E 20577 F
101. Band Heft 1
ausgegeben am 30.3.1999

DMV

Jahresbericht
der Deutschen Mathematiker-Vereinigung

Herausgegeben von A. Krieg

H. Lange, H. Triebel

Jahresbericht
der Deutschen Mathematiker-Vereinigung

Der „Jahresbericht“ ist das offizielle Veröffentlichungsorgan der Deutschen Mathematiker-Vereinigung, für dessen inhaltliche Gestaltung im Auftrag des Präsidiums der jeweilige Herausgeber zuständig ist. Im „Jahresbericht“ sollen vornehmlich Überblicksartikel über Teilgebiete der reinen und angewandten Mathematik, Nachrufe sowie historische Artikel und Buchbesprechungen veröffentlicht werden.

Manuskripte

Alle für die Schriftleitung des Jahresberichts bestimmten Briefe und Manuskripte sind an Prof. Dr. A. Krieg zu richten. Für Buchbesprechungen ist Prof. Dr. H. Lange zuständig. Bücher, von denen eine Besprechung erfolgen soll, werden bei den Verlagen angefordert. Autoren von Buchbesprechungen und Artikeln werden gebeten, die vorhandenen LATEX-style-files für den Jahresbericht zu verwenden. Somit kann der Aufwand für die Satzarbeiten erheblich reduziert werden. Sollten Illustrationen in die Arbeiten integriert werden, können diese auch in das Satzsystem übernommen werden. Dazu ist es erforderlich, daß die Bilddaten der Abbildungen nochmals in separaten Dateien einzeln abgespeichert werden. Die LATEX-style-files sind neben weiteren Informationen im Internet verfügbar unter

http://www.mathA.rwth-aachen.de/dmv/index.html

Auf Anfrage können die style-files auch auf Diskette zugeschickt werden.

Grundsätzlich sollen nur solche Manuskripte eingereicht werden, die nicht gleichzeitig an anderer Stelle zur Veröffentlichung eingereicht oder bereits veröffentlicht worden sind. Mit der Annahme zur Veröffentlichung erwirbt der Verlag das Verlagsrecht zur Vervielfältigung und Verbreitung sowie das Recht der Übersetzung in andere Sprachen.

Bezugsinformationen

Jährlich wird ein Band veröffentlicht, bestehend aus 4 Heften, die vierteljährlich erscheinen. Der Bezug ist nur bandweise möglich.

Der im voraus zahlbare Bezugspreis pro Band beträgt zur Zeit DM 168,– einschließlich Versand. Bestellungen nehmen jede Buchhandlung oder der Verlag entgegen.

Für persönliche Mitglieder der DMV, die den Jahresbericht zu beziehen wünschen, ist der zwischen DMV und Verlag vereinbarte Bezugspreis maßgebend, der im Rahmen des Mitgliedsbeitrags erhoben wird.

Verlag:
B. G. Teubner GmbH Stuttgart und Leipzig, Industriestraße 15, D-70565 Stuttgart
Postfach 801069, D-70510 Stuttgart, Tel. (0711) 78901-0, Telefax (0711) 78901-10
e-mail: info@teubner.de
Teubner Home Page http://www.teubner.de

Verantwortlich für den Anzeigenteil: Albrecht Luscher

Printed in Germany – ISSN 0012-0456
Satz: Fotosatz Behrens, D-68723 Oftersheim
Druck: pagina media gmbh, D-69502 Hemsbach

Jahresbericht
der Deutschen Mathematiker-Vereinigung

Inhalt Band 101, Heft 1

1. Abteilung

2. Abteilung

In den nächsten Heften erscheinende Arbeiten:

A. Bergmann, H. W. Knobloch: Hermann Schmidt 1902–1993
H. Karcher: Eingebettete Minimalflächen und ihre Riemannschen Flächen
P. Slodowy: The early development of the representation theory of semisimple Lie groups: A. Hurwitz, I. Schur, H. Weyl
J. Zabczyk: Infinite Dimensional Diffusions in Modelling and Analysis

---

Anschriften der Herausgeber

Prof. Dr. Aloys Krieg, Lehrstuhl A für Mathematik, RWTH Aachen, Templergraben 55, 52056 Aachen
email: krieg@rwth-aachen.de

Prof. Dr. Ursula Gather, Fachbereich Statistik, Universität Dortmund, Vogelpothsweg 87, 44221 Dortmund
email: gather@omega.statistik.uni-dortmund.de

Prof. Dr. Ernst Heintze, Institut für Mathematik, Universität Augsburg, 86135 Augsburg
email: heintze@math.uni-augsburg.de

Prof. Dr. Bernhard Kawohl, Mathematisches Institut, Universität zu Köln, 50923 Köln
email: kawohl@mi.uni-koeln.de

Prof. Dr. Herbert Lange, Mathematisches Institut, Friedrich-Alexander-Universität Erlangen-Nürnberg, Bismarckstraße 1½, 91054 Erlangen
email: lange@mi.uni-erlangen.de

Prof. Dr. Hans Triebel, Mathematisches Institut, Friedrich-Schiller-Universität, Ernst-Abbe-Platz 1–4, 07740 Jena
email: triebel@minet.uni-jena.de

Bezugshinweis

Früher erschienene Bände (ab Band 68) des „Jahresberichts der Deutschen Mathematiker-Vereinigung" können durch den Buchhandel oder den Verlag bezogen werden.

Nachdruck der Bände 41 bis 67 liefert: Swets & Zeitlinger, Heereweg 347b, POB 810, NL-2160 SZ Lisse/Holland

Jber. d. Dt. Math.-Verein.
101 (1999) 1–25
Mathematics Subject Classification: 35Q30
Keywords and Phrases: Stokes Operator, Navier-Stokes Equation, Energy Inequality, Singularities, Global Solution

The Navier-Stokes Equations – a Neverending Challenge?

M. Wiegner, Aachen

Introduction

If one reflects on the development in the mathematical study of one of the most famous partial differential equations, the Navier-Stokes equations, the first name coming to ones mind is that of J. Leray. More than sixty years have passed since the publication of his pioneering paper [L34], in which he layed the ground to a wide and fruitful field of research to follow, and which is still not at its end. In this paper he gave important answers to the problems of existence, uniqueness and regularity of solutions to the (time dependent) Navier-Stokes equations, and posed conjectures and questions, which are – partly – still today unsolved.
Nevertheless the challenge of these equations has stipulated and influenced the treatment and improved and refined the methods of research of partial differential equations to an extent which can hardly be overestimated. Especially the last twenty years have brought a bulk of achievements, survey articles, books and an increasing number of research papers. Mathematicians working in this field are aware of the monographs of O.A. Ladyzhenskaya [La 69], R. Temam [T 77], W. von Wahl [vW 86], P.L. Lions [Li 96], and the recent two volumes of P. Galdi [Ga 98] on the stationary Navier-Stokes equations. As a starting point let us mention the paper of W. von Wahl [vW 78] in volume 80 of the Jahresberichte der DMV, and its anniversary was one of the reasons to take up the subject again.

So if one tries to survey the developments of the last twenty years on a limited number of pages, it is evident that one cannot follow all the twigs of this tree, that one will possibly overlook someones contributions, which might turn out to be of future importance, and that it may happen that one emphasizes some results due to personal taste. Let me apologize for this right at the beginning.

Last let me gratefully acknowledge that a lot of discussions with several colleagues have (hopefully) improved this presentation, and my special thanks in this respect have to go to Hermann Sohr from Paderborn.

1 The Equations

The instationary Navier-Stokes equations model the time evolution of an incompressible fluid, filling a domain $\Omega \subset \mathbf{R}^n$; physically, $n = 2$ or 3. The unknowns are the velocity field

$$u : \Omega \times [0, T] \to \mathbf{R}^n$$

and a pressure

$$p : \Omega \times [0, T] \to \mathbf{R}$$

fulfilling the equations

$$\begin{aligned} u_t - \nu \triangle u + (u \cdot \nabla)u + \nabla p &= f \\ div\ u &= 0 \end{aligned} \tag{1}$$

supplemented by an initial condition

$$u(x, 0) = a(x)\ , x \in \Omega$$

and some boundary condition; in general one assumes the "no-slip"-condition

$$u = 0 \text{ on } \partial\Omega \times (0, T)$$

if $\partial\Omega \neq \emptyset$, and some condition at infinity, if Ω is unbounded.
The viscosity ν (a positive constant), the exterior force f and the initial velocity a are given and supposed to belong to some function spaces. Here one is free to pose a wide variety of assumptions; comments on this will follow.

From daily experience one knows, that the viscosity ν (precisely, the Reynoldsnumber $R = \frac{UL}{\nu}$, relating the viscosity to characteristic scales of velocity and length) has a crucial influence on the dynamics of the fluid. It measures the proportion of the inertia term $|(u \cdot \nabla)u|$ in relation to the viscous term $|\nu \triangle u|$. At the extreme ends, there are the Euler equations ($\nu = 0$ as the limit of high Reynoldsnumbers), while on the other side, we have the "slow flows", just given by dropping the nonlinear term $(u \cdot \nabla)u$. We shall consider these linear instationary Stokes equations in greater detail below. The research and the problems of the Euler equations (and further models) are a story of its own; see for this the second half of the first volume of the monograph by P.L. Lions [Li 96]. On the other hand a lot of *mathematical* problems of the Navier-Stokes equations are independent of the size of ν; hence we shall assume $\nu = 1$ unless otherwise stated.

The smoothness of the boundary $\partial\Omega$ will in general be tacitly assumed, though there is some important research for domains with corners and other irregular domains, being e.g. basic for some free boundary value problems. For further information on this topic one may consult e.g. the monograph by L. Stupelis [St 95], see also P. Deuring- W. von Wahl [DvW 95] and P. Galdi-C. Simader-H. Sohr [GaSiS 94].

Besides the monographs mentioned above the reader may wish to get an introduction to fluid mechanics. To my opinion, the "Elementary Fluid Dynamics" by Acheson [A 98] may serve as a good start; Chorin-Marsden [ChM 98] does this on an undergraduate level.

2 The Stationary Stokes System and the Stokes Operator

Dropping the time-dependence and the nonlinear term one gets the Stokes system

$$(2) \qquad \left.\begin{aligned} -\triangle u + \nabla q &= f \\ div\ u &= 0 \end{aligned}\right\} \quad \text{on} \quad \Omega \qquad u = 0 \quad \text{on} \quad \partial\Omega$$

The complete first volume of Galdi's recent monograph [G 98] is devoted to it and gives information on the state of research and the open questions for this system. Hence we feel free to comment only on those results which shall be needed in the following.

A modern functional analytic treatment of partial differential equations is based on operators in function spaces. A natural choice are those based on $L_2(\Omega)$ or more generally on $L_p(\Omega), 1 < p < \infty$. As one is interested in divergence free functions, one is led to consider the closure of the smooth divergence free vector fields in L_p, that is

$$L_{p,\sigma} = \text{ clos } \{u \in C_0^\infty(\Omega)^n | div\ u = 0\}$$

which is again a reflexive Banachspace. The natural question now is the following: Is there a unique decomposition (the so called Helmholtz decomposition)

$$L_p = L_{p,\sigma} \oplus G_p$$

with a linear continuous projection $P : L_p \to L_{p,\sigma}$ and how to characterize G_p?
It turns out that the construction of P is related to the unique solvability of a certain Neumann-problem for the Laplacian. As an example, if u is smooth and Ω a bounded domain in $\mathbf{R}^3$, then

$$(Pu)(x) = \frac{1}{4\pi} \text{rot} \left(\int_\Omega \frac{\text{rot}\, u(y)}{|x-y|} dy \right) - \nabla h(x)$$

where h is harmonic with Neumann boundary values given by $\nu \cdot Pu = 0$ on $\partial\Omega$, ν the outer normal.

Obviously P is a nonlocal operator depending on Ω, which does neither preserve boundary values nor commutes with differentiation (if $\Omega \neq \mathbf{R}^n$). These facts are a repeated source for wrong proofs and claims in the field of Navier-Stokes equation

The Helmholtz decomposition is valid in case $p = 2$ for **all** domains (and $L_{2,\sigma}$ is orthogonal to G_2). If $p \neq 2$, this might not be true in general, counterexamples are mentioned in III. Remark 1.3, in [Ga 98, Vol. I]. This decomposition was proved by D. Fujiwara and H. Morimoto [FM 77] for bounded domains; for exterior domains see e.g. G.G. Simader and H. Sohr [SiS 92]. Domains with noncompact boundaries were considered e.g. by G. Thaether [Th 95] and R. Farwig- H. Sohr [FaS 96a], and for estimates in weighted spaces on unbounded domains see e.g. [FaS 97] and M. Specovius [Sp 90].

3 The Stokes Semigroup

The instationary Stokes system is given by

$$\begin{array}{rll} \left.\begin{array}{r} u_t - \triangle u + \nabla q = f \\ div\ u = 0 \end{array}\right\} & \text{on} & (0,T] \times \Omega \\ u(0,x) = a(x) & \text{on} & \Omega \\ u = 0 & \text{on} & [0,T] \times \partial\Omega \end{array} \tag{3}$$

Having the Stokes operator A at hand, (3) may be viewed at as an ordinary differential equation in the Banach space $L_{p,\sigma}$

$$\begin{aligned} u'(t) + Au(t) &= \tilde{f}(t) \\ u(0) &= a \end{aligned}$$

with $u \in C([0,T], D(A)) \cap C_1((0,T], L_{p,\sigma})$ (assuming w.l.o.g. $a \in L_{p,\sigma}$).

Hence the research concentrated on the question, whether A generates a semigroup. Though the system is not parabolic, it turns out that nevertheless

"A generates an analytic semigroup e^{-tA}, which is uniformly bounded".

This is the Stokes semigroup. In the case of a Hilbert space, $p = 2$, this is evident, as then A is nonnegative and selfadjoint. In general one has to prove a resolvent estimate

$$\|(\lambda + A)^{-1} f\|_p \leq C_\varepsilon |\lambda|^{-1} \|f\|_p$$

for $\lambda \in S_\varepsilon := \{z \in \mathbf{C} | z \neq 0, |\arg z| < \pi - \varepsilon\}$.

There is one exception of the fact that the Helmholtzprojection does not commute with the Laplacian, namely the whole space $\Omega = \mathbf{R}^n$. Hence in this case the resolvent estimate reduces to that for the Laplacian. Next the case of the halfspace $\Omega = \mathbf{R}^n_+$ was settled by M. Mc Cracken [McC 81] and the case of bounded domains by Y. Giga [G 81]. In the latter case the norm of the semigroup is bounded by an exponentially decaying factor.

The case of an exterior domain $\Omega = \mathbf{R}^n \setminus \overline{G}$, G simply connected and bounded, was proved by W. Borchers and H. Sohr [BS 87], if $n \geq 3$. Two-dimensional exterior domains proved to be more difficult, and the result was finally given by W. Borchers and W. Varnhorn [BV 93], and precise potential theoretic estimates for the resolvent equation can be found in the book of W. Varnhorn [Va 94].

Other types of domains where the result holds, are

- Domains with $\partial\Omega$ being a compact perturbation of an $(n-1)$-dimensional hyperplane (R. Farwig and H. Sohr [FS 94])
- Cones in $\mathbf{R}^3$ (P. Deuring [D 93])
- Aperture domains (R. Farwig and H. Sohr [FS 96a])
- Domains with a finite number of outlets at infinity
- Infinite layers like $\mathbf{R}^2 \times [-1, 1]$ (M. Wiegner [W 94b])
- Domains of the type $\mathbf{R}^k \times \Omega, \Omega$ bounded.

Apart from the boundedness of the semigroup

$$e^{-tA} : L_{p,\sigma} \rightarrow L_{p,\sigma},$$

one is interested also in $L_p - L_q$–estimates, which are used in proving existence of solutions as well as in the study of time-asymptotic behaviour. The basic paper here is that of T. Kato [Ka 84] for the case $\Omega = \mathbf{R}^n$. By $L_p - L_q$-estimates, one means the following: The solution of the heat-equation on $\mathbf{R}^n$

$$u_t - \Delta u = 0 \text{ with initial data } u_0$$

fulfills the estimates

$$\|u(t)\|_q \leq ct^{-\mu}\|u_0\|_p \text{ and } \|\nabla u(t)\|_q \leq ct^{-\mu-\frac{1}{2}}\|u_0\|_p$$

for $1 \leq p \leq q \leq \infty$ with $\mu = \frac{n}{2}\left(\frac{1}{p} - \frac{1}{q}\right)$. Now the same estimates are valid for the Stokes-equation on $\mathbf{R}^n$. The case of different unbounded domains bears more complications. A breakthrough was the result of H. Iwashita [I 89], that for exterior domains

$$\|e^{-tA}v\|_q \leq ct^{-\mu}\|v\|_p \text{ and } \|\nabla e^{-tA}v\|_q \leq ct^{-\mu-\frac{1}{2}}\|v\|_p$$

with μ as above, but with the latter estimate restricted to $q \leq n$. That his restriction is unavoidable in the sense, that higher values of q will not increase the limit exponent $\frac{n}{2p}$, was shown by P. Maremonti and V. A. Solonnikov [MaSo 96]. It is connected with the fact, that for exterior domains the estimate

$$\|D^2u\|_p \leq c\|Au\|_p$$

is in general valid only for $p < \frac{n}{2}$, and has consequences for the time decay of the solutions.

4 Weak solutions

The above results were unknown to Leray in the 30s – so how did he achieve answers to the existence problem?

One observes that for smooth (u,p) one may multiply $(u \cdot \nabla)u + \nabla p$ by u and integrate with respect to space. The result is zero, if u is divergencefree and vanishes on the boundary. Hence integration over space-time gives for smooth solutions the **energy(in-)equality**

$$(EI) \quad \|u(t)\|_2^2 + 2\int_0^t \|\nabla u(s)\|_2^2 ds \le \|u_0\|_2^2 + 2\int_0^t \int_\Omega f \cdot u dx ds$$

which may serve as the basic estimate for a Galerkin procedure in passing to the limit of the finite dimensional approximations. His result (for general domains see E. Hopf [H 51]) was the existence of a *global weak solution* (on an arbitrary time intervall $[0, T]$) in the following sense:

Definition 4.1. *Let* $f \in L_2((0,T) \times \Omega)$.
$u \in L_\infty((0,T), L_{2,\sigma}) \cap L_2((0,T), \overset{\circ}{H}{}_2^1)$ *is a weak solution to (1), if*

$$\int_0^T \int_\Omega (-u \cdot \phi_t + \nabla u \nabla \phi \quad + \quad (u \cdot \nabla)u \cdot \phi) dx dt$$

$$= \int_\Omega u_0 \cdot \phi(0) dx \quad + \quad \int_0^T \int_\Omega f \cdot \phi dx dt$$

for all smooth divergence free vector fields ϕ *of compact support with* $\phi(T) = 0$.
This type of solution is moreover weakly continuous from $[0, T]$ into $L_{2,\sigma}$. As we shall see below there are further methods to construct weak solutions; but all weak solutions constructed so far do fulfill the energy inequality (EI).

At the first glance it seems that the pressure has disappeard. But it may be reconstructed from the fact, that a distribution S with $\langle S, \phi \rangle = 0$) for divergence-free testvectors may be represented by some distribution π as $S = \nabla\pi$. The properties of π are derived from that of u – as a rule of thumb one may keep in mind:

"π behaves like $|u|^2$"

There are exceptions of course (e.g. with respect to the time-regularity for $t \to 0$, R. Rautmann [Ra 83]). It may even cause problems to verify that π belongs to some certain L_q-space in unbounded domains. These informations are important for the study of local regularity properties, see § 8. Further at some occasions, one has to check the properties of the pressure already during the process of solving the equations. This occurs e.g. if one is interested in local properties of the solution like the validity of a localized energy inequality, as can be found in L. Caffarelli, R. Kohn and L. Nirenberg ([CKN 82]) and H. Sohr, W. von Wahl and M. Wiegner ([SvWW 86]).

Someone not so familiar with partial differential equations might now ask : If the existence was proved half a century ago – where is the challenge now? The answer is:
The intimately connected questions of uniqueness and regularity!

5 Uniqueness

The natural way to prove uniqueness is to subtract the equations for the presumably two different solutions u_1, u_2, multiply by the differences $v = u_1 - u_2$ and integrate over spacetime $\Omega_t = \Omega \times [0, t]$. Estimating the resulting terms with the intention to make use of the only information one has, the energy inequality, Sobolev's inequality

$$\|v\|_4 \leq c\|v\|_2^{1-\frac{n}{4}}\|\nabla v\|_2^{\frac{n}{4}} \text{ for } n = 2, 3$$

comes into play. As solutions are divergence free, terms like $\int\limits_{\Omega_t}(u_i\nabla)v\cdot v$ vanishes, if $v = 0$ on $\partial\Omega$. Hence we are left with

$$\begin{aligned}
&|\int\limits_{\Omega_t}((u_1-u_2)\cdot\nabla)u_2\cdot(u_1-u_2)dxds\,| \\
&\leq \int\limits_0^t \|\nabla u_2\|_2\|u_1-u_2\|_4^2 ds \\
&\leq c\int\limits_0^t \|\nabla u_2\|_2\|\nabla(u_1-u_2)\|_2^{\frac{n}{2}}\|u_1-u_2\|_2^{2-\frac{n}{2}}ds \\
&\leq \int\limits_0^t \|\nabla(u_1-u_2)\|_2^2 ds + \int\limits_0^t \alpha(s)\|u_1-u_2\|_2^2 ds
\end{aligned}$$

with $\alpha(s) = \tilde{c}\|\nabla u_2(s)\|_2^{\frac{4}{4-n}}$. The first term may be absorbed by the terms stemming from the viscous part, and we end with

$$y(t) \leq \int\limits_0^t \alpha(s)y(s)ds$$

for $y(t) = \|u_1(t) - u_2(t)\|_2^2$.

Note, that such an estimate holds trivially in all dimensions, if $\|\nabla u_2\|_\infty$ is finite. Therefore Gronwell's inequality implies uniqueness, provided $\alpha \in L_1(0, T)$. But the energy inequality does imply this *only in two, but not in three* dimensions! To state it differently: One needs some more information about the regularity of *at least one* weak solution to claim uniqueness. (Note that the same arguments apply to the problem of continuous dependence on the data).

This simple but crucial observation is the fundamental reason that up to now *uniqueness of weak solutions* to the Navier-Stokes equations (and therefore also the question of regularity!) remains the outstanding problem in this field.

Let us collect in the following some of the efforts to reduce the assumptions on the way to uniqueness. Suppose u and v are two weak solutions for the same data a and f. The above proof implies that *all weak* solutions have to coincide as long as *one regular* solution, say with $\|\nabla u(\cdot, t)\|_\infty \in L_1(0, T)$, exists. Thus one has at least *local uniqueness* – if one starts with smooth data, one has the existence of a smooth solution, locally in time (see § 6), and there is no further weak solution during this interval.

Next we have uniqueness in two dimensions (and also, if the flow is of "two dimensional type", see § 10).

The general way of attack is to assume additional integrability properties for (at least one of) the weak solutions, say u. J. Serrin [Se 62] assumed $u \in L_s((0,T), L_{r,\sigma}(\Omega))$ with $S(r,s) := \frac{2}{s} + \frac{n}{r} = 1, n \leq r \leq \infty$. This assumption has two consequences. First such weak solutions fulfill a strong energy inequality

$$\|u(t)\|_2^2 + 2\int_s^t \|\nabla u(\tau)\|_2^2 d\tau \leq \|u(s)\|_2^2 + 2\int_s^t \langle f(\tau)\cdot u(\tau)\rangle d\tau$$

for all $0 \leq s \leq t$. (In fact even the equality is valid.) Let us remark that in general weak solutions fulfill only a weaker version of it; see § 7. One result is needed for this – any vectorfield $v \in \overset{\circ}{H}{}_2^1 \cap L_n$ with $div\ v = 0$ may be approximated by divergence free test functions in the (stronger!) norm $|||v||| = ||v||_{H_2^1} + ||v||_{L_n}$. This was shown in the standard domains, e.g. bounded and exterior domains, see e.g. K. Masuda [M 84] and H. Kozono-H. Sohr [KS 92], but needs a proof.

Second J. Serrin [Se 63] could show that for $n \leq 4$, bounded domains and $r > n$, no further weak solution could exist. This was generalized by K. Masuda to arbitrary dimensions and all domains fulfilling the above density property. The critical case $L_\infty((0,T), L_n(\Omega))$ was more complicated. H. Sohr and W. von Wahl ([SvW 84]) showed for bounded domains and some assumptions on the data that either $u \in C_0([0,T], L_n(\Omega))$ is sufficient for uniqueness or if *both* u *and* v belong to $L_\infty([0,T], L_n(\Omega))$. By a recent result of H. Kozono and H. Sohr [KS 98] this may again be relaxed to what one expects: If Ω is a standard domain with the density property above, it suffices, if only $u \in L_\infty([0,T], L_n(\Omega))$. This is the state of the art at the moment – an integrability condition with $S(r,s) > 1$ is not known to suffice. It is possible to pose also assumptions on the integrability of the norm of the gradient of u, see e.g. [PRST 94].

Therefore the gap between the space $L_\infty([0,T], L_2(\Omega))$, in which *existence* is known and $L_\infty([0,T], L_3(\Omega))$ in three dimensions, where *uniqueness* holds, still waits for being closed.
We shall come back later to Serrin's quantity $S(r,s)$ in § 8.

6 Strong solutions

As mentioned earlier, $L_p - L_q$-estimates may serve to construct (strong) solutions of the Navier-Stokes equations. This chapter is devoted to a complete proof of this fact, which avoids moreover fractional powers of the Stokes-operator. For simplicity let us assume $f \equiv 0$ and let Ω be a domain, such that these $L_p - L_q$-estimates are valid; e.g. a bounded or an exterior domain in $\mathbf{R}^n, n \geq 3$.
Starting with T. Kato [Ka 84], who considered the $\mathbf{R}^n$-case, there have been several proofs of this type for various domains. Nevertheless it seems to make sense to present a rather elementary, but complete and selfcontained proof, boiling everything down to the basic ingredient, the estimates for the Stokes semigroup.

In fact, all what we need is

$$\|e^{-tA}v\|_q \le c_0 t^{-\frac{n}{2}\left(\frac{1}{p}-\frac{1}{q}\right)}\|v\|_p \quad \text{for} \quad \frac{n}{2} \le p \le q < \infty$$

$$\|\nabla e^{-tA}v\|_n \le c_1 t^{-\frac{n}{2p}}\|v\|_p \quad \text{for} \quad \frac{n}{2} < p \le n$$

and Hölder's inequality

$$\|P((v\cdot\nabla)v)\|_{\frac{n}{1+\delta}} \le c_2(\delta)\|v\|_{\frac{n}{\delta}}\|\nabla v\|_n$$

for $\delta \in (0,1)$.

Theorem 6.1. *Let $a \in L_{n,\sigma}(\Omega)$. Then*

- *there is a maximal time $T > 0$, such that a solution $u \in C([0,T), L_{n,\sigma}(\Omega))$ of the Navier-Stokes equations exists, which is unique and smooth for $t > 0$.*
- $\sup\limits_{t\le T_1} t^{\frac{1}{2}}\|\nabla u(t)\|_n$ *and* $\sup\limits_{t\le T_1} t^{\left(1-\frac{n}{r}\right)/2}\|u\|_r$ *are finite for $T_1 < T, r \ge n$.*
- $\int\limits_0^{T_1} \|u(t)\|_r^s dt < \infty$, *if* $\frac{2}{s}+\frac{n}{r} = 1, r > n$.
- *if the maximal existence time T is finite, u is not uniformly continuous on $[0,T)$.*
- *$T = \infty$, if $\|a\|_n$ is sufficiently small, and then the above norms with* $T_1 = \infty$ are bounded by $c\|a\|_n$.

Remark 6.2. *By Hölder's inequality, $u(t) \in L_2$ too in case of bounded domains. But if Ω is unbounded, it is not a-priori clear whether this solution has finite energy. Hence for unbounded domains one should assume additionally $a \in L_2$ with the consequence, that any weak solution (according to Definition 4.1) has to coincide with the above strong solution as long as the latter exists.*

Proof. Define the iteration procedure $u_{j+1}(t) = u_0(t) - F(u_j)(t)$ with $u_0(t) = e^{-tA}a$ and $F(v)(t) = \int\limits_0^t e^{-(t-s)A}P((v(s)\cdot\nabla)v(s))ds$.

Fix $\delta \in (0,1], 0 < T \le \infty$ and let

$$K_j := \sup_{t\le T} t^{(1-\delta)/2}\|u_j(t)\|_{\frac{n}{\delta}}$$

$$K_j^1 = \sup_{t\le T} t^{\frac{1}{2}}\|\nabla u_j(t)\|_n$$

and $R_j = \max\{K_j, K_j^1\}$. Choose $p = \frac{n}{1+\delta}, q = \frac{n}{\delta}$ in the $L_p - L_q$–estimate to get

$$K_{j+1} \le K_0 \quad + \quad c\sup_{t\le T} t^{(1-\delta)/2}\int\limits_0^t (t-s)^{-\frac{1}{2}}\|u_j(s)\|_{n/\delta}\|\nabla u_j(s)\|_n ds$$

$$\le K_0 \quad + \quad c(\delta)K_jK_j^1$$

for $\delta \geq \delta_0$, implying

$$R_{j+1} \leq R_0 + \gamma R_j^2$$

with some $\gamma = \gamma(\delta_0) \geq 1$ for $\delta_0 \leq \delta \leq 1$. If now

$$(*) \qquad R_0 \leq \frac{1}{6\gamma}$$

one has $R_j \leq 2R_0$ for all j by induction. Similarly, considering the sequence

$$w_j(t) := u_j(t) - u_{j-1}(t), w_0(t) := u_0(t),$$

the corresponding quantities $\tilde{R}_j$ fulfill now

$$\tilde{R}_{j+1} \leq 2\gamma\tilde{R}_j R_j$$

$$\text{hence } \tilde{R}_{j+1} \leq \frac{2}{3}\tilde{R}_j.$$

Thus

$$\begin{aligned} \|w_{j+1}(t)\|_n &\leq c\int_0^t (t-s)^{-\delta/2}(\|w_j(s)\nabla u_j(s)\|_{\frac{n}{1+\delta}} + \|u_j(s)\nabla w_j(s)\|_{\frac{n}{1+\delta}})ds \\ &< cR_j\tilde{R}_j \\ &\leq c(2/3)^j \end{aligned}$$

We see, that $u_k(t) = \sum_{j=0}^{k} w_j(t)$ is a Cauchysequence in $C([0,T], L_n(\Omega))$, (provided we show that u_j remains in this space) and converge to some solution $u \in C([0,T], L_n(\Omega))$ of the integral equation

$$u(t) = e^{-tA}a - \int_0^t e^{-(t-s)A}P((u(s)\cdot\nabla)u(s))ds.$$

Moreover we have the additional weighted estimates

$$t^{(1-\delta)/2}\|u(t)\|_{\frac{n}{\delta}} \leq 2R_0$$

$$t^{\frac{1}{2}}\|\nabla u(t)\|_n \leq 2R_0$$

for $t \leq T$.

The proof that $\int_0 \|u(t)\|_r^s dt < \infty$, with the exponents fulfilling the Serrincondition $\frac{2}{s} + \frac{n}{r} = 1, n < r < \infty$ needs an additional idea. Consider first $U : L_r \cap L_{\frac{n}{2}} \to L_1(\mathbf{R})$, defined by

$$U(a)(t) = \|e^{-tA}Pa\|_r \text{ for } 0 \leq t \leq T \text{ (and zero elsewhere).}$$

Obviously $|U(a)(t)| \leq c\|a\|_r$ and meas $\{t\,|\,U(a)(t) > \alpha\} \leq c\left(\frac{\|a\|_{\frac{n}{2}}}{\alpha}\right)^{s_1}$ with $\frac{1}{s_1} = 1 - \frac{n}{2r}$ by the $L_{\frac{n}{2}} - L_r$ estimate. Let θ be given by $\frac{1-\theta}{r} + \theta\frac{2}{n} = \frac{1}{n}$.

By the interpolation theorem of Marcinkiewicz, U is of strong type (n, s) with $\frac{1}{s} = \frac{n}{2}\left(\frac{1}{n} - \frac{1}{r}\right)$, which gives $\int_0^T \|u_0(t)\|_r^s dt \le c\|a\|_n^s, \frac{2}{s} + \frac{n}{r} = 1$. Having dealt with the linear part, the iteration process with $r = \frac{n}{\delta}, s = \frac{2}{1-\delta} > 2$ implies:

$$\|u_{j+1}(t)\|_{\frac{n}{\delta}} \le \|u_0(t)\|_{\frac{n}{\delta}} + cR_0 \int_0^t \frac{d\tau}{(t-\tau)^{\frac{1}{2}}\tau^{\frac{1}{2}}} \|u_j(\tau)\|_{\frac{n}{\delta}} d\tau.$$

Choose β with $2 < \beta < s$ and apply Hölder's inequality, then

$$\|u_{j+1}(t)\|_{\frac{n}{\delta}}^{\beta} \le c\|u_0(t)\|_{\frac{n}{\delta}}^{\beta} + cR_0^{\beta} t^{-1} \int_0^t \|u_j(\tau)\|_{\frac{n}{\delta}}^{\beta} d\tau$$

and Hardy's inequality with $\dfrac{s}{\beta} > 1$ implies

$$I_{j+1} \le cI_0 + cR_0 I_j \text{ for } I_j = \left(\int_0^T \|u_j(t)\|_r^s dt\right)^{\frac{1}{s}}, \text{ hence}$$

$$\int_0^T \|u(t)\|_r^s dt \le c \int_0^T \|u_0(t)\|_r^s dt,$$

the claim.
Now continuity of $u_j(t)$ is obvious for $t > 0$, as
$F(u_j)(t_2) - F(u_j)(t_1) = \left(e^{-(t_2-t_1)A} - I\right)\left(u_{j+1}(t_1) - u_0(t_1)\right) + R(t_1, t_2)$
with $\|R(t_1, t_2)\|_n \le c_\varepsilon |t_2 - t_1|^{(1-\delta)/2}$ for $t_i \ge \varepsilon$.
The continuity at $t = 0$ needs a little trick:
Choose $\mu > 0$ and let $E_j := \sup\limits_{t \le \varepsilon} \|u_j(t) - e^{-\mu A} a\|_n$. Then one gets

$$E_{j+1} \le E_0 + \gamma E_j K_j^1 + c \sup_{t \le \varepsilon} \int_0^t (t-s)^{-\delta/2} s^{-1/2} K_j^1 \|e^{-\mu A} a\|_{\frac{n}{\delta}} ds$$

$$\le E_0 + \frac{1}{3} E_j + c\|a\|_n \left(\frac{\varepsilon}{\mu}\right)^{(1-\delta)/2}.$$

By induction

$$E_j \le 2E_0 + 2c\|a\|_n \left(\frac{\varepsilon}{\mu}\right)^{(1-\delta)/2}$$

Choosing first μ with $\|e^{-\mu A} a - a\|_n$ small, than $\varepsilon > 0$, and keeping in mind, that $\|u_0(t) - a\|_n \to 0$ for $t \to 0$, $\sup\limits_{t \le \varepsilon} \|u_j(t) - a\|_n$ is small (independent of j).

Thus a solution of the integral equation is constructed on $[0, T]$, provided R_0 is small. As $R_0 \le c\|a\|_n$, independent of T, **small** initial values imply **global** existence.

Otherwise one gets

$$R_0 \le \|a - e^{-\mu A}a\|_n + \|a\|_n\left(\frac{T}{T+\mu}\right)^{\frac{1}{2}}$$

which is small by choosing first μ and then T; hence there is always a local solution. Note, that T can be chosen uniformly for small balls in L_n in order that $R_0 \le \frac{1}{6\gamma}$; hence a local solution may be continued beyond T, if $u : [0,T] \to L_n$ is uniformly continuous. We still have to show that the so called mild solution – the solution of the integral equation – is in fact a strong solution for $t > 0$. Thus, for $\varepsilon < \delta$, consider the quantities

$$S_j^0 = \sup_{\substack{0<h\\ t+h\le T}} t^{(1-\varepsilon)/2}h^{-(\delta-\varepsilon)/2}\|u_j(t+h) - u_j(t)\|_{\frac{n}{\delta}}$$

$$S_j^1 = \sup_{\substack{0<h\\ t+h\le T}} t^{(1+\delta-\varepsilon)/2}h^{-(\delta-\varepsilon)/2}\|\nabla u_j(t+h) - \nabla u_j(t)\|_n$$

and $S_j = \max\{S_j^0, S_j^1\}$.

Now for $t \ge 2h$

$$\|e^{-(t+h)A}a - e^{-tA}a\| \le h\|Ae^{-tA}a\| \le 2(h)\|e^{-(t/2)A}a\| \le ch^{(\delta-\varepsilon)/2}R_0 ;$$

the estimate for $t \le 2h$ is trivial. Thus S_0^0 – and similarly S_0^1 with the help of $\|Ae^{-sA}a\|_n \le cs^{-\frac{1}{2}}\|\nabla e^{-sA}a\|_n$ – is estimated by cR_0. In the same spirit one proves

7 Turbulent solutions

There are different methods of construction of weak solutions. The first, based on a Galerkin-method together with the energy inequality (EI) was already mentioned in § 4. But do these solutions also fulfill the (so called) generalized energy inequality

$$(GEI)\ \|u(t)\|_2^2 + 2\int_s^t \|\nabla u(\tau)\|_2^2 d\tau \leq \|u(s)\|_2^2 + 2\int_s^t \langle f(\tau), u(\tau)\rangle d\tau$$

for almost all $s \geq 0$ and all $t \geq s$?
Following J. Leray, let us call such a weak solution a **turbulent** solution.

The validity of (GEI) was assumed tacitely for a long time till K. Masuda noted in 1984 that there are problems in unbounded domains. The reason for this is that weak convergence of approximations u_k to a weak solution u in L_2 might give $\|u(s)\|_2^2 < \liminf_k \|u_k(s)\|_2^2$, thus possibly violating (GEI) in the limit. That (GEI) is true in case of bounded domains is due to some compactness property ensuring normconvergence in L_2.

But (GEI) has important consequences – not only for decay estimates (see § 9), but especially for the local reconstruction and identification of solutions, see e.g. the discussion in the introduction of [H 88] by J. Heywood. As an example, one has

Theorem 7.1. *Suppose u is a turbulent weak solution, and the force f is smooth, $n = 3$ or 4. Then u is smooth for $t \geq T(\|a\|_2, f)$.*

This follows, as the imbedding $\|u\|_n^2 \leq c\|u\|_2\|\nabla u\|_2$ for $n = 3$, resp. $\leq \|\nabla u\|_2^2$ for $n = 4$ and (EI) implies, that $\|u(t)\|_n$ has to be small on a set of positive measure. Then by § 6, there is a unique global smooth solution starting at this time, and (GEI) allows to identify it with the given weak solution.

One has now a variety of (functional analytic) methods to construct turbulent solution. The idea is to construct strong solutions of some approximate equations; according to personal taste this can be done either by adding $\varepsilon\Delta^2 u$ to the equations (Beirao da Veiga [V 85]) or by regularizing the nonlinearity to $(J_\varepsilon(u) \cdot \nabla)u$ in different ways: either by retarded mollification (L. Caffarelli, R. Kohn and L. Nirenberg [CKN 82]) or by Yosida-approximation – $J_\varepsilon(u) := (I + \varepsilon A)^{-(1+[n/4])}u$, see [SvWW 86] and [MS 88]. Passing to the limit is possible for $n \leq 4$, hence a turbulent solution exists in this situation for exterior domains (and for other unbounded domains with the necessary properties of the Stokes operator). See also the discussion by T. Kato at the very end of [Ka 84]. M. Wiegner [W 92] showed, that the approximations even converge strongly (see also P. Maremonti [M 86] for Leray's solution on $\mathbf{R}^3$). This is of importance for proving lower bounds for decay rates [Sch 91] – in contrast upper bounds can be proved in all dimensions by the approximations directly ([W 87] appendix.)

8 Regularity and Structure theorems

There are several lines of research to follow under this topic. The first is to start with a weak solution with some additional properties and prove regularity, and to relax the additional assumptions as far as possible. Next one might attempt to construct weak solutions which are in some sense better than others – as long as no uniqueness is known, they are mutually distinct (after some time even for smooth data). Then, as long as one cannot exclude singularities, one might try to locate them or get bounds for their measure. Last if one should really be convinced of the existence of nonsmooth solutions, one might try to construct some.

We have learned in § 4 about the importance of Serrin's quantity $S(r,s) = \frac{n}{r} + \frac{2}{s}$, measuring the integrability property $\int\limits_0^T \|u(t)\|_r^s dt < \infty$. Now all weak solutions with (EI) fulfill $S(r,s) = n/2$, for these $r \geq n$, as $\|u\|_r^s \leq c\|\nabla u\|_2^2 \|u\|_2^{s-2}$ by Sobolev's inequality. Further estimates of this type, also global in time, can be found in various papers, e.g. in [GS 91].
Uniqueness affords $S(r,s) \leq 1$ as noted in § 5. But there is something in between. If $S(r,s) = (n+2)/4$, then $u \cdot u \in L_2$, from which (GEI) follows, even for all times. A proof for bounded or exterior domains is given by H. Sohr and W. von Wahl in [SvW 85].
Further for these solutions **Leray's structure theorem** [L 34] holds: u is smooth for $t \geq T_0$ and for $t \in \bigcup\limits_{j \in \mathbf{N}} I_j \subset [0, T_0]$, where I_j are open and $\Sigma = [0, T_0] \setminus \bigcup\limits_{j \in \mathbf{N}} I_j$, the set of (possible) time-singularities, has measure zero. There are further informations on Σ : Y. Giga [Gi 86] has finally generalized this structure theorem by proving, that the k-dimensional Hausdorff measure of Σ is zero, if $k = s/2(S(r,s) - 1) > 0$ and $r > n$. Note, that one may take $k = 1/2$ for $n = 3$, as $S(r,s) = 3/2$ is possible.
But note, that for arbitrary domains, Leray's structure theorem is unproved, as it depends on (GEI) and local strong reconstructions. See also the discussion by J. Heywood in [H 88].

Concerning the location of Σ, we know that Σ is bounded (from Theorem 7.1), if $n = 3$ or 4, and bounded away from zero, provided $a \in L_2 \cap L_n$.

Following V. Scheffer [Sch 76], L. Caffarelli, R. Kohn and L. Nirenberg [CKN 82] presented an important paper on partial regularity for suitable weak solutions on $\mathbf{R}^3$ or on bounded domains in $\mathbf{R}^3$, which was mentioned already twice. These solutions, constructed by methods explained in the last chapter, fulfill also a *localized energy inequality* which means an estimate for

$$\int\limits_\Omega |u(t,x)|^2 \phi(x) dx + 2 \int\limits_0^t \int\limits_\Omega |\nabla u(s,x)|^2 \phi(x) dx ds$$

by all the terms, one formally gets by multiplication of the equations by $u \cdot \phi$ and (partial) integration, where ϕ is smooth, nonnegative and of compact support with respect to x. One of these terms contains the pressure π, hence one needs informations on the pressure to continue. In [CKN 82] $\pi \in L_{5/3}(\mathbf{R}^3 \times (0,T))$, resp. $\nabla \pi \in L_{5/4}(\Omega \times (0,T))$ for bounded $\Omega \subset \mathbf{R}^3$ was needed and proved. As a conse-

quence of these local estimations, their weak solution is smooth with a possible exceptional set S of space-time singularities in $\Omega \times (0, T)$ with 1-dimensional Hausdorff measure zero. Their conjecture that $\pi \in L_{5/3}(\Omega \times (0, T))$ is true also for other (bounded or exterior) domains $\Omega \subset \mathbf{R}^3$, was proved by H. Sohr and W. von Wahl [SvW 86]. The complications are due to the fact that π does not fulfill a boundary condition. As a consequence, for smooth enough data, there is a solution with the possible singularities S confined to a compact set in space-time.
The latter may be different in case of noncompact boundary. A recent result of H. Sohr [S 98] states, that if singularities occur for large $|x|$, they have to come close to $\partial\Omega$.

How about the other way round? Surely, **if** singular solutions exist, it will be difficult to **see** any of these; a simple consequence of the construction with the Yosida-approximation is, that for all smooth data there is a sequence of forces f_ε with $f_\varepsilon \to f$ in some L_p-space, such that the corresponding solutions u_ε are smooth for all times, see see H. Sohr and W. von Wahl [SvW 87] and A.V. Fursikov in [Proc 88].
Thus regularity is a kind of generic property.
As a further step towards regularity, one may ask, whether for every smooth initial value a (and with, say, $f \equiv 0$) there is a sequence of approximative data a_ε, such that the corresponding solutions u_ε are smooth for all times. This seems to be open. On the other hand, weak solutions which are in $C_0([0, T], L_n)$ are smooth, see e.g. W. von Wahl [vW 86].
One might try to relax the assumptions to the case $L_\infty((0, T), L_n)$, especially for $n = 3$. Though this is a *uniqueness-class*, as noted in § 4, up to now one needs more information to conclude regularity. Different from the local considerations in [CKN 82], B. da Veiga [V 97b] has proposed to study the sets $A_k(t) = \{x \| u(t, x)| \geq k\}$ and gave some condition involving these sets ensuring regularity. As a special version, the assumption

$$\limsup_{t \nearrow t_0} \|u(t)\|_n < \|u(t_0)\|_n + \varepsilon_0 \text{ for all } t_0 \in [0, T]$$

with some explicit small ε_0 suffices, see also [KS 97].

An interesting development of 1996 was, that an old proposal of J. Leray for a construction of a solution with singularity was shown to fail definitely. Leray had proposed a selfsimilar solution on $\mathbf{R}^3 \times (0, T)$ of the form $u(x, t) = \lambda(t) U(x\lambda(t))$ with $\lambda(t) = (2a(T - t))^{-\frac{1}{2}}$. Then U would have to solve

$$-\triangle U + aU + a(y \cdot \nabla)U + U\nabla U + \nabla Q = 0, \; div\ U = 0, U \in L_3(\mathbf{R}^3)$$

if u fulfills (EI), and hence a nontrivial solution U of this type would give rise to a

By the way, though we shall not take up the stationary problem – the interested reader should consult part II of the monograph of P. Galdi [G 98] – let us mention, that the similar observation for $a = 0$ together with the so called hole-filling technique, developed for elliptic systems, was a decisive tool in proving regularity for stationary solutions in higher dimensions for $n = 5$ by M. Struwe [Str 95] and J. Frehse – M. Růžička [FR 95] (and series of later results). By scaling this adds an additional weight to the opinion that instationary solutions for $n = 3$ are regular, though there seems to be no way for an analogous reasoning in the instationary case.

9 Time Asymptotic and Stability

In 1934 J. Leray [L 34] posed the question, whether the energy $\|u(t)\|_2^2$ of the weak solution to the Navier-Stokes equations on $\mathbf{R}^3$ which he had constructed, tends to zero for $t \to \infty$ (provided there is no exterior force).
Fifty years later there was an affirmative answer by T. Kato [Ka 84] and K. Masuda [M 84], and also some estimates for the rate of decay were obtained. To state it roughly, these decay rates were a consequence of the estimates for weighted norms of the type $\sup_{t>0} t^{\alpha}\|u(t)\|_X$, compare § 6. Inherent from the derivation, using an integral equation, is the condition $\alpha < 1$. Hence time decay estimates of the type $0(t^{-\alpha})$ with $\alpha \geq 1$ are more involved. There are some occasions where this is possible. Note that in a bounded domain, the generalized energy inequality and Poincare's estimate implies

$$\|u(t)\|_2^2 + \lambda \int_s^t \|u(\tau)\|_2^2 d\tau \leq \|u(s)\|_2^2$$

for almost all $s \geq 0$ and all $t \geq s$.
This in turn gives even an exponential decay of the energy. But in unbounded domains things are more difficult. It was the crucial idea due to M.E. Schonbek [Sch 85], to apply Fouriertransformation and split the region of integration in phase-space in a time-dependent manner. This serves as a substitute for Poincare's inequality in the case of $\mathbf{R}^n$:

$$\|\nabla u\|_2^2 \geq g(t)\left(\|u\|_2^2 - \int_{|\xi|^2 \leq g(t)} |\hat{u}(\xi)|^2 d\xi\right)$$

and one needs good estimates for the last term, which follow from applying the Fouriertransform to the Navier-Stokes-equations. Contributions by M.E. Schonbek [Sch 85,86], R. Kajikiya – T. Miyakawa [KM 86], P. Galdi – P. Maremonti [GaMa 86b] and finally M. Wiegner [W 87] gave the following result:

Theorem 9.1. *If u is a* **suitably constructed** *weak solution of the Navier-Stokes equation on $\mathbf{R}^n, n \geq 2$, with initial value $a \in L_2$,*

and $u_0(t) = e^{-tA}a$ *decays like* $\|u_0(t)\|_2 = 0(t^{-\alpha_0})$,
then $\|u(t)\|_2 \to 0$ *and* $\|u(t) - u_0(t)\|_2 \leq h(t)(1+t)^{-d}$,
with $d = (n+2)/4 - \max\{1 - 2\alpha_0, 0\}$ *and* $h(t) = C$,
except for $\alpha_0 = 0$, *where* $h(t) \searrow 0$, *and* $\alpha_0 = 1/2$, *where* $h(t) = C\ln(t+e)$.

Note that $\alpha_0 > 1/2$, if e.g. $a \in L_p$ with $1 \leq p < 2n/(n+2)$, which results in $\|u(t) - u_0(t)\|_2 \leq C(1+t)^{-(n+2)/4}$.

Now there are certain initial values, such that $u_0(t)$ decays even exponentially. But this property does not carry over to the solution of the Navier-Stokes equations – generically the exponent $(n+2)/4$ is optimal, at least for $n = 2$ and 3, as was shown by M.E. Schonbek [Sch 91]. No other results on lower bounds are known.

Energy decay estimates for the compressible equations were given by K. Deckelnick [De 92]. One word to the phrase "suitably constructed": The result holds e.g. for turbulent solution with a generalized energy inequality, or for constructions as given in the preceding paragraph, see also the appendix of [W 87]. Leray's original question for exterior domains was solved in [SvWW 86].

Reviewing the following results, we shall always assume optimal conditions for the initial value – in general the estimates are coarser and depend on $u_0(t)$.

Subsequently other unbounded domains were considered, where the Fouriertransformation had to be substituted by the spectral resolution $E(\lambda)$ of the Stokes-operator A. Roughly the same estimates, though not explicitely stated, hold for the case of a half-space ([BM 88]). Several further papers of W. Borchers and T. Miyakawa finally gave the exterior domain result [BM 90][BM 92] for $n \geq 3$:

$$\|u(t) - u_0(t)\|_2 \leq C(1+t)^{-\frac{n}{2}} \text{ (for } \alpha_0 > \frac{1}{2}).$$

The central estimate here is

$$\|E(\lambda)e^{-tA}P(w \cdot \nabla)u\|_2 \leq c\lambda^{(n-3)/4}t^{-3/4}(\|w\|_2\|u\|_2\|\nabla w\|_2\|\nabla u\|_2)^{1/2}$$

which is weaker by a factor $\lambda^{-1/2}$ compared to the $\mathbf{R}^n$-case. The corresponding two-dimensional result is due to H. Kozono and T. Ogawa [KO 93 a,b]. The lack of 1/2 in the exponent seems to be unavoidable due to P. Maremonti – V.A. Solonnikov [MaSo 96].

Estimates for strong solutions and higher norms have also found interest. In order to have some, one should assume either $n = 2$, or $\|a\|_n$ small, or u is a turbulent solution and $n \leq 4$ (which becomes strong after some finite time).

Then estimates for $\|u(t)\|_\infty$ were given by J. Heywood [H 80] of type $0(t^{-\frac{1}{2}})$ for $n = 3$, of type $0(t^{-(\frac{n}{2}-\varepsilon)})$ for all n, $\|a\|_n$ small, $\varepsilon > 0$, by T. Kato ([Ka 84], combination of Thm 1 and 4) and the same estimate for exterior domains by H. Kozono, T. Ogawa and H. Sohr [KOS 92]. Instead of t^ε one may get a logarithmic term. The improvement in the $\mathbf{R}^n$-case, $n \leq 5$, follows from M.E. Schonbek – M. Wiegner [SchW 96]: If $\|u(t)\|_2 = 0(t^{-\alpha})$ then $\|D^m u(t)\|_2 = 0(t^{-\frac{m}{2}-\alpha})$ for all m (for the case $m = 1$ and 2 in an exterior domain in $\mathbf{R}^3$, see P. Galdi and P. Maremonti [Ma 88], [GaMa 86b]); by interpolation one gets for $\alpha = (n+1)/4$ the estimate $\|u(t)\|_\infty = 0(t^{-(n+1)/2})$.

Further results for higher order norms involve fractional powers of the Stokes-operator and weighted-norm estimates.

Let us list for exterior domains:

$$\|u(t)\|_q = 0(t^{-\frac{n}{2}\left(\frac{1}{p}-\frac{1}{q}\right)}),\ p \le q < 2, p < \frac{2n}{n+2} \text{ [BM 90];}$$

$$\|u(t)\|_q = 0(t^{-\frac{n}{2}\left(1-\frac{1}{n}-\frac{1}{q}\right)}),\ q \ge \frac{n}{n-1}, n = 3,4 \text{ [KOS 92]}$$

and

$$\|u(t)\|_r = 0(t^{-\left(1-\frac{1}{r}\right)}),\ 2 \le r, n = 2,\ \text{[KO 93b]}$$

$$\text{resp. } \|u(t)\|_r = 0(t^{-\frac{3}{2}\left(\frac{5}{6}-\frac{1}{r}\right)}), 2 \le r < 6, n = 3 \text{ [KO 94]}$$

in unbounded domains with possibly noncompact boundaries.
In these papers further estimates for various other norms are given, especially for Au and the gradient of u. The interested reader should consult the original literature.

So far we have been considering the stability of the trivial solution. The stability of nonzero strong solutions was addressed e.g. by H.B. da Veiga and P. Secchi [VS 87], M. Wiegner [W 90] and T. Kawanago [Kaw 98].

Last the idea of stability might also serve to constract global strong solutions as a perturbation of a given **stationary** solution. This approach was e.g. adopted by J. Bemelmans [B 78]; a more recent issue can be found in T. Miyakawa-H. Sohr [MS 88] and for estimates in space and time see e.g. C. Grunau [Gr 93a,b, 94].

10 Miscellanea

Though the central problem is still not solved, let us collect the "small data"-results.
We have seen in § 6, that a unique global solution exist provided that the **data** – the initial value and the exterior force – are small, and the solutions is smooth depending on the smootheness of the data.
Another quantity may be small – the dimension. So if $n = 2$, everything is settled and can be found in the standard monographs, see e.g. [T 77].
There have been attempts in two directions to relax and generalize this. One is to assume some **symmetry**, thereby effectively reducing the number of dimensions. In [LMNP 97], simplifying arguments of M. Uchovskii and B. Yudovich from 1968, it is shown that smooth axially symmetric data on $\mathbf{R}^3$ give rise to a global smooth axially symmetric solution, which is moreover unique among weak solutions of the same type (not in the whole class of weak solutions!)
Small deviations from symmetric (or two dimensional) solutions are also allowed, see [PRST 94]. The other direction is **smallness of the domain** $\Omega \subset \mathbf{R}^3$ in the sense

that Ω is thin in one direction, say $\Omega = \omega \times (0, \varepsilon)$, with $\omega \subset \mathbf{R}^2$. Several papers by G. Raugel and G. Sell, see e.g. [RS 93] gave global existence results; a closer study by R. Temam and M. Ziane [TZ 96], based on the dependency of the constants in estimating Stokes problem with respect to ε (even for different boundary conditions) related the size of the data to the thinness ε of the domain.

So – are there singularities? Have they to do something with turbulence? But a theory of turbulence should be possible also in the frame of smooth but highly unstable solutions; see the discussion by S. Großmann [Gro 95] and J. Heywood [H 94]. I have the impression, that at the moment mathematicians are dissonant over the challenging question – there are points in favour for both sides, and some people even change this opinion from time to time. From the aesthetical point of view I believe in regularity, and we shall see if there will be a proof in near future.

References

[A 98] Acheson, D.J., *Elementary Fluid Dynamics.* Clarendon Press Oxford 1990 (Reprint 1998)

[Am 95] Amann, H., *Heat conducting incompressible viscous fluids.* In: Navier-Stokes equations and related nonlinear problems (ed. A. Sequeira) Proc. of the Conf. Madeira 1994, Plenum Press, 231–243 (1995)

[Be 78] Bemelmans, J., *Eine Außenraumaufgabe für die instationären Navier-Stokes Gleichungen.* Math. Z. **162**, 145–173 (1978)

[Be 86] Bemelmans, J., *On A Free Boundary Problem For The Stationary Navier-Stokes Equations.* Inst. Mittag-Leffler, No. **5** (1986)

[BGP 93] Borchers, W., Galdi, G.P., Pilekas, K., *On the Uniqueness of Leray-Hopf Solutions for the Flow through an Aperture.* Arch. Rat. Mech. Anal. **122**, 19–33 (1993)

[BM 88] Borchers, W., Miyakawa, T., *L^2 Decay for the Navier-Stokes Flow in Halfspaces.* Math. Ann. **282**, 139–155 (1988)

[BM 90] Borchers, W., Miyakawa, T., *Algebraic L^2 decay for Navier-Stokes flows in exterior domains.* Acta Math., **165**, 189–227 (1990)

[BM 91] Borchers, W., Miyakawa, T., *Algebraic L^2 decay for Navier-Stokes flows in exterior domains II.* Hiroshima Math. J. **21**, 621–640 (1991)

[BM 92] Borchers, W., Miyakawa, T., *L^2-decay for the Navier-Stokes flows in unbounded domains with applications to exterior stationary flows.* Arch. Rat. Math. Anal. **118**, 273–295 (1992)

[BM 95] Borchers, W., Miyakawa, T., *On stability of exterior stationary Navier-Stokes flows.* Acta Math. **174**, 311–382 (1995)

[BS 87] Borchers, W., Sohr, H., *On the Semigroup of the Stokes Operator for Exterior Domains.* Math. Z. **196**, 415–425 (1987)

[BV 93] Borchers, W., Varnhorn, W. *On the Boundedness of the Stokes Semigroup in Two-Dimensional Exterior Domains.* Math. Z. **213**, 275–299 (1993)

[CKN 82] Caffarelli, L., Kohn, R., Nirenberg, L., *Partial Regularity of Suitable Weak Solutions of the Navier-Stokes Equations.* Comm. on Pure and Appl. Math. **35**, 771–831 (1982)

[ChM 98] Chorin, A. J., Marsden J.E., *A mathematical introduction to Fluid Mechanics.* Springer Verlag New York, 3rd edition 1998

[CF 93] Constantin, P., Fefferman, Ch., *Direction of Vorticity and the Problem of Global Regularity for The Navier-Stokes Equations.* Indiana University Math.J., **42**, 775–789 (1993)

[De 92] Deckelnick, K., *Decay estimates for the compressible Navier-Stokes equations in unbounded domains.* Math. Z. **209**, 115–130 (1992)

[DvWW 88] Deuring, P., von Wahl, W., Weidemaier, P., *Das lineare Stokes-System in* $\mathbf{R}^3$ *I. Vorlesungen über das Innenraumproblem.* Bayreuther Math. Schriften, Heft **27**, (1988)

[D 94] Deuring, P., *The Stokes System in an Infinite Cone.* Math. Research **78**, Akademie-Verlag, Berlin (1994)

[DvW 95] Deuring, P., von Wahl, W., *Strong solutions of the Navier-Stokes system in Lipschitz bounded domains.* Math. Nachr. **171**, 111–148 (1995)

[D 97] Deuring, P., *Finite Element Methods for the Stokes System in Three-Dimensional Exterior Domains.* Math. Meth. in the Appl. Sciences, **20**, 245–269 (1997)

[FJR 72] Fabes, E.B., Jones, B.F., Riviere, N.M., *The Initial Value Problem for the Navier-Stokes Equations with Data in* L^p, Archive Rat. Mech. Anal. **45**, 222–240 (1972)

[Ge 78] Gerhard, C., *L^p-Estimates For Solutions To The Instationary Navier-Stokes-Equations In Dimension Two.* Pacific J. of Math., **79**, 375–398 (1978)

[GM 85] Giga, Y., Miyakawa, T., *Solutions in L_r of the Navier-Stokes initial value problem.* Arch. Rat. Mech. Anal. **89**, 267–281 (1985)

[GS 91] Giga, Y., Sohr, H., *Abstract L^p Estimates for the Cauchy Problem with Applications to the Navier-Stokes Equations in Exterior Domains.* Jornal of Functional Analysis, **102**, 72–94 (1991)

[G 81] Giga, Y., *Analyticity of the Semigroups generated by the Stokes Operator in L_r-Spaces.* Math. Z. **178**, 297–329 (1981)

[G 83] Giga, Y., *Weak and Strong Solutions of the Navier-Stokes Initial Value Problem.* Publ. RIMS, Kyoto Univ. **19**, 887–910 (1983)

[G 86] Giga, Y., *Solutions for Semilinear Parabolic Equations in L^p and Regularity of Weak Solutions of the Navier-Stokes System.* Journal of Differential Equations **61**, 186–212 (1986)

[Gro 95] Großmann, S., *Wie entsteht eigentlich Turbulenz?* Phys. Bl. **51**, Nr. 7/8 (1995)

[Gru 92] Grubb, G. *Initial value problems for the Navier-Stokes equations with Neumann Conditions.* Springer Lecture Notes Math. **1530**, 262–283 (1992)

[Gr 93a] Grunau, H.-Ch., *Boundedness for Large $|x|$ of Suitable Weak Solutions of the Navier-Stokes Equations with Prescribed Velocity at Infinity.* Commun. Math. Phys. **151**, 577–587 (1993)

[Gr 93b] Grunau, H.-Ch., *The Reynolds number and large time behavior for weak solutions of the Navier-Stokes equations.* ZAMP **44**, 587–593 (1993)

[Gr 94] Grunau, H.-Ch., *L^2-Decay Rates for Weak Solutions of a Perturbed Navier-Stokes System in* $\mathbf{R}^3$. J. of Math. Anal. Appl. **185**, 340–349 (1994)

[H 76] Heywood, J. G., *On Uniqueness Questions In The Theory Of Viscous Flow.* Acta Math. **136**, 61–102 (1976)

[H 80] Heywood, J. G., *The Navier-Stokes Equations: On the Existence, Regularity and Decay of Solutions.* Indiana Univ. Math. J., **29**, 639–681 (1980)

[H 88] Heywood, J. G., *Epochs Of Regularity For Weak Solutions Of The Navier-Stokes Equations In Unbounded Domains.* Tohoku Math. J. **40**, 293–313 (1988)

[KO 94] Kozono H., Ogawa, T., *Global strong solution and its decay properties for the Navier-Stokes equations in three-dimensional domains with non-compact boundaries.* Math. Z. **216**, 1–30 (1994)

[KOS 92] Kozono, H., Ogawa, T., Sohr, H., *Asymptotic Behaviour in L^n for Turbulent Solutions of the Navier-Stokes Equations in Exterior Domains.* Manuscripta Math. **74**, 253–275 (1992)

[KS 92] Kozono, H., Sohr, H., *On a new class of generalized solutions of the Stokes equations in exterior domains.* Ann. Sc. Norm. Sup. **19**, 155–181 (1992)

[KS 97] Kozono, H., Sohr, H., *Regularity criterion on solutions to the Navier-Stokes equations.* Adv. in Diff. Equ. **2**, 535–554 (1997)

[KS 98a] Kozono, H., Sohr, H., *Remark on uniqueness of weak solutions to the Navier-Stokes equations.* Preprint, Paderborn (1998)

[K 88] Kozono, H., *Strong Solution for the Navier-Stokes Flow in the Half-Space.* Lect. Notes Math. **1431**, 84–86 (1988)

[K 89] Kozono, H., *Global L^n-Solution and Its Decay Property for the Navier-Stokes Equations in Half-Space* $\mathbf{R}^n_+$. J. of Diff. Equ., **79**, 79–88 (1989)

[K 98] Kozono, H., *Weak solutions of the Navier-Stokes equations with test functions in weak-L^n.* Preprint

[L 34] Leray, J., *Sur le mouvement d'm liquide visqueus emplissant l'espace.* Act. Math. **63**, 193–248 (1934)

[La 69] Ladyzhenskaya, O.A., *The Mathematical Theory of Viscons Incompressible Flow.* Gordon and Breach, New York (1969)

[LMNP 97] Leonardi, S., Mlek, J., Nečas, J., Pokorny, M., *On the Result of Uchovskii and Yudovich on Axially Symmetric Flows of a Viscous Fluid in* $\mathbf{R}^3$. SFB 256 Bonn, No. **522** (1997)

[Li 96] Lions, P.-L., *Mathematical Topics in Fluid Mechanics.* Vol. 1 Incompressible Models, Clarendon Press Oxford 1996, (Vol. 2 Compressible Models, Oxford 1998)

[MNR 93] Málek, J., Nečas J., Růžička, M., *On The Non-Newtonian Incompressible Fluids.* Mathematical Models and Methods in Applied Sciences, **3**, 35–63 (1993)

[MNR 96] Málek, J., Nečas, J., Růžička M., *On Weak Solutions to a Class of Non-Newtonian Incompressible Fluids in Bounded Three-Dimensional Domains. The Case* $p \geq 2$. SFB 256 Bonn, No. **481** (1996)

[MaSo 96] Maremonti, P., Solonnikov, V.A., *On nonstationary Stokes problem in exterior domains.* Preprint No. 4, Universita Potenza Dep. di Mat. (1996)

[Ma 79] Ma, Ch.-M., *On Square-summability and Uniqueness Questions Concerning Nonstationary Stokes Flow in an Exterior Domain.* Arch. Rat. Mech. Anal., **71**, 99–112 (1979)

[Ma 88] Ma, Ch.-M., *A Uniqueness Theorem For Navier-Stokes Equations.* Pacific Journal of Math. **93**, 387–405 (1981)

[Ma 84] Maremonti, P., *Asymptotic Stability Theorems for Viscous Fluid Motions in Exterior Domains.* Rend.Sem.Mat.Univ.Padova, **71** (1984)

[Ma 85] Maremonti, P., *Stabilit asintotica in media per moti fluidi viscosi in domini esterni.* An. di Mat. pura ed. appl. (IV), **142** 57–75 (1985)

[Ma 88] Maremonti, P., *On the asymptotic behaviour of the L^2-norm of suitable weak solutions to the Navier-Stokes equations in three-dimensional exterior domains.* Comm. Math. Phys. **118**, 385–400 (1988)

[Ma 91] Maremonti, P., *Existence and stability of time-periodic solutions to the Navier-Stokes equations in the whole space.* Nonlinearity **4**, 503–529 (1991)

[Ma 92] Maremonti, P., *Some results on the asymptotic behavior of weak solutions to the Navier-Stokes equations in unbounded domains.* Math. Z. **210**, 1–22 (1992)

[M 84] Masuda, K., *Weak Solutions Of Navier-Stokes Equations.* Tohoku Math. Journ. **36**, 623–646 (1984)

[Mc 81] McCracken, M., *The Resolvent Problem For The Stokes Equation On Halfspace In L_p.* SIAM J. Math. Anal. **12**, 201–228 (1981)

[MS 88] Miyakawa, T., Sohr, H., *On Energy Inequality, Smoothnes and Large Time Beha-*

viour in L^2 for Weak Solutions of the Navier-Stokes Equations. Math. Z. **199**, 455–478 (1988)

[MiY 92] Miyakawa, T., Yamada, M. *Planar Navier-Stokes Flows in a bounded domain with Measures as Initial Vorticities.* Hiroshima Math. J. **22**, 401–420 (1992)

[Mu 93] Mukminov, F.Kh., *On the rate of decay of a strong solution of first mixed problem for the Navier-Stokes equations in a domain with noncompact boundary.* Math. Sbornik **184**, 139–160 (1993)

[NRS 96] Nečas J., Růžička, M., Šverák, V., *On Leray's self-similar solutions of the Navier-Stokes equations.* Acta Math. **176**, 283–294 (1996)

[Proc 88] *The Navier Stokes equations I.* Proc. Oberwolfach 1988, (ed. J. Heywood et al) Lecture Notes in Math. **1431**, Springer Verlag 1990

[Proc 92] *The Navier Stokes equations II.* Proc. Oberwolfach 1991, (ed. J. Heywood et al) Lecture Notes in Math. **1530**, Springer Verlag 1992

[Proc 98] *Theory of the Navier Stokes Equations.* Proc. Oberwolfach 1996, (ed. J. Heywood et al) World Scientific Singapore 1998

[PRST 94] Ponce, G., Racke, R., Sideris, T.C., Titi, E.S., *Global Stability of Large Solutions to the 3D Navier-Stokes Equations.* Comm. Math. Phys. **159**, 329–341 (1994)

[RS 93] Raugel, G., Sell, G., *Navier-Stokes equations on thin 3D domains I: Global attractors and global regularity of solutions.* J. Amer. Math. Soc. **6**, 503–568 (1993)

[Ra 83] Rautmann, R., *On Optimum Regularity of Navier-Stokes Solutions at Time $t = 0$.* Math. Z. **184**, 141–149 (1983)

[Sche 76] Scheffer, V., *Turbulence and Hausdorff dimension.* In: Springer Lect. Notes in Math. **565**, 94–112 (1976)

[Sch 85] Schonbek, M. E., *L-decay for weak solutions of the Navier-Stokes equations.* Arch. Rat. Mech. Anal. **88**, 209–222 (1985)

[Sch 86] Schonbek, M. E., *Large-time behavior of solutions of the Navier-Stokes equations.* Comm. P.D.E. **11**, 753–763 (1986)

[Sch 91] Schonbek, M. E., *Lower Bounds of Rates of Decay For Solutions To The Navier-Stokes Equations.* Journal of the AMS, **4**, 423–449 (1991)

[SchW 96] Schonbek, M.E., Wiegner, M., *On the decay of higher-order norms of the solutions of Navier-Stokes Equation.* Proc. Royal Soc. Edinb. **126 A**, 677–685 (1996)

[SSS 96] Schonbek, M.E., Schonbek, T.P., Süli, E., *Large-time Behaviour of Solutions to the Magneto-Hydrodynamics equations.* Math. Ann. **304**, 717–756 (1996)

[Schm 95] Schmitt, B.J., *The poloidal-toroidal representation of solenoidal fields in spherical domains.* Analysis **15**, 257–277 (1995)

[Sec 87] Secchi, P., *L^2 Stability for weak solutions of the Navier-Stokes equations in* $\mathbf{R}^3$. Indiana Univ. Math. J. **36**, 685–691 (1987)

[Se 62] Serrin, J., *On the interior regularity of weak solutions to the Navier-Stokes equations.* Arch. Rat. Mech. Anal. **9**, 187–195 (1962)

[Se 63] Serrin, J., *The initial value problem for the Navier-Stokes equations.* Proc. Madison 1962, 69–98, Univ. of Wisconsin Press, Madison (1963)

[SiS 92] Simader, C.G., Sohr, H., *A new approach to the Helmholtz Decomposition and the Neumann Problem in L_q-Spaces for bounded and exterior domains, in: Math. Probl. Relating to the Navier-Stokes Equations.* (ed: P. Galdi) Word Scientific Publ. Singapore (1992)

[SV 90] Sohr, H., Varnhorn, W., *On Decay Properties Of The Stokes Equations In Exterior Domains.* Lect. in Proc. Oberwolfach 1988, Lect. Notes **1431**, 134–151 (1990)

[SW 84] Sohr, H., von Wahl, W., *On The Singular Set And The Uniqueness Of Weak Solutions Of The Navier-Stokes Equations.* manuscripta math. **49**, 27–59 (1984)

[SvW 85] Sohr, H., von Wahl, W., *A New Proof of Leray's Structure Theorem and the Smoothness of Weak Solutions of Navier-Stokes Equations for Large $|x|$.* Bayreuther Math. Schr. **20**, 153–204 (1985)

[SvW 86] Sohr, H., von Wahl, W., *On the regularity of the pressure of weak solutions of Navier-Stokes equations.* Arch. Math. Vol. **46**, 428–439 (1986)

[SvW 87] Sohr, H., von Wahl, W., *Generic Solvability of the Equations of Navier-Stokes.* Hiroshima Math. J. **17**, 613–625 (1987)

[SvWW 86] Sohr, H. von Wahl, W. Wiegner, M., *Zur Asymptotik der Gleichungen von Navier-Stokes.* Akad. Wiss. Gttingen **3**, 1–15 (1986)

[illegible]

FB Math. Paderborn

[S 83] Sohr, H., *Zur Regularitätstheorie der instationären Gleichungen von Navier-Stokes.* Math. Z. **184**, 359–375 (1983)

[S 84] Sohr, H., *Optimale lokale Existenzsätze für die Gleichungen von Navier-Stokes.* Math. Ann. **267**, 107–123 (1984)

[S 98] Sohr, H., *Private communication.*

[S 99] Sohr, H., *A special class of weak solutions of the Navier-Stokes equations in arbitrary three-dimensional domains.* Topics in Nonlinear Analysis, Herbert Amann Anniversary Vol. Birkhäuser-Verlag, 621–642 (1999)

[So 77] Solonnikov, V.A., *Estimates For Solutions of Nonstationary Navier-Stokes Equations.* Journal of Sov. Math., **8**, 467–523 (1977)

[Sp 86] Specovius-Neugebauer, M., *Exterior Stokes Problem and Decay at Infinity.* Math. Mech. Appl. Sc. **8**, 351–367 (1986)

[Sp 90] Specovius-Neugebauer, M., *The Helmholtz decomposition of weighted L^r-spaces.* Comm. P.D.E. **15**, 273–288 (1990)

[SB 90] Sohr, H., Borchers, W., *The equations div $v = g$ and rot $v = f$ with zero boundary conditions.* Hokkkaido Math. J. **19**, 67–87 (1990)

[Str 95] Struwe, M., *Regular solutions of the stationary Navier-Stokes equations on* $\mathbf{R}^5$. Math. Ann. **302**, 719–741 (1995)

[St 95] Stupelis, L., *Navier-Stokes equations in irregular Domains.* Kluwer Acad. Publ. Dordrecht 1995

[Ta 98] Takahashi, S., *A weighted equation approach to decay rate estimates for the Navier-Stokes equations.* Nonlinear Analysis **34**, (1998)

[T 77] Temam, R., *Navier-Stokes Equations.* North Holland, Amsterdam et.al (1977)

[TZ 96] Temam, R., Ziane, N., *Navier-Stokes Equations In Three-Dimensional Thin Domains With Various Boundary Conditions.* Advances in Differential Equations **1**, 499–546 (1996)

[Th 95] Thaeter, G., *Helmholtz decomposition and regularity results for the infinite cylinder.* Dissertation Uni. Paderborn (1995)

[Ts 97] Tsai, T.-P., *On Leray's Self-Similar Solutions Of The Navier-Stokes Equations Satisfying Local Energy estimates.* Preprint 1997

[VZ 86] Valli, A., Zajaczkowski, W., *Navier-Stokes Equations for Compressible Fluids: Global Existence and Qualitative Properties of the Solutions in the General Case.* Commun Math Phys. **103**, 259–296 (1986) [vW 89] von Wahl, W., *Vorlesungsreihe über das Außenraumproblem für die instationären Gleichungen von Navier-Stokes.* SFB 256 Bonn, No. **11** (1989)

[We 81] Weissler, F., *The Navier-Stokes Initial value problem in L^p.* Arch. Rat. Mech. Anal. **74**, 219–230 (1981)

[W 87] Wiegner, M., *Decay results for weak solutions of the Navier-Stokes equations in* $\mathbf{R}^n$. J. London Math. Soc. **35**, 303–313 (1987)

[W 90] Wiegner, M., *Decay and Stability in L_p for strong solutions to the Cauchy problem for the Navier-Stokes equations.* Proc. Oberwolfach 1988, Springer Lecture Notes **1431**, 95–99 (1990)

[W 92] Wiegner, M., *Approximation of weak solutions of the Navier-Stokes equations in unbounded domains.* Proc. Oberwolfach 91, 161–166, Lect. Notes in Math. **1530**, (1992)

[W 94a] Wiegner, M., *Decay of the L_∞-norm of solutions to the Navier-Stokes equation in unbounded domains.* Acta Appl. Math. **37**, 215–219 (1994)

[W 94b] Wiegner, M., *Resolvent estimates for the Stokes Operator on an Infinite layer.* Preprint

[Za 91] Zajaczkowski, W., *On Nonstationary Motion Of Compressible Barotropic Viscous Fluid Bounded By A Free Surface.* Inst. Math. Pol. Acad. of Sc., Preprint 491 (1991)

[Zh 95] Zhang, L., *Sharp rate of decay of solutions to 2-dimensional Navier-Stokes equations.* Comm. PDE **20**, 119–127 (1995)

[Zh 98] Zhang, L., *Uniform stability for solutions of n-dimensional Navier-Stokes equations.* Bull. of Acad. Sin., 1998 to appear

Michael Wiegner
Lehrstuhl Mathematik I
RWTH Aachen
Wüllnerstr. zw. 5 u. 7
D-52056 Aachen
wiegner@math1.rwth-aachen.de

(*Eingegangen 09.02.99*)

Jber. d. Dt. Math.-Verein.
101 (1999) 26–46
Mathematics Subject Classification: 11 F 75, 11 G 18

Galoismoduln und Shimura-Varietäten

G. Harder, Bonn

Für Jürgen Neukirch

Dies ist die versprochene ausführliche Version meines Vortrags bei der DMV-Tagung in Jena 1996. Mein Ziel ist es, einer breiten Leserschaft eine Vorstellung von einigen neueren Entwicklungen in der Zahlentheorie zu geben.

Ich wende mich auch an Mathematiker, die der Zahlentheorie ferner stehen und die vielleicht niemals eine Vorlesung über algebraische Zahlentheorie gehört haben. Deswegen werde ich auch einige Dinge erklären, die für Zahlentheoretiker selbstverständlich sind und die schon lange zum Bestand der Zahlentheorie gehören. Sie sind aber notwendig für ein Verständnis der neueren Entwicklungen. Diese ganz klassischen Resultate sind abgehandelt, wenn der Abschnitt über motivische Galoismoduln beginnt. Von der Stelle an benutze ich dann auch noch modernere Begriffe und Resultate, die ich dann nicht mehr so genau erklären kann; ich hoffe, daß meine Erläuterungen, auch wenn sie sehr vage sind, eine Hilfe sind. Ich empfehle, den Artikel mit einer gewissen Naivität zu lesen.

Wenn ich mein gestecktes Ziel nur bedingt erreiche, so verweise ich zu meiner Entschuldigung darauf, daß wir es hier auch mit über hundert Jahren einer kontinuierlichen Entwicklung zu tun haben. Diese Entwicklung ist gerade in den letzten 30 Jahren stürmisch vorangegangen.

Es ist ein fundamentales Problem der Zahlentheorie, die Struktur der absoluten Galoisgruppe von $\mathbb{Q}$ zu verstehen. Es ist nicht klar, was damit gemeint ist, und man kann dieses Problem auch aus sehr verschiedenen Blickwinkeln betrachten. Man kann zum Beispiel die Frage studieren, welche endlichen Gruppen als Galoisgruppe einer endlichen Erweiterung von $\mathbb{Q}$ in Frage kommen, dies ist das sogenannte Umkehrproblem der Galoistheorie. In diesem Aufsatz möchte ich Probleme diskutieren, bei denen nach Erweiterungen mit kontrolliertem Verzweigungsverhalten gefragt wird. Ich werde weiter unten erklären, was die arithmetischen Begriffe wie Verzweigung, Verzweigungsgruppe, Trägheitsgruppe und Frobeniuselement bedeuten. Als allgemeine Referenz zu diesen Ausführungen möchte ich das Buch „Algebraische Zahlentheorie“ von Jürgen Neukirch angeben ([Neu]).

Es ist ein wohlbekanntes Prinzip der Algebra, daß die Struktur einer Gruppe auch durch die Kategorie der Moduln unter dieser Gruppe verstanden werden kann. Ich werde hier einige Prinzipien zur Konstruktion solcher Galoismoduln, d.h. Moduln unter der absoluten Galoisgruppe von $\mathbb{Q}$, vorstellen. Dabei geht es darum, daß man unter bestimmten Umständen einem Galoismodul eine sogenannte L-Funktion zuordnen kann, die von einer komplexen Variablen abhängt und deren Werte an ganz spezifischen Argumenten neue Informationen über die Struktur der Kategorie der Galoismoduln liefern.

Ich möchte in diesem Vortrag versuchen, auf einige Aspekte einzugehen, die mit Werten von L-Funktionen zusammenhängen. Es geht dabei insbesondere um die modulare Konstruktion von Galoismoduln, deren Struktur durch solche Werte von L-Funktionen bestimmt ist.

Einige der hier erläuterten Beispiele ordnen sich in den allgemeinen Kontext der sogenannten Beilinson-Vermutungen ein.

Dieser Artikel ist Jürgen Neukirch gewidmet. Ich hätte gern sein kritisches Urteil dazu gehört.

I Die Galoisgruppe von $\mathbb{Q}$

Wir betrachten endliche, normale Körperweiterungen $K/\mathbb{Q}$ des rationalen Zahlkörpers $\mathbb{Q}$. Ich erinnere daran, daß eine Erweiterung *normal* heißt, wenn jedes irreduzible Polynom mit rationalen Koeffizienten, das in K eine Nullstelle hat, in K vollständig in lineare Faktoren zerfällt. Einer solchen Erweiterung ordnet man die *Galoisgruppe* $\mathrm{Gal}(K/\mathbb{Q})$ zu, das ist die Gruppe der Automorphismen des Körpers K, die auf den Grundkörper $\mathbb{Q}$ die Identität induzieren. (Die letztere Forderung ist natürlich hier überflüssig, sie wird erst dann wichtig, wenn wir Erweiterungen K/L mit Grundkörpern L, die von $\mathbb{Q}$ verschieden sind, betrachten).

Für die Zahlentheorie ist nun entscheidend, daß diese Galoisgruppe eine zusätzliche arithmetische Struktur besitzt. Diese Struktur besteht darin, daß für alle Primzahlen p, die in K unverzweigt sind, eine durch die sogenannten *Frobenii* gegebene Konjugationsklasse ausgezeichnet ist. Dies soll im Folgenden genauer erläutert werden.

In $\mathbb{Q}$ haben wir den Ring $\mathbb{Z}$ der ganzen Zahlen.

Dieser Ring ist ein Hauptidealring, die maximalen Ideale in $\mathbb{Z}$ sind die Hauptideale, die von den Primzahlen p erzeugt werden.

Für ein solches Primideal (p) definieren wir die *Lokalisierung* bei (p) als den Ring

$$\mathbb{Z}_{(p)} = \{a/b \mid a, b \in \mathbb{Z}, b \notin (p)\},$$

dies ist dann ein sogenannter *diskreter Bewertungsring*, er hat genau ein maximales Ideal und dies ist ein Hauptideal, nämlich $(p) = p \cdot \mathbb{Z}_{(p)}$.

Der Ring $\mathbb{Z}$ erweitert sich zu dem Ring der ganzen Zahlen des Zahlkörpers K, ist. Es ist klar, daß dies bedeutet, daß für α eine Gleichung der Form

$$\alpha^m + a_1\alpha^{m-1} + \ldots + a_m = 0$$

gilt, wobei die a_i in $\mathbb{Z}$ liegen.

Über diesen Ring $\mathcal{O}_K$ ist nun folgendes bekannt:

a) *Der Ring $\mathcal{O}_K$ ist ein freier $\mathbb{Z}$-Modul vom Rang* $[K : \mathbb{Q}] = \dim_{\mathbb{Q}} K$.
b) *Die maximalen Ideale in $\mathcal{O}_K$ sind genau die Primideale* $\mathfrak{P} \neq (0)$.

Für ein solches Primideal ist $\mathfrak{P} \cap \mathbb{Z}$ ein von (0) verschiedenes Primideal in $\mathbb{Z}$, also von der Form (p); man sagt, daß $\mathfrak{P}$ in $\mathcal{O}_K$ über dem Primideal (p) in $\mathbb{Z}$ liegt. Die über (p) liegenden Primideale entsprechen genau den Primidealen in dem endlichen Ring $\mathcal{O}_K/p\mathcal{O}_K$.

c) *Über dem Primideal (p) in $\mathbb{Z}$ liegen nur endlich viele Primideale $\mathfrak{P} \subset \mathcal{O}_K$. Für jedes dieser Primideale $\mathfrak{P}$ ist der lokale Ring*

$$\mathcal{O}_{K,\mathfrak{P}} = \{a/b \mid a, b \in \mathcal{O}_K, b \notin \mathfrak{P}\}$$

ein Hauptidealring, wir schreiben $\mathfrak{P}_{\mathfrak{P}} = (\Pi_{\mathfrak{P}})$. Jedes von Null verschiedene Ideal in $\mathcal{O}_{K,\mathfrak{P}}$ ist eine Potenz des maximalen Ideals $(\Pi_{\mathfrak{P}})$.

Diese Aussage c) bedeutet, daß $\mathcal{O}_K$ ein *Dedekindring* ist, und dies ist fundamental für den Aufbau der algebraischen Zahlentheorie. Im Gegensatz zu dem Ring $\mathbb{Z}$, in dem jedes Ideal ein Hauptideal ist, sind hier im allgemeinen Fall nur noch die lokalen Ringe an den maximalen Idealen Hauptidealringe. Jedes Ideal $\mathfrak{a} \neq 0$ kann als Produkt von Potenzen von Primidealen geschrieben werden. Insbesondere ist das Hauptideal $p\mathcal{O}_{K,\mathfrak{P}} = \prod_{\mathfrak{P} \text{ über } (p)} (\Pi_{\mathfrak{P}})^{e_{\mathfrak{P}}}$ mit gewissen Exponenten $e_{\mathfrak{P}}$.

Wir lassen jetzt das Subskript K manchmal weg und schreiben $\mathcal{O} = \mathcal{O}_K$.

Der Restklassenring $\mathbb{Z}/(p) = \mathbb{F}_p$ ist der Körper mit p Elementen, es ist klar, daß dann $\mathcal{O}/(p)$ ein endlicher Ring ist, der den Körper $\mathbb{F}_p$ enthält, und dieser Ring ist ein $\mathbb{F}_p$-Vektorraum der Dimension $[K : \mathbb{Q}]$. Die obige Produktdarstellung des Hauptideals $p\mathcal{O}$ ist äquivalent zu der Aussage

d) *Der Ring $\mathcal{O}/p\mathcal{O}$ ist eine direkte Summe von endlich vielen endlichen lokalen Ringen*

$$\mathcal{O}/p\mathcal{O} = \bigoplus_{\mathfrak{P} \text{ über } (p)} \mathcal{O}_{\mathfrak{P}}/(\Pi_{\mathfrak{P}})^{e_{\mathfrak{P}}}.$$

Für fast alle Primzahlen p ist $\mathcal{O}/(p)$ eine direkte Summe von endlichen Körpern.

Weil wir angenommen haben, daß die Erweiterung $K/\mathbb{Q}$ normal ist, sind die Zahlen $e_{\mathfrak{P}}$ nur von p abhängig und nicht von der Auswahl des Primideals $\mathfrak{P}$ (Siehe die Aussage am Ende dieses Abschnitts). Die Zahl $e_p := e_{\mathfrak{P}}$ heißt *Verzweigungsindex bei* p. Man sagt, daß die Erweiterung $K/\mathbb{Q}$ bei p *unverzweigt* ist, wenn $e_{\mathfrak{P}} = e_p = 1$. Dies ist genau dann der Fall, wenn

die $\mathbb{F}_p$-Algebra $\mathcal{O}/(p)$ eine direkte Summe von Körpern ist oder wenn sie keine nilpotenten Elemente besitzt.

Jedes Element $x \in \mathcal{O}$ induziert eine lineare Abbildung $a \mapsto xa$ von $\mathcal{O}$ in sich selbst, wir können die Spur dieser linearen Abbildung betrachten. Das liefert uns eine lineare Abbildung $\mathrm{Spur}_{K/\mathbb{Q}} : \mathcal{O} \to \mathbb{Z}$. Wenn wir uns eine Basis $\omega_1, \omega_2, \ldots, \omega_d$ des freien $\mathbb{Z}$-Moduls $\mathcal{O}_K$ wählen, dann können wir die *Diskriminante von K*,

$$D_{K/\mathbb{Q}} = \det(\mathrm{Spur}_{K/\mathbb{Q}}(\omega_i\omega_j)$$

betrachten, und aus einfachen Ergebnissen der Algebra folgt:

Die Erweiterung $K/\mathbb{Q}$ ist genau an an denjenigen Primzahlen p verzweigt, die die Diskriminante von K teilen. (Es gibt also höchstens endlich viele in der Erweiterung $K/\mathbb{Q}$ verzweigte Primdeale (p)!).

Bemerkung: Mit leichten Modifikationen gilt das Gesagte auch für normale Erweiterungen K/L von beliebigen Zahlkörpern L. Es gilt nicht mehr, daß der Ring der ganzen Zahlen des großen Körpers frei über dem Ring der ganzen Zahlen des kleinen Körpers ist, aber das spielt keine Rolle, da wir immer zu den lokalen Ringen, die dann Hauptidealringe sind, übergehen können.

Beispiele:

1) Ein *quadratischer Körper* $K/\mathbb{Q}$ ist eine Körpererweitung die wir durch Adjungieren einer Quadratwurzel $\sqrt{d}$ mit $d \in \mathbb{Q}$ erhalten, wobei d selber kein Quadrat ist. Man kann dann zeigen, daß man den Ring der ganzen Zahlen bekommt, indem man ein Elenent ω adjungiert, das Lösung einer Gleichung

$$\omega^2 + a\omega + b = 0$$

ist. So haben wir zum Beispiel für $K = \mathbb{Q}(\sqrt{-1}), \mathbb{Q}(\sqrt{-3}), \mathbb{Q}(\sqrt{5})$ als Ringe der ganzen Zahlen jeweils

$$\mathcal{O}_K = \mathbb{Z}[\sqrt{-1}], \quad \mathbb{Z}[\frac{1+\sqrt{-3}}{2}], \quad \mathbb{Z}[\frac{1+\sqrt{5}}{2}],$$

und das erzeugende Element genügt jeweils den Gleichungen

$$\omega^2 + 1 = 0 \quad \text{bzw.} \quad \omega^2 - \omega + 1 = 0 \quad \text{bzw.} \quad \omega^2 - \omega - 1 = 0.$$

Betrachtet man nun den Ring $\mathbb{Z}[\omega]/(p)$ in den drei Fällen, dann sieht man, daß man genau für $p = 2$ im ersten Fall, für $p = 3$ im zweiten Fall und für $p = 5$ im dritten Fall nilpotente Elemente hat. Das sind also jeweils die verzweigten Stellen.

2) Wir wählen eine Primzahl $p > 2$. Dann können wir zu $\mathbb{Q}$ eine p-te Einheitswurzel ζ_p adjungieren. Wir erhalten als Ring der ganzen Zahlen $\mathbb{Z}[\zeta_p]$ und die definierende Gleichung ist

$$\zeta_p^{p-1} + \zeta_p^{p-2} + \ldots + 1 = 0$$

(Das ist nicht so ganz offensichtlich). Man sieht dann auch ziemlich leicht, daß für eine Primzahl q der Ring $\mathbb{Z}[\zeta_p]/(q)$ genau dann nilpotente Elemente hat, wenn $p = q$, mit anderen Worten: Die Erweiterung $\mathbb{Q}[\zeta_p]/\mathbb{Q}$ ist genau an der Primstelle p verzweigt.

(Im Allgemeinen ist es schwieriger, aus einer irreduziblen Polynomgleichung abzulesen, welche Primideale in der zugehörigen Körpererweiterung verzweigt sind. Vor allem: meistens gibt es (viel) mehr als eines!).

Es ist hoffnungslos, eine Übersicht über alle Erweiterungen des rationalen Zahlkörpers gewinnen zu wollen. Aber man kann versuchen, diejenigen Erweiterungen zu beschreiben, die nur an einer vorgebenen Menge von Primzahlen verzweigen. Zumindest der Anfang gibt einem Hoffnung: Es gelten der

Satz von Minkowski. *Der Körper $\mathbb{Q}$ besitzt keine nichttrivialen unverzweigten Erweiterungen*

und der

Satz von Kronecker-Weber. *Eine normale Erweiterung von $\mathbb{Q}$ mit abelscher Galoisgruppe, die nur an einer vorgegebenen Menge von Primzahlen $\{p_1, \dots, p_r\}$ verzweigt ist, liegt in dem Körper, der von allen m-ten Einheitswurzeln erzeugt wird, wobei m alle ganzen Zahlen durchläuft, die nur die vorgegebenen Primzahlen als Primfaktoren haben.*

Für eine genauere Erläuterung dieser Sätze verweise ich auf ([Neu],III, Theorem 2.18 und V, Theorem 1.10)

Ich möchte an dieser Stelle erklären, warum es gar nicht so einfach ist, Erweiterungen mit kontrollierter Verzweigung zu konstruieren. Wenn wir ganz naiv an diese Frage herangehen und eine (nicht unbedingt normale) Erweiterung vom Grad 5 konstruieren wollen, die nur bei 2 verzweigt ist, dann können wir das versuchen, indem wir ein irreduzibles Polynom vom Grad fünf hinschreiben

$$P(X) = X^5 + a_1 X^4 + a_2 X^3 + a_3 X^2 + a_4 X + a_5,$$

dessen Koeffizienten in $\mathbb{Z}$ liegen, und dessen Diskriminante ein Potenz von 2 ist. Aber diese Diskriminante dieses Polynoms ist ein Polynom in den Koeffizienten

$$D_P = D(a_1, a_2, a_3, a_4, a_5),$$

das homogen vom Grad 20 ist, wobei die a_i den Grad i haben. Es hat ganze Koeffizienten und 192 Terme. Der Wert dieses Polynoms wird von der Diskriminante der Erweiterung geteilt; wir hätten also unser Ziel erreicht, wenn diese Diskriminante eine Potenz von 2 wäre. Aber es ist doch klar, daß dies nur schwer zu erreichen ist. Wir stoßen offensichtlich auf eine diophantische Gleichung, die schon recht kompliziert aussieht. Selbst wenn unsere Gleichung die spezielle Gestalt

$$P(X) = X^5 + aX + b$$

hat, wird die Diskriminante $D_P = -216a^5 + 3725b^4$ und da wir $b \neq 0$ annehmen sollten, ist es nicht einfach, die Primteiler dieser Zahl zu kontrollieren.

Nach der Erläuterung dieser arithmetischen Begriffe komme ich auf die Galoisgruppe zurück. Es sei wie oben $K/\mathbb{Q}$ unsere endliche normale Erweiterung, wir betrachten eine feste Primzahl p. Die Galoisgruppe $\mathrm{Gal}(K/\mathbb{Q})$ operiert auch auf der $\mathbb{F}_p$-Algebra $\mathcal{O}/(p)$, von der wir wissen, daß sie eine direkte Summe lokaler $\mathbb{F}_p$-Algebren ist, wobei die Summanden den über (p) liegenden Primidealen $\mathfrak{P} \subset \mathcal{O}$ entsprechen.

Die Galoisgruppe operiert auf $\mathcal{O}/(p)$ und auf der Menge der Primideale oberhalb von p. Sie vertauscht diese Primideale transitiv, der Stabilisator $T_{\mathfrak{P}}$ von $\mathfrak{P}$ heißt Zerlegungsgruppe *von $\mathfrak{P}$. Die Zerlegungsgruppen zu den verschiedenen Primidealen oberhalb von p sind natürlich zueinander konjugiert. Der Restklassenkörper $\mathcal{O}/\mathfrak{P}$ ist eine endliche Erweiterung von $\mathbb{Z}/(p) = \mathbb{F}_p$ und die Galoisgruppe dieser Erweiterung ist zyklisch vom*

Grad $f_{\mathfrak{P}} = [O/\mathfrak{P} : \mathbb{F}_p]$ *und wird von dem* Frobenius(-Automorphismus) $\Phi_{\mathfrak{P}} : x \mapsto x^p$ *erzeugt.*

Die Zerlegungsgruppe $T_{\mathfrak{P}}$ *operiert auf* $\mathcal{O}/\mathfrak{P}$ *und der Homomorphismus*

$$T_{\mathfrak{P}} \to \mathrm{Gal}((\mathcal{O}/\mathfrak{P})/\mathbb{F}_p) = < \Phi_{\mathfrak{P}} >$$

ist surjektiv. Der Kern dieses Homomorphismus ist die Trägheitsgruppe $I_{\mathfrak{P}}$. *Dieser Homomorphismus ist genau dann bijektiv, (d.h. die Trägheitsgruppe ist genau dann trivial), wenn p unverzweigt ist.*

Wenn die Erweiterung bei p unverzweigt ist, dann können wir also den Frobenius $\Phi_{\mathfrak{P}}$ auch als ein Element in $T_{\mathfrak{P}}$ und damit in $\mathrm{Gal}(K/\mathbb{Q})$ auffassen. Diese Frobenii $\Phi_{\mathfrak{P}} \in \mathrm{Gal}(K/\mathbb{Q})$ zu den verschiedenen $\mathfrak{P}$ oberhalb von p bilden eine Konjugationsklasse in der Galoisgruppe $\mathrm{Gal}(K/\mathbb{Q})$. Diese Familie von Konjugationsklassen $\{< \Phi_{\mathfrak{P}} >\}_{p \text{ unverzeigt}}$ ist ein entscheidendes zusätzliche strukturelles Element in der Galoisgruppe.

Ib Die Galoisgruppe unendlicher Erweiterungen

Wir können auch unendliche normale algebraische Erweiterungen $K/\mathbb{Q}$ studieren. Diese kann man immer als aufsteigende Vereinigung von endlichen normalen Erweiterungen schreiben, also

$$\mathbb{Q} \subset K_1 \subset K_2 \subset \ldots K_m \subset \ldots \subset K.$$

Man kann jeden Automorphismus eines Zwischenkörpers $\sigma_m : K_m \to K_m$ zu einem Automorphismus σ von K fortsetzen und man sieht, daß die Galoisgruppe $\mathrm{Gal}(K/\mathbb{Q})$ der projektive Limes der endlichen Galoisgruppen der Zwischenkörper ist. Ein Element dieser Galoisgruppe dasselbe ist wie eine Folge von Elementen

$$\sigma = (\ldots, \sigma_m, \ldots, \sigma_n, \ldots),$$

wobei $\sigma_m : K_m \to K_m$ auf einen kleineren Körper K_n eingeschränkt gerade σ_n liefert.

Damit bekommt die Galoisgruppe der unendlichen Erweiterung die Struktur einer proendlichen topologischen Gruppe. Die Untergruppen der Form $\mathrm{Gal}(K/L)$, wobei L die über $\mathbb{Q}$ endlichen Zwischenkörper durchläuft, bilden ein Fundamentalsystem von Umgebungen des Einselementes $e \in \mathrm{Gal}(K/\mathbb{Q})$.

Es ist nun überhaupt kein Problem, die Begriffe Zerlegungsgruppe, Trägheitsgruppe, Verzweigung usw. auf diese unendlichen Galoisgruppen zu übertragen

Wir können dann wieder die Operation der Zerlegungsgruppe $T_{\mathfrak{P}}$ auf $(\mathcal{O}/\mathfrak{P})/\mathbb{F}_p$ betrachten.

Die Galoisgruppe $\mathrm{Gal}((\mathcal{O}/\mathfrak{P})/\mathbb{F}_p)$ ist nun u.U. unendlich, aber immer noch proendlich und wird topologisch von dem Frobenius $\Phi_{\mathfrak{P}} : \{x \mapsto x^p\}$ erzeugt.

Wenn wir als Körper K einen algebraischen Abschluß $\bar{\mathbb{Q}}$ von $\mathbb{Q}$ wählen, wird die zugehörige Gruppe $\mathrm{Gal}(\bar{\mathbb{Q}}/\mathbb{Q})$ als die *(absolute) Galoisgruppe von* $\mathbb{Q}$ bezeichnet.

II „Motivische" Galoismoduln

Es sei ℓ eine Primzahl. Mit $\mathbb{Z}_\ell$ bezeichnen wir den Ring der ganzen ℓ-adischen Zahlen, es ist der projektive Limes

$$\mathbb{Z}_\ell = \varprojlim \mathbb{Z}/\ell^m\mathbb{Z}.$$

Wir studieren endlich erzeugte $\mathbb{Z}_\ell$-Moduln M_ℓ, auf denen die Galoisgruppe $\mathrm{Gal}(\bar{\mathbb{Q}}/\mathbb{Q})$ operiert. Wir haben also einen Homomorphismus von $\mathrm{Gal}(\bar{\mathbb{Q}}/\mathbb{Q})$ in die Automorphismengruppe $\mathrm{Aut}_{\mathbb{Z}_\ell}(M_\ell)$ und es gibt eine (u.U. unendliche Erweiterung) $K/\mathbb{Q}$, so daß $\mathrm{Gal}(\bar{\mathbb{Q}}/K)$ der Kern dieser Operation ist. Wir bekommen somit einen injektiven Homomorphismus

$$\rho : \mathrm{Gal}(K/\mathbb{Q}) \to \mathrm{Aut}_{\mathbb{Z}_\ell}(M_\ell).$$

Für diesen Artikel möchte ich sagen, daß M_ℓ ein *ℓ-adischer Galoismodul* ist, wenn $K/\mathbb{Q}$ an fast allen Primzahlen p unverzweigt ist.

Ich möchte darauf hinweisen, daß die Automorphismengruppe von M_ℓ auch ein projektiver Limes ist, weil M_ℓ die charakteristischen Untergruppen $\ell^m M_\ell, m = 1, 2 \dots$ hat. Dann wird $M_\ell/\ell^m M_\ell$ endlich und hat daher eine endliche Automorphismengruppe. Wir haben $\mathrm{Aut}(M_\ell) \to \mathrm{Aut}(M_\ell/\ell^m M_\ell)$. Wenn wir das Bild mit Γ_m bezeichnen, dann wird $\mathrm{Aut}(M_\ell)$ der projektive Limes der Γ_m. Hieraus bekommt man auch den Aufbau von K durch endliche Erweiterungen.

Ich gebe Beispiele für solche ℓ-adischen Galoismoduln.

(1) Wir betrachten den Körper $K \subset \bar{\mathbb{Q}}$, den wir durch Adjunktion aller Einheitswurzeln von ℓ-Potenz-Ordnung erhalten, also

$$K = \bigcup \mathbb{Q}(\zeta_{\ell^m})$$

wobei ζ_{p^m} immer eine primitive ℓ^m-te Einheitswurzel $m \in \mathbb{N}$ sein soll. Die Gruppe $< \zeta_{\ell^m} >$ der ℓ^m-ten Einheitswurzeln in $\bar{\mathbb{Q}}$ ist zyklisch von der Ordnung ℓ^m, sie wird von einer primitiven ℓ^m-ten Einheitswurzel erzeugt. Das Potenzieren mit ℓ liefert einen surjektiven Homomorphismus

$$< \zeta_{\ell^{m+1}} > \to < \zeta_{\ell^m} >$$

und wir bilden den projektiven Limes

$$\mu_\ell := \varprojlim < \zeta_{\ell^m} > .$$

Dieser Limes ist ein freier $\mathbb{Z}_\ell$-Modul vom Rang 1, es ist also $\mathrm{Aut}(\mu_\ell) = \mathbb{Z}_\ell^*$ und die Operation der Galoisgruppe $\mathrm{Gal}(\bar{\mathbb{Q}}/\mathbb{Q})$ auf μ_ℓ ist folglich durch einen Charakter

$$\alpha : \mathrm{Gal}(\bar{\mathbb{Q}}/\mathbb{Q}) \to \mathrm{Gal}(K/\mathbb{Q}) \to \mathbb{Z}_\ell^*$$

gegeben, den man *Tate-Charakter* nennt. Der Galoismodul μ_ℓ wird auch mit $\mathbb{Z}_\ell(1)$ bezeichnet; er ist unverzweigt außerhalb von ℓ.

Man kann für jede ganze Zahl r einen ℓ-adischen Galoismodul $\mathbb{Z}_\ell(r)$ definieren. Als $\mathbb{Z}_\ell$-Modul ist dieser Modul frei vom Rang 1 und $\mathrm{Gal}(\bar{\mathbb{Q}}/\mathbb{Q})$ operiert darauf durch den Charakter $\sigma \to \alpha(\sigma)^r$, und für alle $r, s \in \mathbb{Z}$ hat man Isomorphismen $\mathbb{Z}_\ell(r) \otimes_{\mathbb{Z}_\ell} \mathbb{Z}_\ell(s) \cong \mathbb{Z}_\ell(r+s)$.

Es ist nun entscheidend, daß diese Galoismoduln $\mathbb{Z}_\ell(r)$ „motivisch" sind, wobei ich jetzt nicht in der Lage bin zu sagen, was ich damit genau meine.

Aber ganz grob kann ich schon etwas dazu sagen: Der projektive Raum $\mathbb{P}^r/\mathbb{Q}$ ist ein glattes projektives Schema über $\mathbb{Q}$. Ich empfehle, sich darunter einfach vorzustellen, daß wir für jede Erweiterung K von $\mathbb{Q}$ den r-dimensionalen projektiven Raum $\mathbb{P}^r(K)$ definieren können. Diesem Schema kann man nach einer Konstruktion von A. Grothendieck für jede Primzahl ℓ die sogenannten *ℓ-adischen Kohomologiegruppen*

$$H^i(\mathbb{P}^r \times_{\mathbb{Q}} \bar{\mathbb{Q}}, \mathbb{Z}_\ell) \qquad i = 0, 1, \ldots, 2r$$

zuordnen (Siehe z. B. [Fr-K]). Es stellt sich heraus, daß dies nach Konstruktion Galoismoduln sind und es ist

$$H^{2r}(\mathbb{P}^r \times_{\mathbb{Q}} \bar{\mathbb{Q}}, \mathbb{Z}_\ell) \simeq \mathbb{Z}_\ell(-r).$$

„Motivisch" heißt also so etwas wie: „kommt vor in der ℓ-adischen Kohomologie eines schönen Schemas". Diese Galoismoduln sind an allen Stellen $p \neq \ell$ unverzweigt, weil das Schema $\mathbb{P}^r/\mathbb{Q}$ überall gute Reduktion hat, das bedeutet ganz grob gesagt, daß man das Schema $\mathbb{P}^r$ auch über $\mathbb{Z}$ definieren kann und somit auch über jedem endlichen Körper $\mathbb{F}_p$.

Dies ist ein spezieller Fall einer allgemeineren Situation. *Eine glatte projektive Varietät X über* $\mathbb{Q}$ ist eine Teilmenge eines projektiven Raumes $\mathbb{P}^r(\mathbb{C})$, die als Menge der gemeinsamen Nullstellen einer endlichen Menge von homogenen Polynomen mit rationalen Koeffizienten beschrieben werden kann. Dabei wird noch gefordert, daß sie keine singulären Punkte hat, was ganz grob bedeutet, daß eine aus den Gleichungen gebildete Jacobimatrix – deren Einträge sind also partielle Ableitungen der definierenden Gleichungen – maximalen Rang hat. (Man sollte an den Satz über implizite Funktionen denken.) Weil die Gleichungen rationale Koeffizienten haben, operiert die riesige Gruppe aller Automorphismen des Körpers $\mathbb{C}$ auf X. Von diesen Automorphismen sind nur die Identität und die komplexe Konjugation stetig.

Man kann für jede solche glatte projektive Varietät $X/\mathbb{Q}$ die ℓ-adischen Kohomologiegruppen

$$H^i(X \times_{\mathbb{Q}} \bar{\mathbb{Q}}, \mathbb{Z}_\ell) \qquad i = 0, 1, \ldots, 2 \dim X$$

definieren, und diese Kohomologiegruppen sind dann für jeden Grad i in der Tat ℓ-adische Galoismoduln.

Man sollte dies vielleicht so sehen: Nach der oben gegebenen Definition ist X auch eine komplexe Mannigfaltigkeit und somit auch ein topologischer Raum. Damit sind auch die gewöhnlichen Betti-Kohomologiegruppen

$$H^i(X, \mathbb{Z})$$

definiert, deren Definition erfordert aber das Konzept der Stetigkeit. Da fast alle Automorphismen des Körpers $\mathbb{C}$ unstetig sind, kann man keine Operation der Automorphismengruppe von $\mathbb{C}$ auf diesen Kohomologiegruppen definieren. Grothendieck hat gezeigt, daß es einen kanonischen Homomorphismus

$$H^i(X, \mathbb{Z}) \otimes \mathbb{Z}_\ell \to H^i(X \times_{\mathbb{Q}} \bar{\mathbb{Q}}, \mathbb{Z}_\ell)$$

gibt, dessen Kern und Kokern Torsionsmoduln sind. Man kann das auch so formulieren: Wenn man die topologisch definierten Kohomologiegruppen mit $\mathbb{Z}_\ell$ tensoriert, dann sind dies beinahe rein algebraisch definierbare Objekte. Wenn man mit $\mathbb{Q}_\ell$ tensoriert, dann kann man „beinahe" auch weglassen. Jetzt hat man eine Operation der Gruppe der Automorphismen von $\mathbb{C}$. Es zeigt sich, daß die Automorphismen, die auf $\bar{\mathbb{Q}}$ die Identität induzieren, auf diesen Kohomologiegruppen trivial operieren.

Nun gilt ein fundamentaler

Satz von Deligne ([De-2]). a) *Es gibt eine endliche Menge S von Primstellen, die von $X/\mathbb{Q}$ abhängt, so daß alle Galoismoduln*

$$H^i(X \times_{\mathbb{Q}} \bar{\mathbb{Q}}, \mathbb{Z}_\ell)$$

außerhalb von $S \cup \{\ell\}$ unverzweigt sind.
b) *Für $p \notin S \cup \{\ell\}$ sei $< \Phi_{\mathfrak{P}} >$ die zugehörige Konjugationsklasse von Frobenii. Dann hat das charakteristische Polynom*

$$\det(\mathrm{Id}\, T - \Phi_{\mathfrak{P}}^{-1} | H^i(X \times_{\mathbb{Q}} \bar{\mathbb{Q}}, \mathbb{Z}_\ell) \otimes \mathbb{Q}_\ell)$$

ganzzahlige Koeffizienten, die von ℓ unabhängig sind.
c) *Die Eigenwerte von $\Phi_{\mathfrak{P}}^{-1}$ sind ganze algebraische Zahlen, deren Absolutbeträge alle gleich $p^{i/2}$ sind.*

Dieser Satz erlaubt es uns, der Kollektion der durch die Kohomologiegruppen $H^i(X \times_{\mathbb{Q}} \bar{\mathbb{Q}}, \mathbb{Z}_\ell)$ der glatten projektiven Varietät $X/\mathbb{Q}$ gegebenen Galoismoduln eine L-Funktion zuzuordnen: wir bilden das unendliche Produkt

$$L(H^i(X \times_{\mathbb{Q}} \bar{\mathbb{Q}}, \mathbb{Q}_\ell), s) := \prod_{p \notin S} \frac{1}{\det(\mathrm{Id} - \Phi_{\mathfrak{P}}^{-1} p^{-s} \mid H^i(X \times_{\mathbb{Q}} \bar{\mathbb{Q}}, \mathbb{Q}_\ell)}$$

für ein unbestimmtes ℓ. Dies Produkt konvergiert für $\mathrm{Re}(s) > i/2 + 1$ und man hofft, daß es eine meromorphe Fortsetzung in die ganze komplexe Ebenene gestattet und einer Funktionalgleichung genügt.

Wir wollen nun einen ℓ-adischen Galoismodul M_ℓ *motivisch* und *rein vom Gewicht i* nennen, wenn $M_\ell \otimes \mathbb{Q}_\ell$ als direkter Summand in der i-ten *Kohomologie* einer glatten projektiven Varietät $X/\mathbb{Q}$ auftaucht, wobei der Summand noch durch sogenannte Korrespondenzen ausgeschnitten wird. Das garantiert dann, daß man einem solchen Galoismodul M_ℓ eine L-Funktion

$$L(M_\ell \otimes \mathbb{Q}_\ell, s) := \prod_{p \notin S} \frac{1}{\det(\mathrm{Id} - \Phi_{\mathfrak{P}}^{-1} p^{-s} \mid M_\ell \otimes \mathbb{Q}_\ell)}$$

zuordnen kann.

Nach unserer Definition ist $\mathbb{Z}_\ell(-r)$ motivisch vom Gewicht $2r$, falls $r \geq 0$. Es ist nun sinnvoll, auch noch die Tensorprodukte eines reinen motivischen Galoismoduls mit $\mathbb{Z}_\ell(r)$ mit $r \geq 0$ in die Klasse der reinen motivischen Galoismoduln mit aufzunehmen. Diese können dann negative Gewichte haben.

Für die Galoismoduln

$$\mathbb{Z}_\ell(-r) = H^{2r}(\mathbb{P}^r \times_{\mathbb{Q}} \bar{\mathbb{Q}}, \mathbb{Z}_\ell)$$

sind die Eigenwerte der Frobenii gerade p^r, die L-Funktion ist also durch

$$\prod_p \frac{1}{1 - p^{r-s}} = \zeta(-r + s)$$

gegeben, wobei $\zeta(\cdot)$ die Riemannsche ζ-Funktion ist.

Man kann auch *gemischte Galoismoduln* definieren. Dazu betrachtet man z.B. glatte *quasiprojektive* Varietäten $U/\mathbb{Q}$. Solche erhält man zum Beispiel, wenn man aus einer glatten projektiven Varietät $X/\mathbb{Q}$ eine abgeschlossene Untervarietät $Y/\mathbb{Q} \subset X/\mathbb{Q}$ herausnimmt. Das Komplement $U = X \setminus Y$ ist dann eine glatte quasiprojektive Varietät über $\mathbb{Q}$.

Dann kann man die ℓ-adischen Kohomologiegruppen $H^i(U \times_{\mathbb{Q}} \bar{\mathbb{Q}}, \mathbb{Z}_\ell)$ studieren. Diese Kohomologiegruppen sind wieder Galoismoduln, aber sie sind nicht mehr rein, sondern besitzen eine Filtration mit reinen Subquotienten und aufsteigenden Gewichten. Solche Galoismoduln nennen wir *gemischte motivische Galoismoduln.* Man erweitert die Definition auf solche Galoismoduln, die man durch Projektoren, die sich aus geeigneten Korrespondenzen herleiten, gewinnt.

Man sagt, daß eine projektive Varietät, die über $\mathbb{Q}$ definiert ist, *gute Reduktion bei der Primzahl p hat,* wenn man die definierenden Gleichungen so wählen kann, daß sie ganze Koeffizienten haben und daß die Gleichungen modulo p immer noch eine glatte Varietät beschreiben. Diejenigen Primzahlen, an denen die Reduktion nicht gut ist, bilden gerade die Menge S im Satz von Deligne.

Wenn wir also motivische (gemischte) Galoismoduln mit kontrollierter Verzweigung konstruieren wollen, dann müssen wir Varietäten mit wenig schlechter Reduktion konstruieren. Ich weise aber darauf hin, daß wir dabei immer noch die gleichen Schwierigkeiten antreffen: Man muß das Reduktionsverhalten von $X/\mathbb{Q}$ und von $Y/\mathbb{Q} \subset X/\mathbb{Q}$ im Griff haben. Es ist gar nicht klar, wie man das erreichen kann. Ein derartiges Problem haben wir schon angetroffen, als wir versuchten, eine Gleichung 5. Grades mit kontrollierter Verzweigung hinzuschreiben.

IIb Gemischte Tate-Motive

Man kann z.B. nach Galoismoduln M_ℓ fragen, die in einer exakten Sequenz

$$0 \to \mathbb{Z}_\ell(0) \to M_\ell \to \mathbb{Z}_\ell(-n-1) \to 0$$

sitzen, wobei $n \geq 0$ eine positive ganze Zahl ist. Dabei möchten wir die Verzweigung kontrollieren, im wesentlichen sollten sie nur bei ℓ verzweigt sein. Die gemischten Galoismoduln bilden eine abelsche Kategorie und in einer solchen abelschen Kategorie kann man sogenannte Ext^1-Gruppen definieren, eine Sequenz wie oben gibt uns dann ein Element

$$[M_\ell] \in \mathrm{Ext}^1_{\mathrm{Gal}(\bar{\mathbb{Q}}/\mathbb{Q})}(\mathbb{Z}_\ell(-n-1), \mathbb{Z}_\ell(0)).$$

Es ist nicht schwer, solche Galoismoduln zu konstruieren, man kann sogar im Prinzip alle solchen Galoismoduln mit Hilfe der Galoiskohomologie beschreiben. Es ist aber nicht klar, wie man solche M_ℓ bekommt, die gemischt motivisch sind, d.h. die in der Kohomologie einer offenen Varietät auftauchen. Dies sind dann sogenannte *gemischte Tate-Motive*. Nach den Vermutungen von Beilinson in der Umformulierung von Deligne und Scholl sollte man diese gemischten Tate Motive als Elemente einer Extensionsgruppe

$$\mathrm{Ext}^1_{\text{gem. Mot.}}(\mathbb{Z}(-n-1), \mathbb{Z}(0))$$

in einer sehr hypothetischen abelschen Kategorie der gemischten Motive auffassen. Insbesondere sollte diese Extensionsgruppe endlich erzeugt sein und ihr Rang sollte gleich der Ordnung der Nullstelle der Riemannschen ζ-Funktion an der Stelle $-n$ sein. Bekanntlich ist genau dann $\zeta(-n) = 0$, wenn n gerade ist, und dann ist dies eine Nullstelle erster Ordnung. Wir sollten also für ein gerades $n > 0$ einen solchen gemischten Modul wie oben konstruieren können, der auch noch unendliche Ordnung hat und daher die obige Extensionsgruppe bis auf Torsion erzeugt.

Wenn man sich nun ein Element $\xi \in \mathrm{Ext}^1_{\text{gem. Mot.}}(\mathbb{Z}(-n-1), \mathbb{Z}(0))$ als gemischtes Motiv vorstellt, dann bekommt man den zugehörigen gemischten Galoismoduln, indem man für jedes ℓ die ℓ-adische Kohomologie dieses gemischten Motivs betrachtet. Man kann aber auch die Betti-Kohomologie dieses Motivs betrachten und schließlich mit Hilfe der algebraischen Differentialformen noch die de Rham- Kohomologie definieren. Aus diesen beiden Strukturen zusammen bekommt man aus unserem gemischten Motiv eine sogenannte *gemischte Hodge-Struktur über* $\mathbb{Q}$. Auch diese gemischten Hodge-Strukturen bilden eine abelsche Kategorie und wir bekommen somit ein Element

$$\xi_{\mathrm{Hodge}} \in \mathrm{Ext}^1_{\text{gem. Hodge}/\mathbb{Q}}(\mathbb{Q}(-n-1), \mathbb{Q}(0)) \xrightarrow{\sim} \mathbb{R}.$$

Ich habe nicht definiert, was gemischte Hodge-Strukturen über $\mathbb{Q}$ sind, aber ich kann sagen, daß sie mit Hilfe der linearen Algebra verstanden werden können, insbesondere ist der obige Isomorphismus leicht zu beweisen. Die in diesem Fall be-

Für gerades n ist das Bild von

$$\mathrm{Ext}^1_{\text{gem. Mot.}}(\mathbb{Z}(-n-1),\mathbb{Z}(0)) \xrightarrow{\sim} \mathrm{Ext}^1_{\text{gem. Hodge}/\mathbb{Q}}(\mathbb{Q}(-n-1),\mathbb{Q}(0)) \xrightarrow{\sim} \mathbb{R}$$

durch die Zahl $\zeta'(-n)$ mod $\mathbb{Q}^*$ *gegeben.*

Dabei ist allerdings die hypothetisch definierte Gruppe $\mathrm{Ext}^1_{\text{gem. Mot.}}(\mathbb{Z}(-n-1),\mathbb{Z}(0))$ durch die Gruppe $K_{2n-1}(\mathbb{Q})$ zu ersetzen.

Ganz entsprechend bekommt man aus dem Element

$$\xi \in \mathrm{Ext}^1_{\text{gem. Mot.}}(\mathbb{Z}(-n-1),\mathbb{Z}(0))$$

auch Elemente

$$\xi_\ell \in \mathrm{Ext}^1_{\mathrm{Gal}(\bar{\mathbb{Q}}/\mathbb{Q})}(\mathbb{Z}_\ell(-n-1),\mathbb{Z}_\ell(0) \xrightarrow{\sim} H^1(\mathrm{Gal}(\bar{\mathbb{Q}}/\mathbb{Q}),\mathbb{Z}_\ell(n+1))$$

für alle Primzahlen ℓ. C. Soulé hat in [Sou] Elemente

$$s_\ell(n) \in \mathrm{Ext}^1_{\mathrm{Gal}(\bar{\mathbb{Q}}/\mathbb{Q})}(\mathbb{Z}_\ell(-n-1),\mathbb{Z}_\ell(0))$$

konstruiert, die mit Hilfe von zyklotomischen Einheiten gebildet werden. Diese Elemente hängen mit dem Wert der ℓ-adischen Zetafunktion zusammen. Ein Analogon der Beilinson-Vermutung besagt dann, daß das Bild von

$$\mathrm{Ext}^1_{\text{gem. Mot.}}(\mathbb{Z}(-n-1),\mathbb{Z}(0)) \to H^1(\mathrm{Gal}(\bar{\mathbb{Q}}/\mathbb{Q}),\mathbb{Z}_\ell(n+1))$$

immer (vielleicht bis auf Torsion) von diesen Soulé-Elementen $s_\ell(n)$ erzeugt wird.

Ich werde am Ende des nächsten Abschnitts eine mögliche Konstruktion nicht trivialer gemischter Tate-Motive erläutern, wobei ich Shimura-Varietäten benutze.

Auf den Zusammenhang mit der K-Theorie kann ich hier überhaupt nicht weiter eingehen.

III Shimura-Varietäten

Es gibt eine Möglichkeit der Konstruktion von motivischen Galoismoduln mit kontrollierter Verzweigung, die die Theorie der *Shimura-Varietäten* benutzt. Shimura-Varietäten sind Verallgemeinerungen der klassischen Modulkurven, die man bekommt, wenn man die Gruppe $Sl_2(\mathbb{Z})$ oder sogenannte *Kongruenzuntergruppen* $\Gamma \subset Sl_2(\mathbb{Z})$ auf der oberen Halbebene

$$H = \{z \in \mathbb{C} \mid \mathrm{Im}(z) > 0\}$$

operieren läßt und den Quotienten nach dieser Operation bildet. Zunächst ist das Ergebnis eine Riemannsche Fläche, von der man weiß, wie man sie durch Hinzunahme von endlich vielen Punkten kompaktifizieren kann. Eine solche Kongruenzuntergruppe ist zum Beispiel die Gruppe

$$\Gamma(N) = \{\gamma = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in Sl_2(\mathbb{Z}) \mid \gamma \equiv 1 \mod N\}.$$

Entscheidend ist nun, daß man die Punkte auf diesen Riemannschen Flächen als elliptische Kurven mit einer Zusatzstruktur interpretieren kann.

Dies hat zur Folge, daß man diesen (kompaktifizierten) Riemannschen Flächen auf kanonische Weise die Struktur von glatten quasi-(projektiven) Kurven über $\mathbb{Q}$ geben kann.

Ganz grob heißt dies, daß man die kompakten Flächen in einen projektiven Raum als Menge der Nullstellen einer endlichen Menge von homogenen Polynomen mit rationalen Koeffizienten einbetten kann.

Ich will versuchen, dies im folgenden Abschnitt zu erläutern. Am Ende findet man ein Beispiel, daß schon Fricke und Klein studiert haben; es ist vielleicht hilfreich, sich dieses Beispiel zuerst anzusehen.

IIIa Die modulare Interpretation von $\Gamma\backslash H$

Ist zum Beispiel $\Gamma = \Gamma(N)$ und $N \geq 3$, dann ist ein Punkt $x \in \Gamma\backslash H$ dasselbe wie ein komplexer Torus $E(x)/\mathbb{C}$ zusammen mit einer Basis $< e_1, e_2 >$ der Gruppe der N-Teilpunkte. Das kann man sich leicht klar machen: Wir repräsentieren x durch einen Punkt $z \in H$, dann liefert uns $< 1, z > = \mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z}z$ ein Gitter in $\mathbb{C}$ und $\mathbb{C}/ < 1, z >$ ist dann unser komplexer Torus. Die Addition auf $\mathbb{C}$ induziert darauf die Struktur einer kompakten analytischen abelschen Gruppe. Die Punkte $1/N, z/N \in \mathbb{C}/ < 1, z >$ liefern eine Basis für die N-Teilpunkte, das sind die Punkte x mit $Nx = 0$. Ersetzen wir nun z durch γz mit $\gamma \in \Gamma(N)$, dann erhalten wir einen isomorphen Torus und es ist sogar so, daß es genau einen Isomorphismus zwischen diesen beiden Tori gibt, der die Basen der N-Teilpunkte ineinander überführt. D.h. die beiden Tori mit Teilpunkten sind gleich.

Auf der Gruppe der N-Teilpunkte gibt es noch die *Weil-Paarung*, der Wert der Weil-Paarung auf unserer Basis von N-Teilpunkten ist

$$< 1/N, z/N > = e^{\frac{2\pi i}{N}}.$$

Ordnet man nun einem Punkt $x \in \Gamma(N)\backslash H$ den gleichen Torus, aber mit den Teilpunkten $< a/N, z/N >$ zu, wobei $(a, N) = 1$, dann wird der Wert der Weil-Paarung $e^{\frac{2\pi i a}{N}}$, wir können also sagen, daß die disjunkte Vereinigung

$$Y(N)(\mathbb{C}) = \bigcup_{a \in (\mathbb{Z}/N\mathbb{Z})^*} \Gamma(N)\backslash H$$

gleich der Menge der eindimensionalen komplexer Tori mit einer ausgezeichneten Basis der N-Teilpunkte ist. Aber ein komplexer Torus mit einer Basis der N-Teilpunkte ist ein rein algebraisches Objekt. Es ergibt sich nämlich aus der Theorie der elliptischen Funktionen, daß man den Torus als glatte Kurve im $\mathbb{P}^2(\mathbb{C})$ realisieren kann. Dies ist dann eine elliptische Kurve über $\mathbb{C}$. Man kann daher für jeden Teilkörper $K \subset \mathbb{C}$ von der Menge der elliptischen Kurven sprechen, die über K definiert sind (die Koeffizienten der Weierstraß-Gleichung sind in K), und die mit einer Basis der Gruppe der N-Teilpunkte versehen sind, wobei diese Punkte auch Koordinaten in K haben. Diese Menge kann natürlich für spezielle Wahlen von K leer sein (z.B. $K = \mathbb{Q}$). Jetzt kann man mit den Methoden der algebraischen Geometrie zeigen, daß die obige Riemannsche Fläche $Y(N)(\mathbb{C})$ die Menge der komplexen Punkte einer quasiprojektiven Kurve $Y(N)/\mathbb{Q}$ ist. Es gilt noch mehr: Das Konzept einer elliptischen Kurve zusammen mit einer Basis für die N-Teilpunkte ist auch über einem Körper der Charakteristik $p > 0$ sinnvoll, falls p die Zahl N nicht teilt. Das bedeutet, daß unsere Kurve gute Reduktion außerhalb von N hat, oder etwas nobler ausgedrückt: sie läßt sich zu einem glatten quasiprojektiven Schema über $\mathrm{Spec}(\mathbb{Z}[\frac{1}{N}])$ ausdehnen. Aber es gilt noch mehr: Man hat eine kanonische Konstruktion einer Kompaktifizierung, indem man degenerierte Kurven hinzunimmt, man hat $Y(N)/\mathbb{Q} \subset X(N)/\mathbb{Q}$, wobei $X(N)/\mathbb{Q}$ projektiv und glatt ist. Auch diese Kurve hat gute Reduktion außhalb von N, und die hinzugenommenen Punkte bleiben verschieden, wenn man mod p reduziert und p kein Teiler von N ist.

Sehr häufig arbeitet man auch mit anderen Untergruppen $\Gamma \subset Sl_2(\mathbb{Z})$ so zum Beispiel mit den Gruppen

$$\Gamma_0(N)\backslash H \quad \text{wobei} \quad \Gamma_0(N) = \{\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in SL_2(\mathbb{Z}) \mid c \equiv 0 \mod N\}.$$

Auch hier kann man die Punkte in $\Gamma_0(N)\backslash H$ als elliptische Kurven mit einer Zusatzstruktur auf der Gruppe der N-Tielungspunkte identifizieren.

Wir sehen also:

Die Riemannschen Flächen $\Gamma\backslash H$ werden damit arithmetische Objekte über $\mathbb{Q}$ oder über geeigneten Zahlkörpern, man kann sie in kanonischer Weise als quasiprojektive Varietäten über geeigneten Körpern interpretieren.

Dieser Umstand war im Prinzip schon Kronecker und Weber bekannt (Siehe das Beispiel weiter unten). G. Shimura hat in seinen Pionierarbeiten dies auf systematische Weise auf andere Fälle und auf höhere Dimensionen verallgemeinert, so daß man heute diese Art von Varietäten völlig zu Recht Shimura-Varietäten nennt, auch diejenigen, die man schon länger kennt. Es soll aber an dieser Stelle auch erwähnt werden, daß M. Eichler fundamentale Beiträge zu diesem Gebiet geleistet hat. Wenn man aber diese Ideen in optimaler Weise ausnutzen will, dann benötigt man auch noch die Sprache der modernen algebraischen Geometrie, man braucht die allgemeinen Konzepte wie Schema, Modulschema usw. .

Weiter oben habe ich das Problem erwähnt, daß es gar nicht so einfach ist, Paare $Y/\mathbb{Q} \subset X/\mathbb{Q}$ zu konstruieren, die gute Reduktionseigenschaften haben. Solche Paare liefern uns dann Galoismoduln mit kontrollierter Reduktion. Der Hauptpunkt dieses Vortrages ist:

Die Theorie der Shimura-Varietäten gibt uns die Möglichkeit der Konstruktion von quasiprojektiven Varietäten, die nicht durch Gleichungen definiert werden, sondern durch „Interpretation“, und bei denen die Glattheit und Reduktionseigenschaften aus der Interpretation abzulesen sind!

Ich komme nun zu dem versprochenen Beispiel.

Wir betrachten den speziellen Fall $N = 11$. Die Riemannsche Fäche $\Gamma_0(11)\backslash H$ kann durch Hinzunahme von zwei Punkten kompaktifiziert werden. Die kompaktifizierte Riemannsche Fläche wird bei Fricke ([Fr], II,4,§4) durch die Gleichung

$$\sigma_1 = \sqrt{\tau(\tau^3 - 20\tau^2 + 56\tau - 44)}$$

beschrieben (Fricke spricht von einem complexen Gebilde vom Geschlecht $p = 1$). Eine harmlose Manipulation ergibt eine arithmetisch günstigere Form, nämlich

$$y^2u + yu^2 = x^3 - x^2u - 10xu^2 - 20u^3$$

wobei ich homogenisiert habe, um eine projektive Kurve zu beschreiben.

Diese Gleichung kann man auch als Gleichung über dem endlichen Körper $\mathbb{F}_p$ lesen, indem man die Koeffizienten mod p reduziert, und für alle $p \neq 11$ bekommt man eine glatte Kurve. Das kann man nachrechnen, es folgt aber auch durch die Interpretation als Modulschema. Das kann man so formulieren, daß die obige Gleichung ein glattes projektives Schema $X_0(11)/\mathrm{Spec}(\mathbb{Z}[\frac{1}{11}])$ definiert. Diese arithmetischen Aspekte konnten Klein und Fricke zu ihrer Zeit nicht verstehen, dazu bedurfte es der Entwicklung sprachlicher Möglichkeiten.

Es sei den geneigten Elementen der Menge der Leserschaft empfohlen, herauszufinden, welches in dieser Beschreibung die Spitzen (die zur Kompaktifizierung hinzugenommenen Punkte) sind. Außerdem kann gibt es wegen der modularen Interpretation über $X_0(11) \setminus$ Spitzen eine universelle elliptische Kurve mit einer zyklischen Untergruppe der Ordnung 11, die man auch ganz explizit hinschreiben kann. Auch diese Übung dürfte amüsant sein.

IIIb Die motivischen Galoismoduln zu Shimura-Varietäten, die Taniyama-Vermutung und der Satz von Wiles

Ich will die oben angedeuteten Resultate nun in einer speziellen Situation anwenden. Im folgenden gebe ich eine sehr skizzenhafte Darstellung einiger Aspekte der Ideen von Eichler und Shimura, ich formuliere ein klassisches Resultat und den Satz von A. Wiles. Am Ende dieses Abschnittes komme ich noch einmal auf das obige Beispiel zurück. Es ist vielleicht sehr hilfreich, sich zuerst das Beispiel anzusehen. Es ist so explizit formuliert, daß man es numerisch von Hand prüfen kann.

Wir gehen wieder von einer allgemeinen Gruppe $\Gamma_0(N)$ aus. Wie ich oben erläutert habe, besitzt dann die Riemannsche Fläche $\Gamma_0(N)\backslash H$ in natürlicher Weise die Struktur einer glatten quasiprojektiven Kurve über $\mathbb{Q}$, die man $Y_0(N)/\mathbb{Q}$ nennt. Durch Hinzunahme endlich vieler Punkte entsteht eine projektive Kurve $X_0(N)/\mathbb{Q}$.

Nun gibt es hier noch mehr Struktur: Alle diese Moduln sind nicht nur Galoismoduln, sondern es gibt noch eine damit verträgliche Operation der sogenannten Hecke-Algebra. Diese Hecke-Algebra bekommt man so: Zu jeder zu N teilerfremden Primzahl p definieren wir eine sogenannte Korrespondenz (mehrwertige Funktion) T_p auf $Y_0(N)$ und $X_0(N)$. Ein Punkt x auf $Y_0(N)$ ist „eine elliptische Kurve E mit Zusatzstruktur bei N". Diese Kurve hat $p+1$ zyklische Untergruppen der Ordnung p, das sind die von den p-Teilpunkten erzeugten zyklischen Untergruppen. Teilen wir E durch diese $p+1$ zyklischen Untergruppen, dann entstehen $p+1$ neue Kurven $E_1, \dots, E_{p+1}$. Weil $(p, N) = 1$, haben diese neuen Kurven wieder eine Zusatzstruktur bei N vom gleichen Typ, sie sind also Punkte $x_1, \dots, x_{p+1}$ auf $Y_0(N)$. Wir können daher T_p auch als Kurve

$$T_p \subset Y_0(N) \times Y_0(N)$$

auffassen, sie besteht aus den Punkten $\{(x, x_i)_{i=1,\dots p+1} \mid x \in Y_0(N)\}$. Diese Korrespondenzen induzieren Endomorphismen auf der Kohomologie, die man ebenfalls T_p nennt; und es sind sogar Endomorphismen auf dem Diagramm weiter oben. Sie kommutieren mit der Operation der Galoisgruppe. Seien $\mathbb{H}_c(N), \mathbb{H}(N), \mathbb{H}_!(N)$ die jeweils von diesen Operatoren erzeugten Algebren von Endomorphismen auf den Moduln links oben, rechts oben und unten: Man nennt sie die Hecke-Algebren zum Niveau N.

Ich hatte weiter oben schon erläutert, daß wir eine kanonische Abbildung

$$H^1(X_0(N)(\mathbb{C}), \mathbb{Z}) \otimes \mathbb{Z}_\ell \to H^1(X_0(N) \times_{\mathbb{Q}} \bar{\mathbb{Q}}, \mathbb{Z}_\ell)$$

haben, die in diesem Fall sogar ein Isomorphismus ist. Die Kohomologiegruppen $H^1(X_0(N)(\mathbb{C}), \mathbb{Z}) \otimes \mathbb{C}$ kann man nun mit Hilfe des Eichler-Shimura-Isomorphismus mit dem Raum der Spitzenformen vom Gewicht 2 beschreiben: Diese Spitzenformen sind holomorphe Funktionen in der Variablen $z \in H$, für die gilt

$$f\left(\frac{az+b}{cz+d}\right) = (cz+d)^2 f(z) \quad \text{für alle} \quad \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in \Gamma_0(N)$$

und die in den Spitzen verschwinden. Ist $f(z)$ eine solche Spitzenform, dann ist $\omega = f(z)dz$ ein holomorphes Differential und dies liefert uns jetzt eine Kohomologieklasse in $H^1(X_0(N)(\mathbb{C}), \mathbb{Z}) \otimes \mathbb{C}$. Man bekommt so eine Inklusion vom Raum der Spitzenformen vom Gewicht 2 in die Kohomologie. Dies ist der „halbe" Eichler-Shimura-Isomorphismus, die andere „Hälfte" bekommt man, wenn man die antiholomorphen Formen hinzunimmt.

Auf dem Raum der Spitzenformen operieren nun die Hecke-Operatoren T_p und es ist nicht schwer zu sehn, daß der Eichler-Shimura-Isomorphismus mit dieser Operation verträglich ist.

Man kann nun zeigen (und dies ist keineswegs trivial):

Die Hecke-Algebren sind kommutativ und die Eigenwerte der Hecke-Operatoren sind ganze algebraische Zahlen. Wenn man die Kohomologiegruppen mit $\mathbb{Q}_\ell$ tensoriert, wird die Operation der Hecke-Algebra halbeinfach. Das heißt, wenn man die obigen Kohomologiegruppen mit einem algebraischen Abschluß $\bar{\mathbb{Q}}_\ell$ tensoriert, dann lassen sie sich als *direkte Summen von Unterräumen schreiben, die aus gemeinsamen Eigenräumen für die Hecke-Algebra bestehen.*

Man zeigt zunächst, daß $\mathbb{H}_!(N)$ auf $H^1(X_0(N) \times_{\mathbb{Q}} \bar{\mathbb{Q}}, \mathbb{Q}_\ell)$ halbeinfach operiert. Hierzu benötigt man und das Peterson Skalarprodukt auf dem Raum der Spitzenformen. Für die ganze Aussage braucht man dann noch das Manin-Drinfeld Argument. (Siehe z. B. [Ha1]).

Es kann nun vorkommen, daß in der obigen Zerlegung Eigenräume auftauchen, für die alle Eigenwerte ganz rational sind. Das liefert uns dann Klassen $0 \neq \xi \in H^1(X_0(N) \times_{\mathbb{Q}} \bar{\mathbb{Q}}, \mathbb{Z}_\ell)$, so daß für alle T_p gilt $T_p(\xi) = a_p\xi$, wobei die Eigenwerte a_p ganz rational ist.

Dann ist klar, daß der Eigenraum zu diesem System von Eigenwerten

$$M_\ell := \{\xi \in H^1(X_0(N) \times_{\mathbb{Q}} \bar{\mathbb{Q}}, \mathbb{Z}_\ell) \mid T_p\xi = a_p\xi \text{ für alle } p\}$$

ein Galoismodul ist. Wir wollen nun im folgenden die technische Voraussetzung machen, daß dies System von Eigenwerten „neu" ist, d.h. daß es nicht schon in der Kohomologie von einem $X_0(N')$ vorkommt, wobei N' ein echter Teiler von N ist.

Es war es seit längerer Zeit bekannt, daß es dann zu einem solchem „neuen" System von rationalen Eigenwerten eine elliptische Kurve $E/\mathbb{Q}$ gibt, so daß wir nach Tensorieren mit $\mathbb{Q}_\ell$ einen Isomorphismus der $\mathbb{Q}_\ell$-Galoismoduln $H^1(E \times_{\mathbb{Q}} \bar{\mathbb{Q}}, \mathbb{Z}_\ell) \otimes \mathbb{Q}_\ell) \xrightarrow{\sim} M_\ell \otimes \mathbb{Q}_\ell$ bekommen. Man findet diese elliptische Kurve als Faktor in der Jacobischen der Kurve $X_0(N)/\mathbb{Q}$. Etwas genauer kann man dies auch so sagen: zu dem Eigenraum mit dem obigen System von Eigenwerten findet man mit Hilfe des Eichler-Shimura-Isomorphismus eine Spitzenform $f(z) = f_E(z)$ vom Gewicht 2. Diese Spitzenform ist dann auch ein holomorphes Differential auf $X_0(N)(\mathbb{C})$, das auch das Differential des gesuchten Faktors ist. Das weiter unten behandelte Beispiel zu $\Gamma_0(11)$ liefert uns eine solche Kurve.

Es wurde nun in einer sehr vagen Form von Taniyama die Idee formuliert, daß man vielleicht umgekehrt zu jeder elliptischen Kurve $E/\mathbb{Q}$ ein N finden könne, so daß $H^1(E \times_{\mathbb{Q}} \bar{\mathbb{Q}}, \mathbb{Z}_\ell) \otimes \mathbb{Q}_\ell$ im obigen Sinne in $H^1(X_0(N) \times_{\mathbb{Q}} \bar{\mathbb{Q}}, \mathbb{Z}_\ell) \otimes \mathbb{Q}_\ell$, auftaucht. Diese Vermutung wurde von A. Weil präzisiert ([We]), indem er eine Regel aufstellte, nach der man das N aus dem Reduktionsverhalten der elliptischen Kurve bestimmen konnte. Man nennt eine elliptische Kurve *modular*, wenn für sie die von Taniyama formulierte Vermutung in der Präzisierung von A. Weil richtig ist.

Im Jahre 1994 zeigte A. Wiles:

Jede elliptische Kurve $E/\mathbb{Q}$ mit semistabler Reduktion ist modular.

Die Voraussetzung „semistabile Reduktion" bedeutet, daß an allen Stellen p, an denen die Kurve schlechte Reduktion hat, die j-Invariante $j(E) \in \mathbb{Q}$ nicht ganz ist.

Dieser Satz hat deswegen so großes Aufsehen erregt, weil nach einer Idee von G. Frey hieraus der große Fermatsche Satz folgt.

Aber auch unabhängig davon ist Wiles' Satz von immenser Bedeutung. Ich habe oben die zu der elliptischen Kurve $E/\mathbb{Q}$ assoziierte Spitzenform $f = f_E$ erwähnt. Nach der Theorie von Hecke kann man dieser Spitzenform eine L-Funktion $L(f,s)$ mit einer Produktentwicklung zuordnen, diese L-Funktion ist holomorph in der Variablen s und genügt einer Funktionalgleichung. Nach Hecke bekommt man diese

L-Funktion so: Die Funktion f ist periodisch, d.h. $f(z+1) = f(z)$ man kann sie also in eine Fourierreihe entwickeln:

$$f(z) = \sum_{n=1}^{n=\infty} a_n e^{2\pi i n z}.$$

Die L-Funktion ist durch die Mellin-Transformierte

$$L_f(s) = \sum_{n=1}^{n=\infty} \frac{a_n}{n^s}$$

von f gegeben. Nach der Theorie von Hecke hat sie eine Produktentwicklung

$$L(f,s) = \prod_p L_p(f,s)$$

wobei

$$L_p(s) = \frac{1}{1 - a_p p^{-s} + p^{1-2s}} \quad \text{für alle Primzahlen } p \nmid N,$$

und wobei die Koeffizienten a_p für $p \neq N$ immer noch die gleiche Bedeutung haben: Es sind die Eigenwerte von T_p.

Eichler und Shimura haben nun gezeigt (Die Kongruenzrelationen:)

Für alle $p \nmid N$ ist der Fourierkoeffizient a_p gerade die Spur des Frobenius Φ_p^{-1} auf $H^1(E \times_{\mathbb{Q}} \bar{\mathbb{Q}}, \mathbb{Z}_\ell)$

Das kann man auch noch elementarer formulieren. Aus der allgemeinen Theorie der L-Funktionen weiß man, daß die Anzahl der $\mathbb{F}_p$ rationalen Punkte auf der Reduktion $\bmod p$ unserer Kurve E gerade $p+1-\mathrm{Spur}(\Phi_p \mid H^1 (E \times_{\mathbb{Q}} \bar{\mathbb{Q}}, \mathbb{Z}_\ell)$ (Die Summanden 1 und p sind auch solche Spuren, nämlich auf der 0-ten und der 2-ten Kohomologie.) Also gilt

Die Anzahl der $\mathbb{F}_p$-rationalen Punkt ist gleich

$$|E(\mathbb{F}_p)| = p + 1 - a_p.$$

Man kann das aber auch so lesen, daß die L-Funktion, die dem Galoismodul $H^1(E \times_{\mathbb{Q}} \bar{\mathbb{Q}}, \mathbb{Z}_\ell)$ zugeordnet ist, bis auf die Faktoren an den Teilern von N mit der Heckeschen L-Funktion zu der Modulform f_E übereinstimmt. Für letztere hat man nun analytische Hilfsmittel, um die holomorphe Fortsetzbarkeit und eine Funktionalgleichung zu beweisen. Also gilt das auch für erstere.

Umgekehrt hat Eichler aus dieser Beziehung geschlossen, daß $|a_p| \leq 2\sqrt{p}$ ist. Dabei hat er benutzt, daß der obige Satz von Deligne für Kurven schon von Weil und für Kurven vom Geschlecht 1 schon von Hasse bewiesen worden war. Deligne hat dann später mit dem gleichen Argument die allgemeine Ramanujan Vermutung bewiesen. ([De-1]).

Ich möchte den Satz von Eichler-Shimura an Hand der von Fricke beschriebene Kurve erläutern, dann wird er ganz elementar. Die Kurve $X_0(11)$ selbst elliptisch und durch die affine Gleichung

$$y^2u + yu^2 = x^3 - x^2u - 10xu^2 - 20u^3$$

gegeben.

Es gibt genau eine normalisierte Spitzenform $f(z)$ vom Gewicht 2 zu $\Gamma_0(11)$ und deren Fourierentwicklung ist

$$f(z) = e^{2\pi iz} \prod_{n=1}^{n=\infty} (1 - e^{2\pi inz})^2 (1 - e^{2\pi in11z})^2 = e^{2\pi iz} - 2e^{2\pi i2z} - e^{2\pi i3z} - 6e^{2\pi i6z} \ldots$$

Dann besagt der Satz von Eichler-Shimura in dieser konkreten Situation, daß für jede Primzahl $p \neq 11$ die um Eins vermehrte Anzahl der Lösungen der obigen Gleichung mod p gleich $p + 1 - a_p$ ist, wobei a_p der Koeffizient von $e^{2\pi ipz}$ in der obigen Entwicklung ist. Für $p = 2$ hat die obige Gleichung die fünf Lösungen $(x, y, u) = (0,1,0), (0,1,1), (0,0,1), (1,0,1), (1,1,1)$ und $5 = 2 + 1 - a_2$.

Schließlich sei noch erwähnt, daß sich der hier geschilderte Sachverhalt in die sogenannte Langlands-Philosophie oder das Langlands-Programm einordnet. Im Langlands-Programm wird allgemein die Frage gestellt, wie weit man eine Beziehung zwischen L-Funktionen zu Motiven und sogenannten automorphen L-Funktionen herstellen kann. Dies ist zum Beispiel für L-Funktionen zu abelschen Galoismoduln der Fall und das ist gerade der Inhalt der Klassenkörpertheorie. Das Langlands-Programm fragt also nach einer nicht abelschen Klassenkörpertheorie.

Langlands und Tunnell haben diese Beziehung in einem speziellen Fall für zweidimensionale Artinsche Galoismoduln gezeigt, und diese Tatsache geht entscheidend in den Beweis des Satzes von Wiles ein. ([La], [Tu]).

IIIc Gemischte Galoismoduln in der Kohomologie von Shimura-Varietäten

Ich komme nun zu der Konstruktion gemischter Tate-Motive. Eine Möglichkeit der Konstruktion besteht darin, daß man aus einem $\mathbb{P}^n$ Konfigurationen von Hyperebenen herausnimmt. Dieser Ansatz hängt mit der Konstruktion von Elementen in der K-Theorie und den Vermutungen von Zagier zusammen. Er ist von Beilinson und Deligne weitergeführt worden und die gemischten Galoismoduln, die man so erhält, sind von A. Huber und J. Wildeshaus bestimmt worden. ([Hu-Wi]).

Ich will nun die modulare Konstruktion vorstellen. Wir wählen eine Hilfsprimzahl $p_0 > 2$ und betrachtet die Modulkurve $Y_0(p_0)/\mathbb{Q}$, die zugehörige Riemannsche Fläche ist dann

$$\Gamma_0(p_0)\backslash H \quad , \quad \text{wobei} \quad \Gamma_0(p_0) = \{\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in Sl_2(\mathbb{Z}) \mid c \equiv 0 \bmod p_0\}.$$

Fügt man zu $Y_0(p_0)/\mathbb{Q}$ zwei Punkte $\{\infty, 0\}$ hinzu, so bekommt man die projektive Kurve $X_0(p_0)/\mathbb{Q}$. Auf $Y_0(p_0)/\mathbb{Q}$ kann man zu einer geraden Zahl $n \geq 0$ eine ℓ-adische (motivische) Garbe $\mathcal{M}_{n,\ell}$ konstruieren. Diese Garbe bekommt man als die Garbe von ℓ-adischen Kohomologiegruppen der symmetrischen Potenzen der universellen elliptischen Kurve über $Y_0(p_0)$. Man kann also auch die entsprechenden Betti- und de Rham-Realisierungen dieser symmetrischen Potenzen betrachten. Diese Garben setzt man auf geschickte Weise zu Garben auf der vollständigen Kurve $X_0(p_0)/\mathbb{Q}$ fort: Man setzt sie durch 0 im Nullpunkt fort und nimmt das direkte Bild in ∞. Da das direkte Bild nicht exakt ist, muß man den sogenannten derivierten

Funktor nehmen. Die resultierende Garbe (in der derivierten Kategorie) heißt $\mathcal{M}^{\#}_{n,\ell}$. (Wenn man diese derivierte Kategorie vermeiden möchte, kann man auch $i_0 : Y_0(p_0) \hookrightarrow Y_0(p_0) \cup \{0\}$ studieren, and darauf die durch Null in den Punkt $\{0\}$ fortgesetzte Garbe $i_{0,!}(\mathcal{M}_{n,\ell})$.)

Wir studieren die ℓ-adische Kohomologie

$$H^1(X_0(p_0) \times_{\mathbb{Q}} \bar{\mathbb{Q}}, \mathcal{M}^{\#}_{n,\ell}) \xrightarrow{\sim} H^1((Y_0(p_0) \cup \{0\}) \times_{\mathbb{Q}} \bar{\mathbb{Q}}, i_{0,!}(\mathcal{M}_{n,\ell})).$$

Ganz entsprechend können wir die Betti- und die de Rham-Kohomologie studieren.

Auf diesen Kohomologiegruppen operiert nun immer noch die Algebra der Hecke-Operatoren. Wenn man die Kohomologiegrupen mit $\mathbb{Q}$ tensoriert, dann enthält sie einen Projektor, der auf den sogenannten Eisensteinanteil der Kohomologie projiziert. Dadurch bekommen wir einen Untermodul

$$H^1_{\mathrm{Eis}}(\mathcal{M}_{n.\ell}) \hookrightarrow H^1(X_0(p_0) \times_{\mathbb{Q}} \bar{\mathbb{Q}}, \mathcal{M}^{\#}_{n,\ell}),$$

der seinerseits in einer Sequenz

$$0 \to \mathbb{Z}_\ell(0) \to H^1_{\mathrm{Eis}}(\mathcal{M}_{n.\ell}) \to \mathbb{Z}_\ell(-n-1) \to 0$$

liegt. Das ist nun ein gemischter Galoismodul. Man kann zeigen, daß dieser Modul außerhalb von $\{p_0, \ell\}$ unverzweigt ist. Die ℓ-adische Extensionsklasse dieser Galoismoduln kann man berechnen:

Die Extensionsklassen dieser Moduln sind bis auf einen von ℓ unabhängigen rationalen Faktor $r(n, p_0)$ genau die von Soulé konstruierten Elemente, d.h. wir haben für alle $\ell \neq p_0$ die Relation

$$\begin{aligned}[H^1_{\mathrm{Eis}}(\mathcal{M}_{n.\ell})] &= r(n,p_0)s_\ell(n) \in \mathrm{Ext}^1(\mathbb{Z}_\ell(-n-1), \mathbb{Z}_\ell(0)) \\ &= H^1(\mathrm{Gal}(\bar{\mathbb{Q}}/\mathbb{Q}), \mathbb{Z}_\ell(n+1))\end{aligned}$$

(Siehe hierzu die noch sehr provisorische Darstellung in [Ha2].)

Diesen Untermodul kann man auch in der Betti- und der de Rham-Realisierung herausschneiden. Man gewinnt also ein gemischtes Motiv $H^1_{\mathrm{Eis}}(\mathcal{M}_n)$, das man mit Hilfe des obigen Projektors in der Hecke-Algebra definiert.

Im Rahmen der Betti-de-Rham-Kohomologietheorie kann man diesem gemischten Motiv

$$0 \to \mathbb{Q}_{B,dR}(0) \to H^1_{\mathrm{Eis}}(\mathcal{M}_n)_{B,dR} \to \mathbb{Q}_{B,dR}(-n-1) \to 0$$

eine Extensionsklasse zuordnen. Auch diese Erweiterungsklasse kann man berechnen. Es ist (siehe [Ha1])

$$[H^1_{\mathrm{Eis}}(\mathcal{M}_n)_{B,dR}] \in \zeta'(-n)\mathbb{Q}^* \subset \mathrm{Ext}^1_{\text{gem. Hodge}/\mathbb{Q}}(\mathbb{Q}(-n-1), \mathbb{Q}(0)) \xrightarrow{\sim} \mathbb{R}$$

Die Unbestimmtheit bis auf ein Element in $\mathbb{Q}^*$ rührt daher, daß der Isomorphismus zwischen der Erweiterungsgruppe und $\mathbb{R}$ nur bis auf ein Element aus $\mathbb{Q}^*$ bestimmt ist.

Diese Aussage liefert uns dann einen Teil der oben formulierten Beilinson-Vermutung, sie ist aber in gewisser Hinsicht auch weitergehend als jene.

Literatur

[De-1] Deligne, P.; Formes modulaires et représentations ℓ-adiques. Séminaire Bourbaki, 1968/69, Exp. 335

[De-2] Deligne, P.; La Conjecture de Weil, I Pub. Math., IHES, No 43, 1974, S. 273-308

[De-Ra] Deligne, P, Rapoport, M.; Les schémas de modules de courbes elliptiques. Modular Functions of One Variable II, Springer LN 349, 1973,143-174.

[Ei] Eichler, M.; Quaternäre quadratische Formen und die Riemannsche Vermutung für die Kongruenzetafunktion, Arch. 5 (1954), 355-366.

[Fr] Fricke, R.; Die elliptischen Functionen und ihre Anwendungen, Teubner 1922.

[Fr-K] Freitag, E. und Kiehl, R.; Etale Cohomology and the Weil Conjecture, Springer Ergebnisse der Mathematik, 13, 1988.

[Ha1] Harder, G.; Eisensteinkohomologie und die Konstruktion gemischter Motive, Springer Lecture Notes, 1562, 1993

[Ha2] Harder, G.; Galoisdarstellungen zu Andersons gemischten Motiven, (Brief an P. Arias), ftp rhein.iam.uni-bonn.de usr/harder/mixmot.ps

[Hu-Wi] Huber, A. und Wildeshaus, J.; Classical Motivic Polylogaritm according to Beilinson and Deligne preprint.

[La] Langlands, R.; Base change for $Gl(2)$, Ann. of Math. Studies **96**, Princeon University Press, 1980

[Mi] Milne J.; Etale Cohomology, Princeton University Press, Princeton 1980

[Tu] Tunnell, J.; Artins conjecture for representations of octahedral type, Bull. A.M.S., **5** (1981), 173-175.

[Neu] Neukirch, J.; Algebraische Zahlentheorie, Springer Verlag 1992

[Sh 1] Shimura, G.; Correspondances modulaires et les fonction ζ des courbes algebriques, J. Math. Soc. Japan 10 (1958), 1-28.

[Sh 2] Shimura, G.; Introduction to the theory of automorphic functions, Publ. of Math. Soc. of Jap. II, 1971

[Sou] Soulé, Ch.; Eléments cyclotomiques en K-theorie, Astérisque 147-148 (1987)

[Wa] Washington, L.; Introduction to cyclotomic fields Graduate Texts, Springer Verlag

[We] Weil, A.; Über die Bestimmung Dirichletscher Reihen durch Funktionalgleichungen, Math. Ann. **168** (1967), 149-156

[Wi] Wiles, A.; Modular elliptic curves and Fermats Last Theorem. Ann. of Math., 142 (1995), 443 -551

Günter Harder
Math. Institut
Universität Bonn
Beringstr. 6
53115 Bonn
e-mail: harder@diophant.iam.uni-bonn.de

(Eingegangen: 14. 7. 1997)

Buchbesprechungen

Gabriel, P., Matrizen, Geometrie, Lineare Algebra, (Basler Lehrbuch) Basel u. a.: Birkhäuser 1996, XII + 634 Seiten, DM 68.–

Ich verstehe nicht recht, warum ausgerechnet Bücher über Lineare Algebra Autoren Anlaß geben, unkonventionelle Texte vorzulegen. Als vor Jahren Egbert Brieskorns Werk *Lineare Algebra und Analytische Geometrie* bei Vieweg zu erscheinen begann, wunderte ich mich über den enormen Umfang, der so gar nicht zu der Rolle der dienstbaren Magd passen wollte, in welcher ich die Lineare Algebra stets erlebt hatte. Ich war aber von Brieskorns gründlicher Ducharbeitung, der Fülle des Stoffes und der klaren Gegenüberstellung verschiedener Auffassungen der Linearen Algebra begeistert. Nun besteht Brieskorns Werk aus abfotographierten Typoskriptseiten und enthält deshalb in seinen zwei Bänden und gut 1100 Seiten wohl nicht mehr Schriftzeichen als Gabriels enggeTEXtes Werk. Freilich verdanken sich bei Gabriel viele lange Passagen den eingestreuten Histörchen und nicht nur der mathematischen Stoffülle.

Welcher Student der Anfängervorlesungen soll das alles lesen? Ich erinnere mich, wie ich einmal in Paris am Montag nach einer Wahl auf einer Café-Terrasse unweit des Institut Henri Poincaré die dicke Ausgabe von *Le Monde* mit den Ergebnissen aller Wahlkreise studierte, als Michel Mendès-France – im Gabriel-Stil könnte man zur Person erklärend fußnoten: ‚Mathematiker, Sohn des Krisen-Premierministers (1953–55), der den Franzosen den Rotwein entziehen wollte.' – vorüberkam und mir spöttisch zurief: „Moi, je réclame le droit élémentaire dêtre non informé."

Auch das andere Extrem gibt es: Sheldon Axler brachte unlängst im Springer Verlag ein Büchlein auf den Markt, das eher wie die Bedienungsanleitung eines Taschenrechners aussieht und den provokanten Titel trägt: *Linear Algebra done right*. Es versteht sich von selbst, daß das nicht stimmen kann. Ich persönlich finde z.B. Axlers Schlußkapitel über Determinanten unzureichend.

Was also bietet Gabriels Buch seinem willigen Leser? Sein Aufbau folgt den drei Stichworten des Titels:

Teil A: Matrizen, führt rapide vom Matrizenprodukt über den (hier nach Fang-Cheng benannten) Gaußschen Algorithmus sowie die Determinanten (und bei dieser Gelegenheit auch Permutationen) zu Diagonalisierungs- und Normalformen-Fragen. Getreu dem Prinzip, vom Besonderen zum Allgemeinen aufzusteigen und Systematik im Stile Bourbakis hintanzustellen, sind die Teile A bis C vorwiegend rechnerisch-konkret, weniger strukturbewußt angelegt; der Begriff des Vektorraumes (im Buch: ‚Linearer Raum') wird erst im Teil D (ab Seite 315) allgemein eingeführt.
Teil B: Aufbau der Geometrie, führt in die affine, auch metrische Geometrie ein, gipfelnd in einem mit dem konsistent falsch buchstabierten Wort „Hypot*h*enusensatz" betitelten Abschnitt über Orthogonalität. Die Axiomatik der Geometrie wird ausführlich erörtert.
Teil C: Geometrie und Analysis, bietet eine geometrische Einführung von Sinus und Cosinus sowie ein Studium der Isometrien des dreidimensionalen Raumes.
Teil D: Höherdimensionale Geometrie, stößt schließlich, wie schon angedeutet, bis zur abstrakten linearen Algebra vor, die freilich auch hier noch nur wie mit einer gutisolierten Zange angefaßt wird.

Das Buch schließt mit diversen Anhängen, die von mengentheoretischen Grundbegriffen über die Eigenwerte hermitescher Matzizen bis zu Differentialgleichungen und Kugelfunktionen reichen.

In dieser raschen Inhaltsübersicht wird die große Detailfülle von Gabriels Darstellung nicht recht deutlich. So finden sich (um nur diese willkürlich herausgegriffenen

Beispiele zu erwähnen) Abschnitte über spiegelkonvexe Funktionen (B.4.10), M. Knesers konstruktiver Beweis des sogneannten Fundamentalsatzes der Algebra (C.4.7), konvexe Polyeder und lineare Ungleichungen (D.3), und ein Abschnitt über Eigenwerte tridiagonaler hermitescher Matrizen (E.4.3).

Gewisse sprachliche Besonderheiten mögen Helvetianismen oder Lotharingiarismen sein (vgl. die stolze Liste „welschlothringer“ Mathematiker auf Seite 311), oder schlicht auf den persönlichen Geschmack des Autors zurückgehen – z.B. „Streckenspalterei“ (S. 515), das „Supplement“ eines Untervektorraums (S. 324), „Polarraum“ für das orthogonale Komplement (S. 329), „Polarform“ für die zu einer quadratischen Form gehörige Bilinearform (S. 399), „Erkerbasen“ (S. 327), der „Tatort“ einer Permutation (S. 543) u.v.a.m.

Aber die auffälligste Besonderheit dieses Buches besteht in dem Feuerwerk von Polyhistörchen, die den Text durchziehen und oft stilistische Persiflagen sind (siehe etwa die Homer-Passage S. 312 unten). Natürlich (*quandoque bonus dormitat Homerus*) unterlaufen hier gelegentlich kleine Fehler (ein Beispiel: S. 91, Eisensteins Gesammelte Werke wurden nicht von Gauß herausgegeben, sondern von dem Besitzer der Chelsea-Edition in Eigenregie). Aber es irritiert mich mehr, daß der aphoristische Stil notgedrungen die historische Einordnung der erzählten Geschichten eher vorgaukelt als leisten kann – siehe etwa die Zitate von und über Klein S. 160f, die den Streit zwischen Göttingen und Berlin zwar aufblitzen lassen, seiner Dimension aber doch nicht gerecht werden. Übrigens ist Kleins nationale Grundhaltung keineswegs eine notwendige Konsequenz seiner *vita activa* (S. 161), noch wird man antisemitischen Vorurteilen (in diesem Falle bei Weierstraß) dadurch gerecht, daß man sie als „kleinbürgerlich“ bezeichnet (S. 91).

Das Buch enthält zahlreiche Übungsaufgaben (die mitunter Teile der Theorie weiterentwickeln), sowie ein gutes Register, mit dem sich auch dem eilig Nachschlagenden der Text recht gut erschließt. Nicht zuletzt geben 45 liebevoll ausgesuchte und reproduzierte „Bildnisse“ von Mathematikern dem Buch ein besonderes Gepräge.

Strasbourg N. Schappacher

Bhatia, R. Matrix Analysis, Berlin u. a.: Springer 1996, 347 Seiten, DM 78,–

Das vorliegende Buch beschäftigt sich mit ausgewählten Fragen der Matrizentheorie. Oft führt die Analyse eines numerischen Verfahrens oder die Stabilitätsuntersuchung eines physikalischen Systems auf das Problem der Abschätzung von Ausdrücken die entweder den Operator selber oder ein Matrixäquivalent enthalten. In seinem Buch hat der Autor eine Vielfalt von nützlichen Abschätzungen zusammengestellt, wobei er bewußt die Grenzen zwischen endlich- und unendlichdimensionalen Resultaten fließend gehalten hat. Wie vom Autor selber angemerkt, wäre *Matrix Inequalities* ein angemessener Untertitel für das Buch.

Im folgenden gebe ich eine kurze Inhaltsangabe des Buches. Das Buch gliedert sich in zehn Kapitel. Zentrales Thema der einzelnen Kapitel ist in der Regel die Abschätzung von Ausdrücken der Form $\|f(A)\|, \|f(A,B)\|$, wobei A, B Matrizen (Operatoren), f eine geeignete Funktion und $\|\cdot\|$ eine Norm bezeichnet. Die einzelnen Kapitel unterscheiden sich im wesentlichen durch die Annahmen an die Matrizen (hermitesch, normal, nicht normal, ...), an die Funktion f (Identität, monoton, ...) und an die Norm.

Nachdem im ersten Kapitel die notwendigen Grundlagen aus der linearen Algebra bereitgestellt werden, beschäftigt sich bereits das zweite Kapitel mit (Vektor)-Ungleichungen. Insbesondere werden einige elementare Resultate für Eigenwerte hergeleitet. Ein Problemkreis, der sich wie ein roter Faden durch das Buch zieht. Das dritte Kapitel ist ganz dem Studium des Spektrums hermitescher Operatoren gewidmet. Wieder wird großer Wert auf entsprechende Ungleichungen gelegt (z.B. Wielandt's Minimax Principle). Schließlich werden im vierten Kapitel elementare Ungleichungen für Matrixnormen untersucht und unter anderem auch Aussagen über den Wertebereich einer Matrix getroffen. Der mehr einleitende Teil wird mit dem fünften Kapitel abgeschlossen. Hier werden sogenannte „operator monotone Funktionen" eingeführt und ihre Eigenschaften diskutiert. Hierbei handelt es sich um matrixwertige Funktionen, die (partielle) Ordnungen von Matrizen erhalten und somit gut zur Formulierung und Herleitung von Matrixungleichungen geeignet sind. Während im vierten Kapitel Aussagen über hermitesche Matrizen getroffen werden, wird im sechsten Kapitel untersucht, welche dieser Aussagen auch noch für normale Matrizen gültig sind. Im Kapitel sieben werden Störungssätze für Eigenvektoren (genauer Eigenräume) von normalen Matrizen angegeben. Als wichtiges Hilfsmittel stellt sich Sylvesters Gleichung heraus. Schließlich wendet sich das achte Kapitel beliebigen Matrizen zu. Wieder stehen Störungsaussagen für Eigenwerte im Vordergrund. Die beiden letzen Kapitel befassen sich ausschließlich mit Ungleichungen für beliebige Matrizen.

Jedes Kapitel wird durch eine historische Einordnung der erzielten Ergebnisse sowie durch eine umfangreiche Sammlung von Aufgaben und Problemen ergänzt.

Durchgängig im ganzen Buch werden zu den einzelnen Resultaten eingängige und gut strukturierte (teilweise neue) Beweise angegeben. Beispielsweise wird im zweiten Kapitel durch die Einführung und Verwendung von doppelt-stochastischen Matrizen die Herleitung der einzelnen Aussagen sehr elegant gelöst.

Insgesamt halte ich das vorliegende Buch für eine sehr interessante und empfehlenswerte Lektüre. Es kann sowohl als Grundlage für Veranstaltungen des Hauptstudiums als auch als wertvolles Nachschlagewerk für Probleme im Zusammenhang mit Matrixungleichungen dienen. Wenn überhaupt, so möchte ich als Kritik anmerken, daß das Buch auf keinerlei Anwendungen in anderen Disziplinen der Mathematik (Physik) eingeht.

Lübeck B. Fischer

Hazewinkel, M. (Ed.), Handbook of Algebra, Volume 1, Amsterdam: North Holland 1996, 912 S., US $ 187,50

Der vorliegende Band ist der erste eines auf 9 (?) Bänden angelegten Handbuches der Algebra, das innerhalb einer Reihe von Handbüchern (bisher erschienen: Ein Band Handbuch der Algebraischen Topologie, Handbuch der Kombinatorik in 2 Bänden, Handbuch der Inzidenzgeometrie) ein breites Spektrum der Algebra abdecken soll. Letzteres wird in Stichworten auf 7 Seiten (Outline of the Series) beschrieben. Im Mathematics Subject Classification Scheme umfaßt es die Ziffern 20, 19, 18, 17, 16, 15, 13, 12, 11, 08 und 06. Die Kommutative Algebra soll dabei abgegrenzt werden gegen die Algebraische Geometrie, da ein eigenes Handbuch der Algebraischen Geometrie erwogen wird, ebenso ein eigenes Handbuch der K-Theorie. Im Handbuch der Algebra ist eine Sektion 2 C. Algebraic K-Theory vorgesehen.

Die Auswahl des Inhalts des jetzt vorliegenden Bandes mag zufällig erscheinen, wird aber vom Herausgeber in seinem Vorwort so erklärt: An die Stelle eines systematischen Aufbaus wurde einer dynamischen Entwicklungsplanung der Vorzug gegeben. Die einzelnen Artikel werden nach ihrem Eingang rasch publiziert. Spätere Änderung im Aufbau – auch evtl. auf Anregung von Lesern – bleiben dadurch möglich.

Im Einzelnen enthält der 1. Band 24 Beiträge, die mit ihren Autoren im folgenden aufgelistet seien:

Section 1 A. Linear Algebra: (1) G. P. Egorychev, Van der Waerden Conjecture and applications; (2) V. L. Girko, Random matrices; (3) A. N. Malyshev, Matrix equations. Factorization of matrix polynomials; (4) L. Rodman, Matrix functions.
Section 1 B. Linear (In)dependece: (5) J. P. S. Kung, Matroids.
Section 1 D. Fields, Galois Theory, and Algebraic Number Theory: (6) J. K. Deveney and J. N. Mordeson, Higher derivation Galois theory of inseparable field extensions; (7) I. B. Fesenko, Complete discrete valuation fields. Abelian local class field theories; (8) M. Jarden, Infinite Galois theory; (9) R. Lidl and H. Niederreiter, Finite fields and their applications; (10) W. Narkiewicz, Global class field theory; (11) H. van Tilborg, Finite fields and error correcting codes.
Section 1 F. Generalizations of Fields and Related Objects: (12) U. Hebisch and H. J. Weinert, Semi-rings and semi-fields; (13) G. F. Pilz, Near-rings and near-fields.
Section 2 A. Category Theory: (14) S. MacLane and I. Moerdijk, Topos theory; (15) R. H. Street, Categorical structures.
Section 2 B. Homological Algebra. Cohomology. Cohomological Methods in Algebra. Homotopical Algebra: (16) J. F. Carlson, The cohomology of groups; (17) A. I. Generalov, Relative homological algebra. Cohomology of categories, posets, and coalgebras; (18) J. F. Jardine, Homotopy and homotopical algebra; (19) B. Keller, Derived categories and their uses.
Section 3 A. Commutative Rings and Algebras: (20) J.-P. Lafon, Ideals and modules.
Section 3 B. Associative Rings and Algebras: (21) P. M. Cohn, Polynomial and power series rings. Free algebras, firs (=free ideal rings) and semifirs; (22) V. K. Kharchenko, Simple, prime, and semi-prime rings; (23) A. R. P. van den Essen, Algebraic microlocalization and modules with regular singularities and filtered rings; (24) K. Yamagata, Frobenius rings.

Die einzelnen Beiträge liegen zwischen 24 und 53 Seiten, jeweils mit Literaturverzeichnissen von 2 bis 8 Seiten. Ein Subject Index von 26 Seiten erleichtert das Auffinden der einzelnen Begriffe.

Über die Zielsetzung des Handbuchs schreibt der Herausgeber im Vorwort: „It is not the intention that the handbook as a whole can also be a substitute undergraduate or even graduate, text book. The treatment of the various topics will be much too dense and professional for that. Basically, the level is graduate and up, and such material as can be found in P. M. Cohn's three-volume textbook „Algebra“ (Wiley) will, as a rule, be assumed. An important function of the articles in this Handbook is to provide professional mathematicians working in a different area with sufficient information on the topic in question if and when it is needed.

Each chapter combines some of the features of both a graduate-level textbook and a research-level survey. Not all of the ingredients mentioned below will be appropriate in each case, but authors have been asked to include the following:

- Introduction (including motivation and historical remarks)
- Outline of the chapter
- Basic concepts, definitions, and results (proofs or ideas/sketches of the proofs are given when space permits)
- Comments on the relevance of the results, relations to other results, and applications
- Review of the relevant literature; possible supplemented with the opinion of the author on recent developments and future directions
- Extensive bibliography (several hundred items will not be exceptional).“

Was darf man bei einem solchen Unternehmen mit M. Hazewinkel als managing editor und einem editorial board mit M. Artin, C. Procesi, O. Tausky-Todd (†), P. M. Cohn, A. Dress, J. Tits, N. J. A. Sloane, Y. Ihara, I. G. Macdonald u. a. erwarten? Zunächst ist der Mut zu bewundern, ein solches Handbuch auf den Weg zu bringen. Für den 1. Band gelang es eine Reihe namhafter Autoren zu gewinnen, einige davon Autoren oder Koautoren einschlägiger Monographien. Die einzelnen Beiträge geben in der gebotenen Kürze für den Nichtexperten präzise Auskunft i. S. der oben zitierten Zielsetzung des Handbuchs. Sie sind von unterschiedlicher Ausführlichkeit. Z. B. kann der Artikel (10) über Global Class Field Theory bei einem Umfang von 26 Seiten naturgemäß nur einen skizzenhaften Überblick über dieses Gebiet geben. Hier findet der interessierte Leser im 2. Band Number Theory der Encyclopaedia of Mathematical Sciences, Springer Verlag 1991, sehr viel mehr. (Ist vielleicht auch ein Handbuch der Zahlentheorie vorgesehen?) Dagegen können sich andere Beiträge des Handbuchs durchaus neben einschlägigen Kapiteln der Encyclopaedia behaupten. Insgesamt ist dem Handbuch der Algebra mit dem 1. Band ein guter Start gelungen, und man darf auf die nächsten Bände gespannt sein, umso mehr als viele besonders wichtige und aktuelle Gebiete der Algebra im 1. Band noch nicht angesprochen werden. Bisweilen stört, daß nicht alle Autoren in ihrer Muttersprache geschrieben haben. Ein englischsprachiger Lektor wäre hier zu wünschen gewesen.

Zusammenfassend: Das Handbuch der Algebra sollte in jeder Universitätsbibliothek und/oder in jeder Bibliothek eines Mathematischen Instituts vorhanden sein. Ob ihm ein größerer Käuferkreis beschieden sein wird, ist jedoch bei dem hohen Preis fraglich.

Münster H.-J. Nastold

Dixon, J. D., Mortimer, B., Permutation Groups (Graduate Texts in Mathematics, Vol. 163), Berlin u. a.: Springer-Verlag 1996, xii + 348 S., DM 84,–

Seit in den sechziger Jahren die bekannten Lehrbücher von Wielandt und Passman erschienen, hat die Theorie der Permutationsgruppen ihr Erscheinungsbild nachhaltig verändert. Durch die um 1980 abgeschlossene Klassifikation der endlichen einfachen Gruppen konnten viele seit langer Zeit offene Probleme der endlichen Permutationsgruppen einer Lösung zugeführt werden. Gleichzeitig hat die Theorie der unendlichen Permutationsgruppen stärkere Aufmerksamkeit erfahren.

Dieser gewandelten Sachlage tragen Dixon und Mortimer in dem vorliegenden neuen Lehrbuch Rechnung. Gedacht ist es als Grundlage zu einem Vorlesungskurs für fortgeschrittene Studierende beziehungsweise Doktoranden oder als Buch zum Selbststudium. Für den Vorlesungskurs werden dabei verschiedene brauchbare Auswahlmöglichkeiten geboten.

Inhaltlich steht die Theorie der endlichen Permutationsgruppen eindeutig im Vordergrund; doch wird Wert darauf gelegt, die Theorie in Begriffen und Resultaten nach Möglichkeit ohne Endlichkeitsvoraussetzungen zu entwickeln. Das letzte Kapitel bringt schließlich eine Einführung in verschiedene aktuelle Themen aus der Theorie unendlicher Permutationsgruppen.

Die Gliederung ist kanonisch: In Kapitel 1 werden die grundlegenden Konzepte der Transitivität und der Primitivität eingeführt und die zugehörige Theorie entwickelt. In Kapitel 2 werden kombinatorisch definierte Wirkungen eingeführt und die Kranzproduktkonstruktionen in ihren imprimitiven und primitiven Wirkungen vorgestellt. Weiter werden affine und projektive lineare Gruppen in ihrer natürlichen Wirkung behandelt. Kapitel 3 ist einigen ausgewählten Themen gewidmet: Bahnen eines Punktstabilisators bzw. Orbitale, Minimalgrad und Basen, Frobeniusgruppen und allgemeiner Gruppen mit einem regulären Normalteiler. Anschließend wird ohne technische Details eine kurze Einführung in die algorithmische Theorie gegeben, die in Computeralgebraprogrammen wie GAP, MAGMA, MAPLE und MATHEMATICA im Zusammenhang mit Permutationsgruppen relevant ist.

In Kapitel 4 und 5 wird die Theorie der endlichen primitiven Permutationsgruppen behandelt. Insbesondere wird in Kapitel 4 ein Beweis des Satzes von O'Nan-Scott über den strukturellen Aufbau der endlichen primitiven Permutationsgruppen gegeben. Dieser Satz erlaubt es in vielen Fällen die Probleme auf die Untersuchung fasteinfacher Gruppen beziehungsweise irreduzibler linearer Darstellungen über endlichen Primkörpern zu reduzieren. Einige Anwendungen dieses Satzes werden skizziert, unter anderem der Beweis der Vermutung von Sims durch Cameron, Praeger, Saxl und Seitz [1983].

In Kapitel 5 werden Schranken für Ordnung, minimale Basisgröße und Minimalgrad primitiver Permutationsgruppen endlichen Grades hergeleitet (Resultate von C. Jordan, Bochert, Wielandt, Babai, Pyber, Praeger und Saxl). Die Methoden sind kombinatorischer und zahlentheoretischer Art. Der Satz von Liebeck [1984] über den Minimalgrad endlicher primitiver Gruppen, der die O'Nan-Scott-Reduktion und die Klassifikation der endlichen einfachen Gruppen (samt der maximalen Untergruppen der endlichen fasteinfachen Gruppen) verwendet, wird ohne Beweis zitiert.

In Kapitel 6 werden die einfachen (mehrfach transitiven) Mathieu-Gruppen auf der Grundlage der zugehörigen Steinerschen Systeme behandelt. Kapitel 7 ist allgemeiner den mehrfach transitiven Permutationsgruppen gewidmet; schwerpunktmäßig wird die Klassifikation der endlichen zweifach transitiven Gruppen angesprochen.

In Kapitel 8 wird die Struktur der Symmetrischen Permutationsgruppen von endlichen oder unendlichen Mengen untersucht. Themen sind hier die Normalstruktur und die Frage nach Untergruppen von kleinem Index bzw. nach maximalen Untergruppen.

In Kapitel 9 werden einige interessante Klassen unendlicher Permutationsgruppen vorgestellt: Wirkungen auf unendlichen Bäumen, hochgradig transitive freie Gruppen und homogene Gruppen, der Universelle Graph und seine Automorphismengruppe.

Zwei Anhänge ergänzen den Text: Die Klassifikation der endlichen einfachen Gruppen (Anhang A); Die primitiven Permutationsgruppen vom Grad kleiner als 1000 (Anhang B).

Besonderen Wert legen die Autoren auf Beispiele, die sowohl im Text als auch in zahlreichen Übungsaufgaben geboten werden. Dies macht das Buch auch für das Selbststudium brauchbar, wobei hierzu allerdings erhebliche algebraische Vorkenntnisse erforderlich sind. Die Übungsaufgaben sind von sehr unterschiedlichem Schwierigkeitsgrad. Einem unerfahrenen Leser fällt es sicherlich gelegentlich schwer, die Schwierigkeiten richtig einzuschätzen.

Bei der Fülle des Stoffs konnten natürlich nicht alle möglichen Wünsche erfüllt werden. So ist die im Buch stehende Version des Satzes von O'Nan-Scott nicht ganz ausreichend, um den Beweis der oben erwähnten Vermutung von Sims durchzuführen; man benötigt dazu eine etwas genauere Version, wie sie sich etwa aus Arbeiten von Kovács ergibt. Bei der Behandlung der Mathieu-Gruppen wäre die Alternative bedenkenswert, als kombinatorischen Rahmen nicht die Steinerschen Systeme, sondern die Golay-Codes zu nehmen; man erhielte dadurch einerseits einen sehr schönen Zugang zur Geometrie der projektiven 21-Punkte-Ebene und damit zu den Steinerschen Systemen bzw. Witt-Blockplänen, andererseits aber auch eine direkte Beziehung zum Leech-Gitter und damit schließlich zu allen sporadischen einfachen Gruppen, die im Fischer-Griess-Monster enthalten sind. Wünschenswert wäre beim Anhang B auch ein detaillierterer Überblick über die primitiven Gruppen mit einem (regulären) abelschen Normalteiler gewesen.

Der Text ist in der Regel gut lesbar, die Anzahl der Druckfehler und kleinen Versehen hält sich in Grenzen. (Auf S. 51 etwa finden sich auf Druckfehlern beruhende Unklarheiten. Auf S. 66 ist versehentlich die allerdings leicht zu erratende Definition von „diagonal“ und „nondiagonal“ unvollständig geblieben. Des öfteren gibt es Fehler bei deutschsprachigen Namensschreibungen und Referenzen.)

Ein Vergleich mit den sehr verschiedenartigen Büchern über Permutationsgruppen fällt nicht ganz leicht. Die grundlegenden Themen werden von Dixon und Mortimer durchaus angemessen behandelt. Von diesen sind natürlich einige in den bekannten Büchern von Wielandt und Passman noch nicht zu finden. Eine sehr schöne elementare Einführung in die Theorie der Permutationsgruppen (unterhalb des Graduierten-Niveaus) wird in dem Buch „Groups and Geometry" von Neumann, Stoy und Thompson geboten. Dies Buch konkurriert aber nicht; denn der inhaltliche Anspruch und der Adressatenkreis sind deutlich verschieden.

Seinen Zweck als Lehrbuch erfüllt das Buch von Dixon und Mortimer nach meiner Auffassung insgesamt recht gut. Für die aktuelle Forschungsarbeit im Bereich der endlichen Permutationsgruppen wird man hingegen neben Originalarbeiten noch andere Bücher heranziehen, in denen die Untergruppenstruktur der endlichen Gruppen vom Lie-Typ und der sporadischen einfachen Gruppen und deren (modulare) Darstellungstheorie behandelt wird, etwa die Bücher von Aschbacher, Carter und Kleidman-Liebeck. Für die Forschung im Bereich der unendlichen Permutationsgruppen wird man gleichermaßen etwa die Lecture Notes von Cameron über Oligomorphe Permutationsgruppen und das Buch von Kaye und Macpherson über die Automorphismen von „First-Order"-Strukturen verwenden.

Im Rahmen der eingangs genannten Ziele des Buches gibt es aber keine konkurrierenden Angebote. So kann man davon ausgehen, daß es für einige Zeit das Standardlehrbuch über Permutationsgruppen sein wird. Eine Anschaffung des Buchs wird sich deshalb auf jeden Fall lohnen, wenn man sich für dieses klassische Teilgebiet der Gruppentheorie interessiert.

Tübingen W. Knapp

Guillemin, V., Lerman, E., Sternberg, S., Symplectic Fibrations and Multiplicity Diagrams, Cambridge University Press 1996, 222 S., £ 29,95

Betrachtet man eine irreduzible Darstellung ρ einer Gruppe G als Darstellung $\rho|_H$ einer Untergruppe H, so wird diese in der Regel nicht irreduzibel sein. Unter geeigneten Voraussetzungen zerfällt $\rho|_H$ in eine endliche Summe von irreduziblen H-Darstellungen. Dann ist $\rho|_H$ bis auf Äquivalenz durch die Funktion $\pi \mapsto m_\pi$, die jeder irreduziblen H-Darstellung π die Anzahl der zu π äquivalenten Summanden in $\rho|_H$ zuordnet: $\rho|_H \cong \oplus\, m_\pi \pi$. Im Falle kompakter Liegruppen, für die die irreduziblen Darstellungen über ihre höchsten Gewichte durch Punkte in einem Gitter parametrisiert sind, erhält man so Multiplizitäten-Diagramme für ρ, die aus einer Multiplizitätenfunktion auf dem Gewichtsgitter bestehen.

Die geometrische Quantisierung, eine Verallgemeinerung von Kirillovs Bahnenmethode, ist eine Strategie symplektischen Mannigfaltigkeiten Hilberträume (von Schnitten geometrisch definierter Vektorbündel) zuzuordnen, die zu Gruppenwirkungen auf den Mannigfaltigkeiten Darstellungen auf den Hilberträumen liefert. Viele darstellungstheoretische Konzepte haben symplektische Analoga, mit denen sie über den Quantisierungsprozeß verknüpft sind (z.B. Induktion, Frobeniusreziprozität). Das vorliegende Buch befaßt sich mit symplektischen Analoga von Multiplizitäten-Diagrammen. Grob gesprochen entspricht die Transitivität der Gruppenwirkung auf der Mannigfaltigkeit der Irreduzibilität der zugehörigen Darstellung. Nach diesem Prinzip sollten sich Aussagen über Multiplizitäten aus der Zerlegung der Mannigfaltigkeit in H-Bahnen gewinnen lassen. In diesem Zusammenhang stellt man fest, daß unter geeigneten Voraussetzungen G-Bahnen Faserungen mit den (symplektischen) H-Bahnen als Fasern sind.

Die Autoren möchten in diesem Buch geometrische Beschreibungen und Erklärungen von darstellungstheoretischen Phänomenen im Zusammenhang mit Multiplizitäten geben. Dabei beschränken sich auf den Spezialfall, in dem H ein Torus ist und für den man auf der darstellungstheoretischen Seite die explizite, aber praktisch kaum handhabbare, Kostantsche Multiplizitätenformel hat. Ihr Zugang stellt die Gruppe G in den Hintergrund und konzentriert sich auf die geometrische Konstruktion von H-Darstellungen zu vorgegebenen symplektischen H-Mannigfaltigkeiten (die z.B. G-homogen sein können) und den Versuch, die Zerlegung dieser H-Darstellungen in irreduzible geometrisch zu beschreiben. Insbesondere beweisen sie ein geometrisches Analogon der Kostantschen Formel.

Die technischen Werkzeuge, die in diesem Zusammenhang eine Rolle spielen, sind die Impulsabbildung für Hamiltonsche Toruswirkungen, ihre Konvexitätseigenschaften, und die von Duistermaat und Heckman erzielten Resultate über die Projektion des Liouvillemaßes unter der Impulsabbildung (Duistermaat-Heckman-Polynome, exakte [illegible] stationäre Phase). Wenn man mit einer symplektischen G-Bahn startet und diese quantisiert, liefert die Impulsabbildung ein konvexes Polytop, das den Träger der Multiplizitätenfunktion beschreibt. Die Duistermaat-Heckman-Polynome interpolieren die Multiplizitätenfunktion auf den Seiten dieses Polytops. Eines der Hauptergebnisse des Buches ist eine geometrische Erklärung für gewisse beobachtete Gradsprünge der Duistermaat-Heckman-Polynome zwischen benachbarten Seiten. Sie besteht in der Verknüpfung dieser Sprünge mit der Existenz von symplektischen Faserungen einer symplektischen G-Bahn durch eine andere.

Das Buch ist weder ein Lehrbuch noch eine Monographie, in der neue Forschungsergebnisse systematisch abgehandelt werden. Es ist eher ein Essay, in dem eine Reihe faszinierender Ideen angerissen und an vielen Beispielen illustriert werden. In der Regel werden Voraussetzungen im Laufe eines Arguments dort nachgeschoben wo sie gebraucht werden. Das erleichtert den Lesefluß, erschwert aber die präzise Formulierung und das Auffinden der Resultate. Eine Reihe der komplizierteren Sachverhalte wurden in Anhänge zu den einzelnen Kapiteln verbannt. Trotzdem sind gute Vorkenntnisse in symplektischer Geometrie und Darstellungstheorie kompakter Liegruppen unverzichtbar, um dieses Buch mit Gewinn lesen zu können. Die beiden Gebiete spielen allerdings sehr unterschiedliche Rollen in diesem Buch. Detailliert behandelt wird praktisch nur die symplektische Seite. Ausgehend von den Grundtatsachen der symplektischen Geometrie und der Impulsabbildung (die vorausgesetzt werden), besprechen die Autoren in den ersten beiden Kapiteln symplektische Faserungen. Im dritten und vierten Kapitel entwickeln sie die Theorie der Duistermaat-Heckman-Polynome und zeigen ihre Hauptresultate. Im letzten Kapitel rechnen sie Singularitäten der Impulsabbildung und Duistermaat-Heckman-Polynome für Beispiele von koadjungierten Bahnen der SU(4) aus. Die darstellungstheoretischen Interpretationen der Ergebnisse werden nur kursorisch abgehandelt und nirgendwo präzise ausformuliert. Auf diese Weise gelingt es den Autoren eine Fülle von interessantem Material auf rund 200 Seiten unterzubringen, die Lust auf mehr machen.

Clausthal J. Hilgert

und unter Translationen invariant – bilden die Lévy-Prozesse eine besonders einfache aber dennoch reichhaltige Unterklasse der Markov-Prozesse. Ihre prominentesten Vertreter, die Brownsche Bewegung und der Poisson-Prozeß, haben mittlerweile in jeder weiterführenden Vorlesung über Wahrscheinlichkeitstheorie ihren festen Platz. Es ist aber nicht nur die Stochastik, für die das Studium von Lévy-Prozessen lohnend ist. Durch die enge Beziehung unbeschränkt teilbarer Verteilungen zu Faltungshalbgruppen und den davon erzeugten Operatorenhalbgruppen werden Techniken aus der Fourier- und harmonischen Analysis unmittelbar anwendbar und führen zu schönen Resultaten, Beispielen und neuen Interpretationen.

Um so erstaunlicher ist, daß bisher die Lévy-Prozesse noch nicht im Rahmen einer eigenständigen Monographie behandelt wurden. Manche Lehrbücher der Wahrscheinlichkeitstheorie beinhalten einen Abschnitt über Lévy-Prozesse, die Darstellung erschöpft sich aber zumeist in der Konstruktion der Prozesse. In der stochastischen Analysis (von *Sprung*prozessen) werden Lévy-Prozesse im Rahmen der Semimartingale mitentwickelt, siehe z. B. die Darstellungen von J. Jacod & A. N. Shiryaev, Ph. Protter oder N. Ikeda & S. Watanabe, fristen aber ein Randdasein als (strukturell einfache) Beispiele. Das Buch von Chr. Berg & G. Forst stellt die Potentialtheorie von Faltungshalbgruppen umfassend dar, erwähnt aber den Zusammenhang zu stochastischen Prozessen nur in einer kurzen Bemerkung und klammert die probabilistische Sichtweise weitgehend aus. Eine kürzlich erschienene Monographie von N. Jacob über Lévy-Typ-Prozesse weist [illegible]

scheinlichkeitstheorie hin, behandelt jedoch schwerpunktmäßig den nicht translationsinvarianten Fall. Schließlich sind noch die Bücher von A. V. Skorokhod *Random Processes With Independent Increments*, Kluwer, Dordrecht 1991, und von K. Sato zu erwähnen, reichende und notwendige Kriterien für die Existenz und hinreichende Kriterien für die Raum-Zeit-Stetigkeit der Lokalzeiten von Lévy-Prozessen bewiesen. Der *ladder process* $\{(L^{-1}(t), S(L^{-1}(t)))\}_{t\geq 0}$, $S(t)$ bezeichnet das Maximum des Prozesses auf $[0, t]$, steht nun im Mittelpunkt der Fluktuationstheorie: unter schwachen zusätzlichen Annahmen ist er selbst ein Lévy-Prozeß, und die genaue Kenntnis seines charakteristischen Exponenten erlaubt Aussagen über die Extremalverteilungen des ursprünglichen Lévy-Prozesses, das Verhalten seiner Pfade im Unendlichen und die Existenz von Wachstumspunkten. Haben die Prozesse nur negative Sprünge oder sind die Verteilungen stabil zum Index $\alpha \in (0, 2)$, so können weitergehende Resultate abgeleitet werden, etwa über Austrittszeiten oder gewisse Pfadtransformationen: *conditioning to stay positive, stable bridges, meander.*

Jedes Kapitel schließt mit Kommentaren und Aufgaben, die die Themenauswahl abrunden und ergänzen. Die Aufgaben sind z. T. Originalarbeiten entnommen, jedoch mit Lösungshinweisen oder genauen Quellenangaben versehen. Angesichts der Reichhaltigkeit des Gebiets war die Auswahl der Themen nicht einfach. Die Einschränkung auf die Fluktuationstheorie, ein Forschungsgebiet des Autors, ist kanonisch und zugleich überaus geglückt. Bewußt werden Fragestellungen und Techniken der stochastischen Analysis, abgesehen von Punktprozessen, ausgeklammert und auf die Darstellungen von J. Jacod & A. N. Shiryaev oder Ph. Protter verwiesen. Der gefälligen Konzeption und Stoffauswahl stehen einige Mängel in der Aufbereitung des Materials entgegen. Die Beweise sind bisweilen lakonisch kurz und der Leser ist an einigen Stellen mit einer Gebrauchsanweisung allein gelassen, die allerdings zu einem eigenständigen Beweis führen kann. Im Hinblick auf das Methodenkapitel auf den ersten zehn Seiten mag das Buch als *self-contained* gelten, doch ist es für das Verständnis der Argumente durchaus hilfreich, die Bücher von D. Revuz & M. Yor und C. Dellacherie & P. A. Meyer bzw. C. Dellache-

Ein wirkliches Ärgernis sind die vielen Druckfehler, v. a. im zweiten Teil des Buches, Zitate von Arbeiten, die in der Bibliographie nicht erscheinen, und der wenig professionelle (TeX-)Schriftsatz, der an mancher Stelle das Lesen von Formeln erschwert. Der Eindruck, daß das Buch schnell geschrieben wurde und ein sorgfältiges Lektorat seitens des Verlags unterblieb, drängt sich geradezu auf.

Trotzdem möchte ich jedem Mathematiker mit soliden Vorkenntnissen in der Theorie der Markovschen Prozesse dieses Buch ans Herz legen. Es besticht durch eine schöne, wenn auch knappe, Darstellung der Lévy-Prozesse, die auch neuere Ergebnisse

Kapitel I „Markovian Dynamical Systems“ gibt eine klare, auch dem Nichtfachmann zugängliche Einführung in die Fragestellung und stellt Resultate der allgemeinen Theorie zur Verfügung. (Unterkapitel: General dynamical systems, canonical Markovian systems, ergodic and mixing measures, regular Markovian systems.) In Kapitel II „Invariant measures for stochastic evolution equations“ wird die Theorie der stochastischen Evolutionsgleichungen im Unendlichdimensionalen behandelt. Die Unterkapitel lauten: Stochastic differential equations, existence of invariant measures, uniqueness of invariant nach untersucht der Autor ein mesoskopisches Modell. Auf dieser (sehr kleinen) Skala können nur reine Phasen (ohne *mushy regions*) beschrieben werden, was zu einer nicht-konvexen Nebenbedingung führt, die die analytische Behandlung erheblich erschwert. Wesentlich für eine erfolgreiche Analysis dieses Modells, insbesondere für den Nachweis von Kompaktheitseigenschaften trotz der Nichtkonvexität, ist die Annahme, daß in der zugehörigen freien Energie ein Term auftritt, der räumliche Interaktionen beschreibt; dieser Term reflektiert das Vorhandensein einer Oberflächenspannung zwischen den Phasen und sorgt dafür, daß die Phasen durch glatte Phasengrenzen getrennt bleiben.

Die Darstellung beginnt in Chapter I mit einer Einführung in bekannte Resultate und Techniken der Theorie partieller Differentialgleichungen. Es folgt in Chapter II, III die Behandlung von Anfangsrandwertaufgaben von (möglicherweise degenerierten) parabolischen Differentialgleichungen, mit Blick auf die Anwendung bei Phasenübergängen. In Chapter II werden dabei Resultate für Differentialinklusionen hergeleitet, die in Chapter IV auf das Stefan- und das Hele-Shaw-Problem angewendet werden; die in Chapter III behandelten *doppelt-nichtlinearen* Inklusionen werden in Chapter V eingesetzt.

Die Diskussion der mesoskopischen Beschreibung von Phasenübergängen unter Einbeziehung von Oberflächenspannungseffekten beginnt in Chapter VI; insbesondere werden das Gesetz von Gibbs-Thomson und ein Phasenfeld-Modell hergeleitet. Die nun folgenden Chapter VII bis IX führen den Leser zu Fragen der aktuellen Forschung. Chapter VII behandelt stabile und metastabile Phasengleichgewichte und das Phänomen der Nukleation von Phasen; in Chapter VIII wird ein Existenzbeweis für Stefan-Modell mit Gibbs-Thomson-Gesetz und Nukleation bewiesen. Chapter IX bringt die Diskussion eines Zweiskalen-Stefan-Modells. Das Buch schließt mit einem Appendix, in dem in Chapter X und XI bekannte analytische Hilfsmittel in kompakter Form bereitgestellt werden.

Zusammenfassend ist festzustellen, daß der Autor mit der vorliegenden Monographie einen wichtigen Beitrag zur mathematischen Theorie der Phasenübergänge geleistet hat. Er gibt kompetent und umfassend Auskunft über dieses analytisch schwierige Gebiet. Dies muß nicht überraschen, wenn man bedenkt, daß viele der dargestellten Resultate auf eigenen Arbeiten beruhen. Das Buch ist gut verständlich und übersichtlich konzipiert. Obwohl es für die vom Autor angesprochene Zielgruppe der „Physiker und Ingenieure mit mathematischem Hintergrund“ fraglos mathematisch sehr anspruchsvoll ist, ist es für interessierte Mathematiker nur zu empfehlen.

Berlin J. Sprekels

Lorentz, G. G., Golitschek, M. v., Makovoz, Y., Constructive Approximation (Advanced Problems) (Grundlehren der mathematischen Wissenschaften 304), Berlin u. a.: Springer 1996, 649 S., DM 164,–

Die vorliegende Monographie ist eine Fortsetzung des Buches „Constructive Approximation“ von R. A. DeVore und G. G. Lorentz, das 1993 ebenfalls im Springer-Verlag erschienen ist. Die Autoren beschreiben wichtige Entwicklungen der Approximationstheorie in den letzten 30 Jahren. Dies betrifft im wesentlichen die Approximation von Funktionen einer Variable durch Polynome, Splines und rationale Funktionen, sowie Wavelets, Entropie und Weiten. Unbestreitbar ist die in der Einleitung formulierte Einschätzung, daß Approximationsprobleme weltweit untersucht werden und tiefliegende Theorien entstanden sind. Hinzugefügt werden kann, daß die auf den Theorien basierenden Methoden wichtige Anwendungen in vielen praxisorientierten Gebieten haben.

Kapitel 1 enthält Aussagen über die Verteilung der Alternantenpunkte und Nullstellen von Polynomen bester gleichmäßiger Approximationen. Außerdem werden Bedingungen für die Dichtheit von Polynomen bzgl. gewichteter Normen entwickelt. Es folgt eine Untersuchung der Struktur von Funktionenräumen, für welche die klassischen Approximationsaussagen gelten. Die Approximation von Funktionen durch Polynome mit beschränkten bzw. ganzzahligen Koeffizienten, durch monotone Polynome und einseitige Approximation sind Themen von Kapitel 2. Ferner werden verschärfte Markov-Ungleichungen und Remez-Ungleichungen für gewisse Klassen von Polynomen hergeleitet.

Kapitel 3 beginnt mit Weierstraß-Sätzen für unvollständige algebraische und trigonometrische Polynome und Fehlerabschätzungen für unvollständige Chebyshev-Polynome. Danach werden die Beziehungen der Nullstellen einer konvergenten Folge trigonometrischer Polynome und der Nullstellen der Grenzfunktion untersucht. Durch Anwendung potentialtheoretischer Methoden werden in Kapitel 4 zunächst Eigenschaften gewichteter Chebyshev-Polynome hergeleitet. Dann wird die Gleichheit von minimalen wesentlichen Mengen und von Trägern des Chebyshev-Maßes nachgewiesen. Es folgt die Bestimmung solcher Mengen für das Jacobi-Gewicht und das Freud-Gewicht und die Angabe von Weierstraß-Sätzen für gewichtete Polynome.

Eine kurze Einführung in die erst wenige Jahre alte Theorie der Wavelets vom Standpunkt der orthogonalen Entwicklungen aus, findet sich in Kapitel 5. Zunächst werden die notwendigen Begriffe Waveletbasis, Multiresolution und Refinementgleichung diskutiert. Es folgen Untersuchungen über (orthonormale) Basen trigonometrischer Polynome von Räumen periodischer Funktionen und Aussagen über die Existenz solcher Polynome mit minimalem Grad.

Kapitel 6 behandelt Approximation durch Splinefunktionen. Es beginnt mit einer Auswahl bekannter Sätze über die Charakterisierung und (starke) Eindeutigkeit bester gleichmäßiger Approximationen und über die globale Eindeutigkeit bester L_1-Approximationen aus Splineräumen. Dann werden Fehlerabschätzungen für die periodische Spline-Interpolation und Aussagen über die Konvergenz des zugehörigen Operators und des Schoenberg-Operators angegeben.

Beste Approximation durch rationale Funktionen stellt das Hauptthema der Kapitel 7 und 8 dar. Die Autoren beginnen mit der Charakterisierung und der Eindeutigkeit bester rationaler Approximationen. Es folgen Aussagen über normale Funktionen, die Stetigkeit der metrischen Projektion und die Nichteindeutigkeit bester L_p-Approximationen. Aussagen über den Fehler der besten rationalen Approximation zeigen, daß er für die Funktion $|x|$ exponentiell und für e^{-x} geometrisch abklingt. Außerdem wird gezeigt, daß die Funktion e^x wesentlich besser durch rationale Funktionen als durch Polynome approximiert wird. Ähnliches gilt für die Approximation gewisser Klassen differenzierbarer Funktionen. Durch Anwendung potentialtheoretischer Methoden und elliptischer Integrale ist es gelungen, für spezielle Funktionen genaue asymptotische Aussagen herzuleiten.

Die Padé-Approximation stellt eine klassische Methode zur Approximation von analytischen Funktionen durch rationale Funktionen dar. In Kapitel 9 werden zunächst die grundlegenden Sätze über die Existenz und Eindeutigkeit von Padé-Approximationen und über Eigenschaften der Padé-Tafel bewiesen. Die anschließenden Betrachtungen zeigen, daß die Konvergenz von Padé-Approximationen von speziellen Eigenschaften der betrachteten analytischen Funktionen abhängt.

Kapitel 10 beginnt mit einer Bernstein-Ungleichung für rationale Funktionen. Es schließen sich Fehlerabschätzungen für die Approximation von Funktionen aus Hardyräumen durch rationale Funktionen an. Diese Ergebnisse werden auf die Approximation reellwertiger Funktionen angewandt. Schließlich werden Vergleiche zwischen der Approximationsgüte von rationalen Funktionen und von Splines mit freien Knoten angestellt.
Die Fehlerabschätzung bei der Approximation von Funktionen durch Müntz-Polynome stellt

de Approximationsindex genau untersucht. Außerdem wird eine Markov-Ungleichung für Müntz-Polynome hergeleitet.

In Kapitel 12 wird gezeigt, daß die für Haarsche Räume bekannte Alternanten-Charakterisierung und die globale Eindeutigkeit bester Approximationen auch bei nichtlinearer Approximation durch varisolvente Funktionenklassen gelten. Während die Klasse der rationalen Funktionen varisolvent ist, gilt dies nicht für die Menge der erweiterten

Bass, R. F., Diffusions and Elliptic Operators (Probability and its Applications) Berlin u. a.: Springer 1997, 240 S., DM 118,–

Das Wechselspiel zwischen Wahrscheinlichkeitstheorie und partiellen Differentialgleichungen ist ein faszinierender Teil der Mathematik – man denke etwa an die Pionierarbeiten von Doob auf der einen und Brelot auf der anderen Seite. Ein paar von den Glanzstücken, die im letzten Viertel des Jahrhunderts in diesem Wechselspiel erarbeitet worden sind, werden im vorliegenden Buch dargestellt.

Der Autor hatte den Text ursprünglich als zusätzliches Kapitel zu seinem 1995 (ebenfalls bei Springer) erschienenen Buch „Probabilistic Techniques in Analysis" konzipiert. Schließlich hat er sich aber entschlossen, zum Thema „Diffusions and Elliptic Operators" ein eigenes, weitgehend in sich geschlossenes Buch zu schreiben. Dies war eine glückliche Idee; beide Bücher für sich sind eine Bereicherung ihres Gebietes. Die „Probabilistic Techniques in Analysis" sind auf die Potentialtheorie (u. a. von Lipschitz-Gebieten), singuläre Integrale und analytische Funktionen ausgerichtet. Im hier besprochenen Buch geht es in mehreren Spielarten um die Frage, wie sich Eigenschaften eines Diffusionsoperators und seiner Koeffizienten auf Eigenschaften der Lösung des Cauchyproblems, der Greenfunktion und der zugehörigen harmonischen Funktionen übertragen; stets werden dabei hinreichend glatt berandete Gebiete im R^d in den Blick genommen.

Auch einzelne Kapitel des Buches für sich wird der Leser als gelungene Einführung in wichtige Thematiken schätzen, so zum Beispiel das Kapitel über Charakterisierung von Diffusionsprozessen über Martingale, die auf Stroock und Varadhan zurückgeht.

Die Rolle der gleichmäßigen Elliptizität von Diffusionsoperatoren in Nicht-Divergenzform auf beschränkten Gebieten wird ebenfalls schön herausgearbeitet. Das zentrale Resultat dieses Kapitels ist die Harnack-Ungleichung von Krylov und Safonov, in der die Schranke für die Verhältnisse der Funktionswerte einer positiven harmonischen Funktion (außer vom Gebiet) nur von den Elliptizitätsschranken des Diffusionsoperators abhängt. Bei der probabilistischen Herleitung kommt es darauf an, daß auch kleine Mengen positiven Volumens vom Diffusionsprozeß mit hinreichender Wahrscheinlichkeit vor dem Verlassen des Gebiets getroffen werden. Da im gleichmäßig elliptischen Fall der Diffusionsprozeß eine hinreichend lange Zeit in kleinen Mengen verbringt, kann man sich von Glattheitsvoraussetzungen an die Koeffizienten befreien. An Beispielen wird aufgezeigt, daß sich aber auch eine uniform elliptische Diffusion in mancherlei Hinsicht drastisch verschieden von einer Brownschen Bewegung verhalten kann.

Ein weiteres Kapitel ist elliptischen Operatoren in Divergenzform gewidmet. Mosers Harnack-Ungleichung wird bewiesen, und auf den Spuren von Nash, Davies, Fabes und Stroock werden obere Schranken für die Übergangsdichte hergeleitet. Danach geht es um untere Schranken und Hölder-Stetigkeitseigenschaften der Fundamentallösungen, um Schranken für die Greenfunktion und um Pfadeigenschaften der Diffusionsprozesse. Die hierbei zur Anwendung kommenden Ideen wurden z.T. vom Autor (gemeinsam mit M. Barlow) in Arbeiten über die Brownsche Bewegung auf dem Sierpinski-Teppich entwickelt.

Im letzten Kapitel des Kapitel des Buches geht es um den Malliavin-Kalkül und das aus ihm gewonnene Kriterium für die Glattheit der Übergangsdichte eines Diffusionsprozesses. Der Bismutsche Zugang (über die Cameron-Martin-Girsanov-Formel) und der Stroocksche Zugang (über den Ornstein-Uhlenbeck-Operator) werden gegenübergestellt und die Rolle der Hörmander-Bedingungen wird herausgearbeitet. Auch eine anschauliche Erklärung, was die Hörmander-Bedingungen probabilistisch bedeuten, wird geliefert – all dies in einer bemerkenswert geschlossenen und übersichtlichen Form auf gerade mal 30 Seiten.

Bisher war die Rede von den letzten vier der insgesamt acht Kapitel des Buches. Bescheidenerweise sagt der Autor vom Inhalt der ersten vier Kapitel in seinemVorwort, er sei „mostly classical and well known". Bei Kapitel IV über die eindimensionalen Diffusionen und bei den ersten beiden Kapiteln „Stochastic differential equations" und „Representation of Solutions" mag dies der Fall sein – obschon man z. B. Informationen über die probabilistische Darstellung von Lösungen mit schiefen Randbedingungen auch in einschlägigen Textbüchern nicht so ohne weiteres finden wird. Das Kapitel III, welches sich u. a. am Buch „Elliptic partial differential equations of second order" von Gilbarg und Trudinger orientiert, konzentriert sich darauf, wie man unter Verwendung der gewichteten Hölder-Norm durch Perturbation des Laplace-Operators Regularitätseigenschaften der Lösung der Poissongleichung und des Dirichletproblems auch für allgemeinere Diffusionsoperatoren bekommt.

In den Notes am Ende der Kapitel nennt der Autor die Quellen, aus denen er geschöpft hat. So manches aus diesen Quellen ist, denke ich, durch die Aufbereitung in diesem Buch transparenter und genießbarer geworden. Das Buch zielt nicht auf Vollständigkeit im Stile mancher Monographien und verfolgt das Gebiet auch nicht bis zu den neuesten Entwicklungen und Verästelungen. Das Literaturverzeichnis (mit ca. 70 Titeln, davon kaum 20 aus den 90er Jahren) ist nicht erschöpfend. Da und dort gibt es knappe Hinweise auf weiterführende Literatur, wie etwa das Buch von Nualart über den „Malliavin Calculus and related topics" und die Arbeiten von Le Gall, Dynkin u.a. zur probabilistischen Interpretation und Untersuchung von gewissen quasilinearen elliptischen Operatoren über maßwertige Verzweigungsprozesse, das Buch erwähnt aber z. B. nicht die Saint-Flour Lectures von D. Dawson über „Measure-Valued Markov Processes" (in den Lecture Notes in Mathematics 1541, Springer 1993) und die Monographie „An Introduction to Branching Measure-Valued Processes" von E.B.Dynkin (AMS 1994).

Mit gewissen Grundkenntnissen aus der stochastischen Analysis (die im ersten Kapitel des Buches zum großen Teil rekapituliert werden) kann man das Buch als tiefgehende Einführung in einige der interessantesten Entwicklungen des Gebietes verwenden. Es ist dies eine Anthologie, die Wesentliches mit Geschmack auswählt, dem Ausgewählten auf den Grund geht und es sehr gut darstellt.

Frankfurt — A. Wakolbinger

Brelot, M., Théorie classique du potentiel, Association Laplace-Gauss 1997, 259 S., FF 250.–

Vor etwa vierzig Jahren erschien im Centre de Documentation in Paris die Ausarbeitung der Vorlesung „Eléments de la théorie classique du potentiel" von Marcel Brelot (1903–1987). Genau diese Vorlesung bildet das Herzstück des zu besprechenden Buches. Zunächst ist zu fragen, ob denn eine vierzig Jahre alte Vorlesungsausarbeitung über-

Das vorliegende Buch enthält aber noch weitere Beiträge. Es beginnt mit dem Nachruf von Gustave Choquet auf Marcel Brelot, den Choquet im Rahmen der regulären Sitzung am 8. 10. 1987 im Séminaire Brelot, Choquet, Deny, verlas. Es folgt eine vollständige Bibliographie Brelots mit 161 Titeln aus den Jahren 1929 bis 1987. Den Abschluß des Buches bildet der Aufsatz „Les étapes et les aspects multiples de la théorie du potentiel", den Brelot 1972 in L'Enseignement Mathématiques publizierte.

Es liegt eine gelungene Veröffentlichung vor, die nicht nur für Potentialtheoretiker Interessantes zu bieten hat. Herausgegeben ist der Band von der *Association Laplace-Gauss,* und ein weiterer Grund diesen Band hier zu besprechen, ist darin zu sehen, diese Association Laplace-Gauss als Verleger vorzustellen. Es handelt sich um den losen Zusammenschluß eines Teils der Herausgeber der Zeitschrift „Potential Analysis", und die vorliegende Publikation ist die erste, eine zweite, hochinteressante ist kürzlich erschienen: „Dialogues autour de la création mathématiques", herausgegeben von N. Bouleau und mit Beiträgen u. a. von G. Choquet, M. Fukushima, P. Malliavin, P.-A. Meyer, L. Schwartz und anderen.

München N. Jacob

Koosis, P., Leçons sur le Théorème de Beurling et Malliavin, Montréal: Les Publications CRM (1996), 230 + viii S., Can$ 33.65

In [4] bewiesen A. Beurling und P. Malliavin den folgenden Satz:

Sei g eine ganz-analytische Funktion vom Exponentialtyp, die nicht identisch Null ist und für die $J(\log^+|g|) := \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\log^+|g(x)|}{1+|x|^2}\,dx < \infty$ gilt. Dann befindet sich für jedes $a > 0$ in der Menge der Fourier-Transformierten der Maße auf $\mathbb{R}$ mit Träger im Intervall $[-a, a]$ ein solches Maß μ, für welches $\hat{\mu}(\xi) \cdot g(\xi)$ die Fourier-Transformierte eines Maßes auf $\mathbb{R}$ mit kompaktem Träger ist.

Hier bezeichnet $\hat{\mu}$ die Fourier-Transformierte von μ. Ist $\hat{M}$ die Menge der Fourier-Transformierten von Maßen auf $\mathbb{R}$ mit kompaktem Träger, so besagt eine Umformulierung dieses Satzes

$$\{f, f \text{ ganz-analytisch und } f = \hat{\nu}/\hat{\mu} \text{ mit } \hat{\nu}, \hat{\mu} \in \hat{M}\}$$
$$= \{f; f \text{ ganz-analytisch vom Exponentialtyp und } J(\log^+|f|) < \infty\}.$$

In dieser Formulierung sieht man die formale Analogie zu einem Satz von R. Nevanlinna über meromorphe Funktionen im Einheitskreis mit beschränkter (Nevanlinna) Charakteristik.

In einer Folgearbeit [5] benutzten Beurling und Malliavin diesen Satz, um das folgende Problem zu lösen:

Gegeben sei eine Folge $(\lambda_k)_{k \in \mathbb{N}}$ in $\mathbb{R}$ oder $\mathbb{C}$ ohne Häufungspunkt im Endlichen. Bestimme die größte Zahl $r = r((\lambda_k)_{k \in \mathbb{N}})$ mit der Eigenschaft, daß die lineare Hülle von $\{\exp(i\lambda_k x)\}_{k \in \mathbb{N}}$ in $L^2(-r, r)$ dicht liegt.

In ihrem Nachruf [1] auf A. Beurling schreiben L. Ahlfors und L. Carleson: „The depth of these results is quite remarkable and the ideas behind them far-reaching. For instance, some basic ideas in the modern theory of H^1 spaces can be found in this work."

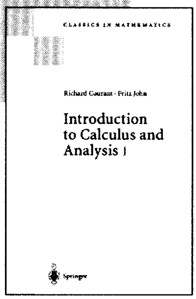
Wer einmal versucht hat, insbesonders als jüngerer Mathematiker, Arbeiten von A. Beurling (mit oder ohne Koautor) zu lesen, kennt die Kürze und die damit einhergehenden Schwierigkeiten seines Stils. In der Arbeit [4] findet sich z. B. eine der ersten nichttrivialen Anwendungen der von Beurling zusammen mit J. Deny entwickelten Theorie der Dirichlet-Räume, [2]–[3]. Diese Anwendung wird wie folgt beschrieben: „It should be pointed out that H is a Dirichlet space in the sense of Beurling and Deny [2, 3]. We shall use the technique of these spaces without referring to the general theory.“ Man beachte, daß diese „general theory“ gerade mal drei Jahre alt war.

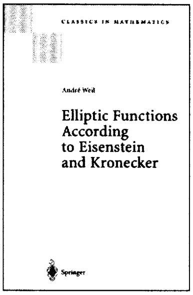
Es ist daher als eine Bereicherung der Literatur anzusehen, wenn nun von Paul Koosis eine sorgfältige Vorlesungsausarbeitung in Buchform vorgelegt wird, in der die Resultate von Beurling und Malliavin für Studenten (und Fortgeschrittene) diskutiert und gezeigt werden. Vorausgesetzt werden Kenntnisse der reellen und komplexen Analysis etwa im Umfang des Werkes von W. Rudin [6]. Auf spezielle Ergebnisse für ganz-analytische Funktionen vom Exponentialtyp wird hin und wieder verwiesen. Die Hauptkapitel sind

1. Le théorème de Levinson.
2. La classe de Cartwright.
3. Emploi des fonctions sous et surharmoniques.
4. Discussion du théorème de Beurling et Malliavin.
5. Théorème de Beurling et Malliavin: démonstration.

Back to the Future

CLASSICS IN MATHEMATICS ∞CIM





R. Courant, F. John

Introduction to Calculus and Analysis 1

Reprint of the 1989 ed.
1998. XXVI, 662 pp.
Softcover DM 68,-*
ISBN 3-540-65058-X

From the reviews:

"Volume 1 covers a basic course in real analysis of one variable and Fourier series. It is well-illustrated, well-motivated and very well-provided with a multitude of unusually useful and accessible exercises. (...)
It is the best text known to the reviewer for anyone trying to make an analysis course less abstract. (...)"

The Mathematical Gazette

S. Flügge

Practical Quantum Mechanics

Reprint of the 1974 ed.
1998. XV, 629 pp. 78 figs.,
Softcover DM 68,-*
ISBN 3-540-65035-0

From the reviews:

"The student who can master these problems will have a good grasp of the practical applications of quantum theory and, therefore, of the basic concepts as well.
I recommend the book unreservedly."

The Australian Physicist

A. Weil

Elliptic Functions according to Eisenstein and Kronecker

Reprint of the 1976 ed. 1998. X, 94 pp.
Softcover DM 68,-*
ISBN 3-540-65036-9

From the reviews:

"As a contribution to the history of mathematics, this is a model of its kind. While adhering to the basic outlook of Eisenstein and Kronecker, it provides new insight into their work in the light of subsequent developments. (...) a wide-ranging survey of one of the most active branches of mathematics at the present time.
The book has its own very individual flavour, reflecting a sort of combined Eisenstein-Kronecker-Weil personality. The persistent reader will be richly rewarded."

Bulletin of the London Mathematical Society

For other volumes published in this series, please visit our website at:

http://www.springer.de/math/index/html

Please order from
Springer-Verlag Berlin
Fax: + 49 / 30 / 8 27 87-301
e-mail: orders@springer.de
or through your bookseller

*This price applies in Germany/Austria/Switzerland and is a recommended retail price. Prices and other details are subject to change without notice.

Springer