L^2(\mathbb{R})$ mit

$$\text{(iv)} \qquad \begin{array}{l} V_{j-1} \subset V_j; \quad \overline{\bigcup_{j \in \mathbb{Z}} V_j} = L^2(\mathbb{R}); \quad \bigcap_{j \in \mathbb{Z}} V_j = \{0\}; \\ f \in V_{j-1} \Leftrightarrow f(2\cdot) \in V_j; \quad f \in V_0 \Leftrightarrow f(\cdot - k) \in V_0; \\ \exists\, \varphi \in V_0 : \{\varphi(\cdot - k) : k \in \mathbb{Z}\} \quad \text{Rieszbasis von } V_0. \end{array}$$

Die Rieszbasis kann durch eine Orthonormalbasis ersetzt werden, was im folgenden immer der Fall sein soll. Hauptanwendung ist die Konstruktion von Orthonormalbasen $(\psi_{j,k})$ von ganz $L^2(\mathbb{R})$. Auf folgende Aspekte wird eingegangen: Shiftinvariante Funktionensysteme, Sampling, Quadraturspiegelfilter (QMF), Regularität und Wavelets mit kompaktem Träger, sowie als Verallgemeinerung Waveletbiorthogonalsysteme. Grundidee: $V_0 \subset V_1$ liefert die Skalierungsgleichung $\varphi(t) = \sum_{k \in \mathbb{Z}} h_k \varphi(2t - k)$. Durch „Umklappen" $g_k := (-1)^k h_{1-k}$ der Skalierungskoeffizienten gewinnt man die Mutterfunktion $\psi(t) := \sum_{k \in \mathbb{Z}} g_k \varphi(2t - k)$ einer Orthonormalbasis $(\psi_{j,k})$. Ein klassisches Beispiel ist das bereits erwähnte Haarsystem, welches aus Räume V_j stückweise konstanter Funktionen entsteht und hier im Rahmen der Box-Splines behandelt wird. Die geschilderte Vorgehensweise ist Grundlage moderner Datenkompressionsalgorithmen, welche auf den Filterfolgen (h_k), (g_k) und 2er-Dilationen entsprechenden Up- und Downsampling-Operatoren beruhen. Zusätzliches Thresholding der Waveletkoeffizienten und Quellenkodierung führen zu hervorragenden Ergebnissen bei Bildkompression ([18], [19], [20]). Für die Praxis ist entscheidend, mit diskreten Signalen endlicher Länge zu arbeiten, welche sich durch oben angedeuteten Faltungs- und Samplingoperationen nicht vergrößern darf. Im vorliegenden Abschnitt ist diesem sonst oft vernachlässigten Aspekt durch Übertragung des MRA-Konzepts auf $L^2(\mathbb{Z})$, $L^2(\Pi)$ und $L^2(\mathbb{Z}/2^M\mathbb{Z})$ Rechnung getragen. Zum Entwurf von (h_k) und (g_k) verwendet man Quadraturspiegelfilter (Quadrature Mirror Filters, QMF). Ein derartiger Filter H ist eine periodische $L^2(0, 2\pi)$-Funktion mit l_1-Fourier-Koeffizienten, welche der Rekonstruktionsbedingung $|H(\omega)|^2 + |H(\omega+\pi)|^2 = 1$ genügt und die Normierung $H(0) = 1$ hat. Diese Filter – von Croisier, Esteban und Galland [3] eingeführt – wurden in der Elektrotechnik lange vor Etablierung der MRA benutzt, entwickelten ihre volle Durchschlagskraft aber erst in Verbindung mit den Wavelets. Gezeigt wird, daß unter geeigneten Voraussetzungen (Cohen-Kriterium) die Konzepte MRA und QMF äquivalent sind. Einerseits nämlich ist das Symbol $H = \sum_{k\in\mathbb{Z}} h_k e^{ik\cdot}$ einer Skalierungsgleichung zu einer MRA ein QMF. Andererseits liefert Fouriertransformation und Iteration der Gleichung den Bona-Fide-Ansatz $\hat{\varphi}(\omega) = \prod_{n=1}^{\infty} H(2^{-n}\omega)$, welcher unter den richtigen Annahmen zu einer MRA führt. Als Beispiel dienen die bekannten Daubechies-Filter. Schließlich leuchtet der Autor den gruppentheoretischen Hintergrund der QMF aus (Loop Gruppen Unitärer Operatoren). Den Abschluß dieses Kapitels bildet ein Abschnitt über Filternbänke.

Kapitel 4 beinhaltet Anwendungen der Wavelettransformation in der fraktalen Analysis. Es wird gezeigt, daß man das Lokalverhalten einer Funktion aus dem seiner Wavelettransformierten ablesen kann und umgekehrt. Beispielsweise gilt $s(t_0+h) - s(t_0) = O(h^\gamma)$ sofern nur $W_\varphi s(a, t_0 + b) = O(a^{\gamma+\frac{1}{2}}) + a^{\frac{1}{2}}\, O\left(\frac{b^\gamma}{\log b}\right)$ für $a, b \to 0$ und $W_\varphi s(a,b) = O(a^{\gamma+\frac{1}{2}})$ gleichmäßig. Ähnliche Resultate werden für Differenzierbarkeit und lokale Wachstumskriterien gezeigt. Globale Zugehörigkeit einer Funktion zu bestimmten Klassen, wie Zygmund-, Sobolev- und Hölderklassen wird über asymptotisches Verhalten der Wavelettransformierten charakterisiert. Die Theorie wird zunächst verwendet, um bekannte Ergebnisse über klassische fraktale Funktionen wie die Weierstrassfunktion und die Brownschen Pfade herzuleiten. Ein schlagendes Beispiel für die Leistungsfähigkeit der Wavelettransformation bei der lokalen Analyse ist die Riemann-Funktion $R(t) := \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} \sin(n^2\pi t)$, mit der sich ein Großteil des Kapitels beschäftigt. Nach einer auf Riemann zurückgehenden Vermutung [21] sollte diese Funktion stetig, aber nirgends differenzierbar sein. Im Jahre 1916 gelang Hardy [9] ein Beweis der Nicht-Differenzierbarkeit in irrationalen Punkten. Überraschend bewies 1970 Gerver [6] die Differenzierbarkeit in Punkten der Form $t = \frac{2P+1}{2Q+1}$, $P, Q \in \mathbb{Z}$. Weiterentwicklungen dieses Beweises erfolgten durch Quefelec [17] und Itatsu [12]. Holschneider und Tschamitschian [11] gelang mit Hilfe der Theorie der Wavelets eine genaue lokale Beschreibung von R, deren Grundlage folgende Verbindung von R zu Jacobi's Thetafunktion $\theta(z) := \sum_{n\in\mathbb{Z}} \exp(i\pi n^2 z)$ ist: $W_\psi R(a,b) = \frac{\pi}{2} a^{3/2}(\theta(b+ia) - 1)$ mit $\psi(t) := (1-it)^{-2}$. Weiter benutzten sie für ihre Analyse eine Untergruppe der modularen Gruppe auf der oberen komplexen Halbebene. Der Rest des

Für die Gruppe der affinen Abbildungen $g_{a,b}(x) := ax + b$ mit Darstellung $U_{g_{a,b}}\varphi = \varphi_{a,b}$ ergibt sich (i). Es sei ferner bemerkt, daß auch die gefensterte Fouriertransformation über die Weyl-Heisenberg-Gruppe enthalten ist. Folgende Ergebnisse aus Kapitel 1 werden in diesem Kontext verallgemeinert: L^2-Normerhaltung (Schursches Lemma), Inversionsformel und reproduzierender Kern. Weitere Themen sind Verallgemeinerung der Poissonformel, Diskretisierungen für abelsche Gruppen und QMF. Schließlich wird auf die Wavelettransformation für $\mathbb{R}^2$-Signale und ihren Zusammenhang mit der Radontransformation eingegangen.

Das *letzte Kapitel* beschäftigt sich noch einmal mit Anwendungen der Wavelettransformation auf Funktionenräume. Gegenstand ist die Paley-Littewood-Theorie, Besovräume, Singuläre Integrale und reguläre Calderon-Zygmund-Operatoren.

Das Buch bietet eine sehr gute und saubere Einführung in die Wavelettheorie für Nicht-Spezialisten, hat aber wegen der Aufnahme vieler neuerer Entwicklungen und seiner großen Vielfalt ebenfalls dem „Waveleter" eine Menge zu bieten. Viele klassische Resultate werden in neuer Sicht präsentiert. Leider erschwert das Fehlen jeglicher Quellenangaben zum Text der Kapitel das Nachlesen in Originalarbeiten. Die Monographie besticht aber konzeptionell wie auch durch ihre intuitive Darstellung und ist daher äußerst empfehlenswert.

Literatur

[1] Calderon, A.: Intermediate spaces and interpolation, the complex method. Studia Math. **24** (1964) 113–190
[2] Chui, C.: An Introduction to Wavelets. Academic Press, New York 1992
[3] Croisier, A.; Esteban, D.; Galland, C.: Perfect channel splitting by use of interpolation-decimation tree decomposition techniques. Int. Conf. Inf. Sci., Patras 1976
[4] Daubechies, I.: Ten Lectures on Wavelets. CBMS-NSF Regional Conference Series in Applied Mathematics, Society for Industrial and Applied Mathematics, Philadelphia, Pennsylvania 1992
[5] Duffin, R.; Schaeffer, A.: A class of non-harmonic Fourier series. Trans. Am. Math. Soc. **72** (1952) 341–366
[6] Gerver, J.: The differentiability of the Riemann function at certain rational multiples of π. Amer. Journal of Math. **92** (1970) 33–41
[7] Grossman, A.; Morlet, J.: Decomposition of Hardy functions into square integrable wavelets of constant shape. Siam Journal Math. Anal. **15** (1984) 723–736
[8] Haar, A.: Über eine Klasse von orthogonalen Funktionensystemen. Math. Annalen **69** (1910) 361–371
[9] Hardy, G. H.: Weierstrass's non-differentiable Function. Trans. Amer. Math. Soc. **17** (1916) 301–325
[10] Heil, C.; Walnut, D.: Continuous and discrete wavelet transforms. Siam Review **31** (1989) 628–666
[11] Holschneider, M.; Tchamitschian, Ph.: Pointwise regularity of Riemann's nowhere differentiable functions. Inventiones Mathematicae **105** (1991) 157–175
[12] Itatsu, S.: The differentiability the Riemann function. Proc. Japan Acad. Ser. A, Math. Sci. **57** (1981) 492–495
[13] Louis, A.; Maaß, P.; Rieder, A.: Wavelets. Teubner, Stuttgart 1994
[14] Mallat, S.: Multiresolution approximations and wavelet orthonormal bases of $L^2(\mathbb{R})$. Trans. Amer. Math. Soc. **315** (1989) 69–88
[15] Meyer, Y.: Wavelets and Operators. Cambridge Studies in Advanced Mathematics **37**, Cambridge University Press, Cambridge 1992
[16] Meyer, Y.: Wavelets – Algorithms & Applications. Society for Industrial and Applied Mathematics, Philadelphia 1993
[17] Quefellec, M.: Deravibilite de certains sommes de Fourier lacunaires. C.R. Sean. Acad. Sci **273**, Ser. A (1971) 291–293

[18] Said, A.; Pearlman, W.: Image compression using spatial orientation tree. IEEE Int. Symp. on Circuits and Systems, Chicago 1993, 279–282
[19] Shapiro, J.: Embedded image coding using zerotrees of wavelet coefficients. IEEE Trans. on Signal Processing **41**/12 (1993) 3445–3462
[20] Tian, J.; Wells, Jr., R. O.: A lossy image codec based on index coding. Procedings of the IEEE Data Compression Conference, Snowbird, Utah, James A. Storer and Martin Cohn (eds.), IEEE Computer Society Press, 1996
[21] Weierstrass, K.: Über continuierliche Functionen eines reellen Arguments, die für keinen Wert des letzteren einen bestimmten Differentialquotienten besitzen. In: Weierstrass, K.: Mathematische Werke. Berlin, Mayer & Müller 1895

Bremen P. Singer

Groemer, H., Geometric Applications of Fourier Series and Spherical Harmonics, Cambridge University Press 1996, 329 S., £40.–

Die Anwendung von Fourier-Reihen und Entwicklungen nach Kugelfunktionen auf geometrische Probleme beginnt 1901 mit Hurwitz. Durch Blaschkes „Kreis und Kugel" (1916) wurde diese Methode weiter bekannt. Als einfaches Beispiel betrachten wir einen Beweis der isoperimetrischen Ungleichung in der Ebene, welcher die Stützfunktion verwendet. Die Stützfunktion h eines ebenen konvexen Bereiches gibt den Abstand der Tangenten bzw. Stützgeraden vom Ursprung als Funktion des Tangentenwinkels α an. Für den Flächeninhalt gilt $F = \frac{1}{2}\int_0^{2\pi}(h(\alpha)^2 - h'(a)^2)d\alpha$ und für die Länge der Randkurve $L = \int_0^{2\pi} h(\alpha)d\alpha$. Sind a_k, b_k die Fourierkoeffizienten von h, so ergibt sich hieraus mit den Parsevalschen Gleichungen

$$L = 2\pi a_0, \quad F = \pi {a_0}^2 - \frac{\pi}{2}\sum_{k=2}^{\infty}(k^2-1)({a_k}^2 + {b_k}^2).$$

Daraus folgt sofort die isoperimetrische Ungleichung

$$L^2 - 4\pi F = 2\pi^2 \sum_{k=2}^{\infty}(k^2-1)({a_k}^2 + {b_k}^2) \geq 0,$$

in der Gleichheit genau dann eintritt, wenn alle a_k, b_k für $k \geq 2$ verschwinden, woraus sich ergibt, daß h Stützfunktion eines Kreises ist. Die isoperimetrische Ungleichung ist oft

Fenchel oder R. Schneider. Ausführlicher ist der Abschnitt über Metriken in der Menge der konvexen Körper. Die Äquivalenz von Hausdorff- und L^2-Metrik wird vollständig bewiesen.

Im *dritten* Kapitel werden zunächst die benötigten Tatsachen über Fourier-Reihen zusammengestellt. Dazu gehören nicht die vielfältigen Aussagen über Konvergenz, die ohnehin keine bekannten Analoga bei den Entwicklungen nach Kugelfunktionen haben. Die Eigenschaften von Kugelfunktionen auf S^{d-1} und von Reihenentwicklungen nach diesen werden mit vollständigen Beweisen dargelegt, so daß dieses Kapitel auch eine gute Einführung in diese Theorie ist, die sich von anderen Darstellungen, wie z. B. der von C. Müller (Springer Lecture Notes 17), wesentlich unterscheidet. Die Dimension ist allerdings durchweg beliebig. Der klassische Fall der Kugelflächenfunktionen ($d = 3$) wird erst am Ende kurz beschrieben.

Das *vierte* Kapitel bringt Anwendungen der Fourier-Reihen auf Probleme der ebenen Geometrie, wie dies an einem Beispiel eingangs geschildert wurde. Dieses Kapitel ist leicht lesbar und gewissermaßen eine Einführung in das *fünfte* Kapitel, das Anwendungen der Kugelfunktionen auf die Geometrie des d-dimensionalen euklidischen Raumes enthält. Hier wird es nun ernst. Es werden tiefliegende Resultate zugänglich gemacht. Ungleichungen werden oft in der Form gebracht, die eine Stabilitätsaussage erlaubt. Dies hat allerdings manchmal zur Folge, daß die Ungleichungen kompliziert werden und der Aufwand beträchtlich ist. Diese Stabilitätsaussagen sind meist Ergebnisse der letzten Jahre. Der Autor hat auf diesem Gebiet selbst viel gearbeitet. Ein anderes Gebiet, auf dem Kugelfunktionen das geeignete Hilfsmittel bilden, ist die Untersuchung von Rotoren. Ein konvexer Körper K in einem Polytop P heißt Rotor, wenn er sich innerhalb P beliebig drehen läßt und dabei stets alle $(d-1)$-dimensionalen Seitenflächen von P berührt. Körper konstanter Breite in einem Würfel sind Beispiele, und zwar sind sie dadurch gekennzeichnet, daß die Entwicklungen ihrer Stützfunktionen nur Kugelfunktionen ungerader Ordnung enthalten. Rotoren in einem (regulären) Oktaeder des E^3 haben eine Stützfunktion der Form

$$h = r + Q_1 + Q_5,$$

wo r der Inkugelradius des Oktaeders und Q_i Kugelfunktion der Ordnung i ist. Jedes Oktaeder läßt sich so in ein Tetraeder legen, daß 4 seiner Seiten Teile der Tetraederseiten sind. Rotoren des Oktaeders sind daher auch Rotoren des Tetraeders. Daß es aber noch andere gibt, folgt daraus, daß deren Stützfunktionen die Form

$$h = r + Q_1 + Q_2 + Q_5$$

haben. Auf diesem Wege lassen sich, wenn auch mit Mühe, alle Paare Rotor-Polytop im E^d angeben.

Es werden viele weitere Ergebnisse zusammengetragen und ausführlich dargestellt. Ergänzt werden diese durch Bemerkungen zur Geschichte, zur Literatur und zu weiterführenden Untersuchungen. Diese Bemerkungen finden sich am Ende eines jeden der etwa 30 Abschnitte, und zusammen mit dem ausgezeichneten Index machen sie das Buch zu einem wertvollen Nachschlagewerk. Viele Hinweise auf noch nicht erschienene Arbeiten zeigen, an welchen Problemen gegenwärtig gearbeitet wird.

Die Beweise sind sorgfältig, und in der Regel erhält der Leser auch bei routinemäßigen Schlüssen Hilfestellung. Es heißt nicht wie so oft „der allgemeine Fall ergibt sich durch Approximation mit glatten Körpern“. Standardkenntnisse über Maß und Integration werden vorausgesetzt. Manche älteren Beweise wurden modifiziert, um unnötige oder unausgesprochene Glattheitsvoraussetzungen zu vermeiden.

Darmstadt E. Heil

Knapp, A. W., Lie Groups Beyond an Introduction (Progress in Math. 140), Basel u. a.: Birkhäuser Verlag 1996, 604 + xvi pages, DM 94,–

Die Theorie der Lie-Gruppen und Lie-Algebren ist ein weites Gebiet, das einerseits in vielen Bereichen der Mathematik und der mathematischen Physik Anwendungen findet und andererseits aus vielen verschiedenen Bereichen Resultate heranzieht, um sich selbst zu entwickeln. Dies wird deutlich, wenn man sich die Entwicklung des Konzepts einer Lie-Gruppe vor Augen führt, das bei Sophus Lie zunächst nur das Konzept einer lokalen Transformationsgruppe auf einer offenen Teilmenge des $\mathbb{R}^n$ war. Der Begriff der topologischen Gruppe, so wie wir ihn heute kennen, wurde erst in den 20er Jahren von Schreier entwickelt und war das Fundament für die Konzeption einer globalen Lie-Gruppe, die sich in den beiden folgenden Jahrzehnten konkretisierte, und in Chevalleys Buch von 1946 ihre erste systematische Darstellung findet.

Das Ziel des vorliegenden Lehrbuches ist es, einem Leser, der über Grundkenntnisse in der elementaren Lieschen Theorie verfügt (z. B. im Umfang von Chap. IV in Chevalleys Buch), die strukturtheoretischen und darstellungstheoretischen Kenntnisse zu vermitteln, die in der Theorie der unendlichdimensionalen (unitären) Darstellungen benötigt werden. Hierzu werden in mehreren Abschnitten klare Schnittstellen beschrieben, in denen der Leser erfährt, was er z. B. über differenzierbare Mannigfaltigkeiten, Integration von Vektorfeldern, Überlagerungen etc. wissen sollte. Ein Charakteristikum des vorliegenden Buches ist, daß es, im Gegensatz zu den traditionellen, mehr differentialgeometrischen Zugängen zu Lie-Gruppen, den Zugang über die Matrizengruppen als Prototypen von Lie-Gruppen in den Vordergrund stellt. Zum Beispiel werden manche Beweise, die man an einer späteren Stelle des Buches in einer allgemeineren Form findet, zuerst für ein Beispiel vollständig durchgeführt. Hierdurch wird der Leser schon recht früh orientiert und kann sich so leichter in den abstrakten Sätzen zurechtfinden, also die Brücke von der konkreten zur abstrakten Theorie schlagen. Die Orientierung des Zugangs an den Matrizengruppen hat natürlich den Vorteil, daß es hierdurch gelingt, den benötigten differentialgeometrischen Hintergrund minimal zu halten und man sich Beispielen bedient, die Studenten schon recht früh kennenlernen.

Das Material des Buches ist aus Vorlesungen entstanden, die der Autor in den Jahren 1971–1995 an der Cornell University bzw. SUNY Stony Brook gehalten hat. Das Buch gliedert sich in acht Kapitel und drei Anhänge über multilineare Algebra, Lie's dritten Satz und Tabellen zu den einfachen Lie-Algebren. Jedes der Kapitel ist mit einem ausführlichen Abstract versehen, der den Leser darüber orientiert, was er in diesem Kapitel lernen kann. Der letzte Abschnitt jedes Kapitels besteht aus Übungsaufgaben, die sowohl den Leser an speziellere Fakten heranführen, als auch einzelne Beispiele bzw. Beispielklassen ausführlich diskutieren. Diese Aufgaben sind eine reine Ergänzung, und im Text wird nicht auf sie verwiesen. Am Ende des Buches findet man einen Abschnitt mit Hinweisen bzw. Lösungen zu den Aufgaben. Eine Spezialität des Buches sind die sehr sorgfältig recherchierten historischen Anmerkungen zu den einzelnen Kapiteln, die am Ende des Buches gesammelt sind. Sie geben einen sehr lebhaften Einblick in die historische Entwicklung der Theorie.

Kapitel I enthält eine Einführung in die allgemeine Theorie der Lie-Algebren (Sätze von Engel, Lie, Cartan-Kriterien, $\mathfrak{sl}(2)$-Darstellungstheorie), eine erste Annäherung an allgemeine Lie-Gruppen sowie eine Diskussion der klassischen halbeinfachen Gruppen. Das Kapitel II behandelt komplexe halbeinfache Lie-Algebren einschließlich der Klassifikation. Kapitel III diskutiert die einhüllende Algebra einer Lie-Algebra und enthält als zentrales Resultat den Satz von Poincaré-Birkhoff-Witt.

Nachdem die ersten Kapitel eher von algebraischer Natur sind, werden in Kapitel IV kompakte Lie-Gruppen behandelt. Im Zentrum stehen der Peter-Weyl-Satz (als Plancherelsatz für $L^2(G)$), maximale Tori und die Weyl-Gruppe. Die Existenz des Haarschen

Maßes auf einer allgemeinen kompakten Gruppe wird hier nicht bewiesen, kann aber für die Lie-Gruppen aus Kapitel VIII gezogen werden.

In Kapitel V wird nun die endlichdimensionale Darstellungstheorie komplexer halbeinfacher Lie-Algebren diskutiert (Weylsche Charakterformel, Harish-Chandra-Isomorphismus, Satz vom höchsten Gewicht), wobei im letzten Abschnitt die Brücke zu den kompakten Gruppen geschlagen wird.

Kapitel VI ist eines der Kernstücke des Buches. Hier beginnt die Strukturtheorie halbeinfacher Gruppen. Eines der Highlights ist ein neuer Zugang zur Klassifikation der reellen halbeinfachen Lie-Algebren durch Vogan-Diagramme. Diese Klassifikation orientiert sich an maximal kompakten Cartan-Unteralgebren, im Gegensatz zum Zugang über maximal nichtkompakte Cartan-Unteralgebren, der auf die Satake-Diagramme führt.

Die Strukturtheorie wird in Kapitel VII weitergeführt und verfeinert. Hier lernt man die verschiedenen Zerlegungen halbeinfacher Gruppen kennen, und es werden parabolische Untergruppen und Cartan-Untergruppen diskutiert. Die zugehörigen Integralformeln werden schließlich in Kapitel VIII, aufbauend auf der Integrationstheorie auf Mannigfaltigkeiten, behandelt. Hier findet man z. B. auch einen Beweis der Weylschen Integralformel.

Zusammenfassend läßt sich sagen, daß dieses Buch seiner Zielsetzung, den Leser von der elementaren Lie-Theorie hin zur unendlichdimensionalen Darstellungstheorie halbeinfacher Gruppen zu führen, sicher voll und ganz gerecht wird. Das Material ist vielfach lehrerprobt und höchst sorgfältig aufbereitet. Auch Kennern der Materie hat das Buch einige Perlen wie die schon erwähnten historischen Notizen zu bieten. Der Preis ist mit DM 94,– für ein Buch dieses Umfangs erfreulich niedrig. In diesem Sinne ist das Buch uneingeschränkt zu empfehlen.

Erlangen K.-H. Neeb

Salzmann, H., Betten, D., Grundhöfer, Th., Hähl, H., Löwen, R., Stroppel, M., Compact Projective Planes, with an Introduction to Octonion Geometry (de Gruyter Expositions in Mathematics Vol. 18), Berlin etc.: de Gruyter 1996, 688 pp., clothbound, DM 258,–

In almost the whole nineteenth century, geometry – whether Euclidean or projective – was as a matter of course *real* geometry. Complex planes came also into focus, but rather in an auxiliary role for the study of real planes. By the middle of the century, metric arguments were weeded out of projective geometry. In Von Staudt's *Geometrie der Lage* (1847) it looked as if the foundations of projective geometry were laid with incidence relations only. It was Felix Klein who discovered in 1873 that in Von Staudt's proof of the Fundamental Theorem a continuity assumption is hidden, where he concludes from the invariance of the points of a harmonic net that *all* points of the projective line are fixed. Pasch essentially filled up this gap in his *Vorlesungen über neuere Geometrie* (1882). The development culminated in Hilbert's *Grundlagen der Geometrie* (1899), where real Euclidean geometry is based on five groups of axioms. Hilbert uses the axioms of (geometrical) *order* also to get a topology.

This use of order to get a notion of continuity helds as a disadvantage that geometries over the complex numbers, the quaternions or the octonions are excluded. From the early thirties on one started to study these by combining incidence axioms with purely topological assumptions. A projective plane (points, lines, incidence) is said to be *topological* if the set of points and the set of lines carry a topology (neither discrete nor indiscrete) such that the operations of joining distinct points and of intersecting distinct lines are continuous. To get deeper results one has to add topological assumptions like compactness, local compactness, connectedness, separate, ...

The small group of pioneers in the study of topological planes was joined in the fifties by Helmut Salzmann with two papers in the Math. Z. (1955 and '57, the latter being his dissertation). Since then, Salzmann has built up an impressive body of work on topological planes, compact planes, Lie groups of collineations, etc. The groups of continuous collineations of compact topological projective planes, with the compact open topology, are locally compact transformation groups. In the spirit of Klein's Erlangen program these groups and their relations with the planes are extensively studied: given the plane, what can be said about the group, and conversely.

Salzmann's love for the subject was apparently highly contagious: five of his former students appear as co-authors of the book under review. The character of the book is twofold: an introduction to the field as well as an advanced text covering a large part of the present knowledge of the subject. As to the former aspect, several chapters or parts thereof can be excellently used as a text for an introductory course or for self-study. The first chapter is typically of this nature; it is one of the largest chapters (130 pp.) and presents the basic examples: the standard projective planes over the reals, the complex numbers, the quaternions and the octonions. The octonion plane gets special attention as an important example of a nondesarguesian Moufang plane, and so do its collineation group and the elliptic motion group as exceptional real Lie groups of type E_6 and F_4, respectively.

Ch. 2 is a summary of incidence geometry – no topology to be seen anywhere. It gives a number of basic facts without proofs, but with references to the literature, including the Lenz-Barlotti classification and translation planes. Of a similar nature is Ch. 9, the last one, an appendix with relevant material from topology and Lie theory.

Ch. 3 is devoted to planes whose point set is $\mathbb{R}^2$ and whose lines are curves. If the parallel axiom holds, one can form the projective completion, a two-dimensional compact projective plane $\mathcal{P}$. A fair amount of classification results for such planes in connection with their full collineation group Σ is available. For example, Σ is a Lie group of dimension ≤ 8; if $\dim \Sigma > 4$, then $\mathcal{P}$ is the standard real projective plane; $\dim \Sigma = 4$ implies that $\mathcal{P}$ is a Moulton plane; for the case $\dim \Sigma = 3$ a complete classification is given.

In Ch. 4 we encounter for the first time a formal definition of topological projective planes. From here on, compact planes are systematically studied. In following chapters further conditions are added, e.g., on the (topological) dimension of the plane or on the dimension of the collineation group. To mention just one typical example in this line: an eight-dimensional compact projective plane with a collineation group of dimension ≥ 23 is necessarily the quaternion plane.

Most of the results on the subject proper – compact topological planes – are given with full proofs. Only in Ch. 8 certain results are surveyed, with references to the literature (and, of course, in the chapters 2 and 9 proofs are absent as said above). The style of the presentation is clear and makes pleasant reading. Occasionally, the authors betray that they are not native speakers of English (a defect they share with your reviewer); thus, on p. 219, l.–13, "exchanging the rôles" should be "interchanging the rôles", and on p. 309, l. 2, one should read "latest" or "previous" for "last". Well, already Hermann Weyl, in the preface to his *The Classical Groups,* complained: "The gods have imposed upon my writing the yoke of a foreign tongue that was not sung at my cradle". It is evident that this is an extremely beautiful book that will no doubt find its way to both experts and beginners in the field. Let me end by listing the chapter headings to give a further indication of its contents: 1 The classical planes; 2 Background on planes, coordinates and collineations; 3 Geometries on surfaces; 4 Compact projective planes; 5 Algebraic topology of compact, connected planes; 6 Homogeneity; 7 Four-dimensional planes; 8 Eight- and sixteen-dimensional planes; 9 Appendix: Tools from topology and Lie theory; – Bibliography (35 pp.); – Notation; – Index.

Utrecht F. D. Veldkamp

Kirsch, A., An Introduction to the Mathematical Theory of Inverse Problems (Applied Mathematical Sciences 120), Berlin u. a.: Springer-Verlag 1996, 282 S., DM 94,–

Das Gebiet der inversen (und schlechtgestellten) Probleme hat in den vergangenen drei oder vier Jahrzehnten, dank seiner Bedeutung vor allem in der Verarbeitung und Interpretation von Meßwerten, immer mehr Ansehen auch bei Mathematikern gewonnen, und so sind seit etwa Mitte der achtziger Jahre mehrere gute Monographen und auch einführende Lehrbücher zu diesem Thema erschienen. So gehört schon etwas Mut dazu, ein weiteres Buch über dieses Gebiet zu schreiben; ein solches sollte ja deutlich kontrastieren zu den bereits vorhandenen. Der Verfasser des hier zu besprechenden Werkes hat lobenswerterweise diesen Mut gehabt, und dank seines persönlichen wissenschaftlichen Werdegangs und seiner langjährigen intensiven Beschäftigung mit dem Thema im allgemeinen und auch mit speziellen Fragestellungen (zu nennen sind hier inverse Streu-Probleme) ist es ihm gelungen, ein angenehm lesbares einführendes Lehrbuch zu schreiben, das die Forderung nach Unterscheidbarkeit von anderen Werken über inverse Probleme sowohl durch Auswahl des Stoffes als auch durch die Art der Darstellung überzeugend erfüllt.

Das Buch besteht aus fünf Kapiteln und einem Anhang, der hauptsächlich eine Übersicht über die aus der Funktionalanalysis benötigten Hilfsmittel (Normierte Räume, Hilbert- und Sobolev-Räume, lineare beschränkte und kompakte Operatoren, Spektraltheorie kompakter Operatoren, Fréchet-Ableitung) gibt.

In Kapitel 1 werden die Grundbegriffe erläutert, instruktive Beispiele vorgestellt und der Begriff des schlimmstmöglichen Fehlers (der rekonstruierten Näherungslösung) diskutiert. Die Notwendigkeit geeigneter Zusatzinformation zur erfolgreichen Rekonstruktion wird begründet.

Kapitel 2 ist der Regularisierungstheorie für Gleichungen erster Art in unendlichdimensionalen separablen Hilberträumen gewidmet. Diese Gleichungen haben die Gestalt $Kx = y$ mit einem linearen kompakten Operator K, der einen Hilbertraum X in einen Hilbertraum Y abbildet. Statt $y \in Y$ ist gegeben ein $y^\delta \in Y$, das in der Norm um höchstens von y abweicht, und man will, unter Ausnutzung geeigneter Zusatz-Information über x (konkret Beschränktheit einer stärkeren Norm oder Seminorm von x) die „wahre Lösung“ x möglichst gut rekonstruieren, d. h. durch ein x approximieren mit der Forderung $x^\delta \to x$ bei $\to 0$. Der Begriff einer „Regularisierungsstrategie“ wird eingeführt, durch die Adjektive „zulässig“ und „optimal“ qualifiziert und schließlich konkretisiert durch reguvom Datenfehler und der verfügbaren Zusatzinformation wählen). Speziell werden auch „Kleinste-Quadrat"-Methoden, die Bubnov-Galerkin-Methode für koerzitive Operatoren und Minimum-Norm-Kollokation behandelt. Die Symmsche Integralgleichung erster Art im Kontext von Sobolev-Räumen periodischer Funktionen dient als Objekt der Illustration. Schließlich gibt der Autor noch eine Darstellung der bei Geophysikern beliebten Backus-Gilbert-Methode, die aus dem übrigen theoretischen Rahmen herausfällt, zu deren Analyse der Autor selber wesentlich beigetragen hat.

Nachdem in den ersten drei Kapiteln lineare Probleme behandelt wurden, sind die beiden letzten Kapitel nichtlinearen Aufgaben gewidmet. In einem einführenden Lehrbuch ist hier eine geschickte Auswahl notwendig, und diese erfolgt bestens, wenn wie hier der Autor seiner speziellen Kompetenz folgt. So behandelt der Verfasser in Kapitel 4 als Muster eines inversen Eigenwertproblems die Aufgabe, aus der Kenntnis der Eigenwerte λ der Aufgabe

$$-u''(x) + q(x)u(x) = \lambda u(x), \quad 0 \le x \le 1, \quad u(0) = 0, \quad u(1) = 0,$$

die in $L^2(0,1)$ liegende Funktion $q(x)$ zu bestimmen. Zuvor untersucht er eingehend das direkte Problem, zu gegebener Funktion q die Folge der Eigenwerte und Eigenfunktionen zu bestimmen oder wenigstens ihre wesentlichen asymptotischen Eigenschaften zu beschreiben im Vergleich zum Sonderfall $q(x) \equiv 0$. Er beschreibt auch kurz die Modifikationen, die bei Ersetzung der Bedingung $u(1) = 0$ durch die allgemeinere Bedingung $u'(1) + Hu(1) = 0$ erforderlich sind. Als weitere Vorbereitung diskutiert er zwei hyperbolische Probleme, darunter das Goursat-Problem, dessen Lösung $K(x, t)$ bei entsprechender Datenvorgabe eine Integraldarstellung der Lösung der Anfangswertaufgabe

$$-u''(x) + q(x)u(x) = \lambda u(x), \quad u(0) = 0, \quad u'(0) = 1$$

gestattet, die zur Behandlung der inversen Eigenwertaufgabe nützlich ist. Für letztere gibt er Bedingungen für eindeutige Lösbarkeit und auch ein Verfahren zur numerischen Behandlung. Mit Hilfe der dargestellten inversen Eigenwerttheorie gelingt ihm auch die Aufstellung eines Eindeutigkeitssatzes für eine spezielle Parameter-Identifizierungs-Aufgabe bei einer parabolischen Differentialgleichung.

Das fünfte (letzte) Kapitel ist einem inversen Streuproblem im $\mathbb{R}^3$ aus der Akustik gewidmet. Ausführlich wird zuerst das direkte Problem behandelt, zu gegebener einfallender ebener Welle und gegebenem glattem Brechungsindex, der nur in einer beschränkten Menge von 1 verschieden ist, die Lösung der zugehörigen Helmholtz-Gleichung, das Fern-Feld-Muster und seine Eigenschaften zu bestimmen. Das inverse Problem besteht darin, aus der Kenntnis des Fernfeldmusters für genügend viele Einfallrichtungen den Brechungsindex zu bestimmen. Hier wird bewiesen, daß ein zweimal-stetig differenzierbarer Brechungsindex, der nur auf einer beschränkten Menge von 1 verschieden ist, eindeutig bestimmt ist, wenn das Fernfeld für alle Einfallsrichtungen einer ebenen Welle bekannt ist. Abschließend werden drei verschiedenartige numerische Verfahren zur Behandlung des inversen Streuproblems vorgestellt.

Bemerkt sei noch, daß jedem Kapitel einige lehrreiche Aufgaben angefügt sind, deren Bearbeitung dem Leser empfohlen wird. Ein großer Teil dieser Aufgaben enthält ergänzenden Stoff, der an einigen Stellen auch im eigentlichen Text benutzt wird. Im wesentlichen ist das Buch in sich vollständig, im fünften Kapitel wird an manchen Stellen auf Beweise verzichtet, aber es werden Quellen angegeben. Auch wird an vielen Stellen auf weiterführende Literatur hingewiesen, und so erweist sich das 229 Titel enthaltende Literaturverzeichnis als eine wertvolle Quellensammlung.

Berlin R. Gorenflo

Hislop, P. D., Sigal, I. M., Introduction to Spectral Theory (With Applications to Schrödinger Operators), (Applied Math. Sciences 113), Berlin u. a.: Springer 1996, 501 S., DM 84,–

The book emphasizes the geometric aspect of spectral analysis where spectral properties of operators are investigated by studying these operators on families of functions having certain geometric support conditions. It presents a modern overview of this geometric spectral analysis.

The theory of linear operators in Hilbert spaces is introduced in some detail in the beginning of this book. This part is standard and furnishes the necessary mathematical background to tackle the remainder of the book; it may be used as a guideline by the interested readership. The book concerns itself mainly with the discrete and essential parts of the spectrum, although embedded eigenvalues are also introduced. This general operator-theoretical part is illustrated by examples taken from the theory of Schrödinger operators, such as the exponential decay of eigenfunctions in terms of the Agmon metric, or to prove the essential selfadjointness, local compactness, or relative boundedness for certain operators. This part also includes standard spectral stability results for the discrete and essential spectrum. However, several results are also mentioned which are not so well-known in the textbooks. One example is Perssons-theorem which gives a formula for the bottom of the essential spectrum. Moreover, parts of semiclassical analysis are given, for instance the semiclassical limit of eigenvalues is studied as well as quantum tunneling and double-well potentials. The book does not contain semiclassical analysis in the context of microlocal analysis developed e.g. by Helffer, Maslov, or Robert.

The main part of the book (more than one third) consists of a collection of results in resonance theory. In the last two decades the theory of resonances has developed in several different directions. There exists a bulk of material and results in the research literature. The present book gives a worthwhile overview of these results. The main topics are spectral deformation, spectral stability, and nontrapping estimates. The theory of Aguilar, Balslev, Combes, Simon is explained in detail and applied to shape resonances. Spectral deformation theory is explained in $\mathbb{R}^d$ and then applied to Schrödinger operators. Also a general theory for spectral stability is given. This is related to nonanalytic perturbation theory for discrete eigenvalues and to perturbations of embedded eigenvalues and resonances. Finally, some further topics and features from the recent resonance literature are given. The position of the resonance is related to the resonance width. Resonance phenomena arising also in the presence of an electric or magnetic field are described. Further topics in the quantum theory of resonances are mentioned.

The main feature and probably also the main objective of this book is the overview of a large part of resonance theory. It does not contain the approach of Helffer and Sjöstrand. However, it emphasizes the geometric spectral analytic aspect in this theory. It collects together important and recent results on resonances obtained during the last two decades. A mathematical introduction to the spectral and perturbation theory of selfadjoint operators makes this book selfcontained. Exercises are given which help to give a better understanding of the text. The appendices are in the main devoted to explaining the theory of linear operators in Banach spaces. Unfortunately, there is no list of symbols used in the text. The book is well written. It gives a selfconsistent guideline for further studies in resonance theory and geometric aspects of spectral theory. It will be useful for graduate students as well as for mathematicians and physicists interested in spectral theory. The book fills a gap in the present literature.

Clausthal-Zellerfeld M. Demuth

Edmunds, D. E., Triebel, H., Function Spaces, Entropy Numbers and Differential Operators, Cambridge Univ. Press 1996, 252 S., £40.–

Die Entwicklung der Theorie der (quasi-)normierten Funktionenräume läßt sich grob in drei Schübe zerlegen:

Im ersten wurden zum einen die klassischen L_p- und H_p-Räume intensiv untersucht, zum anderen Unterräume der stetigen Funktionen, z. B. die Hölder-Räume $C^s, 0 < s \notin \mathbf{N}$, die insbesondere in der Approximationstheorie aufgrund der Sätze von Jackson (1911) und Bernstein (1912) über die Konvergenzgeschwindigkeit der besten Approximation eine wichtige Rolle spielen.

Mitte der dreißiger Jahre setzte dann mit der Einführung der Sobolev-Räume (schwache Ableitungen, Sobolev-Einbettungssatz) eine zweite, konstruktive Phase ein, die wesentlich durch die Bedürfnisse in der Theorie der partiellen Differentialgleichungen mitgeprägt wurde. Von der Vielzahl der neuen Räume erwähnen wir nur die Räume von Sobolev $W_p^k, k \in \mathbf{N}$, Zygmund (der die Lücke $s \notin \mathbf{N}$ bei den Hölder-Räumen schließt), Besov, die Besselpotentialräume H_p^s (s setzt $k \in \mathbf{N}$ bei den Sobolev-Räumen stetig auf $\mathbf{R}$ fort), BMO, die H_p-Räume von Stein und Weiss.

In einer dritten, systematischen Stufe ab Anfang der sechziger Jahre gelang es mittels der Entwicklung der abstrakten Interpolationstheorie (reelle und komplexe Interpolationsmethoden), einheitliche Konstruktionsprinzipien für diese Räume zu finden. Interessiert man sich für solche Funktionenräume, „die nützlich in der Theorie der partiellen Differentialgleichungen (insbesondere elliptischer Differentialgleichungen) sind" (vgl. [Tri1, p. 39]), so ist ein alternativer Zugang (der den Nachteil des Interpolationszugangs vermeidet, gewisse „Endpunkt"-Räume zu benötigen) durch die Fourieranalysis gegeben. H. Triebel hat letzteren Zugang gewählt, um in den beiden Monographien [Tri1, 2] die beiden Funktionenraumskalen B_{pq}^s und $F_{pq}^s, s \in \mathbf{R}, p, q > 0$, (die $F_{p,2}^s, 1 < p < \infty$, sind gerade die Besselpotentialräume der Ordnung s, die für $s = 0$ mit den L^p-Räumen zusammenfallen) systematisch zu untersuchen; einige Stichworte zu deren Inhalt: Einbettungs-, Interpolationsverhalten, Spursätze, Charakterisierungen, Fouriermultiplikatoren, Faltung, Abbildungsverhalten von (Pseudo-)Differentialoperatoren, punktweise Multiplikationsalgebren für Funktionen auf $\mathbf{R}_n$, $\mathbf{R}_n^+$, auf Gebieten, auf Riemannschen Mannigfaltigkeiten ...

In diesen Rahmen ordnet sich die vorliegende Monographie ein, indem sie Weiterentwicklungen in der Theorie der Funktionenräume mit Anwendungen (ca. ein Viertel des Buches) bei Eigenwertverteilungen (von Inversen) elliptischer Operatoren darstellt. Schauen wir uns kurz das Letztere, in Kapitel 5 Beschriebene an.

Typisch sind nicht-symmetrische Operatoren B auf L_p-Räumen auf beschränkten Gebieten mit C^∞-Rand der Bauart

$$B = b_2 C b_1,$$

wobei b_1 und b_2 Elemente von geeigneten L_p-Räumen seien, der Operator C z. B. die Inverse eines regulären elliptischen Differentialoperators ist, also glättend. Faktorisiert man

$$B = b_2 \circ id \circ C \circ b_1,$$

so sieht man, daß B ein kompakter Operator ist: $b_1 : L_p \to L_q$ nach der Hölder-Ungleichung, $C : L_q \to H_q^{2m}$ für ein geeignetes $m > 0$, mittels des Einbettungsoperators id kann H_q^{2m} kompakt in einen L_r-Raum eingebettet werden, b_2 bildet (unter geeigneten Voraussetzungen) schließlich wieder wegen der Hölder-Ungleichung in L^p ab. Die Ungleichung von Carl

$$|\mu_k| \leq \sqrt{2} e_k,$$

wobei die μ_k, $|\mu_k| \geq |\mu_{k+1}|$, die Eigenwerte von B und die e_k die zugehörigen Entropiezahlen sind, reduziert das Problem i.w. auf die Bestimmung der Entropiezahlen der Einbettungsabbildung. Daß diese bemerkenswert einfache Methode auch in wesentlich komplizierteren Situationen angewendet werden kann, liegt auf der Hand, wenn geeignete Hölder-Ungleichungen sowie Abschätzungen für die Entropiezahlen zur Verfügung stehen.

Im bewußt knapp gehaltenen ersten Kapitel werden spektraltheoretische Eigenschaften linearer Operatoren in Quasi-Banachräumen bereitgestellt, insbesondere die Ungleichung von Carl. Kapitel 2 stellt die notwendigen scharfen Hölder-Ungleichungen auf Besov-Räumen $B^s_{p,q}$ und Triebel-Lizorkin-Räumen $F^s_{p,q}$ über $\mathbf{R}^n$ bereit, insbesondere einige Grenzfälle bei den Einbettungen, die auf logarithmische Sobolev-Räume führen; im Falle beschränkter Gebiete Ω mit glattem Rand werden diese Räume über Restriktionen eingeführt. Kapitel 3 beschäftigt sich mit oberen und unteren Abschätzungen für die Entropiezahlen der Identitätsabbildung zwischen Besov- bzw. Triebel-Lizorkin-Räumen über Ω. In Kapitel 4 werden Analoga für $\mathbf{R}^n$ mittels zusätzlicher Gewichte hergeleitet.

Bei der Lösung eines approximationstheoretischen Problems in L_∞ (siehe [Pee, p. 226]) benötigte J. Peetre bereits um 1970 Besov-Räume $B^{\cdot\cdot}_{p,q}$ mit $p < 1$. Die vorliegende Monographie enthält das Beispiel (vgl. p. 203) eines kompakten Operators B von obiger Bauart, bei dem erst der Gebrauch der Funktionenräume mit erstem Parameter $p < 1$ derzeit zu einem scharfen Ergebnis auf L_r, $r \geq 1$ führt.

Die klaren Beweise sind technisch teils recht anspruchsvoll, wobei wesentlich Methoden aus der Fourieranalysis benutzt werden. Hilfreich sind zahlreiche Skizzen, die Parameterbereiche beschreiben bzw. die Einbettungen bei der Zerlegung des kompakten Operators B veranschaulichen, sowie der Index für die verwendeten Symbole. Das Buch ist einerseits ein homogener Bericht über neuere Ergebnisse aus dem Bereich der Funktionenräume und elliptischen Differentialoperatoren, die die Autoren und ihre Mitarbeiter in den letzten Jahren erzielt haben und die bisher in der gängigen Lehrbuchliteratur nicht enthalten sind. Um es andererseits auch Nichtspezialisten zugänglich zu machen, haben die Autoren benötigtes, bereits in Büchern vorliegendes Material referiert. Dem Leser sind insbesondere die schönen Einleitungen zu den jeweiligen Abschnitten hilfreich, die ihn wissen lassen, wo er gerade steht.

Somit empfiehlt sich das Buch nicht nur dem Fachmann in der Theorie der Funktionenräume, sondern wird gewinnbringend auch von interessierten Analytikern, insbesondere im Bereich der elliptischen (Pseudo-)Differentialoperatoren, gelesen.

[Pee] Peetre, J., New Thoughts on Besov Spaces. Duke Univ. Math. Series. Durham, Univ. 1976
[Tri1] Triebel, H., Theory of Function Spaces. Basel, Birkhäuser 1983
[Tri2] Triebel, H., Theory of Function Spaces II. Basel, Birkhäuser 1992

Darmstadt W. Trebels

Davies, E. B., Spectral Theory and Differential Operators, Cambridge University Press 1995 (paperback edition 1996), 182 S., £29.95

„The theory of differential equations is one of the outstanding creations of the human mind. Its influence upon the development of physical science would be hard to exaggerate. The long history and many applications of the theory, however, make it almost impossible to write a balanced account of the subject. Thus authors of student texts are confronted with the choice between writing rather superficially on a range of topics or in more depth on some narrow field, in which they have a particular interest.“

Mit diesen Worten beginnt das vorliegende kleine Werk, in dem nach einer knapp zwanzigseitigen Einführung in die Grundlagen der Theorie nicht notwendig beschränkter linearer Operatoren in einem Hilbertraum ein neuer Beweis des Spektralsatzes für selbstadjungierte Operatoren gegeben wird. Dieser Beweis beruht auf einer von Helffer und Sjöstrand stammenden Modifikation der Formel von Pompeiu (oder inhomogenen Cauchyschen Integralformel), und wie bei fast jeder neuen Idee findet man im nachhinein Vorläufer. Der Autor erwähnt in [4] Arbeiten von E. M. Dyn'kin vom Beginn der 70er Jahre; zu nennen sind aber auch noch frühere, in abstrakterem Rahmen verlaufende Untersuchungen von L. Waelbroeck [6].*

Die bei diesem neuen Beweis zum Einsatz kommenden Techniken haben den Vorzug, auch auf gewisse Halbgruppen in Banachräumen anwendbar zu sein [4], doch ergibt sich die vertraute alte Version des Spektralsatzes erst relativ spät, so daß ich nach wie vor die ganz der Geometrie des Hilbertraumes verbundene Beweisführung von H. Leinfelder [5] bevorzuge (sie ist auch in [1] wiedergegeben).

Der neue Zugang zum Spektralsatz hat auch eine vom Üblichen abweichende Behandlung kompakter Operatoren im Hilbertraum zur Folge, die in dem „The variational method“ betitelten 4. Kapitel gegeben wird. (Im 3. Kapitel werden partielle Differentialoperatoren mit konstanten Koeffizienten mit Hilfe der Fouriertransformation behandelt.)

Kapitel 5 bringt interessante spektraltheoretische Anwendungen der Hardyschen Ungleichung, die größtenteils auf den Autor zurückgehen, und endet mit einem kleinen Ausflug zur Plattengleichung.

Kapitel 6 ist vornehmlich Eigenwertabschätzungen des Laplace-Operators mit Dirichlet-Randbedingungen gewidmet, während das nachfolgende Kapitel die ungleich schwierigeren und daher vielfach eher stiefmütterlich behandelten Neumannschen Randbedingungen zum Gegenstand hat.

Im letzten Kapitel werden vornehmlich Störungen des Laplace-Operators durch eine Potentialfunktion betrachtet, die so beschaffen sind, daß das Spektrum des entstehenden Schrödingeroperators – es ist dies immer die von der zugehörigen quadratischen Form erzeugte Friedrichs-Fortsetzung des minimalen Operators – entweder in der positiven Halbachse enthalten ist oder diese enthält. Es schließt mit in der Lehrbuchliteratur bislang kaum zu findenden Resultaten über Schrödingeroperatoren mit zwei Potentialtöpfen.

[5] Leinfelder, H.: A geometric proof of the spectral theorem for unbounded self-adjoint operators. Math. Ann. 242, 85–96 (1979)

[6] Waelbroeck, L.: Calcul symbolique lié à la croissance de la résolvante, Rend. Sem. Mat. Fis. Milano 34, 51–72 (1964)

München H. Kalf

Goss, D., Basic Structures of Function Field Arithmetic, Berlin u. a.: Springer-Verlag 1996, XIII + 422 S., DM 108,–

Wie schon von verschiedenen Mathematikern des neunzehnten Jahrhunderts beobachtet wurde, gibt es bemerkenswerte Ähnlichkeiten und Übereinstimmungen zwischen der algebraischen Zahlentheorie (d.h. der Theorie der Erweiterungen des Körpers $\mathbb{Q}$ der rationalen Zahlen und ihrer Arithmetik) und der algebraischen Funktionentheorie (in heutiger Sprechweise: der Theorie der kompakten Riemannschen Flächen). Wir erwähnen hier nur die Namen Riemann, Kronecker, Dedekind, Weber; der interessierte Leser findet weitere Aufschlüsse in Felix Kleins Vorlesungen [K], Kapitel 7, sowie in [U]. Wesentlich ist, daß geometrisch-funktionentheoretische Sachverhalte durch die Arithmetik des zugehörigen Funktionenkörpers über dem Körper $\mathbb{C}$ ausgedrückt werden können und umgekehrt. Die Analogie von Zahlen- und Funktionentheorie führte zu entscheidenden Entwicklungen in der Zahlentheorie, unter denen als erste die Erfindung der p-adischen Zahlen durch K. Hensel und das Hasse-Minkowskische Lokal-Global-Prinzip zu nennen sind.

Während die genannten Mathematiker Ideen und Methoden der „Funktionen"-theorie auf die „Zahlen"theorie übertrugen, scheint Emil Artin mit seiner Disseration von 1923 der Erste gewesen zu sein, der genuin zahlentheoretische Begriffe und Methoden (Galois-Theorie, Zeta-Funktionen, Zerlegungsgesetze für Primstellen) auf das Studium algebraischer Funktionenkörper anwandte, allerdings auf (globale) Funktionenkörper mit *endlichem* Konstantenkörper. (Hier und im folgenden verstehen wir unter einem globalen Funktionenkörper k eine endlich erzeugte Körpererweiterung vom Transzendenzgrad eins über einem endlichen Konstantenkörper, den wir ohne Beschränkung als in k algebraisch abgeschlossen annehmen.) Für solche Körper geht natürlich die anschauliche Interpretation mittels Riemannscher Flächen verloren; andererseits ergeben sich gerade für ihre Arithmetik verblüffende Parallelen zu jener der algebraischen Zahlkörper. Diese Parallelen sind weitaus tiefer und und folgenreicher als die bisher erwähnten, noch recht oberflächlichen Analogien. Inzwischen wohlbekannt ist die Chevalleysche Formulierung der (abelschen) Klassenkörpertheorie, die gleichermaßen Aussagen über globale Zahl- wie Funktionenkörper macht. Entsprechendes gilt für die nicht-abelschen Verallgemeinerungen der Klassenkörpertheorie, die sich in den Langlands-Vermutungen äußern, für die Standard-Vermutungen über die Arithmetik spezieller Zeta- und L-Werte (z.B. Vermutungen vom Typ Birch/Swinnerton-Dyer) oder Vermutungen à la Shimura-Taniyama-Weil über die „automorphe" Interpretation von Motiven über solchen Körpern.

Völlig neue Gesichtspunkte in die Theorie der globalen Funktionenkörper brachte V.G. Drinfeld mit seiner folgenreichen Arbeit „Elliptic Modules" von 1973 [Dr]. Hier werden die heute als „Drinfeld-Moduln" bekannten Objekte eingeführt, deren Theo-

$r = p^m$ Elementen, und sei „∞" ein ein für allemal fest gewählter abgeschlossener Punkt von X des Grades d_∞ über $\mathbb{F}_r$. Wir setzen k für den Funktionenkörper von X und $A \subset k$ für den Unterring der außerhalb von ∞ regulären Funktionen. Sei weiterhin $K = k_\infty$ die Komplettierung an ∞ mit komplettiertem algebraischen Abschluß $\mathbb{C}_\infty$ und normiertem Absolutbetrag „$|.|$". $\mathbb{C}_\infty$ ist wieder algebraisch abgeschlossen; es ist der kleinste vollständige algebraisch abgeschlossene Körper, dessen Bewertung diejenige von K fortsetzt. Das Standard-Beispiel ist gegeben durch $X = \mathbb{P}^1/\mathbb{F}_r$, $A = \mathbb{F}_r[T]$, $k = \mathbb{F}_r(T)$. Unter der ins Auge stechenden Analogie von (k, A, K) mit $(\mathbb{Q}, \mathbb{Z}, \mathbb{R})$ (A ist Dedekind-Ring endlicher Klassenzahl, diskret und kokompakt eingebettet in K, ...) entspricht $\mathbb{C}_\infty$ natürlich dem üblichen Körper $\mathbb{C}$ der komplexen Zahlen. Ein wesentlicher Unterschied liegt jedoch darin, daß $\mathbb{C}_\infty$ über K unendlichen Grad besitzt und deshalb diskrete A-Gitter L beliebig großen Rangs zuläßt.

Es stellt sich nun heraus, daß die Theorie der Drinfeld-A-Moduln des festen Rangs d unter mehreren Gesichtspunkten starke Ähnlichkeiten aufweist mit der Theorie der elliptischen Kurven bzw. der irreduziblen abelschen Varietäten. Unter anderem ergeben sich k-Analoga der Sätze von Kronecker-Weber, von Eichler-Shimura, des Hauptsatzes der komplexen Multiplikation, des Satzes von Wiles und Taylor über Weil-Uniformisierungen elliptischer Kurven. Kombinationen verschiedener dieser Aspekte liefern ein sehr genaues Bild der Arithmetik von k und seiner Erweiterungen.

Abgesehen vom intrinsischen Interesse an der Arithmetik globaler Funktionenkörper ergeben sich wichtige Motivationen für diese Fragestellungen deshalb auch aus möglichen Heuristiken für den Zahlkörperfall.

Im Zusammenhang mit der Erforschung der durch Drinfelds Idee erschaffenen arithmetischen Welt gibt es naheliegende Problemstellungen, die in der folgenden, sicher unvollständigen Liste in willkürlicher Reihenfolge aufgeführt sind.

1. Anwendungen der Theorie der Drinfeld-Moduln auf die nicht-abelsche Klassenkörpertheorie, Bestimmung der Kohomologie der Modulschemata als Moduln unter der Galois-Gruppe und der Hecke-Algebra, entsprechende Reziprozitätsgesetze.
2. Modulare Theorie der Drinfeld-Moduln und ihrer Modulschemata, insbesondere im Fall des Rangs zwei, Anwendungen auf diophantische Probleme über k.
3. Transzendenzfragen: Arithmetische Natur der rigid-analytischen Funktionen (und ihrer speziellen Werte), die sich aus der Weierstraß-Uniformisierung von Drinfeld-Moduln herleiten.
4. Arithmetik der von Torsionspunkten erzeugten Körpererweiterungen von k (Klassenzahlfragen, Struktur verschiedener Galois-Moduln), insbesondere im abelschen Fall.
5. „Innere" Probleme der Theorie: Struktur der Torsionspunkte, der assoziierten Galois-Darstellungen, des Endomorphismenrings eines festen Drinfeld-Moduls.
6. Arithmetik spezieller Funktionen (Analoga von Gamma-, Zeta- und L-Funktionen).
7. Verallgemeinerungen auf höherdimensionale Objekte; Andersons „T-Moduln".

Die vorliegende, in der Reihe „Ergebnisse der Mathematik" bei Springer erschienene Monographie widmet sich neben der Grundlegung der Theorie der Drinfeld-Moduln hauptsächlich den weiterführenden Fragestellungen (4) bis (7). (Für (1) sei der Leser auf die beiden Bände [L] von Laumon verwiesen, für (2) auf [G]. Die wesentlichen Ergebnisse zu (3) gehen auf Jing Yu sowie Denis, Brownawell und Allouche zurück; sie sind noch nicht in Form einer Monographie verfügbar.)

Wir umreißen hier die Inhalte der einzelnen Kapitel.

Im ersten Kapitel werden die Eigenschaften additiver Polynome über Körpern der Charakteristik p entwickelt und die entsprechenden getwisteten Polynomringe $k\{\tau\}$ studiert (linke und rechte euklidische Algorithmen, p-Resultante, Teilbarkeitslehre). Im zweiten Kapitel werden auf wenigen Seiten die wesentlichen später benötigten Resultate aus der nichtarchimedischen Analysis zusammengestellt: Konstruktion und Eigenschaften des Körpers $\mathbb{C}_\infty = \widehat{\overline{K}}$, Newton-Polygon, Faktorisierung ganzer Funktionen.

Die eigentliche Beschäftigung mit Drinfeld-Moduln beginnt mit dem dritten Kapitel, wo im Falle eines Grundrings $A = \mathbb{F}_r[T]$ der einfachste und historisch erste Drinfeld-Modul eingeführt wird, der sogenannte Carlitz-Modul. Dieser Spezialfall der viel allgemeineren modernen Theorie wurde von Carlitz in den dreißiger Jahren entwickelt. Unter der Weierstraß-Uniformisierung entspricht der Carlitz-Modul dem Gitter ξA, wobei ξ eine über $k = \mathbb{F}_r(T)$ transzendente „Zahl" in $\mathbb{C}_\infty$ ist, die unter allen denkbaren Gesichtspunkten die Rolle der Zahl $2\pi i$ in der Theorie der Exponentialfunktion spielt. Wie zitieren aus der Einleitung des Kapitels:

„We present here the details of the Carlitz module. This is the simplest of all Drinfeld modules and may be given in a concrete, elementary fashion. At the same time, most essential ideas about Drinfeld modules appear in the theory of the Carlitz module. This is an excellent example for the reader to master and keep in mind when reading the more abstract general theory."

Die Grundlagen der Theorie im allgemeinen Fall (Grundring A und Rang d beliebig) werden im vierten Kapitel entwickelt, wobei der Autor der algebraischen Definition die analytischen Betrachtungen um die Gitterfunktion e_L in $\mathbb{C}_\infty$ voranstellt. Weitere hier behandelte Themen sind die Reduktionstheorie von Drinfeld-Moduln über lokalen Körpern, ihre Theorie über endlichen Körpern sowie der zu einem Drinfeld-Modul ϕ adjungierte A-Modul ϕ^*.

Das fünfte Kapitel ist den von G. Anderson [A] eingeführten T-Moduln gewidmet, einer höherdimensionalen Verallgemeinerung von Drinfeld-Moduln. Ein T-Modul ist eine A-Modulstruktur auf $(\mathbb{G}_a)^n$ mit einigen Nebenbedingungen. Ihre Einführung motiviert sich u.a. aus der Notwendigkeit, Tensorprodukte von Drinfeld-Moduln mit vernünftigen Eigenschaften zu definieren, was in der Kategorie der Drinfeld-Moduln selbst nicht möglich ist, wohl aber in der umfassenderen der T-Moduln.

Im kurzen sechsten Kapitel werden nach einigen algebraischen Vorbereitungen die ebenfalls von Drinfeld eingeführten „Shtukas" definiert, worunter man sich im wesentlichen Drinfeld-Moduln mit einer „Niveaustruktur an ∞" vorzustellen hat.

Das siebte Kapitel bringt arithmetische Anwendungen der Theorie der Drinfeld-Moduln vom Rang eins über k oder endlichen Erweiterungen von k. Ihre Torsionspunkte erzeugen abelsche Erweiterungen, die vergleichbare Eigenschaften besitzen wie Kreiserweiterungen von $\mathbb{Q}$ oder abelsche Erweiterungen imaginär-quadratischer Zahlkörper. Ähnlich wie in diesen Fällen gibt es eine weit entwickelte Theorie von „Kreiseinheiten" oder „elliptischen Einheiten", deren Indizes in den vollen Einheitengruppen in Beziehung stehen mit Klassenzahlen und der Struktur verschiedener Galois-Moduln.

Im sehr ausführlichen achten Kapitel stellt der Autor erstmals in Buchform die weitgehend von ihm selbst entwickelte Theorie der $\mathbb{C}_\infty$-wertigen Zeta- und L-Funktionen über k vor. Im einfachsten Fall geht es um die Interpolation der zunächst nur auf $\mathbb{N}$ definierten K-wertigen Funktion $\zeta_A(i) = \sum_{a\in A \text{ normiert}} a^{-i}$. Dem Autor gelingt es nun, diese Funktion in sinnvoller Weise auf die topologische Gruppe $S_\infty := \mathbb{C}_\infty^* \times \mathbb{Z}_p$ fortzusetzen, in die $\mathbb{Z}$ diskret eingebettet ist. Entsprechend werden für endliche Stellen v von k v-adische Funktionen definiert. Die solcherart entstehenden Zeta- und L-Funktionen gehorchen dem üblichen Formalismus bei Wechsel des Definitionskörpers; sie besitzen eine interessante Werte- und Nullstellentheorie, und ihre Theorie kann, wenn auch unter beträchtlichem technischen Aufwand, für allgemeine Grundringe A entwickelt werden.

Kapitel 9 beschäftigt sich mit verschiedenen „Gamma-Funktionen" für (A, k). Sie entstehen durch Interpolation aus „Fakultäten", d.h. aus arithmetischen Funktionen $\pi : A \longrightarrow k$, die ähnliche Teilbarkeitseigenschaften besitzen wie klassische Fakultäten. Ihre Wertetheorie hängt einerseits mit der Theorie der Drinfeld-Moduln, andererseits mit gewissen $K = k_\infty$- oder auch k_v-wertigen Charaktersummen zusammen.

Im abschließenden zehnten Kapitel werden (ohne Beweise) einige der neuesten Entwicklungen diskutiert. Stichworte sind eine „Fermat-Gleichung" über $k = \mathbb{F}_r[T]$ (die in der selben Beziehung zum Carlitz-Modul steht wie die klassische Fermat-Gleichung zur Kreisteilungstheorie), das von Y. Taguchi bewiesene Analogon der Tate-Vermutung für Drinfeld-Moduln, die „wesentliche Algebraizität" der oben beschriebenen L-Funktionen, sowie einige weitere, auf die wir hier nicht näher eingehen können.

Bei dem vorliegenden Band handelt es sich um die erste umfassende Monographie zum Thema, die zum Selbststudium geeignet ist. Er faßt bisher nur in Originalarbeiten oder Manuskripten verfügbares Material in kohärenter Form zusammen und führt in einigen Bereichen an den Forschungsstand heran oder gibt zumindest kommentierte Hinweise auf die Originalliteratur. Dies gilt insbesondere für die Theorie der Charakteristik-p-wertigen arithmetischen Funktionen, die wesentlich vom Autor selbst geprägt wurde. Im Gegensatz zu den oben erwähnten Monographien werden alle Voraussetzungen z.B. aus der Algebra (Ore-Polynome, zentral-einfache Algebren), der Algebraischen Geometrie, der nichtarchimedischen Analysis bereitgestellt, wofür insbesondere studentische Benutzer dankbar sein werden. Dennoch ist der Leser gut beraten, wenigstens aus heuristischen Gründen eine gewisse Kenntnis der Theorien der Kreiskörper, der komplexen Multiplikation, der Zeta-Funktionen und ihrer speziellen Werte mitzubringen.

Positiv hervorheben will ich die vielen weiterführenden „Remarks" und „Questions", die umfassende Bibliographie von 17 Seiten, welche den Stand der Dinge zum Zeitpunkt der Drucklegung (Frühjahr 1996) offenbar vollständig wiedergibt, und nicht zuletzt die sorgfältige Ausführung mit bemerkenswert guter Typographie und sehr wenigen Druckfehlern.

Fazit: Eine nützliche und empfehlenswerte Anschaffung sowohl für Praktizierende im Gebiet als auch für Newcomer. Letzteren sei allerdings empfohlen, sich (wie auch vom Autor vorgeschlagen) bei der ersten Lektüre auf den einfacheren Fall eines Polynomrings als Grundring A zu beschränken, da hier die zugrundeliegenden Strukturen und Ideen nicht durch technische Details verdunkelt werden.

[A] G. Anderson: t-motives, Duke Math. J. **53** (1986), 457-502.

[Dr] V.G. Drinfeld, Elliptic modules, Math. Sbornik **94** (1974), 594-627. Engl. Übersetzung: Math. USSR Sbornik **23** (1976), 561-592.

[G] E.-U. Gekeler: Drinfeld Modular Curves, Lect. Notes in Math. **1231**, Springer 1986.

[H] D. Hayes: Explicit class field theory in global function fields, in: Studies in Algebra and Number Theory, Advances in Math. **16** (1980), 173-217.

[K] F. Klein: Vorlesungen über die Entwicklung der Mathematik im 19. Jahrhundert, Reprint Springer 1979.

[L] G. Laumon: Cohomology of Drinfeld Modular Varieties, I, II, Cambridge University Press 1996/97.

[U] P. Ullrich: Die Entdeckung der Analogie zwischen Zahl- und Funktionenkörpern: der Ursprung der „Dedekind-Ringe", Manuskript Münster 1997.

Saarbrücken E.-U. Gekeler

Bertram Huppert

Character Theory of Finite Groups

1998. 24 x 17 cm. VI, 618 pages. Hardcover.
DM 328,–/öS 2394,–/sFr 292,–
USA, Canada, Mexico. US$ 168.95
• ISBN 3-11-015421-8

de Gruyter Expositions in Mathematics, Volume 25

Gives in its first section a self-contained introduction to the character theory of finite groups, which can be used for a first lecture on the subject. Later sections concentrate on Clifford theory, that is the relations between characters of a group and its normal subgroups.

Karl H. Hofmann · Sidney A. Morris

The Structure of Compact Groups

A Primer for the Student – A Handbook for the Expert

Banach Algebras '97

Proceedings of the 13th International Conference on Banach Algebras, held at the Heinrich Fabri Institute of the University of Tübingen in Blaubeuren, July 20–August 3, 1997

Editors:
Ernst Albrecht · Martin Mathieu

1998. 24 x 17 cm. X, 566 pages. Hardcover.
DM 328,–/öS 2394,–/sFr 292,–
USA, Canada, Mexico. US$ 148.95
• ISBN 3-11-15466-8

Contains refereed research articles on Banach algebras and related areas. Topics covered include algebraic structure of Banach algebras, dual Banach algebras and invariant subspaces. Some papers discuss the interplay with Fredholm theory, differential and pseudo-differential operators, several variable spectral theory or nonassociative normed algebras.

The Monster and Lie Algebras