E 20577 F
101. Band Heft 2
ausgegeben am 10.6.1999

DMV

Jahresbericht

der Deutschen Mathematiker-Vereinigung

Herausgegeben von A. Krieg
unter Mitwirkung von
U. Gather, E. Heintze, B. Kawohl,
H. Lange, H. Triebel

B. G. Teubner Stuttgart · Leipzig 1999

Jahresbericht
der Deutschen Mathematiker-Vereinigung

Der „Jahresbericht“ ist das offizielle Veröffentlichungsorgan der Deutschen Mathematiker-Vereinigung, für dessen inhaltliche Gestaltung im Auftrag des Präsidiums der jeweilige Herausgeber zuständig ist. Im „Jahresbericht“ sollen vornehmlich Überblicksartikel über Teilgebiete der reinen und angewandten Mathematik, Nachrufe sowie historische Artikel und Buchbesprechungen veröffentlicht werden.

Manuskripte

Alle für die Schriftleitung des Jahresberichts bestimmten Briefe und Manuskripte sind an Prof. Dr. A. Krieg zu richten. Für Buchbesprechungen ist Prof. Dr. H. Lange zuständig. Bücher, von denen eine Besprechung erfolgen soll, werden bei den Verlagen angefordert. Autoren von Buchbesprechungen und Artikeln werden gebeten, die vorhandenen LATEX-style-files für den Jahresbericht zu verwenden. Somit kann der Aufwand für die Satzarbeiten erheblich reduziert werden. Sollten Illustrationen in die Arbeiten integriert werden, können diese auch in das Satzsystem übernommen werden. Dazu ist es erforderlich, daß die Bilddaten der Abbildungen nochmals in separaten Dateien einzeln abgespeichert werden. Die LATEX-style-files sind neben weiteren Informationen im Internet verfügbar unter

http://www.mathA.rwth-aachen.de/dmv/index.html

Auf Anfrage können die style-files auch auf Diskette zugeschickt werden.

Grundsätzlich sollen nur solche Manuskripte eingereicht werden, die nicht gleichzeitig an anderer Stelle zur Veröffentlichung eingereicht oder bereits veröffentlicht worden sind. Mit der Annahme zur Veröffentlichung erwirbt der Verlag das Verlagsrecht zur Vervielfältigung und Verbreitung sowie das Recht der Übersetzung in andere Sprachen.

Bezugsinformationen

Jährlich wird ein Band veröffentlicht, bestehend aus 4 Heften, die vierteljährlich erscheinen. Der Bezug ist nur bandweise möglich.

Der im voraus zahlbare Bezugspreis pro Band beträgt zur Zeit DM 168,– einschließlich Versand. Bestellungen nehmen jede Buchhandlung oder der Verlag entgegen.

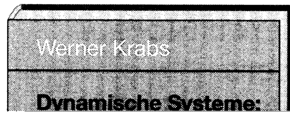
Für persönliche Mitglieder der DMV, die den Jahresbericht zu beziehen wünschen, ist der zwischen DMV und Verlag vereinbarte Bezugspreis maßgebend, der im Rahmen des Mitgliedsbeitrags erhoben wird.

Verlag:
B. G. Teubner GmbH Stuttgart und Leipzig, Industriestraße 15, D-70565 Stuttgart

Krabs

Dynamische

Systeme:



Luderer/Nollau/

Jahresbericht
der Deutschen Mathematiker-Vereinigung

Inhalt Band 101, Heft 2

1. Abteilung

2. Abteilung

In den nächsten Heften erscheinende Arbeiten:

R. Busam, E. Freitag: Hans Maaß
P. Slodowy: The early development of the representation theory of semisimple Lie groups: A. Hurwitz, I. Schur, H. Weyl
P. Ullrich: Die Entdeckung der Analogie zwischen Zahl- und Funktionenkörpern: der Ursprung der „Dedekind-Ringe"

Anschriften der Herausgeber

Prof. Dr. Aloys Krieg, Lehrstuhl A für Mathematik, RWTH Aachen, Templergraben 55, 52056 Aachen
email: krieg@rwth-aachen.de

Prof. Dr. Ursula Gather, Fachbereich Statistik, Universität Dortmund, Vogelpothsweg 87, 44221 Dortmund
email: gather@omega.statistik.uni-dortmund.de

Prof. Dr. Ernst Heintze, Institut für Mathematik, Universität Augsburg, 86135 Augsburg
email: heintze@math.uni-augsburg.de

Prof. Dr. Bernhard Kawohl, Mathematisches Institut, Universität zu Köln, 50923 Köln
email: kawohl@mi.uni-koeln.de

Prof. Dr. Herbert Lange, Mathematisches Institut, Friedrich-Alexander-Universität Erlangen-Nürnberg, Bismarckstraße 1½, 91054 Erlangen
email: lange@mi.uni-erlangen.de

Prof. Dr. Hans Triebel, Mathematisches Institut, Friedrich-Schiller-Universität, Ernst-Abbe-Platz 1–4, 07740 Jena
email: triebel@minet.uni-jena.de

Bezugshinweis

Früher erschienene Bände (ab Band 68) des „Jahresberichts der Deutschen Mathematiker-Vereinigung" können durch den Buchhandel oder den Verlag bezogen werden.

Nachdruck der Bände 41 bis 67 liefert: Swets & Zeitlinger, Heereweg 347b, POB 810, NL-2160 SZ Lisse/Holland

Jber. d. Dt. Math.-Verein. 101 (1999) 47–59
Mathematics Subject Classification: 60 J 60, 35 K 10
© 1999 B. G. Teubner Stuttgart · Leipzig

Infinite Dimensional Diffusions in Modelling and Analysis

J. Zabczyk, Warsaw

There exists an important interplay between the theory of parabolic and elliptic equations and the theory of Markov processes. This was first noticed by L. Bachelier [3], A. Einstein [24], M. Smoluchowski [43] and N. Kolmogorov [33]. Probabilistic [redacted] theory provided tools for finding formulae for probabilistic quantities. This intimate connection guided L. Gross [29] and Yu. Daleckij [12] in their approaches to the theory of partial differential equations on Hilbert and Banach spaces. The infinite dimensional theory is developing rapidly. The probabilistic objects behind the new theory are the so called infinite dimensional diffusions, which have appeared in physics, population biology, chemistry and economics. Modelling questions stimulated the development of the theory.

The aim of the paper is to present some recent and typical results from the field in a rather self-contained way.

I Infinite dimensional diffusions in Modelling

§ 1. Introduction

We start from recalling some facts about diffusions in R^n, see e.g. [52], [25]. *Diffusion operators* are PDE operators L of the form are called *diffusion equations*, [25], [23], [51] and their solutions, regarded as operators acting on initial functions φ,

$$u(t,x) = P_t\varphi(x), \quad t \geq 0, x \in R^n,$$

form *diffusion semigroups* (P_t),

$$P_{t+s} = P_t P_s, \quad t,s \geq 0.$$

Similar concepts have been studied in open subsets $\mathcal{O} \subset R^n$, see [25], [22], [23], [34].

Diffusion equations discribe, for instance the evolution in time of *concentrations* of chemical substances and *density functions* in population models.

There exists a close connection between diffusions and probability noticed first by L. Bachelier in 1900. Let us recall that the probability theory starts from a set Ω equipped with a σ-field of subsets $\mathcal{F}$ and a normalized measure $\mathbb{P}$ on $\mathcal{F}$ called *probability.* The system $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ is called a *probability space.* The Lebesgue integral of a function Z defined on Ω,

$$\int_\Omega Z(\omega)\mathbb{P}(d\omega)$$

is called the *expected value* of Z and denoted as $\mathbb{E}(Z)$ or $\langle Z \rangle$. Let E be a set and $\mathcal{E}$ a σ-field of subsets of E. Any measurable transformation X from Ω into E is called *random variable* with values in E. If E is a Hilbert or Banach space, $\mathcal{E}$ is chosen to be the Borel σ-field of subsets of E, denoted by $\mathcal{B}(E)$. Any random variable X transports the measure $\mathbb{P}$ onto a measure μ named the *distribution* of X or the *law* of X,

$$\mu(\Gamma) = \mathbb{P}(\omega : X(\omega) \in \Gamma), \quad \Gamma \in \mathcal{E}.$$

The distribution of X will be denoted by $\mathcal{L}(X)$. A *stochastic process* with values in E is a family $X(t)$, $t \geq 0$ of E-valued random variables. *Wiener process* on R^n is a family of random variables $W(t) : \Omega \to R^n, t \geq 0$ defined on a probability space with the following properties

(i) $W(0,\omega) = 0, \quad \omega \in \Omega,$
(ii) For every $\omega \in \Omega$, $W(\cdot,\omega)$ is a continuous function,
(iii) For arbitrary $0 \leq s \leq t$,

$$\mathcal{L}(W(t) - W(s)) = \mathcal{L}(W(t-s)).$$

(iv) For arbitrary $0 = t_0 < t_1 < t_2 < \ldots < t_k$ the law $\mathcal{L}((W(t_1) - W(t_0)), \ldots, W(t_k) - W(t_{k-1})))$ on $(R^n)^k$ is equal to the product of laws $\mathcal{L}(W(t_1) - W(t_0)), \ldots, \mathcal{L}(W(t_k) - W(t_{k-1}))$.

In the probabilistic jargon the properties (i)–(iv) are usually phrased as follows. Wiener process is a stochastic process starting from 0, with continuous trajectories and with time homogeneous, independent increments. Wiener process is often regarded as a mathematical model of the Brownian motion.

The following result was established by N. Wiener in 1923 [50].

Theorem 1. *Define* $\Omega = [0,1), \mathcal{F} = \mathcal{B}([0,1))$ *and let* $\mathbb{P} = \lambda$ *be the Lebesgue measure on* $[0, 1)$.

(i) *For arbitrary symmetric, nonnegative definite nxn matrix Q, one can construct, on* $([0, 1), \mathcal{B}([0, 1)), \lambda)$ *an R^n-valued Wiener process $W(t) = (W_1(t), \ldots, W_n(t))$ such that*

$$Q = (\mathbb{E}(W_i(1)W_j(1))).$$

(ii) *For $t \geq 0, x \in R^n$ and a continuous bounded function φ define*

$$W^x(t) = x + W(t), \quad u(t,x) = \mathbb{E}(\varphi(W^x(t))), \quad t \geq 0, x \in R^n.$$

Then

∂u 1

Wiener process corresponding to Q will be denoted by $W_Q(t), t \geq 0$. Probabilistic formulae for solutions to diffusion equations, with general operator L, were obtained by K. Ito in 1942 [30].

Theorem 2. *Let $A : R^n \to R^n$ and $B : R^n \to L(R^m, R^n)$ be bounded, Lipschitz continuous functions from R^n into respectively R^n and the space $L(R^m, R^n)$ of linear transformations from R^m into R^n and Q a nonnegative definite mxm matrix. For arbitrary $x \in R^n$ the following equation:*

$$\begin{aligned} &\frac{\partial X}{\partial t}(t) = A(X(t)) + B(X(t))\frac{\partial W_Q}{\partial t}(t), \quad t \geq 0, \\ &X(0) = x \end{aligned} \tag{2}$$

has a unique solution $X^x(t), t \geq 0$. Moreover for arbitrary bounded continuous φ, the function u:

$$u(t,x) = \mathbb{E}(\varphi(X^x(t))), \quad t \geq 0, x \in R^d \tag{3}$$

satisfies equation (1), *where*

$$Q(x) = B(x)QB^*(x), \quad x \in R^n, \tag{4}$$

with $B^*(x)$ denoting the adjoint matrix to $B(x)$.

The equation (2) should be understood as an integral equation:

$$X(t) = x + \int_0^t A(X(s))ds + \int_0^t B(X(s))dW_Q(s), \quad t \geq 0.$$

Although the trajectories $W_Q(t,\omega), t \geq 0$ are, for $\mathbb{P}$-almost all $\omega \in \Omega$, nowhere differentiable, the integral,

$$\int_0^t B(X(s))dW_Q(s), \quad t \geq 0,$$

§ 2. Diffusion processes on Hilbert spaces

According to definitions from §1 the simplest diffusion on R^n is a Wiener process. Let now U be a separable Hilbert spaces. One defines an U-valued Wiener process in exactly the same way as in §1 replacing only R^n by U.

The counterpart of Theorem 1 is now the following result, see e.g. [17].

Theorem 3. (i) *If W is an U-valued Wiener process then there exists a symmetric non-negative definite, trace class operator Q such that*

$$\mathbb{E}\langle W(t), a\rangle\langle W(s), b\rangle = t \wedge s\,\langle Qa, b\rangle, \quad a, b \in U, t, s \geq 0. \tag{5}$$

(ii) *For arbitrary symmetric nonnegative definite, trace class operator Q on U there exists an U-valued Wiener process for which* (5) *holds.*

§ 2.1. *Wiener process on $\mathbb{Z}^d$*

Let $\mathbb{Z}$ denote the set of all integers and $\mathbb{Z}^d$ the d-dimensional lattice. Let $Q = (q_{\gamma j})_{\gamma j \in \mathbb{Z}^d}$ be an arbitrary, symmetric nonnegative definite matrix defining a bounded linear operator on $U = l^2(\mathbb{Z}^d)$.

$W_\gamma(i), \gamma \in \mathbb{Z}^d$, on a probability space $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$, such that

$$\mathbb{E} W_\gamma(t) W_j(s) = q_{\gamma j} t \wedge s, \quad t, s \geq 0, \gamma, j \in \mathbb{Z}^d.$$

Let $W(t) = (W_\gamma(t))_{\gamma \in \mathbb{Z}^d}, t \geq 0$ and U be the Hilbert space $l^2(\mathbb{Z}^d)$ of square summable sequences on $\mathbb{Z}^d$. If $a, b \in U$ then the random variables

§ **2.2.** *Spin models*

Interprete elements γ of $\mathbb{Z}^d$ as atoms then a *configuration* is basically any real function x defined on $\mathbb{Z}^d$. The value $x(\gamma)$ of the configuration x at the point γ can be viewed as the state of the atom γ and, in some situations, is called the *spin* of γ. Physical properties of the lattice systems are determined by a matrix $(a_{\gamma j})_{\gamma j \in \mathbb{Z}^d}$ of *global interactions* and a function $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ of *local interaction.* Let

$$W_Q(t) = (W_\gamma(t))_{\gamma \in \mathbb{Z}^d}, \quad t \geq 0,$$

be the Wiener process, corresponding to the matrix $Q = (g_{\gamma j})_{\gamma j \in \mathbb{Z}^d})$, introduced in §2.1. Let $X_\gamma(t)$ be the state of the atom $\gamma \in \mathbb{Z}^d$ at moment $t \geq 0$. The processes $X_\gamma, \gamma \in \mathbb{Z}^d$, satisfy the following equations:

$$\begin{aligned} &\frac{\partial X_\gamma}{\partial t}(t) = \sum_j a_{\gamma j} X_j(t) + f(X_\gamma(t)) + \frac{\partial W_\gamma}{\partial t}(t), \quad \gamma \in \mathbb{Z}^d, \\ &X_\gamma(0) = x(\gamma). \end{aligned} \tag{7}$$

We have for instance the following existence result, see [18], in which $l^2_\varrho(\mathbb{Z}^d)$ stands for the Hilbert space of sequences $(x(\gamma))_{\gamma \in \mathbb{Z}^d}$ such that $\sum x^2(\gamma) e^{-|\gamma|} < +\infty$, where $|\gamma| = |\gamma_1| + ,,, + |\gamma_d|$, for $\gamma = (\gamma_1 ,,, \gamma_d) \in \mathbb{Z}^d$.

Theorem 4. *Assume that,*

(i) *There exist constants* R, $M > 0$ *such that*

$$\begin{aligned} &a_{\gamma j} = 0 \quad \textit{if} \quad |\gamma - j| > R, \\ &|a_{\gamma j}| \leq M \quad \textit{for all } \gamma, j \in \mathbb{Z}^d, \end{aligned}$$

(ii) *Function* f *is of the form* $f = f_0 + f_1$, *where* f_0 *is Lipschitz continuous and* $f_0(\xi) + \eta\xi$, $\xi \in \mathbb{R}$, *is continuous and decreasing for some* $\eta \in \mathbb{R}$ *and* $|f_1(\xi)| \leq c_0(1 + |\xi|^s)$, $\xi \in \mathbb{R}$, *for some* $c_0 > 0$ *and* $s \geq 1$,

(iii) Q *is a bounded nonnegative operator on* $l^2(\mathbb{Z}^d)$.

Then for arbitrary $x \in l^2_\varrho(\mathbb{Z}^d)$ *there exists a unique solution* $X(t) = (X_\gamma(t))$ *to* (7).

§ **2.3.** *Spatially homogeneous random evolutions*

We replace the lattice $\mathbb{Z}^d$ by the Euclidean space $\mathbb{R}^d$. By the state x we understand now a function $x(\xi), \xi \in \mathbb{R}^d$. Let Δ be the Laplace operator and $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $b : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ given functions.

The growth of a population in a random environment, see [21], can be described by equations of the type:

$$\begin{aligned} &\frac{\partial X}{\partial t}(t,\xi) = \Delta X(t,\xi) + f(X(t,\xi)) + b(X(t,\xi)) \frac{\partial W_Q}{\partial t}(t,\xi) \\ &X(0,\xi) = x(\xi), \quad \xi \in \mathbb{R}^d, t \geq 0, \end{aligned} \tag{8}$$

where $W_Q(t), t \geq 0$ is a Wiener process, taking values in the space of tempered distributions $S'(\mathbb{R}^d)$, determined by the convolution operator Q:

$$Qx = \Gamma * x.$$

Here Γ is a given, positive definite distribution. One can construct $W_Q(t)$, $t \geq 0$ as a process taking values in a Hilbert space U contained in $S'(\mathbb{R}^d)$, see [31], [41].

Again, under appropriate conditions, equation (8) has a well defined solution in the Hilbert space $L^2_\varrho(\mathbb{R}^d)$ of functions x satisfying

$$\int_{\mathbb{R}^d} x^2(\xi)\varrho(\xi)d\xi < +\infty, \quad \text{where } \varrho(\xi) = e^{-|\xi|},\ \xi \in \mathbb{R}^d.$$

In fact we have the following special case of a theorem from [41].

Theorem 5. *Assume that the distribution Γ is a Fourier transforms of a measure μ such that either μ is finite or absolutely continuous with respect to Lebesgue measure and $\gamma = \frac{d\mu}{dx} \in L^p,\ p \in [1, +\infty]$. If f and b are Lipschitz functions and*

$$\left(1 - \frac{1}{p}\right)\frac{d}{2} < 1,$$

then there exists a unique solution to (8).

Of special interest are linear equations

$$\frac{\partial x}{\partial t} = \Delta X + X(t)\frac{\partial W_Q}{\partial t}, \quad X(0) = x. \tag{9}$$

It is shown in [45], [46], that solutions to (9) have strict positivity property: if $x \geq 0$ and $x > 0$ on a set of positive measure, than $X(t,\xi) > 0$ for all $t > 0$ and all $\xi \in \mathbb{R}^d$. Consequently the so called Cole-Hopf transformation can be applied to X to construct a new process Y:

$$Y(t,\xi) = -\left(\frac{\partial}{\partial \xi_1}\log X(t,\xi), \ldots, \frac{\partial}{\partial \xi_d}\log X(t,\xi)\right), \quad t \geq 0,\ \xi > 0,$$

which is a solution of the following *Burgers equation:*

$$\frac{\partial Y}{\partial t} = \Delta Y - \langle Y, \nabla_\xi \rangle Y + \frac{\partial}{\partial t}\nabla_\xi W. \tag{10}$$

of great importance in statistical physics [8]. In equation (10), ∇_ξ denotes the gradient operator. This way one could construct a stationary solution to (10), see [8], [45].

§ 3. Comments on existence theorems

For all the introduced examples the drift operator A was of the form

$$A(x) = \mathcal{A}x + F(x) \tag{11}$$

with $\mathcal{A}$ a linear, differential operator and F a nonlinear operator usually more regular than $\mathcal{A}$. In general both operators $\mathcal{A}$ and F are defined only on dense subsets of H. In all cases of interest the linear, nonstochastic equation,

$$\frac{\partial y}{\partial t} = \mathcal{A}y, \quad y(0) = x \in H$$

has a unique solution $y^x(t), t \geq 0$, continuously dependent on x. This is equivalent to the requirement that the operator $\mathcal{A}$ generates a C_0-semigroup of linear operators $S(t), t \geq 0$ on H and that $y^x(t) = S(t)x, t \geq 0, x \in H$, see [52], [17].

The diffusion operator $B(x)$ is, for each $x \in H$, a linear operator from the space U, in which the process $W_Q(\cdot)$ takes values, into the space H. Very often $B(x)$ is well defined only for a dense set of states $x \in H$. With the decomposition (11) the general equation (6) becomes

$$\begin{aligned} &\frac{\partial X}{\partial t} = \mathcal{A}X + F(X) + B(X)\frac{\partial W_Q}{\partial t}, \\ &X(0) = x. \end{aligned} \tag{12}$$

By a *mild solution* to (12) one understands a stochastic processes $t \geq 0$, taking values in H, satisfying integral equation:

$$X(t) = S(t)x + \int_0^t S(t-s)F(X(s))ds + \int_0^t S(t-s)B(X(s))dW_Q(s).$$

The integrals, on the right hand side of the equation, should be well defined. As for deterministic evolution equations the main difficulty to prove existence of the solutions to (12) is related to the unboundedness of the coefficients. Deterministic techniques like: variational, compactness and dissipativity methods, fixed point methods, Galerkin-Faedo approximations, have been extended to the stochastic situation.

There exists a vast literature on that topic see e.g. [5], [39], [20], [49], [48], [34], [42], [31], [17].

II Infinite dimensional diffusions in Analysis

Theorem 2 and in particular formula (3) indicate a probabilistic way of constructing solutions to a class of parabolic equations on infinite dimensional spaces. This approach to infinite dimensional analysis was proposed first by L. Gross [29] and Yu. Daleckij [12].

If $X^x(t), t \geq 0$ is a diffusion process on separable Hilbert space H, solving equation (12), then the function,

$$u(t,x) = \mathbb{E}(\varphi(X^x(t))), \quad t \geq 0, x \in H, \tag{13}$$

is a candidate for the solution of the following parabolic problem on H,

$$\begin{aligned} \frac{\partial u}{\partial t}(t,x) &= \frac{1}{2}\text{Tr } Q(x)u_{xx}(t,x) + \langle x, A^* u_x(t,x)\rangle + \langle F(x), u_x(t,x)\rangle \\ &= Lu(t,x), \\ u(0,x) &= \varphi(x), \quad x \in H, t > 0, \end{aligned} \tag{14}$$

where $Q(x) = B(x)QB^*(x)$.

We will restrict our discussion here to the *regularity* property of $u(\cdot,\cdot)$ given by (13).

§ 4. Hypoellipticity

[illegible]

bounded continuous functions on H. Let (P_t) be the transition semigroup corresponding to the diffusion $X^x(t), x \in H$. Thus

$$P_t\varphi(x) = \mathbb{E}(\varphi(X^x(t))), \quad t \geq 0, x \in H.$$

According to our notation, see (13), $P_t\varphi(x) = u(t,x), t \geq 0, x \in H$.

We say that the problem (14) is *hypoelliptic* or that the *semigroup P_t* is *hypoelliptic*, if for arbitrary $\varphi \in B_b(H), P_t\varphi \in C_b(H)$, for all $t > 0$, [52]. If (P_t) is hypoelliptic than usually a stronger property holds: for $t > 0$ and $\varphi \in B_b(H), P_t\varphi$ is continuously differentiable or even of class C^∞, see [52], [36]. This is an important analytical concept.

In the final dimensional case, if the symmetric nonnegative matrices $Q(x), x \in H$ are nondegenerate, then (14) is hypoelliptic, [25]. In the case of infinite dimensional H the situation is *different* [29]. For instance if Q is a self-adjoint trace class operator on H, $\langle Qx, x\rangle > 0$ for $x \neq 0$, then the problem (14) corresponding to $Q(x) \equiv Q, A \equiv 0, F \equiv 0$ is *not* hypoelliptic, see [29], [53], [17]. Thus the semigroup corresponding to a Wiener processe taking values in an infinite dimensional Hilbert

[illegible]

$H = L^2(0,1)$, see [40],

$$
(17) \qquad \begin{aligned}
&\frac{\partial X}{\partial t}(t,\xi) = \frac{\partial X^2}{\partial \xi^2}(t,\xi) + f(X(t,\xi)) + b(X(t,\xi))\frac{\partial W_I}{\partial t}(t,\xi), \quad t > 0,\\
&X(t,0) = X(t,1) = 0, \quad t > 0, \quad X(0,\cdot) = x(\cdot) \in H,
\end{aligned}
$$

where, $f, b : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$.

Theorem 7. *Assume that f and b are Lipschitz functions and for some positive $c > 0, |b(r)| \geq c$, for all $r \in \mathbb{R}$. Then the parabolic problem* (14) *corresponding to* (17) *is hypoelliptic.*

An essential role in the proof of Theorem 7 was played by an infinite dimensional version of a Bismut-Elworthy-Xe formula:

$$
\langle D_x(P_t\varphi)(x), h\rangle = \frac{1}{t}\mathbb{E}(\varphi(X^x(t))\int_0^t \langle B(X^x(s))D_xX^x(s)\circ h, dW_I(s)\rangle),
$$

where D_x denotes the Fréchet derivative and $D_xX^x(s)\circ h$, the value of the Fréchet derivative of $X^x(s)$ in the direction h, see [6].

Hypoellipticity is not only a natural analytical concept but plays also an important role in the study of the *assymptotic properties* of diffusion processes, see [19]. Together with the so called irreducibility of $P_t, t \geq 0$, taking place in majority of cases, it implies uniqueness of an invariant measure μ for the corresponding diffusion and the identity

$$
P_t\chi_\Gamma(x) \to \mu(\Gamma) \text{ as } t \to \infty,
$$

for arbitrary Borel subset Γ of H. In the formula, χ_Γ stands for the characteristic function of Γ. This is why hypoellipticity was studied for many specific semigroups and equations. For a rather detailed description of this line of research we refere to [19].

§5. Parabolic equations in open sets

Let $\mathcal{O} \subset H$ be an open subset of H and consider the parabolic problem:

$$
(18) \qquad \begin{aligned}
&\frac{\partial u}{\partial t}(t,x) = \frac{1}{2}\ \text{Trace } Q(x)\, u_{xx}(t,x) + \langle x, A^* u_x(t,x)\rangle\\
&\qquad\qquad + \langle F(x), u_x(t,x)\rangle, \quad t > 0, x \in \mathcal{O},\\
&\lim_{\substack{x\to y\\ x\in 0}} u(t,x) = 0, \quad y \in \partial\mathcal{O}, t > 0,\\
&u(0,x) = \varphi(x), \quad x \in \mathcal{O}.
\end{aligned}
$$

If $X^x(t), t \geq 0$ denotes the diffusion process determined by the equation (12) then a solution to (18) is given by

$$
u(t,x) = \mathbb{E}(\varphi(X^x(t))\chi_{\tau^x > t}), \quad t \geq 0, x \in H,
$$

where

$$
\tau^x = \inf\{t \geq 0;\ X(t,x) \in \partial\mathcal{O}\},
$$

and $\chi_{\tau^x>t}$ denotes the characteristic function of $\tau^x > t$. The formula,

$$P_t^{\mathcal{O}}\varphi(x) = \mathbb{E}(\varphi(X^x(t))\chi_{\tau^x>t}),$$

defines a semigroup $(P_t^{\mathcal{O}})$ of linear operators on $B_b(\mathcal{O})$, see [23], [9].

We will restrict our attention only to the equation (18) for which $Q(x) = Q$ and $F(x) = 0, x \in H$ and will formulate two results on regularity of $P_t^{\mathcal{O}}\varphi(x), t > 0$, *inside* of $\mathcal{O}$ and at the *boundary points*. The latter result shows essentially new phenomena in the infinite dimensional case.

Assume that (16) holds and define $\Gamma(t) = Q_t^{-1/2}S(t), t \geq 0$. We will require that,

(19) for some $\alpha \in (0,1)$, $\int_0^t s^{-\alpha} \| S(s)Q^{1/2} \|_{HS}^2 \, ds < +\infty, \quad t > 0.$

where $\| . |_{HS}$ denotes the Hilbert-Schmidt norm. The following theorem is taken from [15].

Theorem 8. *Assume* (19) *and that for some* $c > 0, \ \delta > 0$,

$$\| \Gamma(t) \| \leq \frac{c}{t^{\delta}}, \quad t > 0.$$

Then, for every $\varphi \in B_b(\mathcal{O}), t > 0$, *function* $P_t^{\mathcal{O}}\varphi$ *is Fréchet differentiable and there exists a continuous function* c_δ *locally bounded in* $\mathcal{O}$, *such that for every* $\varphi \in B_b(H)$, $x \in H$ *and* $t > 0$,

$$| D_x P_t^{\mathcal{O}}\varphi(x)| \leq \max\left(\frac{1}{t^{\delta}}, c_\delta(x)\right) \sup_{z\in\mathcal{O}} |\varphi(z)|.$$

One can check directly, see [17], that if $Q = I$ then

$$\| \Gamma(t) \| \leq \frac{c}{t^{1/2}}, \quad t > 0$$

and Theorem 8 is applicable.

A point $z \in \partial\mathcal{O}$ is said to be *regular* for the complement $\mathcal{O}^c$ of $\mathcal{O}$ if and only if

$$\mathbb{P}(\tau_{\mathcal{O}}^z = 0) = 1.$$

Remaining points of $\partial\mathcal{O}$ are called *irregular* for $\mathcal{O}^c$. Regular points are basically all points $z \in \partial\mathcal{O}$ such that

$$\lim_{\substack{x\to z\\ x\in\mathcal{O}}} P_t^{\mathcal{O}}\varphi(x) = 0, \quad z \in \partial\mathcal{O},$$

for arbitrary bounded, Borel function φ. The following theorem is a special case of a more general result in [15].

Theorem 9. *Assume that conditions of Theorem 8 hold and that* A *is a self-adjoint negative definite operator on* H *with the domain* $D(A)$. *Let* $\mathcal{O} = \{x \in H; \|x\| < r\}, r > 0$.
(i) *If* $|z| = r$, $\langle Qz, z\rangle > 0$ *and* $z \in D(A)$ *then* z *is a regular point for* $\mathcal{O}^c$

$$\lim_{t \downarrow 0} \frac{|z| - |S(t)z|}{t^{\gamma}} > 0$$

then z is an irregular point for $\mathcal{O}^c$.

The theorem is applicable in the case where

$$H = L^2(0,1), \quad A = \frac{d^2}{d\xi^2}, \quad D(A) = H^2(0,1) \cap H_0^1(0,1),$$

and $Q = I$. The theorem implies that the *regular* and *irregular* points of $\partial\mathcal{O}$ are both dense in $\partial\mathcal{O}$.

§ 6. Concluding remarks

In the necessary brief description of the area several important questions have not been discussed or even mentioned. The literature on applications of infinite dimensional diffusions is constantly growing. Intensively studied are models of *fluid dynamics,* see [6] and [47] and [19] for recent developments. Applications to *filtering* are discussed in [42], see also [1] were filtering of infinite dimensional systems is treated. There exists a vast literature on applications to *population models.* You find in [38] representative results and references. Some applications lead to diffusions on *spaces of distributions* or, more generally, on spaces dual to nuclear. This line of research is presented in a recent monograph [32]. An important method to study diffusions with irregular coefficients, based on the concept of Dirichlet forms, is developed in monograph [35]. It is applied to equations of *quantum field theory* in [2]. The number of applications of the infinite dimensional theory will grow and will be accompanied by new results on existence, uniqueness and asymptotic behaviour for stochastic evolution equations. The vitality of this part of mathematics is apparent from a growing number of monographs devoted to various aspects of the theory and applications, for example [49], [42], [4], [35], [17], [32], [28], [19].

As we have already mentioned, infinite dimensional diffusions constitute an important tool in building an *Infinite Dimensional Potential Theory* initiated by L. Gross [29]. The theory is concerned with PDEs of infinite number of variables and some of its aspects were discussed in § 4 and § 5, see also [13], [7], [35]. The aim is to build an infinite dimensional analogue of the classical potential theory, see [10], [22], [9]. It seems that hypoelliptic semigroups introduced in § 4 generate a natural class of operators for which the theory might be constructed. In particular the corresponding superharmonic functions are lower-semicontinuous and this excludes a possibility of Goodman's phenomena, see § 4. On the other hand the Dirichlet problem in

References

[1] Ahmed, N. U.; Fuhrman, M.; Zabczyk, J.: On filtering equations in infinite dimensions. J. Funct. Analysis **143** (1997) 180–204

[2] Albeverio, S.; Röckner, M.: Classical Dirichlet forms on topological vector spaces – the construction of the associated diffusion processes. Probab. Th. Rel. Fields **83** (1989) 405–434

[3] Bachelier, L.: Théorie de la spéculation. Ann. Sci. École Norm. Sup. (3), No. 1018, Paris, Gauthier-Villars 1900

[4] Belopolskaya, T.; Daleckij, Y. L.: Stochastic Equations on Manifolds. Kluver 1990

[5] Bensoussan, A.; Temam, R.: Équations aux dérivées partielles stochastiques non linéaire. Israel J. Math. **11** (1972) 95–121

[6] Bensoussan, A.; Temam, R.: Équations stochastiques du type Navier-Stokes. J. Funct. Analysis **13** (1973) 195–222

[7] Berezansky, Y. M.; Kondratiev, Y. G.: Spectral Methods in Infinite-Dimensional Analysis. Kluver 1995

[8] Bertini, L.; Cancrini, N.; Jona-Lasinio, G.: The stochastic Burgers equation. Commun. Math. Phys. **165** (1994) 211–232

[9] Blumenthal, R. M.; Getoor, R. K.: Markov Processes and Potential Theory. Academic Press 1968

[10] Brelot, M.: Éléments de la Théorie classique du potentiel. Centre Documentation Universitaire, Paris 1961

[11] Carmona, R.: Infinite dimensional Newtonian potential. LNiM No. 828 (1980) 30–43

[12] Daleckij, Yu. L.: Differential equations with functional derivatives and stochastic equations for generalized random process. Dokl. Akad. Nauk. SSSR **166** (1966) 1035–1038

[13] Daleckij, Yu. L.; Fomin, S. V.: Measures and Differential Equations in Infinite Dimensional Spaces. Kluver 1991

[14] Da Prato, G.; Elworthy, D.; Zabczyk, J.: Strong Feller property for stochastic semilinear equations. Stochastic Analysis and Applications **13,** n. 1 (1995) 35–45

[15] Da Prato, G.; Goldys, B.; Zabczyk, T.: Ornstein-Uhlenbeck semigroups in open sets of Hilbert spaces. Compte Rendus Acad. Sc. Paris, to appear

[16] Da Prato, G.; Zabczyk, J.: Smoothing properties of transition semigroups in Hilbert spaces. Stochastics and Stochastic Reports **35** (1991) 63–77

[17] Da Prato, G.; Zabczyk, J.: Stochastic equations in infinite dimensions. Encyclopedia of Mathematics and its Applications. Cambridge University Press 1992

[18] Da Prato, G.; Zabczyk, J.: Convergence to equilibrium for classical and quantum spin systems. Prob. Theory and Rel. Fields **103** (1995) 529–552

[19] Da Prato, G.; Zabczyk, J.: Ergodicity for Infinite Dimensional Systems. Cambridge University Press 1996

[20] Dawson, D. A.: Stochastic evolution equations and related measure processes. J. Multivar. Anal. **5** (1975) 1–52

[21] Dawson, D. A.; Salehi, H.: Spatially homogeneous random evolutions. J. Multivar. Anal. **10** (1980) 141–180

[22] Doob, J. L.: Classical Potential Theory and Its Probabilistic Counterpart. Springer-Verlag 1984

[23] Dynkin, E. B.: Markov Processes. Prentice-Hall 1961

[24] Einstein, A.: Untersuchungen über die Theorie der brownschen Bewegungen. Hrsg. R. Fürth. Akademische Verlags-Gesellschaft 1922

[25] Friedman, A.: Partial Differential Equations of Parabolic Type. Prentice-Hall 1964

[26] Gaveau, B.: Noyau de probabilité de transition de certains opérateurs d'Ornstein-Uhlenbeck dans les espaces de Hilbert. Compte Rendus Acad. Sc. Paris **293** (1981) 462–472

[27] Goodman, V.: A Liouville theorem for abstract Wiener spaces. Amer. J. Math. **95** (1973) 215–220

[28] Grecksch, W.; Tudor, C.: Stochastic Evolution Equations. A Hilbert Space Approach. Mathematical Research Volume 85, Akademie Verlag G.m.b.H., Berlin 1995

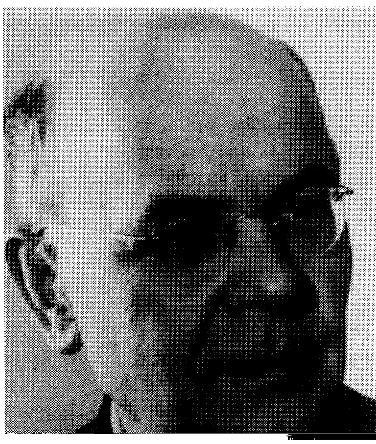
[29] Gross, L.: Potential Theory in Hilbert spaces. J. funct. Anal. **1** (1965) 123–189

[30] Ito, K.: Differential equations detemining Markov processes. Zenkoku Shijo Sugaku Danwakai No. 1077 (1942) 1352–1400
[31] Ito, K.: Fundations of stochastic differential equations in infinite dimensional spaces. CBMS Notes, Baton Rouge 1983, SIAM 1984
[32] Kallianpur, G.; Xiong, J.: Stochastic Differential Equations in Infinite Dimensional Spaces. Institute of Mathematical Statistics. Harward, California 1995
[33] Kolmogoroff, A.: Über die analytischen Methoden in der Wahrscheinlichkeitsrechnung. Mathematische Annalen **104** (1931) 415–458
[34] Krylov, N. V.; Rozovskii, B. L.: Stochastic evolution equations. J. Sov. Math. **16** (1981) 1233–1277
[35] Ma, Z. M.; Röckner, M.: Introduction to the Theory of (Non-symmetric) Dirichlet Forms. Springer-Verlag 1992
[36] Malliavin, P.: Stochastic calculus of variations and hypoelliptic operators. Proceedings of International symposium SDE, Kyoto, ed. K. Ito, Kinokuniya, Tokyo (1978) 195–263
[37] Malliavin, P.: Infinite dimensional analysis. Bull. Soc. Math. **117** (1993) 63–90
[38] Mueller, C.; Tribe, R.: A phase transition for a stochastic PDE related to the contact process. Probab. Theory Relat. Fields **100** (1994) 131–156
[39] Pardoux, E.: Équations aux derrivées partielles stochastiques nonlinéaires monotones. Thèse, Université Paris XI 1975
[40] Peszat, S.; Zabczyk, J.: Strong Feller property and irreducibility for diffusions on Hilbert spaces. Annals of Probability **23** (1995) 157–172
[41] Peszat, S.; Zabczyk, J.: Stochastic evolution equations with a spatially homogeneous Wiener process. Stochastic Processes and Applications, to appear
[42] Rozovskii, B. L.: Stochastic Evolution Equations. Kluwer 1990
[43] Smoluchowski, M.: Zur kinetischen Theorie der Brownschen Molekularbewegung und der Suspensionen. Ann. d. Phys. **21** (1906) 756–780
[44] Stroock, D. W.: Probabilistic Theory, An Analytic View. Cambridge University Press 1993
[45] Tessitore, M.; Zabczyk, J.: Invariant measures for stochastic heat equations. Preprint Institute of Mathematics, Polish Academy of Sciences 1996
[46] Tessitore, M.; Zabczyk, J.: Strict positivity for stochastic heat equations. Preprint Institute of Mathematics, Polish Academy of Sciences 1996
[47] Vishik, M. J.; Fursikov, A. V.: Mathematical Problems of Statistical Hydromechanics. Kluver 1988
[48] Viot, M.: Solution en lois d'une équation aux dérivées partielles non linéaris: Methodes de compacité. C. R. Acad. Sci. Paris. Sér. A, Math. **278** (1974) 1185–1188
[49] Walsh, J. B.: An introduction to stochastic partial differential equations. In: École d'eté de Probabilité de Saint Flour, XIV, ed. P. L. Hennequin, Lecture Notes in Mathematics No. 1180 (1984) 265–439
[50] Wiener, N.: Differential space. J. Math. Phys. Math. Int. Tech. **2** (1923) 131–174
[51] Williams, D.: Diffusions, Markov Processes and Martingales. John Wiley and Sons 1979
[52] Yosida, K.: Functional Analysis. Springer-Verlag 1965
[53] Zabczyk, J.: Linear stochastic systems in Hilbert spaces. Report 236, Institute of Mathe-
[redacted]

Jber. d. Dt. Math.-Verein. 101 (1999) 60–71
Mathematics Subject Classification: 01 A70
© 1999 B. G. Teubner Stuttgart · Leipzig

Hermann Schmidt
1902–1993

A. Bergmann, Düsseldorf, H.W. Knobloch, Würzburg



vor allem Perron, in Physik Sommerfeld. Die beiden Abschnitte der Lehramtsprüfung legte er 1924 und 1925 ab. 1927 wurde er mit summa cum laude an der Universität München promoviert. Als Dissertation hatte er eine Preisaufgabe über lineare Differentialgleichungen mit Koeffizienten aus einem algebraischen Funktionenkörper [1] bearbeitet, die den Preis der Philosophischen Fakultät, 2. Sektion, erhielt. Der erste Berichterstatter war Perron, auf den er als den wichtigsten seiner Lehrer immer wieder dankbar zu sprechen kam. Hermann Schmidt verdankt Perron sicher mehr als nur die Beherrschung methodischer Instrumentarien; Geschmack und Stil sind durch ihn geprägt. Schon die Dissertation zeigte einen wichtigen Zug vieler seiner späteren Arbeiten, nämlich die Verbindung von Algebra und Analysis.

Ab November 1927 war er zuerst Hilfsassistent, dann Assistent bei Robert König in Jena. An die Zeit in Jena dachte er besonders gern zurück. Neben der fruchtbaren Zusammenarbeit mit R. König selbst war es die anregende Atmosphäre am Lehrstuhl, die Hermann Schmidt genossen hat. Sie haben seine Kenntnisse verschiedenster mathematischer Gebiete und ihrer Querverbindungen über das hinaus, was er in München schon gelernt hatte, wesentlich gefördert. Von den jüngeren Kollegen, denen er in Jena begegnete, seien hier genannt: E. Ullrich, H. Grell (Schüler von

Emmy Noether), K. H. Weise, E. Peschl. Zu diesem Kreis stieß 1935 der Algebraiker F. K. Schmidt. Die wichtigsten Impulse für seine wissenschaftliche Arbeit bis zu seiner Habilitation im Jahre 1931 gehen wohl auch auf die Bestrebungen von R. König zurück, Analysis (speziell Funktionentheorie) mit Algebra und Arithmetik zu verbinden, wie dies z.B. in seinem bekannten Buch über elliptische Funktionen (gemeinsam mit M. Krafft) zum Ausdruck kommt. In der Jenaer Zeit entstanden seine drei wohl wichtigsten Arbeiten: Seine Habilitationsschrift [10], die Arbeit [16] über allgemeine asymptotische Entwicklungen und die Verallgemeinerung [14] der Lagrange-Bürmannschen Formel. 1935 erhielt er in Jena einen besoldeten Lehrauftrag; 1937 wurde er zum n.b.a.o. und 1939 zum apl. Professor ernannt.

Im August 1930 heiratete er Edith Handke. Aus ihrer Ehe gingen zwei Söhne und zwei Töchter hervor.

Von 1941 bis 1944 war er kriegsdienstverpflichteter wissenschaftlicher Mitarbeiter an der Universitätssternwarte Berlin-Babelsberg. Wieder zurück in Jena, konnte er am Ende des Krieges 1945 noch mit anderen die hauptsächlichen Bestände der Bibliothek des Abbeanums nach einem Bombenangriff retten. Im Juni 1945 wurden er und seine Familie von den amerikanischen Militärbehörden bei deren Rückzug aus Thüringen zusammen mit anderen nach Heidenheim evakuiert. Dort begann für ihn eine äußerst schwierige Zeit, da er keine berufliche Möglichkeit hatte, für den Unterhalt der Familie zu sorgen.

1947 erhielt er durch Prof. Iglisch die Möglichkeit, zuerst aus einer freien Assistentenstelle bezahlt, später als Diätendozent an der TH Braunschweig seine Lehrtätigkeit wieder aufzunehmen. Ihm ist es mit zu verdanken, daß Braunschweig schon kurze Zeit nach dem Krieg zu einem attraktiven Studienplatz für Di war zerstört, die zweite ordentliche Professur vakant, die außerordentliche Professur einer anderen Fakultät zugeordnet. Doch bereits 1954 hatte sich sein unermüdlicher [illegible]

fessur war H. L. Schmid gewonnen worden, die a.o. Professur mit H. Bilharz besetzt, ein wiederaufgebautes Ruinengebäude konnte als Institutsgebäude bezogen werden. Im Vergleich mit vielen kriegszerstörten deutschen Universitäten war die Mathematik in Würzburg großzügig untergebracht, ein gemeinsames Verdienst von H. L. Schmid und Hermann Schmidt, der zusammen mit seinem Assistenten H. Germer viel Kraft und Zeit auf die Details der Planung verwendete. Die Aussicht, daß nun eine stetige Entwicklung des Mathematischen Instituts einsetzen könnte, wurde im Jahr 1956 jäh zerstört, als H. L. Schmid und H. Bilharz unerwartet starben. Erst nach einiger Zeit begann durch die Besetzung der Stellen durch H. Grunsky und F. Sommer [illegible]

die ununterbrochene Aufwärtsentwicklung und damit eine gewisse Entlastung Hermann Schmidts von außergewöhnlichen Aufgaben.

Zusammen mit H. L. Schmid kam 1953 eine Reihe junger Mitarbeiter aus Berlin nach Würzburg. Hermann Schmidt, H. L. Schmid und H. Bilharz gründeten eine „Forschungsstelle" und warben Drittmittel ein, um diesen Mitarbeitern einen Unterhalt zu ermöglichen. Auf diese Weise wurde einer Gruppe junger Mathematiker nicht näher kannte, dem erschloß sich seine Hingabe an Sachlichkeit und Fairneß kaum oder oft erst viel später. Daß er anderen Freiheit gewährte, haben viele seiner Schüler erfahren. Einladungen zu ihm nach Hause waren für alle Besucher ein großer Gewinn, weil die angeregten Gespräche in einer Atmosphäre verliefen, die liberal im besten Sinne des Wortes waren.

In den zahlreichen Nachrufen auf verstorbene Kollegen würdigt H. Schmidt das mathematische Werk und die Persönlichkeit des Verstorbenen differenziert und immer das Wesentliche herausarbeitend, unabhängig von Zeitströmungen. Besonders deutlich wird dies in seinem Nachruf auf G. Julia [56] aus dem Jahre 1979, als Juliamengen und fraktale Geometrie noch nicht in aller Munde waren und sich die Bedeutung von Julias Werk nur jemandem erschloß, der tiefer sieht als das, was gerade en vogue ist.

Seine Pflichten als Hochschullehrer hat H. Schmidt mit großer Gewissenhaftigkeit und Engagement wahrgenommen. Wie ernst es ihm mit der Lehre war, zeigte sich besonders in den schwierigen Würzburger Jahren, als er neben den notwendigen Kursvorlesungen stets ein vielseitiges Programm von Spezialvorlesungen anbot. Der Themenkatalog reichte von der reellen und komplexen Analysis bis hin zur Algebra und Zahlentheorie. Seine Vorlesungen, die er intensiv vorbereitete, waren anspruchsvoll und erforderten intensives Nacharbeiten. Er vermied eingetretene Pfade und ging häufig originelle Wege, die z. T. in kleineren Noten veröffentlicht wurden. Eine von den Herren Kiyek und Neckermann sorgfältig ausgearbeitete Nachschrift einer Vorlesung über Asymptotik, ist auch heute noch – nach fast vierzig Jahren – lesenswert. Übungen, wie auch zahlreiche der in Diplom- und Zulassungsarbeiten behandelten Themen, waren vor allem auf die Konkretisierung der allgemeinen Theorie ausgerichtet.

Hermann Schmidt hat im Laufe der Jahre zahlreiche wissenschaftlichen Anregungen gegeben, die nicht nur in die von ihm betreuten Dissertationen eingingen. Andere sind auf Umwegen in Arbeiten anderer Autoren eingeflossen, ohne daß immer die Verbindung zu seinem Werk aufgewiesen wurde. Die Fairneß im wissenschaftlichen Konkurrenzkampf, die er anderen gegenüber als etwas Selbstverständliches praktizierte, ist ihm nicht immer zuteil geworden. Die gelegentlich geäußerte Ansicht, er habe sich gegen modern werdende Richtungen gestemmt, ist so nicht richtig. Er verlangte allerdings in der Regel, daß sie ein Weiterkommen bei klassischen Problemen ermöglichen sollten.

In der DMV hatte Hermann Schmidt zwar kein Amt inne, er hat aber ihre Arbeit stark gefördert und bereichert durch jahrzehntelanges Lösen und Stellen von zahlreichen Aufgaben aus den verschiedensten Gebieten im Jahresbericht.

Zu den wissenschaftlichen Arbeiten

Die klassische Analysis ist zwar nicht der ausschließliche Gegenstand des mathematischen Schaffens von Hermann Schmidt, doch wird sie in einer Würdigung sicher an erster Stelle stehen. Wir klammern die Funktionenetheorie im eigentlichen Sinne zunächst aus und befassen uns mit zwei Themenkreisen, mit denen sich Hermann Schmidt in seiner wissenschaftlich fruchtbarsten Periode – der Zeit in Jena – beschäftigt hat.

I Lineare Differentialgleichungen mit meromorphen Koeffizienten

In diesem Gebiet – seit 150 Jahren ein evergreen der Analysis – hat Hermann Schmidt für den deutschen Sprachraum und für seine Generation die Kontinuität einer Entwicklung gewahrt, an deren Beginn die Namen Riemann, Fuchs und Schlesinger stehen und deren gegenwärtiger „state of art" wohl am zutreffendsten durch den Bericht von Varadarajan im Bulletin AMS, vol. 33, No. 1, beschrieben wird. Was in den drei Arbeiten [7], [8], [10] unternommen wird, ist kurzgesagt der Versuch, Systematik in diejenigen speziellen Funktionen, die Lösungen einer linearen Differentialgleichung mit regulären Singularitäten sind, zu bringen. Kernpunkt ist dabei die Darstellbarkeit dieser Funktionen als Periodenintegrale über (parameterabhängige) Elemente aus Riemannschen Funktionenklassen. Diesen Weg in der umgekehrten Richtung zu gehen – d. h. zu Periodenintegralen Differentialgleichungen aufzustellen, wie dies im Fall der elliptischen Funktionen wohlbekannt ist – hat wohl zuerst Fuchs versucht. Mit Hermann Schmidt ist diese Entwicklung zu einem Abschluß gelangt. Was ihn wohl vor allem reizte, war die Möglichkeit des Brückenschlages zwischen einem – nach landläufiger Ansicht – strukturlosen Gegenstand wie den der „Speziellen Funktionen" und einem so hochstrukturierten wie der Königschen Theorie der Riemannschen Funktionenklassen. Wenn man die duale (oder komplementäre) Klasse geeignet erklärt – wie dies Robert König vorgeschlagen hat –, so wird die Arithmetik dieser Funktionenklassen ähnlich derjenigen der algebraischen Funkist es seiner ausführlichen Besprechung im Zentralblatt zu verdanken, daß die grundlegende, aber schwer lesbare Arbeit von Malmquist aus den Acta math. 74 der Fachwelt zugänglich wurde. Erwähnt werden sollte auch, daß von ihm der entscheidende Anstoß zu einer Würzburger Habilitationsschrift über den Zusammenhang zwischen formalen und analytischen Lösungen (Stokessches Phänomen) ausging. Er hat damit indirekt – wie öfter in seinem Schaffen – Anteil an einer auch heute noch aktuellen Entwicklung.

II Asymptotische Entwicklungen

Die 1937 erschienene Arbeit [16] markiert eine neue Periode im wissenschaftlichen Schaffen von Hermann Schmidt, mit der er aus dem Schatten seiner akademischen Lehrer Perron und König heraustritt und sich zudem von einer sehr pragmatischen Seite zeigt. In dieser – vielleicht bedeutendsten – seiner Publikationen wird ein Desideratum der klassischen Analysis aufgearbeitet, an dem viele Autoren – vgl. das Literaturverzeichnis zu [16] – vorübergegangen sind: Die Bereitstellung eines Kalküls für asymptotische Entwicklungen, der in umfassenden Regeln für den täglichen Gebrauch (rationale Operationen, Einsetzen in konvergente Reihen, gliedweise Grenzübergänge) mündet. Bemerkenswert ist die Formalisierung und Algebraisierung des Begriffs der allgemeinen Skala – in [12] und [14] schon angedeutet –, die die Rolle der fallenden Potenzen von x in den Poincaréschen asymptotischen Reihen übernimmt. Wie dies für sein gesamtes Werk charakteristisch ist, findet er auch hier den richtigen Mittelweg: Einerseits allgemein genug, um als gemeinsames Dach für die verschiedenen Spezialfälle zu dienen, aber doch soviel an individueller Struktur bewahrend, daß man rasch und ohne aufwendige Zusatzbetrachtungen zu den wichtigsten Anwendungen gelangen kann. Hinweise auf solche Anwendungen – die über die Poincaréschen asymptotischen Reihen hinausgehen – finden sich in [12], vor allem wird dort bereits die Möglichkeit diskutiert, Nullstellen von Exponentialsummen eingrenzen zu können. Dieses Thema hat er dann später in einer gemeinsamen Arbeit [55] mit seinem Schüler G. Meyer zum Abschluß gebracht, womit er auch hier wieder – indirekt – Zulieferer für ein höchst aktuelles Anwendungsgebiet (Stabilitätstheorie für Funktional-Differentialgleichungen) geworden ist.

Daß seine Theorie der allgemeinen asymptotischen Darstellungen einem tatsächlichen Bedürfnis abgeholfen hat, haben Hermann Schmidts Fachkollegen wohl erkannt; seit Ende der dreißiger Jahre galt er im deutschsprachigen Gebiet als der Experte für „Asymptotik". Auch aus heutiger Sicht ist es sehr schade, daß es der Ungunst der Kriegs- und Nachkriegsverhältnisse wohl zuzuschreiben ist, daß Hermann Schmidt ein geplantes größeres Lehrbuchprojekt zum Thema „Asymptotische Entwicklungen" nicht hat vollenden können.

In das weitere Umfeld der asymptotischen Entwicklungen gehört auch die Arbeit [14], in der es um eine Verallgemeinerung der Lagrange-Bürmannschen Entwicklung einer implizit definierten Funktion auf den Fall unendlich vieler unabhängiger Veränderlichen geht. Was diese Arbeit bemerkenswert macht, ist nicht die Verallgemeinerung an sich – die naheliegend ist –, sondern das, was Hermann Schmidt an Anwendungsmöglichkeiten aufzeigt. Auch hier wird wieder deutlich, wozu er das

Kapital seines großen enzyklopädischen Wissens vor allem eingesetzt hat: Um das Gemeinsame in der Vielzahl der Einzel-Sachverhalte zu erkennen.

III Funktionentheorie

In seiner Jenaer Zeit hat sich Hermann Schmidt auch mit funktionentheoretischen Fragen beschäftigt. So hat er eine Fassung des Riemann-Rochschen Satzes erarbeitet, die Grundlage für Anregungen gewesen ist, die er seinen Schülern in Würzburg gegeben hat. Der wichtigste Beitrag ist die Arbeit [17], die einen Zusammenhang zwischen Nevanlinnas Untersuchungen über Riemannsche Flächen mit endlich vielen Windungspunkten und gewissen Klassen spezieller Funktionen herstellt. In seinen Würzburger Jahren hat er diese Richtung der Funktionentheorie weitergegeben und seinen Schüler Fritz Gackstatter angeregt, Diplomarbeit und Dissertation auf diesem Gebiet anzufertigen (vgl. Sitzungsber. Bayer. Akad. Wiss., Math. Nat. Kl., München, 1970, 79–102).

IV Zahlentheorie

In der Zahlentheorie (ein Gebiet, dem er sich neben der Analysis immer wieder widmete) arbeitete Hermann Schmidt insbesondere über Kettenbruchmethoden für ganze Zahlen aus quadratischen Zahlkörpern. Aus diesem Fragenkreis stammt seine wohl wichtigste zahlentheoretische Arbeit [25]. Weiter beschäftigte er sich mit speziellen diophantischen Gleichungen sowie mit Transzendenzfragen für Funktionswerte von Funktionen, die entweder den Besselfunktionen oder der Riemannschen Zetafunktion nahestehen. Hier – wie in seinen anderen Arbeiten – werden die Fragestellungen, auch wenn es sich um konkrete spezielle Fälle handelt, stets in den entsprechenden größeren (strukturellen) Zusammenhang eingeordnet oder von daher betrachtet. So werden z. B. in [40] durch die Behandlung einer speziellen diophantischen Gleichung als Beispiele zum Mordellschen Satz Klassen von elliptischen Kurven mit genau vier rationalen Punkten angegeben. Seine überaus breiten Kenntnisse der neueren Entwicklungen und der älteren Literatur sind daran zu sehen, wie er seine Ergebnisse jeweils einordnet.

Auf die 1949 veröffentlichte Arbeit [25] soll nun etwas näher eingegangen werden. Daraus ersieht man seine Arbeitsweise auf diesem Gebiet und die ihn interessierenden Fragen. Wie er vielfach gesprächsweise äußerte, hat er sich mit Kettenbrüchen nicht auf Anregung von Perron beschäftigt, sondern unabhängig von ihm aus eigenständigem Interesse an diesem Fragenkreis. Verschiedentlich hat er Perronsche Ergebnisse abgerundet und sie in größere strukturelle Zusammenhänge eingeordnet. In [25] beschäftigt sich Hermann Schmidt mit verschiedenen Aspekten der Approximation von ganzen Zahlen in gewissen quadratischen Zahlkörpern und ihrer Darstellung durch regelmäßige Kettenbrüche (rKB). Insbesondere geht es in reellquadratischen Zahlkörpern um die Frage, welche ganzen Zahlen eine rKB-Entwicklung von der Gestalt haben, daß auf eine eingliedrige Vorperiode eine Periode folgt, die bis auf das Schlußglied symmetrisch ist, und wie man von einer solchen rKB-Entwicklung ausgehend die ganze Zahl zurückgewinnen kann. Dies behandelt er abschließend, z. T. mit expliziten Formeln. Als Anwendung diskutiert er hier vollständig den Fall, daß der symmetrische Anteil der Periode aus gleichen Elementen besteht und in [43] das Entsprechende, wenn er von der Gestalt $(a, b, ..., b, a)$ ist. Außerdem untersucht er für gewisse Fälle die Frage, ob es „einheitliche" rKB-Enwicklungen gibt (Parameterdarstellungen). Dazu überträgt er einige Entwicklungen aus dem Zahlkörper auf algebraische Funtionenkörper, die er dann zur Lösung des ursprünglichen Problems heranzieht. Schließlich gibt er Beispiele für Elemente quadratischer Zahlkörper an, die eine beliebig lange Periode besitzen.

Die wesentliche Grundlage für die Entwicklungen in [25] ist ein Beweis der Konvergenz des Heronschen Verfahrens zur Approximation von Quadratwurzeln im Komplexen durch außerordentlich scharfsinnige Überlegungen und die daraus gezogenen Konsequenzen für die oben besprochenen Fragestellungen.

Die oben angesprochene Betrachtungsweise, algebraische Funktionenkörper zur Lösung von Problemen aus algebraischen Zahlkörpern heranzuziehen, finden sich häufig in seinen oder von ihm angeregten Arbeiten. So auch in der letzten von ihm angeregten Dissertation von Herrn Neubrand (vgl. J. reine angew. Math. 303/304 (1978), 170–204), die bei Zahlentheoretikern auf großes Interesse stieß. Dort werden u.a. Klassen von Zahlkörpern angegeben, in denen eine explizite Angabe von Einheiten möglich ist (eine Frage, die u. a. von Bernstein, Hasse, Halter-Koch, Stender behandelt wurde).

V Algebra

In den Arbeiten aus dem Gebiet der Algebra werden folgende Themenkreise behandelt: Irreduzibilitätsfragen für Polynome; spezielle Substitutionsgruppen; ein reeller Beweis des Fundamentalsatzes der Algebra mit Methoden, die analog zum Minimumprinzip der Potentialtheorie sind; Einordnung eines Approximationsverfahrens zur Wurzelberechnung algebraischer Gleichungen in einen größeren Zusammenhang (inverse Iteration nach Wielandt zur approximativen Berechnung von Eigenwerten linearer Abbildungen) und explizite Diskussion des Falls mehrfacher Eigenwerte; konkrete Betrachtungen für den Restklassenring $R[x]$ modulo dem von einem normierten irreduziblen Polynom $f(x)$ erzeugten Ideal und spezielle Fragen aus dem heute wieder sehr aktuellen Gebiet des Umkehrproblems der Galoistheorie (vgl. [50]).

In dieser Arbeit beschäftigt sich H. Schmidt mit der Realisierung der alternierenden Gruppe A oder Untergruppen davon durch trinomische Gleichungen (wie es auch in den neueren Arbeiten geschieht). Seine Methoden sind nicht so allgemein wie in den jetzigen Arbeiten, sind aber ganz analog: Er sucht rationale Punkte auf gewissen algebraischen Flächen und gibt dann Konstruktionsverfahren für trinomische Gleichungen an, die A oder eine ihrer Untergruppen als Galoisgruppe besitzen.

VI Funktionalgleichungen

Auch in den Artikeln über Funktionalgleichungen zeigt sich ein charakteristischer Zug von Hermann Schmidts mathematischer Arbeitsweise: Das Wechselspiel zwischen Aspekten verschiedener Gebiete (hier Analysis und Algebra) wird herausgearbeitet und zur Lösung ausgenutzt. Er betrachtet Verallgemeinerungen des Systems der Funktionalgleichungen der hyperbolischen bzw. trigonometrischen Funktionen, nämlich Systeme der Gestalt

$$f_\nu(x+y) = \sum_{\kappa,\lambda=1}^{n} c_{\nu\kappa\lambda} f_\kappa(x) f_\lambda(y)$$

mit $c_{\nu\kappa\lambda}$ reell oder komplex, die nach Einführung einer (nicht notwendig assoziativen) Algebra A als *eine* Funktionalgleichung

$$F(x+y) = F(x)F(y)$$

mit Werten in A betrachtet werden.

Für $c_{\nu\kappa\lambda} = 1$ ergibt sich das System der Funktionalgleichungen der (hyperbolischen) zyklischen Funktionen, das er in [36] vornehmlich untersucht hat.

Durch Herstellen des Zusammenhangs mit dem Differentialgleichungssystem $y' = yc$ ($c \in A$) lassen sich Methoden aus der Theorie der linearen Differentialsysteme verwenden, so daß man (grob gesagt) zur Lösung $b \cdot \exp(cx)$ (c beliebig aus A) kommt, falls $y(0) = F(0) =: b$ idempotent ist. In [36] hat Hermann Schmidt das (zuerst ausgehend vom Differentialsystem) mit Hilfe der Gruppenalgebra der zyklischen Gruppe, in [47] (zusammen mit W. Eichhorn) für eine assoziative, kommutative Algebra A mit Einselement in dieser Weise hergeleitet und einen Spezialfall mit Hilfe von [42] ausführlich behandelt. In [49] verwendet er [47] zur Behandlung des abzählbar unendlichen Systems der Funktionalgleichungen, dem die Binomialkoeffizienten genügen.

Schriftenverzeichnis Hermann Schmidt

[1] Theorie der linearen Differentialgleichungen mit Koeffizienten aus einem algebraischen Funktionenkörper. Dissertation Univ. München, Univ.-Verlag Borna-Leipzig 1927, 67 S.

[2] Zur Differentiation uneigentlicher Integrale nach einem Parameter. Sitzungsber. Bayer. Akad. Wiss., Math.-Nat. Abt. München 1928, 151–156

[3] Über eine Klasse irreduzibler Gleichungen. Sitzungsber. Bayer. Akad. Wiss., Math.-Nat. Abt., München 1928, 157–159

[4] (mit K. Geiger) Über eine spezielle Substitutionsgruppe. Ber. Sächs. Akad. Wiss., Math.-Phys. Kl., Leipzig 1928, 379–382

[5] A propos d'une Note de M. Lainé „Sur quelques classes particulières de polynomes". L'Enseignement Math. 28 (1929), 126–128

[6] Neue Verallgemeinerung der Legendreschen Funktionen. Jahresber. DMV 38 (1929), 40–41 (schräg)

[7] (mit R. König) Über Polynom- und allgemeinere Funktionssysteme, die aus der hypozykloidischen Abbildung entspringen II. J. Reine Angew. Math. 162 (1930), 69–113

[8] Über die komplementäre Klasse bei den hypozykloidischen Funktionssystemen. Math. Z. 33 (1931), 714–732
[9] Bemerkungen zu einem Satz des Herrn Lettenmeyer über die an singulären Stellen regulären Differentialsysteme. Sitzungsber. Bayer. Akad. Wiss., Math.-Nat. Abt., München 1931, 85–90
[10] Über multiplikative Funktionen und die daraus entspringenden Differentialsysteme (Habilitationsschrift). Math. Ann. 105 (1931), 325–380
[11] Eine Eigenschaft der regelmäßigen Vielecke, deren Eckenzahl eine Primzahlpotenz ist. Jahresber. DMV 42 (1933), 253–254
[12] Über asymptotische Entwicklungen mit allgemeiner Skala. Jahresber. DMV 44 (1934), 49–51 (schräg)
[13] Über die Stammfunktion einer stetigen Funktion. Math. Z. 40 (1935), 70–71
[14] Über die Reihendarstellung implizit gegebener Funktionen von endlich oder unendlich vielen Veränderlichen. Math. Z. 40 (1935), 266–278
[15] Zur Faktorenzerlegung reeller Polynome. Jahresber. DMV, 2. Abt., 46 (1936), 64–67
[16] Beiträge zu einer Theorie der allgemeinen asymptotischen Darstellungen. Math. Ann. 113 (1937), 629–656
[17] Über einige neuere Beispiele zur Wertverteilungslehre. J. Reine Angew. Math. 176 (1937), 250–252
[18] Über Existenz und Darstellung impliziter Funktionen bei singulären Anfangswerten. Math. Z. 43 (1938), 533–552
[19] Zum Umkehrproblem bei periodischen und fastperiodischen Funktionen. Sitzungsber. Sächs. Akad. Wiss., Math.-Phys. Kl., Leipzig 1938, 83–96

[35] Strömungen der neueren Mathematik – Arithmetisierung und Geometrisierung. MNU 12 (1959/60), 200–208
[36] Über das Additionstheorem der zyklischen Funktionen. Math. Z. 76 (961), 46–50
[37] Zur Charakterisierung der zyklischen Funktionen durch eine Funktionalgleichung. Math. Z. 76 (1961), 402–403
[38] Eine Anwendung der Siegelschen Transzendenzsätze für Bessel-Funktionen. Math. Z. 77 (1961), 309–313
[39] Elementarer Beweis für eine asymptotische Entwicklung aus dem Gebiet der Zeta-Funktion. Math. Z. 84 (1964), 271–276
[40] Über einige diophantische Aufgaben 3. und 4. Grades. Jahresber. DMV 67 (1964), 2–13; Nachtrag: Bd. 70 (1967), 51–52
[41] Über das Kettenbruchverfahren von Patz und Arwin zur Darstellung von Zahlen durch positiv definite binäre quadratische Formen. Sitz. Ber. Bayer. Akad. Wiss., Math.-Nat. Kl., München 1966, 5–12
[42] Bemerkungen zur elementaren Algebra; I. Restklassenringe und Resultante. Sitzungsber. Bayer. Akad. Wiss., Math.-Nat. Kl., München 1966, 167–172
[43] Zur Ermittlung reeller quadratischer Zahlen aus dem symmetrischen Anteil der Kettenbruchperiode. Math. Z. 96 (1967), 58–61
[44] (mit K. Kiyek) Auswertung einiger spezieller unendlicher Reihen aus dem Bereich der elliptischen Funktionen. Arch. Math. 18 (1967), 438–443
[45] Josef Plemelj. Jahrbuch Bayer. Akad. Wiss., München 1968, 209–212
[46] Funktionssysteme mit bilinearem Additionstheorem. Sitzungsber. Berliner Math. Ges. (1967–1968), 33–37
[47] (mit W. Eichhorn) Über bilineare Additionstheoreme. Sitzungsber. Bayer. Akad. Wiss., Math.-Nat. Kl., München, 1969, 25–30
[48] Über die Werte der Riemannschen Zeta-Funktion und verwandter Funktionen für ganzzahlige Argumente. Sitzungsber. Bayer. Akad. Wiss., Math.-Nat. Kl., München, 1972, 87–99
[49] Über das Additionstheorem der Binomialkoeffizienten. Tagungsber. Funktionalgleichungen Oberwolfach 1972, 27–33, auch in Aeq. Math. 10 (1974), 302–306
[50] Bemerkungen zur elementaren Algebra; II. Über trinomische Gleichungen mit quadratischer Diskriminante und rationale Punkte auf gewissen algebraischen Flächen. Sitzungsber. Bayer. Akad. Wiss., Math.-Nat. Kl., München, 1974, 115–132
[51] (mit L. Neckermann) Zur Neuhausschen Entwicklung des Restglieds der asymptotischen Darstellung des Exponentialintegrals $E1(z)$. Tagungsber. Oberwolfach 6/1974, 6–7
[52] Asymptotische Entwicklung von verallgemeinerten Bernoullischen Funktionen und von Teilsummen Dirichletscher Reihen mit periodischer Koeffizientenfolge. J. Reine Angew. Math. 274/275 (1975), 94–103
[53] Eine diophantische Aufgabe des Leonardo von Pisa. Sitzungsber. Bayer. Akad. Wiss., Math.-Nat. Kl., München 1975, 189–195
[54] Oskar Perron. Jahrbuch der Bayer. Akad. Wiss., München 1976, 217–227
[55] (mit G. P. Meyer) Zur Existenz und analytischen Darstellung von Nullstellenfolgen bei

[59] Francesco Giacomo Tricomi. Jahrbuch Bayer. Akad. Wiss., München 1980, 232–234
[60] Robert König. Jahrbuch Bayer. Akad. Wiss., München 1981, 253–261

Von Hermann Schmidt angeleitete Dissertationen

Adam Schmidt: Konvergente und asymptotische Darstellung für die Lösungen linearer Differerentialgleichungen, deren Koeffizienten Dirichletsche Reihen oder Exponentialpolynome mit komplexen Exponenten sind. Jena 1939

Georg Lockot: Über Nullgebilde analytischer Funktionen zweier Veränderlichen, die in [illegible]

Jber. d. Dt. Math.-Verein.
101 (1999) 72–96
Mathematics Subject Classification: 53 A 10, 49 Q 05, 30 F 30
© 1999 B. G. Teubner Stuttgart · Leipzig

Eingebettete Minimalflächen und ihre Riemannschen Flächen

H. Karcher, Bonn

Ich möchte über die Konstruktion vollständiger, in $\mathbf{R}^3$ eingebetteter Minimalflächen sprechen. Genauer beschreibe ich das Ziel des 1996 auf der DMV-Tagung in Jena gehaltenen Vortrags im folgenden Abschnitt.

[illegible]

Satz (i) (Huber [5]). *Eine vollständige Minimalfläche endlicher Totalkrümmung (d.h. endlichen Integrals der Gaußschen Krümmung) wird durch Hinzunahme endlich vieler Punkte zu einer* kompakten (!) *Riemannschen Fläche (zitiert als* „konforme Kompaktifizierung“*).*
(ii) (Osserman [8]). *Die „Gaußabbildung“ (also die Abbildung der Minimalfläche in die Sphäre S^2 mit Hilfe eines Normalenfeldes N) setzt sich zu einer* meromorphen (!) *Abbildung der kompakten Riemannschen Fläche M^2 fort. (Kleine Umgebungen der Punktierungen der Riemannschen Fläche parametrisieren die sogenannten „Enden“ der Minimalfläche.)*

Um 1980 begann die Anwendung dieser Resultate durch Chen-Gackstatter, Costa, Hoffman-Meeks auf die Konstruktion ganz neuartiger, zu diesem Zeitpunkt nicht mehr erwarteter Beispiele von *eingebetteten* Minimalflächen. Im Laufe der weiteren Entwicklung hat sich dann gezeigt, daß wesentliche Teile dieser Konstruktionen ohne Übertreibung zur mathematischen Allgemeinbildung gerechnet werden dürfen. Ich will in meinem Vortrag von diesem Blickpunkt her über Minimalflächen berichten. – Mit breiter Perspektive werden die vollständigen Minimalflächen im ersten Band von Dierkes, Hildebrandt, Küster und Wohlrab [1] behandelt. Selbstverständlich haben die neuen Beispiele auch theoretische Entwicklungen, z.B. Klassifikationsresultate, angeregt; ich kann darauf nur oberflächlich eingehen, empfehle aber Rosenbergs Bourbaki-Vortrag [3]. Zu den im folgenden behandelten Themen haben Hoffman und ich in [2] ausführlicher geschrieben. Diese Referenzen haben umfangreiche Literaturverzeichnisse. – Die Illustrationen sind im Laufe der Jahre von meinen Mitarbeitern, von Koautoren oder von mir programmiert worden. Ich habe die Verwendung dieser nun bereits historischen Bilder neuen Rechnungen vorgezogen. Ich danke Jörg Hahn, Konrad Polthier, Meinhard Wohlgemuth, Andreas Arnez, Martin Steffens und Christian Teitzel sowie weiteren Mitarbeitern des SFB256 für die Zusammenarbeit bei der Herstellung.

Zusammenhang mit der Funktionentheorie

Aus *Abbildungen* von Minimalflächen kann man mehr herauslesen, als einem ohne Anleitung einfällt. Z.B. will ich erklären, wie man solchen Bildern ansehen kann, mit welchen funktionentheoretischen Daten die dargestellten Flächen konstruiert wurden. Zunächst jedoch eine Warnung. Bild 1 zeigt ein Katenoid, dessen einer Rand Wellen schlägt. Es ist nicht schwierig, die Darstellung aller im folgenden gezeigten Flächen geringfügig so abzuändern, daß man zwar im Bildausschnitt keine Änderung bemerkt, jedoch außerhalb des Bildausschnitts derartige Zerfallserscheinungen auftreten. Das hängt damit zusammen, daß für die Differentialgleichung der Minimalflächen Anfangswertprobleme ungeeignet sind; die Differentialgleichung ist elliptisch und daher gut geeignet zur Behandlung von Randwertaufgaben, wie sie das Plateausche Problem stellt. Die noch zu beschreibenden *vollständigen* Flächen, die bis „unendlich“ reichen, müssen von vornherein mit einer globalen Beschreibung konstruiert werden. Eine solche wird möglich wegen der zitierten meromorphen Fortsetzbarkeit der Gaußabbildung auf eine *kompakte Riemannsche Fläche,* denn auf solchen sind meromorphe Funktionen (und Differentialformen) schon durch ihre *endlich* vielen Null- und Polstellen bis auf einen konstanten Faktor bestimmt.

Zunächst erkläre ich die enge Verbindung zwischen Minimalflächen und Funktionentheorie. Die Theorie wird meist damit begonnen, daß die Existenz lokaler isothermer (d.h. winkeltreuer) Koordinaten vorausgesetzt wird. Dann sind die Kartenwechsel holomorph, so daß man die Funktionentheorie einsetzen kann; danach werden die Flächengleichungen in diesen speziellen Koordinaten benutzt und auf Minimalflächen spezialisiert. Ich möchte auf den Anfang der Theorie genauer eingehen, weil das für mein Verständnis der späteren globalen Konstruktionen wesentlich war; dies geschieht auf mehrfachen Wunsch von Testlesern ausführlicher als im mündlichen Vortrag und ist jetzt sicher für manchen eine umfangreichere Grundlagendiskussion als für die Erklärung der Beispiele nötig.

Falls man solche winkeltreuen Koordinaten als Abbildungen nach $\mathbf{C}$ schon hat, so sieht man sofort, daß die 90°-Drehungen auf allen Tangentialebenen der Fläche in Koordinaten durch die Multiplikation mit i beschrieben werden. Analog zum Begriff Vektor*feld* sprechen wir von dem Endomorphismen*feld* J dieser 90°-Drehungen. Da wir J auch ohne die speziellen Koordinaten kennen, können wir schon vor Einführung dieser Koordinaten ausdrücken, wann eine Abbildung holomorph ist; es gilt nämlich wie in der Gaußschen Zahlenebene: Eine reell differenzierbare Funktion $f\colon M^2 \to \mathbf{C}$ ist genau dann holomorph, wenn für ihr Differential die folgende Relation gilt

$$df(J \cdot X) = i \cdot df(X).$$

Da diese Verträglichkeit der Ableitung mit der Multiplikation mit i sich in $\mathbf{C}$ zu den Cauchy-Riemannschen Differentialgleichungen spezialisiert, wird diese Bezeichnung auf unsere Situation ausgedehnt. Zerlegt man f in Real- und Imaginärteil gemäß $f = u + i \cdot v$, so folgt wie in $\mathbf{C}$, daß man in einfach zusammenhängenden Teilgebieten aus dem Realteil u den Imaginärteil v bis auf eine Konstante rekonstruieren kann, denn die Cauchy-Riemannschen Gleichungen lauten in dieser Aufspaltung

$$(du + i \cdot dv)(J \cdot X) = i \cdot (du + i \cdot dv)(X),$$

liefern also $dv := -du \cdot J$, wenn du gegeben ist. Dem entsprechend zeigt eine Analyse der Konstruktion isothermer Koordinaten, daß zunächst eine (lokale) Funktion u konstruiert wird, so daß die Differentialform $-du \cdot J$ *geschlossen*, also lokal gleich dem Differential einer Funktion v ist. Offenbar ist dann $u + i \cdot v$ eine winkeltreue Abbildung nach $\mathbf{C}$. Das *Besondere an den Minimalflächen* ist nun, daß man solche Funktionen u nicht erst konstruieren muß, sondern daß sie von vornherein vorhanden sind, und zwar nicht nur als lokale, sondern sogar als *global* definierte Funktionen (die später Laplace-Beltrami-harmonisch heißen). Da die vollständigen eingebetteten Minimalflächen mit Hilfe dieser globalen Funktionen konstruiert werden, will ich zu diesem Anfangsstück der Theorie etwas an Kalkül hinzufügen.

In der Funktionentheorie stellen wir uns die Multiplikation mit i auf allen Tangentialräumen als *dieselbe* 90°-Drehung vor; dem entspricht, daß für jede Fläche in $\mathbf{R}^3$ deren Endomorphismenfeld J *parallel* (s.u.) längs beliebiger Flächenkurven ist. Zunächst heißt ein *Vektorfeld* wie im euklidischen Fall parallel längs einer Flächenkurve, wenn es so wenig wie möglich rotiert; das wird in folgender Definition ausgedrückt:

Definition: $c(t)$ sei eine Kurve auf der betrachteten Fläche, $X(t)$ sei ein an die Fläche tangentiales Vektorfeld längs c. Dann heißt X *(Riemannsch) parallel längs c*, wenn die Ableitung $X' = d/dt\ X$ senkrecht zur Fläche, d.h. proportional zur Normalen $N \circ c$ der Fläche ist.

Man sieht sofort, daß Skalarprodukte solcher *paralleler* Vektorfelder konstant sind,

$$\langle X, Y\rangle' = \langle X', Y\rangle + \langle X, Y'\rangle = 0 \text{ wegen } X', Y' \perp X, Y.$$

Ferner, aus X parallel längs c folgt

$$(J \cdot X)' = (N \times X)' = N' \times X + N \times X' \sim N \circ c;$$

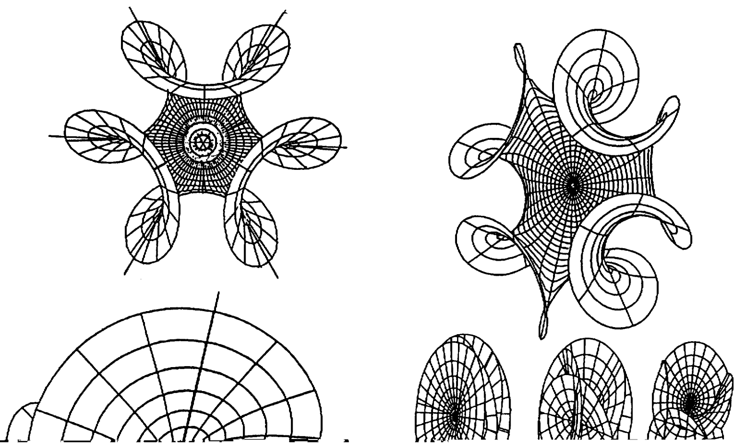
also bildet J längs c parallele Vektorfelder X auf parallele Vektorfelder $J \cdot X$ ab. Im $\mathbf{R}^n$ haben Endomorphismenfelder, die die (parallelen!) Standardbasis-Felder $\{e_1, \ldots, e_n\}$ auf parallele Felder abbilden, bezüglich dieser Basen Matrizen mit *konstanten* Einträgen; daher ist die gewöhnliche Ableitung null, und wir nennen ein solches Feld parallel. Diese Sprache wird in die Differentialgeometrie übernommen: Wir nennen Endomorphismenfelder auf Flächen *Riemannsch parallel*, wenn sie beliebige längs Kurven parallele Vektorfelder wieder auf längs Kurven parallele Vektorfelder abbilden. Wir haben also gezeigt: Auf *jeder* Fläche in $\mathbf{R}^3$ ist J ein paralleles Endomorphismenfeld. Insbesondere hat damit das Feld J der 90°-Drehungen auf den Tangentialebenen einer Fläche alle wesentlichen Eigenschaften, die wir in der Funktionentheorie von der Multiplikation mit i benutzen. Wir nennen daher J die *komplexe Struktur* der Fläche; wir können damit auf der Fläche komplexe Analysis treiben, obwohl uns die winkeltreuen Koordinaten noch fehlen. Vergessen wir nun die durch die Immersion in den $\mathbf{R}^3$ gegebenen Eigenschaften der Fläche mit Ausnahme der komplexen Struktur J, so erhalten wir die der Immersion *zugrunde liegende Riemannsche Fläche.*

Nun sollen diese Überlegungen auf Minimalflächen spezialisiert werden; Hauptziel ist zu zeigen, daß sie direkt auf Grund ihrer Definition durch die Eigenschaft „mittlere Krümmung gleich null" *globale* winkeltreue Koordinaten besitzen. Es erweist sich als bequem, die „Krümmung" einer Fläche über die Ableitung ihres Normalenfeldes zu definieren. Anders als bei der Diskussion der komplexen Struktur muß ich jetzt die Beschreibung von Flächen genauer spezifizieren: Wir werden von der parametrisierenden zweidimensionalen Mannigfaltig M^2 und von der immergierenden Abbildung $F: M^2 \to R^3$ mit der Bildfläche $F(M^2)$ sprechen; das Normalenfeld wird ebenfalls als Abbildung $N: M^2 \to S^2$ beschrieben. Differenziert man N in Richtung eines Tangentialvektors X von M^2, so folgt aus $DN \cdot X \perp N$ (wegen $|N| = 1$) und dem Höchstrang von DF, daß das Bild von DN im Bild von DF liegt. Es gibt also ein Endomorphismenfeld $S : TM^2 \to TM^2$, so daß die sogenannte *Weingartenformel* gilt:

$$DN = DF \cdot S;$$

S wird Weingartenabbildung genannt, und $H := \mathrm{spur} S$ heißt mittlere Krümmung.

Diese über die Ableitung des Normalenfeldes definierte „Krümmung" einer Fläche ist also nicht wie bei Kurven eine reellwertige Funktion, sondern man braucht



sind polynomiale Immersionen der Gaußschen
}. Gezeigt sind Beispiele mit $G(z) = z,\ z^2,\ z^3$.
Anhang besprochene Differentialform gilt

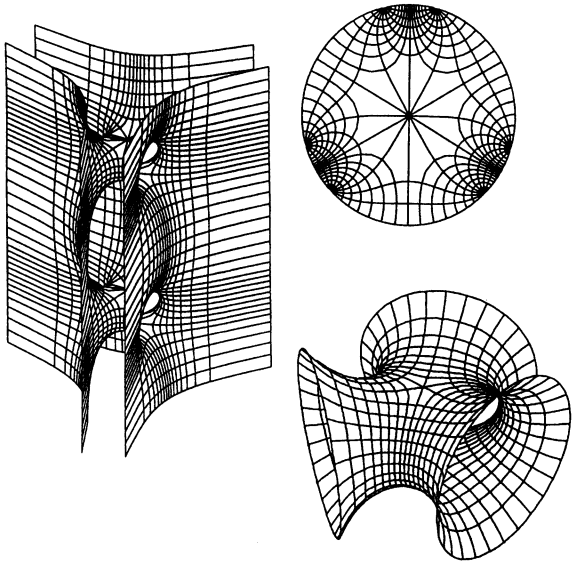


Fig. 3 Weitere Flächen mit $G(z) = z^2$
Das Trinoid erkennt man leicht als dreifach punktierte Sphäre. Der einfach periodische Satteltturm sieht als Fläche in $\mathbf{R}^3$ zunächst kompliziert aus; identifiziert man Punkte, die sich unter Translationssymmetrien entsprechen, so entsteht eine sechsfach punktierte Sphäre. Die abgebildete Halbsphäre hilft, dies an Hand der Parameterlinien zu verfolgen

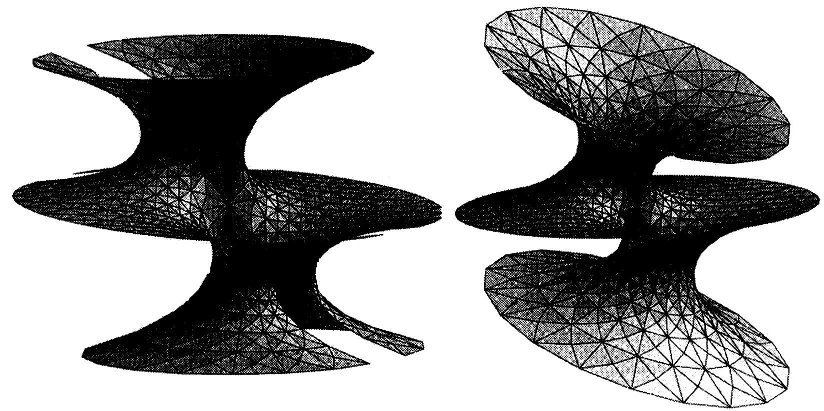
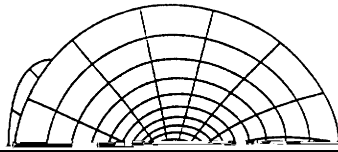
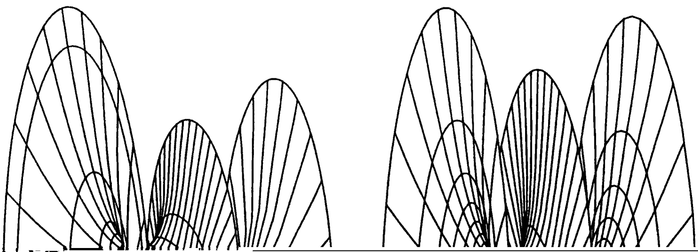


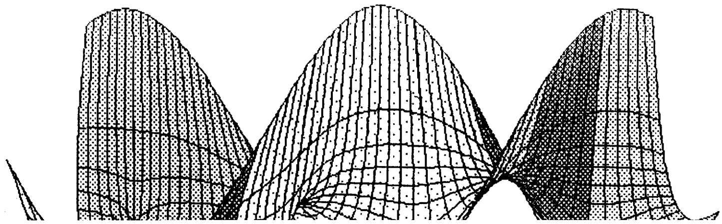
Fig. 4 a,b Dreifach punktierte Sphären
Beides sind Bilder aus einparametrigen Familien von Minimalflächen mit der Gaußabbildung $G(z) = \rho \cdot (z^2 - 1)$; $\rho \in \mathbf{R}_+$ parametrisiert die Familien. In 4a sind die Normalen in den Punktierungen parallel, in diesem Fall ist das Periodenproblem unlösbar – im Bild sichtbar als Schlitz in der Fläche. In 4b sind die Punktierungen so gelegt, daß das Periodenproblem gelöst ist. Dazu müssen die Normalen in den Katenoidpunktierungen gekippt werden, die vollständige Fläche ist daher nur immergiert (da sich die Enden schneiden), nicht eingebettet



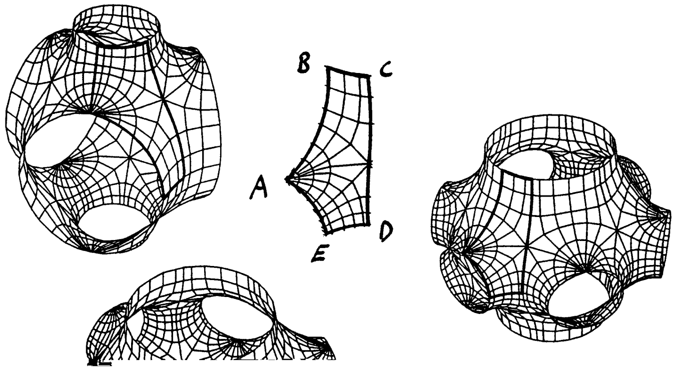
ıe Ebene mit ei-
lratische Torus.
eriodenproblem
cheiden sich nur
lurch Wahl von
ohne Schlitz)



ingebetteten dreifach punktier-
n-Meeks-Serie) zum Vergleich
lecht 2 mit drei Punktierungen.
eriodenproblem nur pixelgenau
xakte Lösung gibt. Die Fläche
cht in Wirklichkeit. Horgan ist



ochene Fläche war nach der Wendelflä-
esitzt, die asymptotisch zu halben Wen-
lurch eine Schraubsymmetrie dividieren
erende vierfach punktierte Sphäre zu er-
ung nicht auf dem Quotienten definiert,
che Differential dG/G. Dies ist die erste
lber programmiert habe (in GFA-Basic
erenden ATARI)


B
C
A
D
E

Beweis. Für die Winkeltreue müssen wir zeigen, daß sich Skalarprodukte von Tangentialvektoren X, Y an (M^2, g) von den Skalarprodukten ihrer Bilder $DN \cdot X, DN \cdot Y$ nur um eine Funktion auf M^2 unterscheiden. Benutzt wird die Weingartenformel, die Symmetrie von S und daß aus spur $S = 0$ im zweidimensionalen $S \cdot S = -\det(S) \cdot id$ folgt:

$$\begin{aligned}\langle DN \cdot X,\ DN \cdot Y\rangle &= \langle DF \cdot S \cdot X,\ DF \cdot S \cdot Y\rangle = \langle DF \cdot S^2 \cdot X,\ DF \cdot Y\rangle \\ &= -\det(S) \cdot \langle DF \cdot X,\ DF \cdot Y\rangle.\end{aligned}$$

($\det(S)$ heißt „Gaußsche Krümmung" der Fläche in $\mathbf{R}^3$.)

Daß für Minimalflächen die geometrisch wichtige Normalenabbildung bezüglich der natürlichen komplexen Struktur durch eine *globale meromorphe Funktion* repräsentiert werden kann, ist unsere erste wesentliche Verbindung zwischen Funktionentheorie und Minimalflächengeometrie. Falls N und G unterschieden werden müssen, wird mit $G: M^2 \to \mathbf{C}$ die meromorphe Gaußabbildung, mit $N: M^2 \to S^2$ die orientierungsumkehrende Normalenabbildung bezeichnet; bei der Betrachtung der Figuren wird der Unterschied ignoriert.

Diese Informationen genügen bereits für die später zur Diskussion der Figuren benutzten Argumente. Um auch einzusehen, daß diese Diskussion tatsächlich hinreichend ist, benötigt man eine weitere enge Verbindung mit der Funktionentheorie. Die Theorie der kompakten Riemannschen Flächen zeigt, daß man alle meromorphen Funktionen $M^2 \to \mathbf{C}$ und Differentialformen auf M^2 *rational* hinschreiben kann, sobald man nur *zwei* (nicht zu spezielle) Funktionen kennt. Daher überrascht es nicht, daß die meromorphe Gaußabbildung allein zur Behandlung von Minimalflächen zu wenig ist. Wir werden nun sehen, daß aus der Definition $H = 0$ folgt, daß die Immersion $F: M^2 \to \mathbf{R}^3$ selber *globale harmonische Funktionen* liefert. Bisher genügte es, Funktionen u dadurch als Riemannsch-harmonisch zu charakterisieren, daß die Differentialform $-du \cdot J$ geschlossen ist; das hatte den Vorteil, daß nur die äußere Ableitung der Einsform $-du \cdot J$ benutzt wurde und nicht die weniger verbreitete zweite kovariante Ableitung einer Funktion. Aber die Krümmung einer Fläche steht nun eben mit der *zweiten* Ableitung (euklidisch oder kovariant, je nach Geschmack) der Immersion F in Verbindung. In der euklidischen Differentialrechnung berechnet man zweite Ableitungen, indem man in die erste Ableitung ein *paralleles* Vektorfeld (meist ein Basisfeld e_i) einsetzt und weiterdifferenziert. Das übertrage ich so in die Flächentheorie:

Es sei c eine Kurve in M^2, längs der F differenziert werden soll; wähle weiter ein *längs c Riemannsch-paralleles* Vektorfeld X, d.h. für die Ableitung von $DF \cdot X$ gilt (s.o.)

$$\begin{aligned}&(DF_c \cdot X)' \sim N \circ c.\ \text{ Daraus folgt mit } \langle DF_c \cdot X,\ (N \circ c)\rangle = 0 \\ \nabla^2 F(c', X) &:= (DF_c \cdot X)' = \langle (DF_c \cdot X)',\ N \circ c\rangle\ N \circ c \\ &= -\langle DF_c \cdot X,\ (N \circ c)'\rangle N = -\langle DF \cdot X,\ DF \cdot S \cdot c'\rangle \\ &= -g(X,\ S \cdot c') \cdot N.\end{aligned}$$

Aus dieser nach Gauß benannten ersten Grundformel der Flächentheorie sieht man leicht, daß spur $S = 0$ äquivalent zu spur $\nabla^2 F = 0$ ist. Dabei werden Spuren *(oder Laplace-Beltrami-) harmonisch.* (Aus der oben benutzten Geschlossenheit von $-du \cdot J$ folgt spur $\nabla^2 u = 0$ und umgekehrt.)

Man hat also außer der meromorphen Gaußabbildung noch die Einschränkungen linearer Funktionen $\ell : \mathbf{R}^3 \to \mathbf{R}$ als globale harmonische Funktionen $u := \ell \circ F \ : M^2 \to \mathbf{R}$. Wie man daraus isotherme Koordinaten $u + iv$ gewinnt, wurde schon erläutert; zusätzlich hervorgehoben sei, daß man mit globalen harmonischen Funktionen auch *globale* holomorphe Differentiale $\omega := du - i \cdot du \circ J$ hat („holomorph“: ω ist geschlossen, also lokal $\omega = d(u + i \cdot v)$, und ω ist mit der komplexen Struktur verträglich, $\omega(J \cdot X) = i \cdot \omega(X)$). Damit ist man schon fast bei der sogenannten Weierstraßdarstellung, die die Minimalfläche durch Integration von drei solchen Differentialformen beschreibt, siehe Anhang.

Schließlich lassen sich auch die *Schwarzschen Spiegelungseigenschaften* der Minimalflächen bei Verwendung der beschriebenen globalen harmonischen Funktionen unmittelbar auf das Spiegelungsprinzip der Funktionentheorie zurückführen; wir formulieren sie hier nur:

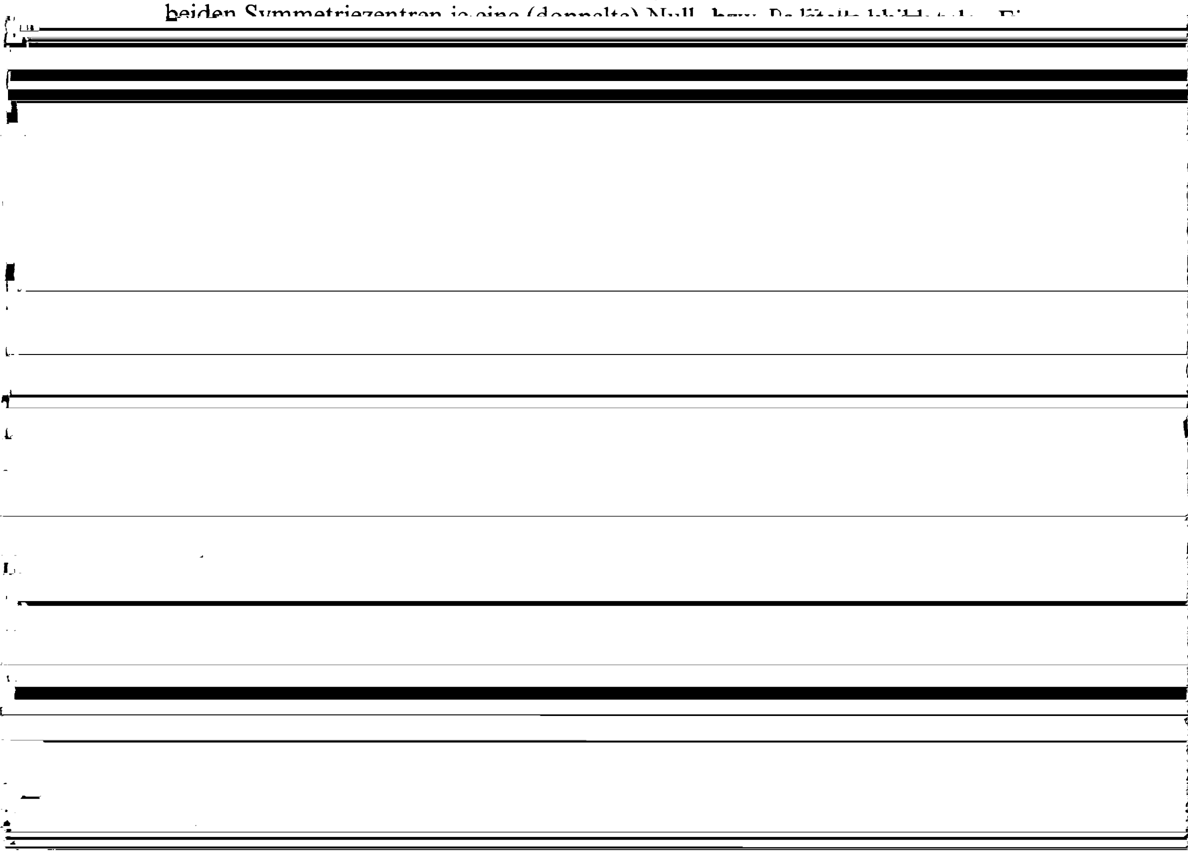
(i) *Schneidet eine Minimalfläche eine Ebene senkrecht, so ist Spiegelung an dieser Ebene eine Symmetrie der vollständigen Minimalfläche.*
(ii) *Liegt eine Gerade in der Minimalfläche, so ist die 180°-Drehung um diese Achse eine Symmetrie der Minimalfläche.*

Aber kommen wir zur Gaußabbildung zurück. Am Beispiel des Katenoids kann man sich sehr leicht die *konforme Kompaktifizierung* klar machen: Jeder Meridian des Katenoids wird durch N auf einen Meridian von S^2 abgebildet, nur die Pole liegen nicht im Bild; schöpft man das Katenoid mit kompakten Mengen aus, so bilden die Normalen die Außengebiete in immer kleinere Umgebungen der Pole ab, d.h. die konforme Kompaktifizierung des Katenoids ist S^2. Man „sieht“ also diese Kompaktifizierung, wenn man das Verhalten der Normalen in einem Bild betrachtet.

Wenn wir uns beim Betrachten eines Minimalflächenbildes zunächst auf die zugrunde liegende *kompakte* Riemannsche Fläche konzentrieren, so können wir die Gaußabbildung als meromorphe Funktion leicht identifizieren: Bis auf einen konstanten Faktor ist sie nämlich durch ihre Null- und Polstellen bestimmt, also (bei der üblichen Position der Riemannschen Zahlenkugel) durch die Punkte der Minimalfläche mit *horizontaler* Tangentialebene. Eine Drehung der Minimalfläche resultiert in einer Komposition der Normalenabbildung $N\colon M^2 \to S^2$ mit einer Möbiustransformation; wir werden so drehen („Möbius-normalisieren“), daß die Darstellung von G möglichst einfach wird.

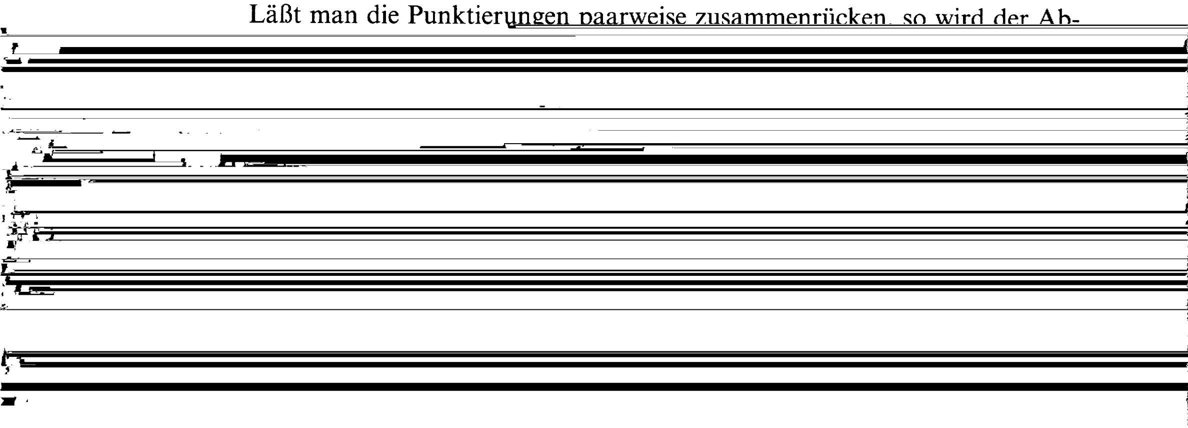
[redacted]

Andere Flächen mit $G(Z) = Z^2$ sehen wir im Bild 3. Das „Trinoid“ ist offensichtlich eine dreifach punktierte Sphäre, N hat den Abbildungsgrad 2 und hat horizontale Werte längs der horizontalen Symmetrielinie. Daher besitzt G in den beiden Symmetriezentren je eine (doppelte) Null- bzw. [illegible]



heitskreis auf sich ab. Die andere Fläche ist eine moderne Deformation einer Scherkschen Fläche. Wir müssen die vertikale Translationssymmetrie herausdividieren, um als parametrisierende Riemannsche Fläche eine sechsfach punktierte Sphäre zu sehen. Erleichtert wird dies durch die abgebildete parametrisierte Halbsphäre, auf der die Punktierungen als Polarzentren zu sehen sind; die Parameterlinien erlauben, die Abbildung der Halbsphäre auf eine halbe Etage des „Sattelturmes“ nachzuvollziehen.

Läßt man die Punktierungen paarweise zusammenrücken, so wird der Ab- [illegible]



die Punktierungen nach ± 1 und ∞, eine Möbius-Normierung. Da die Fläche eingebettet sein soll, müssen die Limesnormalen in den Punktierungen parallel sein; das liefert Nullstellen in ± 1 und eine Polstelle in ∞. Wir diskutieren ein Beispiel, dessen mittleres Ende eben sein soll; die lokale Theorie dieser Enden besagt, daß zu Katenoidenden *einfache* (Null-)Stellen gehören und daß N in ebenen Enden *Verzweigungsstellen* hat. Wegen der endlichen Totalkrümmung gilt eine Verallgemeinerung des Satzes von Gauß-Bonnet:

Satz (Gackstatter [4], Jorge-Meeks [6])

$$\begin{aligned} 2 \cdot \text{Abbildungsgrad}(N) &= \chi(M^2) - \text{ Anzahl (Punktierungen)} \\ &= \chi(\overline{M}^2) - 2 \cdot \text{Anzahl (Punktierungen)}. \end{aligned}$$

Damit hat die meromorphe Gaußabbildung Abbildungsgrad 2, folglich

$$G(Z) = \rho \cdot (Z^2 - 1), \qquad \rho \in \mathbf{R}_+.$$

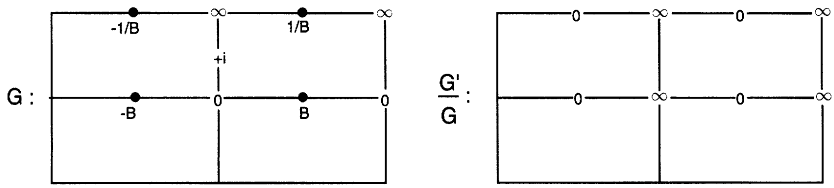
Hierdurch und mit dem Anhang ist die Weierstraßdarstellung einer mit ρ parametrisierten Familie von Minimalflächen festgelegt. Kleine geschlossene Kurven um ± 1 sind nicht nullhomotop auf der dreifach punktierten Sphäre, und sie werden, in Übereinstimmung mit dem Satz, bei *keiner* Wahl von ρ auf geschlossene Kurven auf der Minimalfläche abgebildet; daher bleiben die Einschnitte in Bild 4a, deren Ränder analytisch aneinander passen, aber durch einen Spalt getrennt sind. Dieser Mißerfolg wird dadurch erzeugt, daß die Fläche eingebettet sein sollte, also die Limes-Normalen *parallel* sein müssen. Verschiebt man aber die Punktierungen von ± 1 nach $\pm r$, so kann man ρ so wählen, daß eine geschlossene Fläche entsteht. Die gekippten Enden ohne Einschnitte sind in Bild 4b deutlich zu sehen.

Wir halten fest: Weierstraßdaten für eingebettete dreifach punktierte Sphären sind leicht zu bekommen, aber danach entsteht ein *unlösbares Periodenproblem*, weil geschlossene Kurven um die Punktierungen herum durch die Minimalflächenimmersion *nicht* auf geschlossene Kurven in $\mathbf{R}^3$ abgebildet werden können [2]. Das Wort *Periode* bei Minimalflächen vereint die Bedeutung dieses Wortes in der Funktionentheorie und in der Kristallographie: In der Funktionentheorie sind Perioden Integrale von Differentialformen längs geschlossener, nicht nullhomotoper Wege; spezialisiert man auf die Koordinatendifferentiale in der Weierstraßdarstellung, so erzeugen die Realteile dieser Perioden gerade die Translationsymmetrien der vollständigen Minimalfläche!

Bild 5 zeigt einen Versuch, durch Erhöhen des Geschlechts von 0 auf 1 aus dem Katenoid einen zweifach punktierten, eingebetteten Torus zu machen. Auch das geht nicht, weil es der folgende (oben angekündigte) Satz verbietet.

Satz (R. Schoen [9]). *Eine Minimalfläche (vollständig, eingebettet, endliche Totalkrümmung) mit genau zwei Punktierungen ist ein Katenoid.*

Wieder liegt es nicht an fehlenden Weierstraßdaten. Angenommen, wir wollebene schneidet die Minimalfläche in *zwei* disjunkten Kurven; daher ist der Torus ein rechteckiger Torus, und die vertikalen Normalen der Fläche liegen in Schnittpunkten von Symmetrielinien. Damit können wir die Null- und Polstellen der Gaußabbildung in den Fundamentalbereich eines rechteckigen Torus eintragen.



Zu diesem Divisor gehört nach dem Kriterium von Abel eine elliptische Funktion, die ich jetzt genauer beschreiben will. Zunächst kann man diese Funktion als Quotientenabbildung sehen: Die 180°-Drehung des Torus (= **C** modulo Gitter Γ) um einen (fett markierten) Mittelpunkt zwischen den Nullstellen hat drei weitere (fett markierte) Fixpunkte. Die Euler-Charakteristik der Quotientenfläche ist daher 2 (= 2 Rechtecke – 4 Kanten + 4 Fixpunkte); metrisch ist die Quotientenfläche ein verdoppeltes Teilrechteck, das an den Rändern verklebt ist. Diese Rechtecksphäre kann man mit dem Riemannschen Abbildungssatz auf die Riemannsche Zahlenkugel abbilden. Dabei hat man die Freiheit, die Werte von drei Punkten vorgeben zu können, – in der Skizze sind dazu drei Punkte mit ihren Werten $0, i, \infty$ markiert. Jede 180°-Drehung des Torus kommutiert mit der 180°-Drehung um die fett markierten Punkte und liefert daher eine Involution der Quotientensphäre, d.h. eine Möbiustransformation der Riemannschen Zahlenkugel. Für die 180°-Drehung um die mit den Funktionswerten „0" bzw. „i" markierten Punkte ist die entsprechende Möbiustransformation $z \to -z$ bzw. $z \to -1/z$; daher kann man aus einem Verzweigungswert „B" die übrigen drei wie in der Divisorskizze ausrechnen. Das erlaubt, die Funktion $(G'/G)^2$ aus G und B auszurechnen, also eine Differentialgleichung anzugeben:

$$(G'/G)^2 = const \cdot (G^2 + 1/G^2 - B^2 - 1/B^2).$$

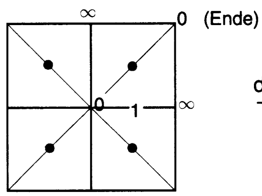
Diese Differentialgleichung besitzt doppeltperiodische Lösungen und ist daher eine zweite Beschreibung sowohl des Torus wie der gewünschten Funktion auf dem Torus. (Der Torus ist rechteckig für reelles B.) Damit hat man alles zur Verfügung, was man, wie im Anhang beschrieben, für die Gewinnung der Weierstraßdarstellung braucht. Aber man steht wieder vor einem unlösbaren Periodenproblem: Nach Ausführen der Details zeigt ein Vergleich von zwei elliptischen Integralen, daß eine geschlossene Symmetrielinie aus der anderen (erzeugenden) Homotopieklasse des Torus *nicht* auf eine in $\mathbf{R}^3$ geschlossene Kurve abgebildet wird.

So viel zu den Sätzen von Lopez-Ros und R. Schoen, mit deren Hilfe ich erklären wollte, welche Schwierigkeiten Periodenprobleme verursachen.

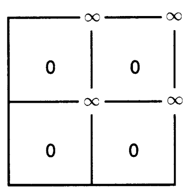
Erfolgreiche Beispiele

Enneperflächen sind konform immergierte Ebenen; Bild 6 zeigt eine solche Fläche *mit einem Henkel*, dies ist der immergierte einfach punktierte Torus von Chen-Gackstatter. Die vertikalen Symmetrieebenen (jede Fixpunktmenge hat wieder zwei Komponenten) verraten ihn als rechteckigen Torus. Zusätzlich gibt es zwei Geraden auf der Fläche, die in den 45°-Richtungen, durch den mittleren Sattel laufen. Mit dieser zusätzlichen Schwarzschen (s.o.) Symmetrie ist die Riemannsche Fläche als der *quadratische Torus* erkannt. Den (abelschen) Divisor der Gaußabbildung G können wir aus folgendem Bild ablesen:

γ :



$\dfrac{d\gamma}{\gamma}$:



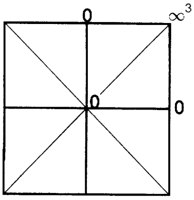
Differentialgleichung: $(\gamma\,'/\gamma)^2 \;=\; const(\gamma^2 - \gamma^{-2}), \quad G(z) \;=\; \rho \cdot \gamma(z).$

Die eingezeichneten Fixpunkte einer 180°-Drehung zeigen wieder, wie man diese elliptische Funktion als Quotientenabbildung bekommen kann. Die Chen-Gackstatter-Fläche ist die erste minimal *immergierte* Riemannsche Fläche vom Geschlecht > 0, die entdeckt wurde. In der Nähe der Punktierung ist sie asymptotisch zu einer Enneperfläche (kurz: sie hat ein Enneper-Ende). Daher kann sie nicht eingebettet sein. Das Periodenproblem wurde durch Wahl von ρ gelöst.

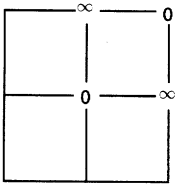
Bild 7 endlich zeigt einen dreifach punktierten, minimal *eingebetteten* Torus, die berühmte Costa-Fläche. Wir erkennen sie als Torus, wenn wir von einer Ebene mit einem Henkel (hier stereographische Projektion des Clifford-Torus $S^1 \times S^1 \in \sqrt{2} \cdot S^3$) ausgehen, den höchsten und tiefsten Punkt herausnehmen und diese beiden Punktierungen in Katenoidenden verwandeln.

Die vertikalen Symmetrieebenen erweisen den Torus wieder als rechteckig, die zusätzlichen Geraden durch den mittleren Sattel spezialisieren weiter zum quadratischen Torus. Wegen der drei Enden und des verallgemeinerten Satzes von Gauß-Bonnet (s.o.) ist der Abbildungsgrad gleich 3. Die Normalen im mittleren Sattel und in den beiden Katenoidenden zeigen in dieselbe Richtung: drei einfache Nullstellen und keine weiteren irgendwo anders. In dem ebenen Ende hat die Normalenabbildung einen vertikalen Verzweigungswert; dann bleibt höchstens ein weiterer Punkt mit vertikaler Normale übrig. Da aber kein weiterer Punkt von den Symmetrien fest gelassen wird, geht das nicht. Die Limesnormale des ebenen Endes ist demnach ein dreifacher Wert, eine dreifache Polstelle der Gaußabbildung. Wir erhalten also aus einfachen qualitativen Eigenschaften der Costa-Fläche deren Gaußabbildung, nämlich die Ableitung der Weierstraßschen $\wp$-Funktion:

G:



dh:
(Anhang)



$$G(Z) = \rho \cdot \wp'(Z)$$

Aus Symmetriegründen sind die meisten Perioden der zugehörigen Weierstraßdarstellung null. Der Parameter ρ kann angepaßt werden, um auch die letzte Periode (einer geschlossenen Kurve um ein „Bein" eines Katenoidendes) zu null zu machen, analog wie in Bild 4b.

Diese Costa-Fläche hat mit den Flächen in Bild 4 und 5 auf den ersten Blick wenig gemein. Hoffman-Meeks haben gefunden, daß man das mittlere Ende nicht eben anzunehmen braucht, sondern in ein Katenoidende deformieren kann. Die Tori werden dann beliebige rechteckige Tori, und die Bilder lassen sich so betrachten, daß ein zusätzliches Katenoidende den mißlungenen Beispielen in den Bildern 4 und 5 hilft, die Periode zu schließen. Mit *zwei* symmetrisch plazierten Enden, nach oben und unten, wäre das übrigens nicht gegangen; bei geschlossener Periode sind diese Enden klein wie Pilze; das soll heißen, diese Katenoidenden haben zu kleine Wachstumsraten, sie schneiden daher den übrigen Teil der Fläche.

Dafür gelingt ein anderer Plan: Man kann die vertikalen Symmetrien zu einer beliebigen Diedersymmetrie vergrößern. So erhält man eingebettete Minimalflächen mit drei Enden zu jedem Geschlecht > 0, [2].

Als Warnung gemeint ist die folgende Fläche (Fig.8) vom Geschlecht 2 mit drei Enden, die Hoffman und ich nach dem Autor von „Death of Proof" [Scientific American 1993 oder Spektrum der Wissenschaften 12/93] die Horgan-Fläche getauft haben. Die Weierstraßdaten sind wie in den vorherstehenden Beispielen aus einer Skizze abgelesen. Alle Perioden bis auf zwei verschwinden allein aus Symmetriegründen. Jede von diesen beiden kann einzeln mit einem Parameter ρ wie bei der Costa-Fläche zu null gemacht werden. Anders als bei den Bildern 4 und 5 kann man hier mit einem zweiten, konformen, Parameter alle Perioden zugleich kleiner als ein Bildschirmpixel bekommen, so daß die Fläche „praktisch" existiert. Versucht man, beide Perioden wirklich zu null zu machen, so driftet die Riemannsche Fläche (merkwürdig langsam) auf den Rand des Teichmüllerraumes zu.

Diese letzten, weniger genau erklärten Bilder ergänze ich noch durch eines, bei dem die Gauß-Abbildung nicht meromorph ist. Wir sehen in Bild 9 eine Wendelfläche mit *einem* Henkel (d.h. ohne Translationssymmetrie), also einen Torus mit einem Loch. Die Fläche hat eine 180°-Rotationssymmetrie um eine vertikale Gerade. Diese antikonforme Involution hat eine *zusammenhängende* Fixpunktmenge, nämlich die Gerade. Daher ist der Torus *rhombisch* (im Gitterbild des Torus ist die Involution eine Spiegelung an einer Diagonale eines rhombischen Fundamentalbereichs). Vielleicht ist dies der erste rhombische Torus in $\mathbf{R}^3$, den der Leser bewußt zur Kenntnis nimmt. Da jede Etage dieser Wendelfläche mit Henkel einen etwa gleich großen Beitrag zur

Totalkrümmung liefert, ist diese unendlich. Die Fläche ist so konstruiert, daß das asymptotische Verhalten dasselbe wie bei der klassischen Wendelfläche ist; sie kann daher durch *einen Punkt* konform kompaktifiziert werden, obwohl wir das ja nicht aus der Eigenschaft, endliche Totalkrümmung zu haben, schließen können. Dies sieht man nicht mehr am Verhalten der Normalen, im Gegenteil, fast jede Richtung kommt außerhalb beliebig großer kompakter Mengen vor. Wir sehen also eine wesentliche Singularität der Gaußabbildung.

Höheres Geschlecht

Die im Anschluß an die Costa-Fläche erwähnten dreiendigen Beispiele sind die einzigen funktionentheoretisch konstruierten eingebetteten Minimalflächen endlicher Totalkrümmung, die vollständig diskutiert sind; vgl. die Existenz- und Einbettungsbeweise in [2]. Man kennt noch – aufwendige – Existenzbeweise für einige weitere Serien, aber bezüglich der Einbettung ist man einstweilen auf numerische Rechnungen angewiesen. Und schließlich gibt es einige numerisch gelöste Periodenprobleme, für die noch kein Existenzbeweis gelungen ist. Dafür sind durch Kapouleas und Traizet mit funktionalanalytischen Methoden Fortschritte erzielt worden [Vorträge, Preprints und [10]]. Es handelt sich um die Konstruktion von Flächen mit riesigem Geschlecht, bei denen fast alle Henkel außerordentlich klein sind. Um die Voraussetzungen zu diesen Resultaten plausibel zu machen, müßte erheblich mehr über das Limesverhalten in bekannten Serien von (auch periodischen) Beispielen gesagt werden, als hier möglich ist.

Ein letzter mir wichtiger Punkt soll daher an anderen als den eingebetteten Minimalflächen endlicher Totalkrümmung erklärt werden. Schon unter Scherks Beispielen finden sich einfach periodische und zweifach periodische eingebettete Flächen, die wegen der Periodizität unendliche Totalkrümmung haben. Riemanns Beispiele sind einfach periodisch, und Schwarz hat eine Reihe von spektakulären dreifach periodischen eingebetteten Beispielen konstruiert. All diese haben die Eigenschaft, daß Fundamentalstücke für ihre Symmetriegruppe tatsächlich wieder *endliche Totalkrümmung* haben. Die Resultate von Huber und Osserman sind von Hoffman, Meeks und Rosenberg auf diese Flächen ausgedehnt worden, sie haben also wieder *meromorphe* Weierstraßdaten auf *kompakten* Riemannschen Flächen. Die herausdividierten Translationssymmetrien sind Perioden dieser Weierstraßdaten. (Im Falle von Flächen mit Schraubsymmetrien ist G nicht auf dem Quotienten definiert, aber man hat die Differentialformen dG/G und dh (s. Anhang und Bild 10) als meromorphe Daten.) Es gibt derart viele periodische eingebettete Minimalfächen, die außerdem so viele sehr verschiedenartige Formen haben, daß es hier unmöglich ist, einen Überblick zu geben. Zum Abschluß soll jedoch noch versucht werden, eine Antwort auf folgende mir häufiger gestellte Frage zu geben: „Warum schreibt man nicht einfach irgendwelche Weierstraßdaten auf einer Fläche von höherem Geschlecht hin und sieht sich an, was dabei herauskommt?“

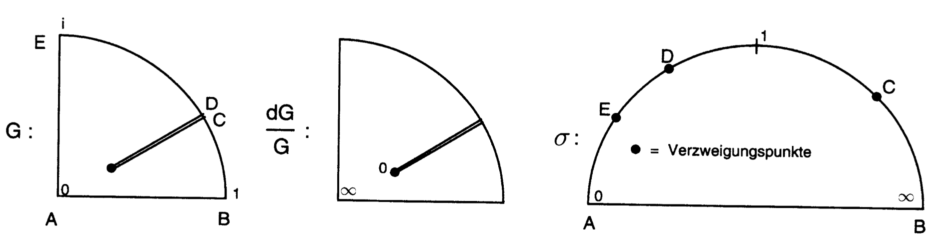
Was kann man erwarten? Nehmen wir an, daß die Weierstraßdaten schon so gewählt sind, daß die Metrik nicht entartet ist, die Weierstraßschen Formeln also eine *Immersion* einer Überlagerung von $\bar{M}^2 - \{p_1 \ldots p_n\}$ liefern. Nehmen wir ferner an, daß die Immersion in einer Umgebung jeder Punktierung eine *Einbettung* ist. Diese beiden Voraussetzungen kann man den Weierstraßdaten leicht ansehen, und man kann viele Beispiele finden, die beide Voraussetzungen erfüllen. Trotz dieser Vorsichtsmaßnahmen sorgen von Null verschiedene Perioden der drei Koordinatendifferentiale dF^1, dF^2, dF^3 fast immer dafür, daß die Fläche so viele Selbstschnitte hat, daß Computerbilder uninterpretierbar werden.

Wie kann man erfolgversprechender vorgehen? Bild 11 zeigt eine der dreifach periodischen Flächen, mit denen A. Schoen in den 70er Jahren bei den Kristallographen berühmt wurde. (Die Mathematiker haben seine Argumente nicht akzeptiert und zunächst nicht gesehen, was zu ihrer Vervollständigung getan werden mußte.) Die gezeigte Fläche soll nicht mit all ihren differentialgeometrischen Eigenschaften diskutiert werden, aber man wird sehen, daß schon ihre qualitativen Eigenschaften eine Antwort auf die eben gestellte Frage nahe legen. Zunächst liefert Division durch die Translationssymmetrien eine kompakte Riemannsche Fläche vom Geschlecht 4, also einen Punkt in einem 18-dimensionalen Modulraum. Soll die Minimalfläche ungefähr die gewünschte Gestalt, insbesondere die Symmetrien, haben, so muß sie aus 24 von Symmetrielinien berandeten 90°-Fünfecken zusammengesetzt sein mit Identifizierungen, die man aus dem Bild ablesen kann. Da wir zunächst Parameter zählen wollen, können wir uns die Riemannsche Fläche mit ihrer hyperbolischen Metrik ($K = -1$) vorstellen; die Symmetrien der Minimalfläche sind dann hyperbolische Isometrien, und die Fünfecke sind hyperbolische geodätische Fünfecke, berandet von Fixpunktlinien hyperbolischer Spiegelungen. Da ein solches hyperbolisches Fünfeck durch *zwei* Kantenlängen bestimmt ist, gibt es nur eine zweiparametrige Familie Riemannscher Flächen, die als Kandidaten in Frage kommen. Als nächstes

Einheitskreis, wobei die vertikale Symmetrielinie ohne Wendepunkt auf den Durchmesser abgebildet wird. Deren Endpunkte sind einfache Punkte der Quotientenabbildung, die anderen drei Ecken eines jeden Fünfecks sind Verzweigungsstellen. (Man kann stattdessen auch gleich mit dem Riemannschen Abbildungssatz dieses Abbildungsproblem lösen und prüfen, daß die Fortsetzung durch Spiegelung mit den Identifizierungen der Fünfecke verträglich ist.) Die Gaußabbildung G und diese Quotientenabbildung $\sigma : M \to M/\Gamma \to \hat{\mathbb{C}} = S^2$ haben nun keine gemeinsamen Verzweigungsstellen. Daher liefern die beiden Funktionen einen Atlas für die Fläche, und eine algebraische Gleichung beschreibt den Wechsel zwischen diesen beiden globalen Koordinaten, *definiert also die Fläche, und zwar zusammen mit Funktionen, wie wir sie wollen.*

Die Quotientenabbildung σ kann noch mit beliebigen Möbiustransformationen der Bildsphäre zusammengesetzt werden. Daher ist σ als Funktion erst dann eindeutig festgelegt, wenn wir drei Werte vorschreiben. Die Gaußabbildung G hat ihre Null- und Polstellen in den sechs Polarzentren von Bild 11. Diese Punkte haben unter σ denselben Wert, wir wählen ihn als 0. Die anderen sechs Endpunkte der vertikalen Fünfeckkanten durch die Polarzentren werden ebenfalls durch σ identifiziert, wir wählen als Wert ∞. Die zwölf Wendepunkte der vertikalen Symmetrielinien (also Nullstellen von dG) werden durch σ auf zwei symmetrisch zu 0 liegende Werte abgebildet, wir normieren diese auf ± 1. Damit haben wir genügend Informationen, um eine *algebraische Gleichung* zwischen G und σ anzugeben, die uns eine einparametrige Schar geeigneter Riemannscher Flächen beschreibt. Für die Einzelheiten ist wichtig zu beachten, daß die Normalenabbildung N *orientierungsumkehrend* ist, die Quotientenabbildung aber orientierungstreu. Man kann noch einmal zu den Flächen von Chen-Gackstatter und Costa zurücksehen: In beiden Fällen liefert die 180°-Drehung um eine vertikale Normale eine Quotientenabbildung mit Verzweigungsstellen in den Schnitten vertikaler Symmetrielinien. Wählt man die Möbius-Normierung der Quotientenfunktion so, daß zwei nicht benachbarte Schnittpunkte von Symmetrielinien nach 0 und ∞ abgebildet werden, so ist die Funktion ein Vielfaches der Weierstraßschen $\wp$-Funktion.

Um unser dreifach periodisches Beispiel zu beenden, müssen wir den Koordinatenwechsel, also die algebraische Gleichung zwischen G und σ, angeben. Wir tragen die Null-, Pol- und Verzweigungsstellen dieser Funktionen in die entsprechenden sphärischen Bildgebiete eines Fünfecks ABCDE ein und betrachten auch die Divisoren ihrer logarithmischen Differentiale, vgl. Bild 11.



Zunächst kennen wir die genaue Position der drei Verzweigungswerte von σ auf der reellen Halbgeraden $0 \to 1 \to \infty$ nicht, wohl aber die Werte von G an diesen Ecken des Fünfecks. Im Anhang wird erklärt, warum zu einer Minimalfläche ein holomorphes Differential dh gehört, dessen einfache Nullstellen an den vertikalen Stellen von N liegen. Auch ohne die Begründung zu kennen kann man leicht den Divisor (die Nullstellen) eines solchen Differentials in unsere Skizze eintragen und dann ablesen, daß ein solches Differential sich mit Hilfe von G und σ hinschreiben läßt:

$$dh \sim \frac{\sigma^2}{\sigma^2-1}\cdot\frac{dG}{G} \sim \frac{1}{G^3+G^{-3}}\cdot\frac{d\sigma}{\sigma^2}.$$

Da in den Punkten mit $G = 1$ Pole $\sigma = \infty$ liegen, können wir die Gleichung

$$3(G^3+G^{-3})\cdot\frac{dG}{G} = \lambda\cdot(\frac{1}{\sigma^2}-\frac{1}{\sigma^4})d\sigma$$

ohne Integrationskonstante integrieren zu

$$G^3 - G^{-3} = \lambda\cdot(-\sigma^{-1}+\frac{1}{3}\sigma^{-3}).$$

Hierin ist λ der konforme Parameter unserer gesuchten einparametrigen Familie Riemannscher Flächen. Auf Computerbildern der so deduzierten Weierstraßdaten sieht man nun in der Tat, was man erwartet hatte. Unabhängig von solchen Berechnungen kann man – mit differentialgeometrischen statt funktionentheoretischen Methoden – beweisen, daß diese Fläche eingebettet ist und die gewünschten Symmetrien hat.

Ich wiederhole, daß dieser Vortrag nicht als Erläuterung derartiger Einzelheiten gemeint ist. Es ging mir darum zu zeigen, daß einer Minimalfläche höheren Geschlechts eine äußerst spezielle Riemannsche Fläche zu Grunde liegt, die Funktionen trägt mit qualitativen Eigenschaften, die nur auf wenigen Riemannschen Flächen möglich sind. Die Riemannsche Fläche muß unter Ausnutzung dieser Eigenschaften gemeinsam mit den benötigten Funktionen konstruiert werden.

Anhang: Die Weierstraß-Darstellung

Ich erkläre in diesem Anhang, was zu der Gaußabbildung und der Lage der Punktierungen noch hinzukommt, bis man berechenbare Darstellungen der Minimalflächen hat. Dazu muß etwas mehr gerechnet werden, insbesondere auch mit der kovarianten Ableitung, als bisher (im Text und im Vortrag) nötig war. Die Ankündigung, daß nur Argumente vorgetragen würden, die zur Allgemeinbildung gerechnet werden dürften, gilt hier nicht mehr. Außerdem wird noch an einigen Details gezeigt, daß der enge Zusammenhang zwischen Funktionentheorie und Minimalflächengeometrie noch weiter reicht, als im Text angesprochen. Im Abschnitt „Zusammenhang mit der Funktionentheorie" wurde schon bewiesen, daß $H = 0$ äquivalent dazu ist, daß die Komponenten F^i einer minimalen Immersion $F = (F^i)\colon\ M^2 \to \mathbf{R}^3$ Riemannsch-harmonisch sind, also $\Delta_g F^i = 0$ erfüllen. (Dabei heißt $\Delta_g = \mathrm{div}_g \circ \mathrm{grad}_g = \mathrm{spur}\nabla^2$ auch Laplace-Beltrami-Operator zur Metrik g.) Dies folgte unmittelbar aus der Gaußschen Ableitungsgleichung. Die dazu konjugiert harmonische Immersion $F^*\colon \widetilde{M}^2 \to \mathbf{R}^3$, definiert über $DF^* = -DF\cdot J$ (J wie oben das Feld der 90°-Drehungen auf jedem Tangentialraum von M^2, kurz die Riemannsche 90°-Drehung), ist offenbar isometrisch zu F, ebenfalls g-harmonisch und daher minimal. Wegen $\nabla J = 0$ folgt wieder aus der Gaußschen Ableitungsgleichung

$$\nabla^2 F^*(X,Y) = -\nabla^2 F(X,JY) = g(SX,JY)\cdot N = -g(S^*X,Y)\cdot N,$$

also hat die konjugierte Immersion dieselbe Normalenabbildung N, und ihre Weingartenabbildung ist $S^* := J\cdot S = -S\cdot J$, in Übereinstimmung mit der Weingartenformel: $DN = DF\cdot S = -DF\cdot J\cdot J\cdot S = DF^*\cdot S^*$. Zusammen liefern F und F^* eine holomorphe Kurve

$$\Psi := F + iF^* :\ M^2 \to \mathbf{C}^3,$$

die außerdem noch isotrop ist:

$$\begin{aligned}\langle D\Psi\cdot X, D\Psi\cdot X\rangle_{\mathbf{C}^3} &= \langle DF\cdot X, DF\cdot X\rangle_{\mathbf{R}^3} - \langle DF^*\cdot X, DF^*\cdot X\rangle_{\mathbf{R}^3}\\ &\quad + 2i\langle DF\cdot X, DF^*\cdot X\rangle_{\mathbf{R}^3} = 0.\end{aligned}$$

Umgekehrt gilt das folgende

Lemma. *Der Realteil F und der Imaginärteil F^* einer holomorphen, isotropen Kurve Ψ sind minimal.*

Beweis: Wegen der Holomorphie gilt $D\Psi(J\cdot X) = i\cdot D\Psi(X)$, also $DF^* = -DF\cdot J$. Wegen der Isotropie induzieren F und F^* dieselbe Riemannsche Metrik g, und J ist mit diesem Skalarprodukt verträglich. Aus den Cauchy-Riemannschen Gleichungen, hier $DF^* = -DF\cdot J$ folgt $\Delta_g F = 0 = \Delta_g F^*$, also Harmonizität bezüglich der eigenen Metrik und damit Minimalität.

Die Weierstraßdarstellung kombiniert nun zwei wohlbekannte Tatsachen:

(i) $\Psi = \int_* D\Psi, \quad D\Psi = (d\Psi^1, d\Psi^2, d\Psi^3)$.

(ii) *Quotienten holomorpher Differentiale sind meromorphe Funktionen. (Dabei sollten die Quotienten der Koodinatendifferentiale sicher etwas mit der Gaußabbildung zu tun haben.)*

Wegen der Isotropie, also $(d\Psi^1)^2 + (d\Psi^2)^2 + (d\Psi^3)^2 = 0$, betrachtete Weierstraß die Funktion

$$G := \frac{-d\Psi^1 - id\Psi^2}{d\Psi^3} = \frac{d\Psi^3}{+d\Psi^1 - id\Psi^2}$$

und schrieb:

$$D\Psi = \Big(\frac{1}{2}\big(\frac{1}{G} - G\big),\ \frac{i}{2}\big(\frac{1}{G} + G\big),\ 1\Big)\cdot d\Psi^3.$$

Er bemerkte auch die Umkehrung: Zu jeder meromorphen Funktion G und jeder meromorphen Differentialform ω bekommt man mit dieser Weierstraßschen Formel – eventuell nach Weglassen isolierter Polstellen – die holomorphe, isotrope Kurve

$$D\Psi := \Big(\frac{1}{2}\big(\frac{1}{G} - G\big),\ \frac{i}{2}\big(\frac{1}{G} + G\big),\ 1\Big)\cdot\omega, \quad \Psi := \int_* D\Psi.$$

Nach dem Lemma wird aus dieser Kurve durch

$$F_\varphi := \mathrm{Re}(e^{-i\varphi} \cdot \Psi) = \cos\varphi \cdot F + \sin\varphi \cdot F^*$$

eine isometrische Schar von Minimalflächen, die sogenannte assoziierte Familie, gewonnen. Es ist nicht schwer, die Funktion G zu interpretieren. Der Vektor

$$N := \Big(2\mathrm{Re}\; G,\; 2\mathrm{Im}\; G,\; |G|^2 - 1\Big)/(|G|^2 + 1)$$

steht senkrecht auf den beiden orthogonalen Tangentialvektoren $\mathrm{Re}(D\Psi/\omega)$, $\mathrm{Im}(D\Psi/\omega)$ des Bildes $F_\varphi(M^2)$. Daher ist die meromorphe Funktion G bis auf eine orientierungsumkehrende stereographische Projektion gerade die Normalenabbildung der Immersion F_φ. Außerdem ist ω durch das Differential der *Höhenfunktion* $F^3 = \langle e_3, F\rangle$, e_3 der vertikale Einheitsvektor, bestimmt:

$$dF^3 = \mathrm{Re}\;\omega,\; \omega = dF^3 + i(dF^3)^* = dF^3 - i dF^3 \circ J, \text{lokal } \omega = dh.$$

Ich finde es daher suggestiv, die *Weierstraßdarstellung* zu schreiben als

$$F := \mathrm{Re} \int_* \Big(\frac{1}{2}\Big(\frac{1}{G} - G\Big),\; \frac{i}{2}\Big(\frac{1}{G} + G\Big),\; 1\Big) dh,$$

mit $\mathrm{Re}\; dh = dF^3$ und G die Gaußabbildung von F.

Einige weitere Informationen erleichtern die Interpretation einer Weierstraßdarstellung; sie werden aus der Gaußabbildung G und den beiden meromorphen Differentialformen dG/G, dh berechnet. Dadurch kommt wieder mehr Differentialgeometrie ins Spiel; wegen der Zeitbeschränkung erschien mir im Vortrag die Konzentration auf die Funktionentheorie zweckmäßig.

Um die Position der Enden zu verstehen, benötigt man zunächst die *Riemannsche Metrik*

$$g(X, X) := \langle DF \cdot X, DF \cdot X\rangle = \frac{1}{2}|D\Psi \cdot X|^2 = \frac{1}{4}(|G| + 1/|G|)^2 \cdot |dh(X)|^2$$

(Lokal $dh(\dot z) = \frac{dh}{dz}\big|_{z(t)} \cdot \dot z(t)$).

Hieran liest man ab:

(i) Falls dh in $p \in \bar M^2$ eine Polstelle hat, so hat jede in p endende Kurve unendliche Riemannsche Länge, also $p \notin M^2$, M^2 ist in p punktiert.
(ii) Falls dh in $p \in \bar M^2$ eine Nullstelle hat, ohne daß N dort vertikal ist, so ist die Metrik in p Null, d.h. F ist keine Immersion. Dies versucht man zu vermeiden.
(iii) Falls dh in $p \in \bar M^2$ eine Nullstelle hat und G bzw. $1/G$ hat eine Polstelle derselben Ordnung, dann ist $p \in M^2$ und $N(p)$ ist vertikal.
(iv) Falls dh in $p \in \bar M^2$ eine Nullstelle hat und G bzw. $1/G$ hat dort eine Polstelle höherer Ordnung, so ist wie in (i) $p \notin M^2$.

Diese Zusammenfassung zeigt, daß die Null- und Polstellen von dh durch die vertikalen Punkte von N (mit Vielfachheit) sowie durch die Lage der Punktierungen von M^2 beinahe gegeben sind. Es fehlt nur der Zusatz: Ist p die Punktierung zu einem eingebetteten Ende, so hat Gdh bzw. $\frac{1}{G}dh$ dort einen doppelten Pol. Damit ist dh bis auf einen konstanten Faktor bestimmt. Dies rechtfertigt die Beschränkung auf die Gaußabbildung in meinem Vortrag.

Auch andere geometrische Eigenschaften der Fläche sind durch die Weierstraßdarstellung leicht zugänglich. Die *Gaußsche Krümmung* $K := \det(S)$ *ist die Flächeninhaltsverzerrung von:*

$$DN|_p : T_p M^2, g \rightarrow T_{N(P)} S^2.$$

Wegen der Winkeltreue ist dies bis aufs Vorzeichen das Quadrat der Längenverzerrung, also (mit dem bekannten Faktor $(\frac{2}{1+|Z|^2})^2$ für die stereographische Projektion $\mathbf{C} \rightarrow \mathbf{S}^2$) durch unmittelbares Einsetzen der Definitionen gegeben als

$$\begin{aligned} K &= -\frac{|DN(X)|^2_{R^3}}{g(X,X)} = -\frac{4|dG(X)|^2}{(|G| + 1/|G|)^2 \cdot |dh(X)|^2} \cdot \frac{4}{(1+|G|^2)^2} \\ &= \frac{-16}{(|G| + 1/|G|)^4} \cdot \left|\frac{dG}{Gdh}\right|^2. \end{aligned}$$

Die beiden Differentialformen dG/G und dh liefern weitere geometrische Eigenschaften der Fläche. So ist die *Zweite Fundamentalform* definiert als

$$\begin{aligned} b(X,X) &:= -\langle D^2F(X,X),\ N\rangle \\ &= \langle DF(X),\ DN(X)\rangle = g(X, S \cdot X). \end{aligned}$$

Wegen der Weierstraßschen Formel ist

$$DF(X) = \mathrm{Re}\ D\Psi(X) = \mathrm{Re}\ \Big((\frac{1}{2}(\frac{1}{G} - G),\ \frac{i}{2}(\frac{1}{G} + G),\ 1) \cdot dh(X) \Big).$$

Differenziert man weiter und benutzt, daß N reell und senkrecht zu $D\Psi(X)$ ist, so erhält man

$$\begin{aligned} -\langle D^2F(X,X),\ N\rangle &= -\mathrm{Re}\ \Big(\langle (\frac{1}{2}(\frac{-1}{G} - G),\ \frac{i}{2}(\frac{-1}{G} + G),\ 0),\ N\rangle \frac{dG(X)}{G} dh(X) \Big) \\ &= \mathrm{Re}\ \Big(\frac{dG}{G}(X) \cdot dh(X) \Big). \end{aligned}$$

Die zweite Fundamentalform ist also Realteil eines meromorphen quadratischen Differentials; dies ist auf M^2 sogar *holomorph*, denn in den vertikalen Punkten von N hat dG/G einfache Pole und dh mindestens einfache Nullstellen. Diese eng an die Weierstraßdarstellung angepaßte Beschreibung der zweiten Fundamentalform führt oft dazu, daß man Symmetrien der Fläche unmittelbar aus den Daten ablesen kann. Symmetrien können Perioden zu null machen oder Einbettungsfragen auf kleinere Stücke der Fläche reduzieren.

Eine andere interessante Information ist die *Krümmung der Höhenlinien.* Z.B. sind diese Krümmungen für die von Riemann entdeckten Minimalflächen konstant, die Höhenlinien also Kreise, und die Flächen sind daher *eingebettet.* Für eine nach der Bogenlänge parametrisierte Kurve in $\mathbf{C}$ mit Einheitsnormalenfeld n gilt für die Krümmung (mit der Bezeichnung $\langle\ ,\ \rangle$ für das euklidische Skalarprodukt in $\mathbf{C}$):

$$\kappa(s) = \langle \frac{dn}{ds},\ i \cdot n(s)\rangle.$$

Eine Kurve $c\colon I \to M^2$ ist eine Höhenlinie einer Weierstraßdarstellung, wenn

$$\frac{dn}{ds} = \frac{dn}{dh} \cdot \frac{dh}{ds} \quad \text{mit} \quad \frac{dh}{ds} = \frac{2dh(\dot c)}{(|G| + 1/|G|) \cdot |dh(\dot c)|}, \quad \frac{dh(\dot c)}{|dh(\dot c)|} = \pm i.$$

Wegen $\langle G,\ i \cdot G\rangle \ = \ 0$ gilt

$$\begin{aligned} \kappa(s) = \langle \frac{1}{|G|} \cdot \frac{dG}{dh} \cdot \frac{dh}{ds},\ i \cdot \frac{G}{|G|}\rangle \ &= \ \langle -i \cdot \frac{1}{G}\frac{dG}{ds},\ 1\rangle \\ = \langle \frac{1}{G} \cdot \frac{dG}{dh} \cdot \frac{-i \cdot dh}{ds},\ 1\rangle \ &= \ \frac{\pm 2}{(|G| + 1/|G|)} \cdot \mathrm{Re}(\frac{dG}{Gdh}). \end{aligned}$$

Ich hoffe, daß diese Beispiele gezeigt haben, daß die Weierstraßdarstellung nicht nur die Funktionentheorie der Minimalflächen ausnutzt, sondern differentialgeometrische und funktionentheoretische Eigenschaften in enge Beziehung setzt.

Literatur

Ich verweise auf die langen Literaturlisten der drei ersten Referenzen:

[1] Dierkes, U., Hildebrandt, S., Küster, A., Wohlrab, O., Minimal Surfaces I, Grundlehren 295, Springer 1992.

[2] Hoffman, D., Karcher, H., Complete Embedded Minimal Surfaces of Finite Total Curvature, in Encyclopaedia of Mathematical Sciences, Vol 90, Geometry V, R. Osserman (Ed.), Springer 1997.

[3] Rosenberg, H., Some Recent Developments in the Theory of Properly Embedded Minimal Surfaces in $\mathbf{R}^3$, Séminaire BOURBAKI 44ème année, 1991–1992, n^o 759.

[4] Gackstatter, F., Über die Dimension einer Minimalfläche und zur Ungleichung von St. Cohn-Vossen, Arch. Ration. Mech. Anal. 61 (1976), 141–152.

[5] Huber, A., On subharmonic functions and differential geometry in the large, Comment. Math. Helv. 32 (1957), 13–72.

[6] Jorge, L.P.M., Meeks, W.H., The topology of complete minimal surfaces of finite total Gaussian curvature, Topology 22 (1983), 203–221.

[7] Lopez, F.J., Ros, A., On complete minimal surface of genus 0, J. Differ. Geom. 33 (1991), 293–300.

Buchbesprechungen

Buergisser, P., Clausen, M., Shokrollahi, A., Algebraic Complexity Theory (Grundlehren Vol. 315) Berlin u. a.: Springer 1997, 618 S., DM 188,–

Die Komplexitätstheorie handelt von effizienter algorithmischer Lösung mathematisch formulierter Probleme und von dem prinzipiellen Widerstand, den diese jener leisten. Sie vereint zwei ganz verschiedene Traditionen. Die eine entstammt der mathematischen Logik und der Theorie der berechenbaren Funktionen. Das grundlegende Berechnungsmodell ist die Turingmaschine, und man zeigt, daß gewisse Entscheidungsprobleme inhärent schwierig sind auf ganz ähnliche Art, wie man in der mathematischen Logik die Unentscheidbarkeit von Theorien beweist: durch Diagonalisierung und Reduktion.

Die zweite Tradition hat sich aus Fragestellungen der Numerischen Mathematik entwickelt. Das Berechnungsmodell für die hier betrachteten Probleme ist so etwas wie ein gewöhnlicher (endlicher) Computer, der allerdings mit der Fähigkeit ausgestattet ist, Zahlen aus einer Klasse zugelassener Grundkörper exakt zu speichern und arithmetische Operationen oder Verzweigungen der Form ‚$f = 0$‘ (für angeordnete Körper auch ‚$f \geq 0$) in je einem Schritt exakt auszuführen. Das Ergebnis ist nach einer beschränkten Anzahl von Schritten ebenfalls exakt abzuliefern. Es können deshalb nur (semi-)algebraische Aufgabenstellungen behandelt werden. Bei gegebener Gewichtung der Rechenoperationen (z.B. = 1) versteht man unter der *Komplexität* einer solchen Aufgabe den minimalen zu ihrer Lösung hinreichenden Rechenaufwand. In der Regel hängt der Aufwand eines Algorithmus von der Eingabe ab, so daß man zunächst über diese zu maximieren hat. Bei der Auswertung von Polynomen und rationalen Funktionen hat man die Alternative, Unbestimmte als Eingaben zu verwenden und Verzweigungen auszuschließen (generischer Standpunkt).

Das hier angedeutete *algebraische Berechnungsmodell* und die zugehörigen Komplexitätsbegriffe sind das definitorische Rüstzeug der *Algebraischen Komplexitätstheorie*. Ihr Einsatz bietet sich bei der Untersuchung fundamentaler Berechnungsprobleme an, besonders dann, wenn diese unabhängig von einem speziellen Grundkörper formuliert sind und wenn für deren algorithmische Lösung ein Gleiches erwartet wird.

Sehen wir von dem 1975 erschienenen schmalen Bändchen [1] von Borodin und Munro ab, so liegt vor uns die erste umfassende Monographie über Algebraische Komplexitätstheorie. Sie ist in ein einleitendes Kapitel und fünf Teile gegliedert:

I. Fundamental Algorithms (2 Kapitel) – II. Elementary Lower Bounds (4 Kapitel) – III. High Degree (5 Kapitel) – IV. Low Degree (8 Kapitel) – V. Complete Problems (1 Kapitel).

Teil I behandelt einige wichtige Algorithmen der Computer-Algebra unter dem Gesichtspunkt der theoretischen (d.h. asymptotischen) Effizienz. Hier findet man z.B. die ‚Schnelle Fourier-Transformation, die $O(n \log n \log \log n)$-Polynom-Multiplikation über beliebigen Körpern sowie den Knuth-Schönhage-Algorithmus für die Kettenbruchentwicklung rationaler Funktionen.

Teil II enthält neben genauen Definitionen von *Berechnungsfolge*, *Berechnungsbaum* und *Komplexität* zwei elementare, aber grundlegende Techniken zum Beweis von unteren Komplexitätsschranken: die eine benutzt den Transzendenzgrad (Motzkin, Belaga, Baur-Rabin), die andere geeignete Variablensubstitutionen (Pan). Mit diesen Techniken läßt sich z.B. zeigen, daß Horners Regel zur Auswertung eines ‚allgemeinen Polynoms $\sum_{i=0}^{n} a_i x^i \in \mathbb{R}[a_0, \ldots, a_n, x]$ optimal ist, während jedes ‚konkrete Polynom $\sum_{i=0}^{n} \alpha_i x^i \in \mathbb{R}[x]$ mit n Additionen/Subtraktionen und nur etwa $\frac{n}{2}$ Multiplikationen/Divi-

Komplexitäten beruht auf der Möglichkeit, ein Auswertungsverfahren für ein konkretes Polynom mit einer besonders evaluationsfreundlichen Darstellung des Polynoms auszustatten. Teil II enthält ferner eine Diskussion von zwei Komplexitätsungleichungen, die im folgenden eine wichtige Rolle spielen. Die eine impliziert, daß man bei der Berechnung bilinearer Abbildungen ohne Effizienzverlust auf Divisionen verzichten kann. Die andere (die sogenannte Ableitungsungleichung) gestattet es, aus einem Verfahren zur Auswertung einer einzelnen rationalen Funktion ein vergleichbar schnelles zur Berechnung aller ihrer ersten Ableitungen zu konstruieren. Eine Anwendung auf die Determinantenfunktion etwa liefert die Einsicht, daß die Matrix-Inversion nicht viel schwieriger ist als die Berechnung der Determinante.

Teil III befaßt sich mit drei Methoden zum Beweis von unteren Komplexitätsschranken, denen die Verwendung nichttrivialer Ergebnisse der Algebraischen Geometrie gemeinsam ist (Satz von Bezout über den Grad des Schnittes zweier abgeschlossener Untervaritäten des $\mathbb{P}^n$, Satz von Milnor-Thom über die Summe der Bettizahlen reeller semialgebraischer Mengen).

Die sogenannte *Gradschranke* schätzt die multiplikative Komplexität (lineare Operationen sind kostenlos) eines Systems rationaler Funktionen durch den Logarithmus des Grades des Graphen der durch die Funktionen vermittelten rationalen Abbildung ab. Für viele Probleme der Numerischen Mathematik liefert sie Ergebnisse optimaler Größenordnung (meist $n \log n$ für die Unbestimmtenanzahl n). Dazu gehören die Berechnung der elementarsymmetrischen Funktionen, die Auswertung eines beliebigen Polynoms $\sum_{i=0}^{n} \alpha_i x^i$ vom Grad n an $n+1$ Stellen und die Bestimmung der Koeffizienten des Interpolationspolynoms zu Stützstellen $x_0, \ldots, x_n$ und Werten $y_0, \ldots, y_n$. Ferner läßt sich eine Art uniforme Optimalität des Knuth-Schönhage-Algorithmus zur Kettenbruchentwicklung beweisen. Kombiniert man die Gradschranke mit der Ableitungsungleichung, so ergibt sich z.B., daß die n-te Potenzsumme $x_1^n + \ldots + x_n^n$, die Resultante als Funktion der Wurzeln sowie die Interpolation an einer einzigen Stelle eine Komplexität der Größenordnung $n \log n$ besitzen.

Eine neuere Methode von Ben-Or und Yao, die auf dem oben genannten Satz von Milnor und Thom beruht, hat zahlreiche Anwendungen vor allem in der Geometrie. Die Autoren des Buches beschränken sich auf den Beweis des etwas gröberen Resultates von Ben-Or, das in vielen Fällen ausreicht. Es schätzt die Größenordnung der Komplexität eines semialgebraischen Entscheidungsproblems durch den Logarithmus der Anzahl Zusammenhangskomponenten ab. Im Buch wird der Satz auf die folgenden drei Probleme angewandt: man entscheide, ob n gegebene reelle Zahlen paarweise verschieden sind; man berechne zu n Punkten der Ebene die Ecken ihrer konvexen Hülle; man entscheide, ob sich n gegebene reelle Zahlen in zwei Teile gleicher Summe aufteilen lassen. Die Komplexität der beiden ersten Probleme hat die Größenordnung $n \log n$, die des dritten mindestens die Größenordnung n^2. Dieses sogenannte Rucksackproblem ist besonders interessant, weil sein Boolesches Pendant NP-vollständig ist. Die reelle Version läßt sich überraschenderweise in $O(n^5 \log^2 n)$ Schritten entscheiden (Meyer auf der Heide).

Die dritte in Teil III dargestellte Methode liefert untere Komplexitätsschranken für Polynome in *einer* Unbestimmten, deren Koeffizienten rational oder doch wenigstens algebraisch sind. In ihrer ursprünglichen Fassung auf Ideen der diophantischen Geometrie fußend, benutzt eine von Heintz und Sieveking für den Fall algebraischer Koeffizienten entwickelte Verfeinerung wieder den Satz von Bezout, der damit zum Hauptnenner der drei geschilderten Methoden wird (denn auch Milnor und Thom verwenden Bezout). Eine typische Anwendung: $\sum_{j=1}^{n} j^r x^j \in \mathbb{R}[x]$ hat für $r \in \mathbb{Q} \setminus \mathbb{Z}$ eine Komplexität wenigstens der Größenordnung $n/(\log^2 n)$, während für $r \in$ das Polynom in $O(\log n)$ Schritten berechenbar ist. Über den besonders interessanten Fall $r = -1$ (Partialsumme der Logarithmusreihe) weiß man dagegen so gut wie nichts.

Eine ganz andere Landschaft betritt man in Teil IV, wo es um die Berechnung linearer und bilinearer Abbildungen geht. Hier bewegen sich die unteren Schranken noch in Bodennähe. Ehrgeizigere Projekte haben das Schicksal von Ikarus erlitten, bisweilen unter dem Feuerwerk spektakulärer Erkenntnisse auf scheinbar fernen Gebieten. So war ein plausibler Beweisansatz für die Optimalität der ‚Schnellen Fourier-Transformation (FFT) das Motiv, aber auch das Opfer von Valiants Konstruktion von n-Superkonzentratoren mit $O(n)$ Kanten. Bei den n-Superkonzentratoren handelt es sich um gerichtete Graphen mit n Eingangs- und n Ausgangsknoten derart, daß für jedes $r \leq n$ je r Eingangs-

knoten mit je r Ausgangsknoten durch r disjunkte gerichtete Wege verbunden werden können. Valiants Konstruktion und ihre Verbesserungen haben heute in Graphentheorie und Theoretischer Informatik einen festen Platz. Die Optimalität der FFT dagegen ist nach wie vor offen. Teil IV enthält neben solchen Abenteuern eine minuziöse Schilderung praktisch aller bis heute bekannten unteren Komplexitätsschranken für lineare und bilineare Probleme, unter anderem für die Multiplikation in endlich-dimensionalen Algebren.

Auch den Algorithmen wird der ihnen gebührende Platz eingeräumt. Bei den linearen Problemen steht die Spektralanalyse im Mittelpunkt, konkret die Wedderburn-Isomorphie zwischen der komplexen Gruppenalgebra einer endlichen Gruppe G (etwa der Ordnung n) und einem direkten Produkt voller Matrixalgebren. Die Matrix eines solchen Isomorphismus codiert die irreduziblen Darstellungen von G. Es geht hier freilich nicht um die *Konstruktion* dieser Matrix, sondern um deren Anwendung auf einen Vektor der Gruppenalgebra. Die Wichtigkeit des Problems wird beleuchtet durch die Bedeutung der FFT für den Fall zyklischer Gruppen. Die im Buch beschriebenen Verfahren liegen freilich mathematisch deutlich tiefer als die klassische FFT. Die wichtigsten Resultate: ein $O(n \log n)$-Algorithmus für überauflösbare Gruppen (Baum), ein $o(n \log^3 n)$-Algorithmus für symmetrische Gruppen (Clausen) und ein $O(n^{1.44})$-Algorithmus für beliebige Gruppen (Beth und Clausen). Daß das einschlägige Kapitel als bei erster Lektüre überspringbar markiert ist, läßt sich wohl nur mit der Bescheidenheit eines der Buchautoren erklären.

In Teil IV wird ferner die Treibjagd auf den sogenannten *Exponenten der Matrix-Multiplikation* keit der Folge der Enumeratoren von Hamiltonzykeln

$$\sum_{\sigma \in S_n \text{ Zykel der Länge } n} a_{1\sigma(1)} \cdot \ldots \cdot a_{n\sigma(n)}.$$

(Ersetzt man die Unbestimmten-Matrix $[a_{ij}]$ durch die Inzidenzmatrix eines Graphen, so liefert der Enumerator die Anzahl von dessen Hamilton-Zykeln.) Das wird zwar im Buch nicht bewiesen, wohl aber die ebenfalls auf Valiant zurückgehende *VNP*-Vollständigkeit der Permanente

$$\sum_{\sigma \in S_n} a_{1\sigma(1)} \cdot \ldots \cdot a_{n\sigma(n)}$$

für Grundkörper einer Charakteristik $\neq 2$. Dieses Resultat verdient besonderes Interesse, weil sich das zugehörige Entscheidungsproblem, das sogenannte Heiratsproblem, in polynomialer Zeit lösen läßt (M. Hall). Darüberhinaus führt die *VNP*-Vollständigkeit der Permanente auf einen engen Zusammenhang zwischen der Valiantschen Hypothese und der klassischen Frage nach der minimalen Größe einer Determinante mit unbestimmten Koeffizienten, aus der sich eine n-reihige Permanente mit ebenfalls unbestimmten Koeffizienten durch einfache Substitution gewinnen läßt.

Die hier gegebene Übersicht läßt eine Reihe von Themen unerwähnt, die im Buch ausführlich behandelt werden. Das Programm der drei Autoren, die Algebraische Komplexitätstheorie bei konsequenter Beschränkung auf das sequentielle algebraische Berechnungsmodell so vollständig darzustellen, wie es in einem Band möglich ist, wird in der vorliegenden Monographie in bewundernswerter Weise verwirklicht.

Man mag bedauern, daß z.B. die Komplexitätsschranke von Mayer-Meyer für die Zugehörigkeit zu Polynomidealen oder die Interpretation des algebraischen Berechnungsmodells als effiziente Datenstruktur für das Rechnen mit dünn besetzten Polynomen (von zur Gathen, Kaltofen) nicht in den vorgegebenen Rahmen passen. Der Umfang des Buches jedoch gibt der Selbstbeschränkung der Autoren recht.

Das Werk bietet viel Komfort: Es liest sich gut, die Beweise sind prägnant und sorgfältig durchgeführt, es gibt kaum Druckfehler, jedes der 21 Kapitel beginnt mit einer motivierenden Übersicht und endet mit einer Reihe von Übungsaufgaben (insgesamt 350), einer Liste offener Probleme sowie einer Besprechung der einschlägigen Literatur. Bemerkenswert ist, wie konsequent die Darstellung mit algebraischem Grundwissen auskommt. Geeigenete Versionen der Sätze von Bezout und Milnor-Thom werden explizit bewiesen. Zwar ließe sich für Algebraische Geometer und Differentialtopologen manches kürzer und eleganter gestalten. Aber so willkommen diese als Leser sind, die intendierte Leserschaft erschöpfen sie nicht. Eine Stärke des Buches liegt gerade in seiner vielseitigen Verwendbarkeit: als Standardreferenz, Nachschlagewerk, Textbuch für Vorlesungen und Seminare über Mathematik und Theoretische Informatik, Grundlage eines Selbststudiums.

Stellt man die Geschlossenheit und Stringenz des Textes der Menge der darin verarbeiteten Literatur gegenüber (die Bibliographie enthält fast so viele Einträge wie das Buch Seiten), so wird die enorme Leistung der Autoren wie auch die Überfälligkeit ihres Projekts deutlich. Bürgisser, Clausen und Shokrollahi haben einen Meilenstein gesetzt, an dem sich zukünftige Werke über Algebraische Komplexitätstheorie werden orientieren können und müssen.

[1] Borodin, A., Munro, I., The Computational Complexity of Algebraic and Numeric Problems. American Elsevier, 1975

Konstanz V. Strassen

Huybrechts, D., Lehn, M., The Geometry of Moduli Spaces of Sheaves, Braunschweig/Wiesbaden: Vieweg 1997, 269 S., DM 98,–

Zu Beginn unseres Jahrhunderts nahm die Algebraische Geometrie einen zentralen Platz in der Mathematik ein, fünfzig Jahre später war dieses Gebiet praktisch tot. Beginnend mit Emmy Noethers formalem Aufbau der Algebra setzte in den zwanziger Jahren eine Strukturierung der Mathematik ein, die neue Ansprüche an Exaktheit und Sicherheit der Grundlagen stellte, und die den Aufbau neuer Gebiete, wie der Kommutativen Algebra oder der Algebraischen Topologie brachte. Erst als diese Fundamente abgesichert waren, wandte man sich in den sechziger Jahren wieder den Inhalten der Algebraischen Geometrie zu. Und heute ist die Algebraische Geometrie wie vor hundert Jahren ein großes aktuelles Gebiet. Es gibt wichtige Querverbindungen zu Arithmetik, Analysis und Mathematischer Physik.

Was hat diese Historie mit dem vorliegenden Buch zu tun, das doch fast ausschließlich Forschungsergebnisse aus den letzten zwanzig Jahren zusammenfaßt? Nun, diese Ergebnisse aus der Theorie der Moduli stabiler Garben werden hier in einer formalen Sprache dargestellt, die hohen modernen Ansprüchen genügt. Entsprechend leicht kann ein Leser ob der Vielfalt der verwendeten Begriffe und Techniken das Gefühl für Inhalte und Problemstellungen verlieren. Wie manch anderes Gebiet der modernen Mathematik leidet die Algebraische Geometrie unter der Spannung zwischen ihrer formalen Maschinerie und ihren Inhalten. Wenn diese Spannung nicht richtig ausbalanciert wird, kann es, wie vor hundert Jahren, zur nächsten Krise kommen.

Kohärente Garben (sheaves) waren vor fünfzig Jahren praktisch unbekannt, heute gehören sie zum unersetzlichen Handwerkszeug der algebraischen Geometrie. Das Buch widmet sich dem Problem der Klassifikation dieser Objekte. Für das Interesse an dieser Frage gibt es gute Gründe: Es hängt zusammen mit dem Klassifikationsproblem für Untervarietäten einer gegebenen algebraischen Varietät, und das ist eines der fundamentalen Themen der Theorie. Außerdem gibt es verblüffende Zusammenhänge mit der mathematischen Physik („Instantonen") oder der Klassifikation differenzierbarer Strukturen auf komplexen Flächen (Donaldson-Invarianten).

Die Klassifikationstheorie der kohärenten Garben folgt einem Grundmuster:

1) „Boundedness": Es ist zu zeigen, daß alle Garben mit fixierten Invarianten über einer fixierten Varietät eine Familie bilden, die man durch Punkte einer Varietät parametrisieren kann. In der wünschenswertesten Allgemeinheit ist das falsch, es gibt einfach zu viele Garben. Deswegen muß man sich hier auf sogenannte „stabile" Garben beschränken.

2) Konstruktion des Modulraumes: Der Modulraum enthält für jede der zu klassifizierenden Garben genau einen Punkt, man kann ihn als einen Gruppenquotienten aus der parametrisierenden Familie in 1) konstruieren. Das geht mit Geometrischer Invariantentheorie nach Mumford. Und wunderbarerweise ist es wieder die Eigenschaft der Stabilität, welche die Existenz des Quotienten sicherstellt.

3) Beschreibung des Modulraumes: Die Fragestellungen hängen jetzt sehr von der Varietät ab, über der man die Garben betrachtet. Manchmal ist schon die banale Frage ungelöst, ob der Modulraum nicht-leer ist. Manchmal (z. B. über kompakten Riemannschen Flächen) gibt es inzwischen eine sehr inhaltsreiche Theorie, mit weitreichenden Konsequenzen, u. a. auch für die String-Theorien der Mathematischen Physik.

Das Buch ist gedacht für Leser mit einer Vorbildung in Algebraischer Geometrie, wie sie etwa das Standard-Lehrbuch von R. Hartshorne bietet. Der Band besteht aus zwei Teilen.

Im ersten („General theory") werden Begriffe und Methoden zur Stabilitätstheorie kohärenter Garben zusammengestellt. Das sind die Kapitel 1) Preliminaries, 2) Families of sheaves, 3) The Grauert-Mülich theorem, 4) Moduli spaces. Hier wird nicht vorausgesetzt, daß die Basisvarietät zwei-dimensional ist. Ich kenne keine andere Zusammenstellung der Theorie in Buchform, welche an Präzision und Umfang mit dieser vergleichbar ist. Es ist unvermeidlich, daß gelegentlich auf andere Literatur verwiesen wird. Aber die Darstellung ist praktisch „self-contained" und gut lesbar, nachvollziehbar.

Im zweiten Teil wird die Theorie auf Flächen angewendet: 5) Construction methods, 6) Moduli spaces on K3-surfaces, 7) Restriction of sheaves to curves, 8) Line bundles of the moduli spaces, 9) Irreducibility and smoothness, 10) Symplectic structures, 11) Birational properties. Hier werden Forschungsergebnisse der letzten Jahre zusammengestellt. Das Gebiet ist hochaktuell, eine ähnlich übersichtliche und inhaltsreiche Wiedergabe des Materials existiert bisher nicht. Etwas häufiger als im ersten Teil werden Beweise nur skizziert oder weggelassen. Die Autoren erlauben sich dies, weil sie meinen, daß die Forschung hier noch in der Entwicklung ist, und manche Ergebnisse ihre endgültige Form noch nicht gefunden haben.

Das Buch enthält eine Bibliographie mit 263 Referenzen. Allein deswegen schon ist es sehr nützlich für jeden, der an diesem Gebiet interessiert ist. Es gibt einen vier Seiten langen Index, und auf fünf Seiten ein „Glossary of Notations", nach Sachgebieten geordnet.

Meiner Meinung nach handelt es sich hier um ein sehr nützliches, aktuelles und gut geschriebenes Buch.

Erlangen W. Barth

Chriss, N., Ginzburg, V., Representation Theory and Complex Geometry, Boston u. a.: Birkhäuser 1997, 504 S., DM 128,–

Spätestens seit Hermann Weyls Bestimmung der Charaktere einer kompakten Liegruppe mit Hilfe der Geometrie ihres Wurzelsystems liefern geometrische Methoden entscheidende Hilfsmittel zum Verständnis der Darstellungen von Liegruppen. Die vorliegende Monographie gibt einen Überblick über gewisse Entwicklungen, die neuerdings einen einheitlichen geometrischen Zugang zur Darstellungstheorie von Weylgruppen, Liealgebren, und von Heckealgebren und deren Verallgemeinerungen ermöglicht haben. Der zweitgenannte Mitautor hat dazu selbst wichtige Beiträge geliefert. Viele Einzelheiten und Ergebnisse werden zum ersten Male in Buchform zugänglich gemacht; der abgehandelte Stoff ist ausgesprochen umfangreich. Das Erscheinen des Buchs und das Bemühen der Autoren, eine Lücke zu schließen, sind ausdrücklich zu begrüßen, und dem interessierten Leser wird eine Fülle von wichtigen und tiefen Einsichten vermittelt, allerdings nicht immer auf leicht bekömmliche Weise.

Die Kapitel 1–3 und 5–6 stellen Hilfsmittel aus u.a. den folgenden Gebieten bereit: symplektische Geometrie, Kählermannigfaltigkeiten mit Symmetrien, Borel-Mooresche Homologietheorie, Geometrie halbeinfacher komplexer Liegruppen, Topologie und Geometrie adjungierter Bahnen, Fahnenmannigfaltigkeiten, Deformationstheorie, kommutative Algebra, äquivariante algebraische K-Theorie. Typische Beispiele zur Illustration des Geistes, in dem das Buch geschrieben ist, sind die Herleitung der Bruhat-Zerlegung (3.1.9) mit Hilfe eines geometrischen Arguments, welches auf die Fahnenmannigfaltigkeit Bezug nimmt, und der Satz 3.4.1, welcher den rationalen Gruppenring der Weylgruppe (z.B. S_n im Falle von $\mathfrak{sl}_n$) als Faltungsalgebra auf der höchsten von Null verschiedenen Borel-Mooreschen Homologiegruppe der zugehörigen Steinbergvarietät beschreibt. Hiermit werden dann die irreduziblen Darstellungen der genannten Faltungsalgebra und somit diejenigen der Weylgruppe konstruiert. Dies liefert eine geometrische Interpretation der Theorie der sogenannten Springerschen Darstellungen von Weylgruppen; es handelt sich dabei um ein Originalergebnis des zweitgenannten Mitautors. Das 4. Kapitel ist einer nalen Darstellungen gewidmet. Es wird beispielsweise erklärt, wie jeder endlichdimensionale irreduzible $\mathfrak{sl}_n$-Modul als höchste nicht-triviale Homologie einer geeigneten Varietät beschrieben wird. Die hier mitgeteilten Ergebnisse sind offenbar neu; sie liefern eine geometrische Erklärung der bekannten Beziehung zwischen der Kombinatorik der Darstellungstheorie der symmetrischen Gruppe und derjenigen der allgemeinen linearen Gruppe. Im 5. Kapitel wird eine Einführung in äquivariante algebraische K-Theorie geboten. Insbesondere finden sich hier ein Spezialfall des Lokalisierungssatzes und eine Version des Riemann-Rochschen Satzes. Kapitel 6 behandelt die äquivariante algebraische K-Theorie der Fahnenmannigfaltigkeiten und verwandter geometrischer Objekte und ferner deren Homologie – ein wichtiges Hilfsmittel ist dabei der erwähnte Lokalisierungssatz, – und harmonische Polynome. Im 7. Kapitel werden dann Weylgruppen und Heckealgebren mit Hilfe von äquivarianter algebraischer K-Theorie auf geometrische Weise interpretiert; beispielsweise wird ein Isomorphismus hergeleitet zwischen dem Gruppenring der affinen Weylgruppe und derjenigen Faltungsalgebra, welche aus der äquivarianten K-Theorie der Steinbergvarietät hervorgeht. Das 8. Kapitel beschäftigt sich weitgehend mit der Klassifikation der einfachen Moduln vom höchsten Gewicht über einer komplexen halbeinfachen Liealgebra. Hier sind die Anforderungen an den Leser hoch (erklärt und anschließend verwendet werden u.a. die derivierte Kategorie konstruktibler Komplexe, Verdierdualität, perverse Garben, Schnittcohomologie). Die Techniken in diesem Kapitel spielen anderswo eine Rolle beim Studium von Darstellungen affiner Quantengruppen. (Hinweise dazu werden in der Einleitung gegeben.)

Das Buch ist eine Fundgrube für den Fachmann. Allerdings ist es stellenweise schwer zugänglich und deshalb für Studenten oder Anfänger in der Forschung nur mit Einschränkungen zu empfehlen. Gelegentlich wird allzu deutlich, daß diese Monographie aus einer Vorlesungsausarbeitung hervorgegangen ist: Eine Darstellung in Buchform kann eben nicht mehr die Gnade des Tafelreinigens in Anspruch nehmen, und gesprochene Sprache ist nicht immer geeignet für die geschriebene Form. Die Einleitung ist nur ein verlängertes Inhaltsverzeichnis; die Sprache ist zu technisch und fließt gleichmäßig dahin, ohne daß auf die wirklich wichtigen Einsichten mit geeignetem Nachdruck hingewiesen wird. Auch wäre zu Beginn eines jeden Kapitels ein kurzer Überblick hilfreich gewesen. (Das 5. und 6. Kapitel beginnen zwar jeweils mit einer Zusammenfassung, welche aber kaum ihren Zweck erfüllt.) Ferner ist die Darstellung in den Einzelheiten nicht immer befriedigend und mitunter sogar irreführend; dies kann hier allerdings aus Platzgründen nur mit ganz wenigen Hinweisen belegt werden: Auf Seite 38 wird gesagt: „Assume from now on that X is a manifold ...“ aber auf den vorhergehenden zehn Seiten war X stets eine Mannigfaltigkeit. Bei der Behandlung von Fahnenmannigfaltigkeiten und Bruhat-Zerlegung (S. 129) wird der aufmerksame Leser auf S. 5 der Einleitung zurückblättern müssen, um zu erfahren, was eine Fahnenmannigfaltigkeit ist, und was genau mit Bruhat-Zerlegung gemeint ist. Auf S. 24 wird irreführenderweise behauptet, daß Poissonalgebren in der Geometrie typischerweise aus symplektischen Strukturen hervorgehen. Die (von S. Lie bereits untersuchte) äußerst wichtige nicht-symplektische Poissonalgebra der Funktionen auf dem Dualraum einer Liealgebra – sie wird üblicherweise Lie-Poissonstruktur genannt – wird dann in (1.3.16) behandelt, allerdings auf eine Weise, die aus einer Mücke einen Elefanten macht (mit Hilfe der zu der universellen Algebra assoziierten graduierten Algebra). Auf S. 86 wird die Impulsabbildung für die übliche Operation der unitären Gruppe auf dem entsprechenden komplex projektiven Raum erklärt, aber es wird unterlassen zu bemerken, daß dadurch dieser Raum als coadjungierte Bahn der unitären Gruppe erscheint, obwohl coadjungierte Bahnen vorher behandelt worden sind. In Satz 1.5.7, welcher später eine wichtige Rolle spielt, taucht ohne weitere Erklärung der Begriff einer „symplektischen algebraischen Varietät“ (symplectic algebraic variety) auf. Erst nach der Formulierung dieses Satzes hat dann der Leser wegen einiger zusätzlicher schematheoretischer Angaben vielleicht das Ahaerlebnis, daß wohl der komplexe Grundkörper gemeint sein muß, aber der Begriff symplektische Varietät ist damit immer noch nicht erklärt [redacted]

Wiederholt ist die Rede von „Konjugationsklassen“ (conjugacy classes), sogar im Einbandtext; gemeint sind damit offenbar adjungierte Bahnen. Schließlich werden keinerlei [redacted] chung, die mit dem Stichwort „Ikosaeder" verbunden ist, lieferte Hermite ein neues „Radikal", mit dessen Hilfe man die allgemeine Gleichung fünften Grades „auflösen" (im verallgemeinerten Sinne!) kann. Dies alles wird im 5. Kapitel vorgestellt.

Kapitel 6 hat als Inhalt die Theorie der komplexen Multiplikation, d.h. der Erzeugung des Hilbertschen Klassenkörpers imaginärquadratischer Zahlkörper durch spezielle Werte der absoluten Invariante elliptischer Kurven. Neben dem bisher betrachteten analytischen Hilfsmittel der Modulfunktionen müssen daher (kurz) elementare Werkzeuge der Zahlentheorie herangezogen werden.

Das 7. Kapitel verläßt den Grundtenor des Buches und ist daher eher als Anhang zu sehen. Dort wird der Satz von Mordell-Weil für elliptische Kurven über den rationalen Zahlen bewiesen, wie man ihn bereits aus anderen Lehrbüchern über elliptische Kurven kennt.

Nach Aussagen der Autoren soll das vorliegende Buch nur mit Kenntnissen aus der komplexen Funktionentheorie gut lesbar sein. Es ist teilweise sehr knapp geschrieben, so daß ich bezweifle, ob ein durchschnittlicher Student nur mit diesen Kenntnissen auskommt, um den Inhalt dieses Buches im Selbststudium auch wirklich verstehen zu können. Wenn man z. B. die Galoistheorie nicht schon kennt, dann lernt man sie auch nicht nach einer kurzen, zweiseitigen Einführung kennen. Besitzt der Leser allerdings einen breiteren mathematischen Hintergrund, so stellt das Buch eine gute Einführung in die Theorie der elliptischen Kurven aus der Sicht des 19. Jahrhunderts dar. Es eignet sich sicher besonders gut als ergänzende Literatur zu den heutigen Vorlesungen über elliptische Kurven. Und daher möchte ich jedem potentiellen Dozenten einer solchen Vorlesung empfehlen, einen Blick in dieses Buch zu werfen.

Essen H.-G. Rück

Laumon, J., Cohomology of Drinfeld Modular Varieties, Part I and II; Automorphic forms, trace formulas and Langlands correspondence. Cambridge University Press 1996, 344 + XIV S., DM 88,-; 1997, 366 + XI S., DM 120,–

Seit langem ist den Mathematikern die merkwürdige Parallelität zwischen der Theorie der algebraischen Zahlkörper und der der algebraischen Funktionenkörper in einer Variablen, insbesondere mit endlichem Konstantenkörper, wohlbekannt. Fortschritte und neue Sichtweisen in einer der beiden Theorien haben so immer wieder zu Fortschritten und Anregungen der anderen Theorie geführt.

Um so überraschender ist es, daß der Aufmerksamkeit der Zahlentheoretiker eine so wichtige Entdeckung wie die der elliptischen Moduln (heute Drinfeld-Moduln) so lange entgehen konnte. Diese bilden, was ihre analytische Theorie angeht, das genaue Analogon der elliptischen Kurven der klassischen Theorie.

Man erhält sie folgendermaßen:

Zu einem algebraischen Funktionenkörper F einer Variablen mit endlichem Konstantenkörper und ausgezeichneter Bewertungsstelle ∞ von F bildet man einen Körper $\mathbb{C}_\infty$, der die Komplettierung F_∞ von F enthält und selber sowohl vollständig als auch algebraisch abgeschlossen ist.

Bezeichnet A den Ring derjenigen Funktionen aus F, die außerhalb ∞ regulär sind, so enthält $\mathbb{C}_\infty$ diskrete A-Moduln beliebigen Ranges d. Diese uniformisiert man leicht mit Hilfe von Weierstraß-Produkten und wird direkt auf den algebraischen Begriff eines Drinfeld-Moduls vom Rang d geführt.

Über einem Körper L über A ist ein derartiger Drinfeld-Modul einfach ein Ringhomomorphismus $\varphi : A \to \mathrm{End}_L(\mathbb{G}_a)$ des Ringes A in die Endomorphismen der additiven algebraischen Gruppe $\mathbb{G}_a$ über L (wir sind in Charakteristik p!), der zusätzlich eine gewisse Gradbedingung erfüllt. Man kann diese Objekte nun sogar über beliebigen kommutativen Ringen (oder sogar Schemata) über A definieren und sie mit level-I Strukturen für die I-Teilungspunkte für Ideale I in A versehen.

So wird man in natürlicher Weise zu den Drinfeldschen Modulschemata $M_I^{(d)}$ geführt, die diese Objekte im Sinne der algebraischen Geometrie als Modulvarietäten klassifizieren. Sie sind affine glatte Schemata der relativen Dimension $(d-1)$ über dem offenen Teil $\operatorname{Spec}(A) \setminus V(I)$ der zu F gehörenden algebraischen Kurve X und entsprechen für $d=2$ ganz genau den klassischen Modulkurven zu Kongruenzuntergruppen der Stufe I. Alles dies und viel mehr steht in der berühmten Arbeit [Dr] von Drinfeld, die er als Neunzehnjähriger(!) geschrieben hat.

Die Hauptanwendung seiner Theorie, die noch einmal weit über das schon genannte hinausgeht, gibt Drinfeld dann, indem er einen Teil des Langlands-Programms für die $GL(2)$ im Funktionenkörperfall beweist.
Dieses Programm vermutet eine bijektive Korrespondenz zwischen l-adischen Galoisdarstellungen eines globalen Körpers und den sog. automorphen Darstellungen im Sinne der Darstellungstheorie.
Für den Fall der $GL(2)$ gelingt es Drinfeld dabei, jeder automorphen Darstellung, deren Komponente in ∞ die sog. Steinberg-Darstellung ist, eine Galoisdarstellung zuzuordnen, die man in der l-adischen 1-Kohomologie der Drinfeldschen Modulkurven findet.

Da Deligne vorher [De] gezeigt hatte, daß man umgekehrt zu einer gegebenen zweidimensionalen l-adischen Darstellung eine automorphe Darstellung findet, so war damit zumindest ein Teil des Langlandsprogramms im Funktionenkörperfall für die $GL(2)$ erledigt.

Die vorliegenden beiden Bände von Laumon befassen sich nun mit der Weiterführung dieses Programms für den Fall der $GL(d)$. Auf dem virtuellen Modul

$$\sum_n (-1)^n H_c^n(M^{(d)} \otimes_F \bar{F}, \mathbb{Q}_l)$$

mit

$$H_c^n(M^{(d)} \otimes_F \bar{F}; \mathbb{Q}_l) = \varinjlim_I H_c^n(M_I^{(d)} \otimes_F \bar{F}; \mathbb{Q}_l)$$

als induktivem Limes der etalen Kohomologiegruppen mit kompaktem Träger der Modulvarietäten $M_I^{(d)}$ operieren die Gruppen $\operatorname{Gal}(\bar{F}/F)$ und $\mathrm{GL}(d, \mathbb{A}_F^{(\infty)})$ ($\mathbb{A}_F^{(\infty)}$ der Ring der Adele ohne die Stelle ∞) vertauschbar und brechen daher den obigen virtuellen Modul in die Summe (Differenz) von Tensorprodukten irreduzibler Darstellungen $(\rho \otimes \pi)$ auf, ρ irreduzible Galoisdarstellung von $\operatorname{Gal}(\bar{F}/F)$, $\pi\otimes$ (Steinberg$_\infty$) wird eine automorphe Darstellung von $GL(d, \mathbb{A}_F)$ werden.

Die Zuordnung $\pi \mapsto \rho$ wird die gesuchte Zuordnung herstellen. Die Durchführung dieses Programmes zerfällt in drei Teile:

Im ersten Teil wird eine Spurformel vom Grothendieck-Lefschetz Typ benutzt, die die Spur passender Elemente der Gruppen $\operatorname{Gal}(\bar{F}/F) \times GL(d, \mathbb{A}_F^\infty)$ in Zusammenhang mit Anzahlen von Fixpunktmengen bringt.

Hierzu ist eine genaue Beschreibung der Drinfeldschen Modulvarietäten über endlichen Körpern vonnöten. Dies geschieht im Kapitel 2, Teil I des Werks und liefert als Ergebnis in Kapitel 3, Teil I, die Anzahl der Fixpunkte in Termen getwisteter Orbitalintegrale.

Diese getwisteten Orbitalintegrale müssen dann nach einem festen Verfahren mit Hilfe eines sog. fundamentalen Lemmas in gewöhnliche Orbitalintegrale mit Transfermethoden umgewandelt werden und mit dem elliptischen Teil der Arthur-Selbergschen Spurformel verglichen werden. Dies geschieht in Kapitel 4, 5, 6 von Teil I.

Teil I des Werkes enthält dann noch zwei Kapitel 7 und 8. Kapitel 7 ist allgemeinbildend über die unverzweigte Hauptserie, Kapitel 8 enthält zusätzlich Informationen über die Steinberg-Darstellung.

Der Teil I enthält darüber hinaus vier nützliche Anhänge, A) über zentral-einfache Algebren, B) über Dieudonné-Theorie der Drinfeld-Moduln, nach einem Text von Drinfeld, C) ist kurz und gibt eine kombinatorische Formel, aber D) ist wieder sehr inhaltsreich und gibt auf ca. 50 Seiten eine kompakte Einführung in die Darstellungstheorie p-adischer Gruppen.

Teil II des Werks ist eine tour de force, um mit den Problemen der Nichtkompaktheit fertig zu werden. Auf der einen Seite sind ja die Drinfeldschen Modulvarietäten affin und nicht projektiv-algebraisch, auf der anderen Seite der harmonischen Analysis sind die Quotienten $GL(d,F) \cdot F_\infty^\times \setminus GL(d,\mathbb{A}_F)$ nicht kompakt.

Der ersten Schwierigkeit auf der Seite der algebraischen Geometrie begegnet man mit einer Vermutung von Deligne, die erfreulicherweise seit einiger Zeit ein Satz ist, der von Pink, Shpiz und Fujiwara bewiesen worden ist. Bezeichnet Frob_o einen Vertreter der Konjugationsklasse zum Frobeniusautomorphismus zur Stelle $o \in X, f^{\infty,o}$ einen Hecke-Operator (mit Träger außerhalb ∞, o) so kann man die Anzahl der Fixpunkte der Korrespondenz $(\mathrm{Frob}_o^r \times f^{\infty,o})$ zumindest für genügend große r mit der Spur des induzierten Endomorphismus auf der l-adischen Kohomologie mit kompaktem Träger von $M^{(d)} \times_F \bar{F}$ identifizieren.

Dies beseitigt die Schwierigkeiten auf der Seite der algebraischen Geometrie. Auf der Seite der harmonischen Analysis geht man in gewisser Weise ähnlich vor. Die Gruppe $F_\infty^\times \setminus GL(d,\mathbb{A}_F)$ operiert auf dem Hilbertraum

$$L^2(F_\infty^\times GL(d,F) \setminus GL(d,\mathbb{A}_F))$$

und jede lokal konstante Funktion f mit kompaktem Träger auf $F_\infty^\times \setminus GL(d,\mathbb{A}_F)$ induziert per Faltung einen Operator $R(f)$ auf dem obigen Raum L^2. Wie üblich besitzt dieser Operator einen Kern $K(h,g) = \sum\limits_{\gamma \in GL(d,F)} f(h^{-1}\gamma g)$ und wie üblich sollte das Integral

$$J(f) = \int\limits_{F_\infty^\times GL(d,F) \setminus GL(d,\mathbb{A}_F)} K(g,g) \left(\frac{dg}{dz_\infty d\gamma} \right)$$

über die Diagonale die Spur des Operators ergeben. Unglücklicherweise ist nun $R(f)$ nicht von Spur-Klasse, weiter ist obiges Integral über die Diagonale nicht absolut konvergent.

Um diesen Schwierigkeiten (im Zahlkörperfall) zu begegnen, hat Arthur „abgeschnittene“ (truncated) Versionen $J^T(f)$ des Integrals $J(f)$ eingeführt, die absolut konvergent sind und bei geschickter Wahl des „Abschneideparameters“ T $J^T(f) = J(f)$ erfüllen.

Dieser Teil des Programms macht es für den Autor erforderlich, die Argumente von Arthur, die nur für den Zahlkörperfall durchgeführt sind, in der Situation eines Funktionenkörpers genau nachzuvollziehen.

Das Literaturverzeichnis zu Teil II nennt 14 (!!) Arbeiten von Arthur zu der genannten Problematik und entsprechend viel Arbeit war für Laumon zu leisten, um zu sichern, daß wirklich alles gut geht. Immerhin, das Ziel wird schließlich erreicht und auch das meiste im Buch bewiesen und nicht nur zitiert.

Im Endeffekt ergibt sich eine explizite Formel für die alternierende Summe von Spuren

$$\sum_n (-1)^n tr(\mathrm{Frob}_o^r \times f^{\infty,o} : H_c^n(M_I^d \otimes_F \bar{F}, \mathbb{Q}_l))$$

in Termen cuspidaler automorpher Darstellungen von $F_\infty^\times \setminus GL(d', \mathbb{A})$ $(d' = 1, \ldots, d)$.

Mittels Standardmethoden ergeben sich als Korollar die Petersson-Vermutung und die Langlandskorrespondenz (in der Richtung $\pi \mapsto \rho$ (siehe oben)) für cuspidale automorphe Darstellungen π von $F_\infty^\times \setminus GL(d, \mathbb{A}_F)$, deren lokale Komponente π_∞ die Steinberg-Darstellung ist.

Dies alles findet sich in §§ 9–12 von Teil II. § 13 enthält einige sehr interessante Vermutungen über die Schnittkohomologie der Drinfeldschen Modulvarietäten $M_I^{(d)}$. Der zweite Band wird bereichert durch vier weitere Anhänge D), E), F) und G). D) setzt Anhang D) aus Teil I fort, E) enthält die Reduktionstheorie der $GL(d)$ in der Situation eines Funktionenkörpers und beweist etwa noch einmal die Harder-Narasimhan Filtration, mit der das meiste dann gemacht wird. F) gibt den Beweis eines wichtigen Lemmas aus Abschnitt 10, G) schließlich faßt für den Leser noch einmal die Spektraltheorie von $L^2(G)$ für den Fall $G = GL(d)$ zusammen und führt die einschlägigen Eisensteinreihen ein. Der Anhang, der auf Resultate von Waldspurger zurückgeht, enthält die für Band II wichtigen Residuenberechnungen gewisser Verkettungsoperatoren.

Insgesamt sollte zusammenfassend vielleicht zuerst gesagt werden, was Laumons Werk nicht ist. Sicherlich keine Einführung oder Darstellung der Theorie der Drinfeld-Moduln. Hier wird in § 1 des ersten Bandes auf wenigen Seiten nur das Nötigste gemacht. Es folgen dann zwar einige Ergänzungen, insbesondere Drinfeld-Moduln über endlichen Körpern und Dieudonné-Theorie, aber etwa auch über die algebraische Geometrie der Drinfeldschen Modulvarietäten, z.B. ihre Uniformisierung an der Stelle ∞ von F erfährt man nicht viel. Es handelt sich vielmehr um die systematische Durchführung eines Teils des Langlandsschen Programmes für einen Fall beliebigen Ranges d in der nichtkompakten Situation unter Heranziehung des vollen technischen Arsenals der harmonischen Analysis.

Dies ist in der vorliegenden Situation der Drinfeld-Moduln einfacher als im klassischen Fall der abelschen Varietäten, da die Gruppen $GL(d)$ doch in vieler Hinsicht einfacher sind, als die symplektischen Gruppen, die dort die entscheidende Rolle spielen.

Trotz dieser „vereinfachten Situation“ ist das heranzuziehende technische Instrumentarium schon furchterregend. Laumon verwendet dies mit Meisterschaft. Das Werk ist, entsprechend dem bekannten Stil des Autors, außerordentlich klar geschrieben, bedenkt man die eben erwähnten Schwierigkeiten.

Ich hätte mir noch gewünscht, der Verfasser hätte seine Methode mit der älteren Technik, auf Kongruenzrelationen nach Eichler-Shimura zurückzugreifen, die etwa Drinfeld in seiner Originalarbeit für den Fall $GL(2)$ verwendet, in ihrer Tragweite verglichen.

Insgesamt kann das Werk jedem, der sich mit den Methoden der harmonischen Analysis in diesem Teil der Zahlentheorie befassen möchte, nur nachdrücklich empfohlen werden.

Der Genauigkeit halber sei noch ergänzt, daß Drinfeld selber bereits gegen Ende der siebziger Jahre in der Lage war, die allgemeine Langlands-Reziprozität (ohne jede Einschränkung an die Stelle ∞) für den Fall der $GL(2)$ zu beweisen. Dazu war die Einführung der sog. „shtuka“ nötig, die eine Verallgemeinerung der Drinfeld-Moduln darstellen. Laumons Schüler L. Lafforgue hat bereits große Fortschritte dabei erzielt, auch dieses Programm auf den Fall der $GL(d)$ auszudehnen.

[De] Deligne, P.: Les constantes des équations fonctionelles des fonctions L. In: Springer Lecture note vol. 349, (1973), 501–597
[Dr] Drinfeld, V. G.: Elliptic modules, Math. USSR Sbornik 23, (1974), 561–592
[L] Lafforgue, L.: Chtoukas de Drinfeld et conjecture de Ramanujan-Petersson, Astérisque 243, (1997), 1–329

Göttingen U. Stuhler

Heyde, C. C., Quasi-Likelihood and its Application, A General Approach to Parameter Estimation (Springer Series in Statistics), Berlin u. a.: Springer 1997, 240 S., DM 88,–

Insbesondere in den letzten zehn Jahren sind zahlreiche Arbeiten zu Schätzfunktionen, insbesondere für stochastische Prozesse und verallgemeinerte lineare Modelle, erschienen. Die vorliegende Monographie ist die erste systematische Darstellung. Sie behandelt die Wahl geeigneter Klassen von Schätzfunktionen und die Bestimmung der optimalen Schätzfunktion; der Quasi-Likelihood.

Die Methode sei an einem einfachen Beispiel illustriert. Wir beobachten eine stationäre Markov-Kette $X_1, \ldots, X_n$ und haben ein eindimensionales parametrisches Modell $m_\vartheta(X_{i-1})$ für den bedingten Erwartungswert von X_i gegeben X_{i-1}. Die bedingte Varianz sei mit $v(X_{i-1})$ bezeichnet. Für beliebige Gewichte $a(X_{i-1})$ ist dann die Schätzfunktion

$$G_\vartheta = \sum a(X_{i-1})(X_i - m_\vartheta(X_{i-1}))$$

ein Martingal. Die Lösung der Schätzgleichung $G_\vartheta = 0$ liefert (unter geeigneten Voraussetzungen) einen konsistenten und asymptotisch normalen Schätzer für ϑ mit asymptotischer Varianz

$$E\, G_\vartheta^2/(E\, G_\vartheta')^2 = E\, a^2 v/(E\, am_\vartheta')^2.$$

Nach der Schwarzschen Ungleichung wird die Varianz minimiert durch die Gewichte $a = m_\vartheta'/v$. Die zu diesen Gewichten gehörige Schätzfunktion ist natürlich nur brauchbar, wenn sie von der Verteilung der Kette nur über ϑ abhängt, wenn wir also auch ein parametrisches Modell $v_\vartheta(X_{i-1})$ für die bedingte Varianz haben. Die Schätzfunktionen sind robust gegen eine Fehlspezifikation der bedingten Varianz. Sie verwenden also ausschließlich Information, die im Modell für den bedingten Erwartungswert steckt.

Die Monographie betrachtet allgemeine Klassen von Schätzfunktionen G_ϑ und konzentriert sich auf die Minimierung von $E\, G_\vartheta^2/(E\, G_\vartheta')^2$ und von verwandten Ausdrükken. Kapitel 2 und 3 führen die grundlegenden Begriffe und Ergebnisse ein und vergleichen Quasi-Likelihood-Schätzfunktionen mit den E-suffizienten Schätzfunktionen im Sinne von Small ind McLeish (1994). Kapitel 4 und 5 betrachten asymptotisch minimale Konfidenzbereiche und eine asymptotische Version der Quasi-Likelihood-Methode. Kapitel 6 behandelt die optimale Kombination zweier Schätzfunktionen. Kapitel 7 illustriert die Anwendung der Quasi-Likelihood-Methode auf bedingtes Schließen anhand von Modellen mit einer linearen Nebenbedingung an den Parameter, von Modellen mit Störparametern und von Modellen mit fehlenden Daten. Kapitel 8 zeigt, daß sich die Score-Funktion gelegentlich einfacher als optimale Schätzfunktion herleiten läßt. Kapitel 9 und 10 gehen kurz auf Teststatistiken und Modelle mit unendlichdimensionalen Parametern ein. Kapitel 11 stellt einige Anwendungen ausführlicher dar.

Die Darstellung ist mit Absicht heuristisch und geht nur in Kapitel 12 kurz auf die Voraussetzungen ein, unter denen Lösungen von Schätzgleichungen $G_\vartheta = 0$ konsistent und asymptotisch normal sind und ihre asymptotische Varianz durch $E\, G_\vartheta^2/(E\, G_\vartheta')^2$ gegeben ist. Der Verzicht auf technische Resultate ermöglicht es, eine Vielzahl ganz unterschiedlicher Modelle zu behandeln, unter anderem: verallgemeinerte lineare Regressionsmodelle, longitudinale Daten, stochastische Differentialgleichungen, autoregressive Modelle, State-Space-Modelle, Hidden-Markov-Zufallsfelder, stochastische Epidemie-Modelle.

Das Buch hat ein recht vollständiges Literaturverzeichnis und einen detaillierten Index. Jedes Kapitel enthält einen einführenden Abschnitt mit einer Inhaltsbeschreibung und historischen Hinweisen, und einen abschließenden mit Übungen. Das Buch ist sehr gut lesbar. Die zahlreichen Beispiele und Vergleiche mit anderen Zugängen zu optimalen

Schätzern machen es zu einer kurzweiligen Lektüre. Es eignet sich auch als Grundlage für ein Seminar zur asymptotischen Statistik.

Siegen W. Wefelmeyer

Mandelbrot, B., Fractals and Scaling in Finance. Discontinuity, Concentration, Risk. Berlin u. a.; Springer 1997, 455 S., DM 84,–

This book is the first in a multivolume series of Selecta by Benoit B. Mandelbrot. Its focus is on Mandelbrot's contributions to finance, and its main interest lies in its historical role. About one half of the book are reprints of classical papers by Mandelbrot from the sixties and early seventies. In some cases, comments have been added, but most of the original papers are essentially unchanged. The remaining half of the book consists to a large extent of mainly introductory or expository sections with the goal of putting everything into a major general framework. Some notable exceptions are mentioned below.

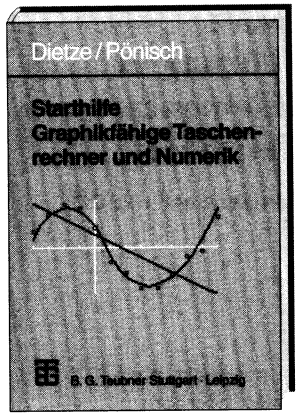
As a partial collection of selected papers, the book has certainly quite some historical value and interest. It also presents a remarkable panorama of ideas and clearly shows what Paul Samuelson called Mandelbrot's "incorrigibly original mind". In other aspects, however, I found some deficiencies. Most important among these is probably the lack of a balanced presentation. While some of the personal comments are entertaining, one misses at least an overview of other work that has been done in the area of Mandelbrot's research in finance. There is hardly any mention of the evolution between the sixties and today, and there is no effort to provide a perspective of the field as a whole. As a consequence, some comparions are quite clearly biased and also not up to date.

In purely mathematical terms, the reader should not expect too much. Most of Mandelbrot's original papers contain good and interesting ideas, but corresponding solid mathematical results are much harder to pin down. The same applies to the newly written chapters. But once one accepts this, parts of the book make good to very good reading. Personally, I most enjoyed Chapters 5, 14 and 16. Chapter 5 proposes a new classification of states of randomness into wild, slow and mild randomness, and this might stimulate some further developments. Chapter 14 is the classical Mandelbrot model of L-stable returns for asset prices, and Chapter 16 (very lucidly written by Eugene Fama) summarizes the ideas of Chapter 14 and adds some of Fama's own contributions in the area. Of the others, I should also like to mention Chapter 2 (an introduction to the ideas of scaling properties in finance, and more generally in economics and physics), Chapters 3 and 10 (on the use of scaling distributions for modelling incomes), Chapter 8 (a detailed comment on possible explanations or nonexplanations of scaling behaviour), and Chapter 21, where the use of subordination (in the classical Bochner sense) is proposed as a tool to obtain more realistic asset price models.

In summary, this book is a useful collection of Mandelbrot's most important papers on modelling in finance, supplemented by some more recent ideas on the role of scaling rules in that field.

Berlin M. Schweizer

Dietze/Pönisch
Starthilfe Graphikfähige Taschenrechner und Numerik



Von Doz. Dr. **Siegfried Dietze**
und Dr. **Gerd Pönisch**
Technische Universität Dresden

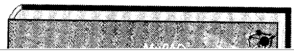
1998. 102 Seiten mit 10 Bildern.
16,2 x 22,9 cm.
Kart. DM 19,80
ÖS 145,– / SFr 18,–
ISBN 3-519-00236-1

Graphikfähige Taschenrechner (GTR) mit oder ohne Computeralgebra-System werden auf Grund ihrer beachtlichen Leistungsfähigkeit und ihrer Handlichkeit zunehmend in die Schul- und Hochschulausbildung integriert. Für eine qualifizierte Rechnernutzung sind Kenntnisse der Numerischen Mathematik unerläßlich. Diese Starthilfe behandelt neben der prinzipiellen Arbeitsweise vor allem die Standardmöglichkeiten der GTR zur Bearbeitung von Grundaufgaben der Numerik: Differentiation und Integration, Minima und Maxima, lineare Gleichungssysteme, Regression. Das Buch hat einführenden Charakter, ist beispielorientiert und wendet sich an Studienanfänger, Lehrer und Schüler.

Preisänderungen vorbehalten.

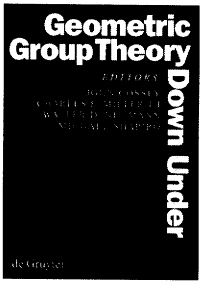
B. G. Teubner Stuttgart · Leipzig
Postfach 80 10 69 · 70510 Stuttgart

Schwarz



Geometric Group Theory Down Under

Proceedings of a Special Year in Geometric Group Theory, Canberra, Australia, 1996



EDITORS:
JOHN COSSEY · CHARLES F. MILLER III ·
WALTER D. NEUMANN · MICHAEL SHAPIRO

1999. 24 x 17 cm. XII, 333 pages. With 27 figures.
Hardcover. DM 248,–/öS 1.810,–/sFr 221,–
USA, Canada, Mexico. US$ 129.95
• ISBN 3-11-016366-7

Contents

B. Berceanu: The topology of polynomial varieties · *R. Bieri:* Finiteness length and connectivity length for groups · *B. H. Bowditch:* Convergence groups and configuration spaces · *C. M. Campbell, E. F. Robertson, N. Ruškuc, R. M. Thomas:* Groups, semigroups and finite presentations · *J. W. Cannon, W. J. Floyd, W. R. Parry:* Conformal modulus: the graph paper invariant or the conformal shape of an algorithm · *R. Charney:* Injectivity of the positive monoid for some infinite type Artin groups · *J. Crisp:* Injective maps between Artin groups · *J. F. P. Hudson:* The intersection of flat subsets of a braid group · *W. M. Kantor, T. Penttila:* Reconstructing simple group actions · *G. I. Lehrer, T. A. Springer:* Intersection multiplicities and reflection subquotients of unitary reflection groups I · *C. F. Miller III, W. D. Neumann, G. A. Swarup:* Some examples of hyperbolic groups · *S. A. Morris, V. N. Obraztsov:* Embedding free amalgams of discrete groups in non-discrete topological groups · *L. Mosher:* Indiscrete representations, laminations, and tilings · *W. D. Neumann, M. Shapiro:* Automatic structures on central extensions · *A. Yu. Ol'shanskii:* Distortion functions for subgroups · *Ch. Pittet, L. Saloff-Coste:* Amenable groups, isoperimetric profiles and random walks · *J. R. Stallings:* Whitehead graphs on handlebodies

Price is subject to change

WALTER DE GRUYTER GMBH & CO. KG
Genthiner Straße 13 · D-10785 Berlin
Tel. +49 (0)30 2 60 05-0
Fax +49 (0)30 2 60 05-251
Internet: www.deGruyter.de

W DE G
de Gruyter
Berlin · New York

Number Theory in Progress

Proceedings of the International Conference on Number Theory organized by the Stefan Banach International Mathematical Center in Honor of the 60th Birthday of Andrzej Schinzel, Zakopane, Poland, June 30-July 9, 1997