D 20577
103. Band Heft 1

DMV

Jahresbericht
der Deutschen Mathematiker-Vereinigung

Der „Jahresbericht" ist das offizielle Veröffentlichungsorgan der Deutschen Mathematiker-Vereinigung, für dessen inhaltliche Gestaltung im Auftrag des Präsidiums der jeweilige Herausgeber zuständig ist. Im „Jahresbericht" sollen vornehmlich Überblicksartikel über Teilgebiete der reinen und angewandten Mathematik, Nachrufe sowie historische Artikel und Buchbesprechungen veröffentlicht werden.

Manuskripte:
Alle für die Schriftleitung des Jahresberichts bestimmten Briefe und Manuskripte sind an Prof. Dr. A. Krieg zu richten. Für Buchbesprechungen ist Prof. Dr. H. Lange zuständig. Bücher, von denen eine Besprechung erfolgen soll, werden bei den Verlagen angefordert. Autoren von Buchbesprechungen und Artikeln werden gebeten, die vorhandenen LATEX-style-files für den Jahresbericht zu verwenden. Somit kann der Aufwand für die Satzarbeiten erheblich reduziert werden. Sollten Illustrationen in die Arbeiten integriert werden, können diese auch in das Satzsystem übernommen werden. Dazu ist es erforderlich, dass die Daten der Abbildungen nochmals in separaten Dateien einzeln abgespeichert werden. Die LATEX-style-files sind neben weiteren Informationen im Internet verfügbar unter

http://www.mathA.rwth-aachen.de/dmv/index.html

Auf Anfrage können die style-files auch auf Diskette zugeschickt werden.
Grundsätzlich sollen nur solche Manuskripte eingereicht werden, die nicht gleichzeitig an anderer Stelle zur Veröffentlichung eingereicht oder bereits veröffentlicht worden sind. Mit der Annahme zur Veröffentlichung erwirbt der Verlag das Recht zur Vervielfältigung und Verbreitung sowie das Recht der Übersetzung in andere Sprachen.

Verlag:
GWV Fachverlage
B. G. Teubner GmbH Stuttgart · Leipzig · Wiesbaden
Postfach 1546, 65173 Wiesbaden
Abraham-Lincoln-Straße 46, 65189 Wiesbaden
http://www.teubner.de
http://www.gwv-fachverlage.de

Geschäftsführer: Dr. Hans-Dieter Haenel
Verlagsleitung: Dr. Heinz Weinheimer
Gesamtleitung Anzeigen: Thomas Werner
Gesamtleitung Produktion: Reinhard van den Hövel
Gesamtleitung Vertrieb: Heinz Detering

Abo-/Leserservice:
Tatjana Hellwig
Telefon: (06 11) 78 78-1 51
Fax: (06 11) 78 78-4 23
E-Mail: tatjana.hellwig@bertelsmann.de

Marketing/Sonderdrucke:
Stefanie Hoffmann
Telefon: (06 11) 78 78-3 79
Fax: (06 11) 78 78-4 39
E-Mail: stefanie.hoffmann@bertelsmann.de

Abonnentenverwaltung:
(Änderungen von Adressen und Bankverbindung, Rückfragen zu Rechnungen oder Mahnung) VVA-Zeitschriftenservice, Abt. D6F6 / Jahresbericht der Deutschen Mathematiker-Vereinigung,
Postfach 7777, 33310 Gütersloh
Ursula Müller
Telefon: (0 52 41) 80-19 65
Fax: (0 52 41) 80-96 20
E-Mail: ursula.mueller@bertelsmann.de

Bezugsbedingungen:
Die Zeitschrift erscheint 4mal jährlich zum Jahresabonnementpreis von DM 178 (158 sFr) inkl. Versandkosten. Der Bezug von Einzelheften ist nicht möglich. Schriftliche Kündigung des Abonnements spätestens sechs Wochen vor Ablauf des Bezugsjahres.
Für persönliche Mitglieder der DMV, die den Jahresbericht zu beziehen wünschen, ist der zwischen DMV und Verlag vereinbarte Bezugspreis maßgebend, der im Rahmen des Mitgliedsbeitrags erhoben wird.

Satz: Fotosatz Behrens, D-68723 Oftersheim
Druck: pagina media gmbh, D-69502 Hemsbach

ISSN 0012-0456

Jahresbericht
der Deutschen Mathematiker-Vereinigung

Herausgegeben von A. Krieg
unter Mitwirkung von
U. Gather, E. Heintze, B. Kawohl,
H. Lange, H. Triebel

103. Band

B. G. Teubner Stuttgart · Leipzig · Wiesbaden 2001

Printed in Germany. ISSN 0012-0456
Satz: Fotosatz Behrens, Oftersheim
Druck: pagina media gmbh, Hemsbach

Jahresbericht
der Deutschen Mathematiker-Vereinigung

Inhalt Band 103, Heft 1

1. Abteilung

2. Abteilung

In den nächsten Heften erscheinende Arbeiten:

L. Reich, A. Schleiermacher, K. Strambach: György Targonski zum Gedächtnis
A. Hirschowitz: Michael Schneider (1942–1997)

Anschriften der Herausgeber

Prof. Dr. Aloys Krieg, Lehrstuhl A für Mathematik, RWTH Aachen, 52056 Aachen
E-Mail: krieg@mathA.rwth-aachen.de

Jber. d. Dt. Math.-Verein. 103 (2001) 1–6
Mathematics Subject Classification: 01 A 70
Keywords and Phrases: algebraische Geometrie, kommutative Algebra, homologische Algebra

Zum Gedenken an Manfred Herrmann

T. Korb und P. Schenzel

Am 15. November 1997 verstarb – einen Tag nach der Vollendung seines 65. Lebensjahres – Prof. Dr. Manfred Herrmann, Hochschullehrer für Mathematik an der Universität zu Köln. Er schied unerwartet, zu früh und betrauert von Kollegen und Freunden aus dem Leben. Wie kein zweiter Mathematiker seiner Generation war Manfred Herrmann dem wissenschaftlichen Geschehen seiner Disziplin im geteilten und wiedervereinigten Deutschland und den Kollegen hüben wie drüben verbunden.

Sein Arbeitsgebiet umfaßt Bereiche der *algebraischen Geometrie,* der *kommutativen Algebra* und Anwendungen der *homologischen Algebra.* Als Mathematiker wirkte Manfred Herrmann in erster Linie an den Universitäten Halle (ab 1964), Berlin (ab 1970) und Köln (ab 1979). Darüber hinaus war er unter anderem als Gastprofessor an den Universitäten Moskau, Budapest, Genua, Orsay, Purdue, Nagoya, Kyoto (R.I.M.S.), Bombay (Tata Inst.), Kingston und Barcelona tätig und wirkte ein Jahr lang (1978/79) am SFB Theoretische Mathematik der Universität Bonn.

Seinem unermüdlichen Einsatz für den Austausch und die Förderung von Mathematikern ist es zu verdanken, daß die Universität Köln – schon bald nach der Aufnahme seiner Tätigkeit dort – zu einem international bekannten Zentrum der kommutativen Algebra wurde. Zu seiner Arbeitsgruppe gehörten neben seinen Doktoranden regelmäßig auch Gäste aus dem In- und Ausland; mancher blieb über Jahre hinweg.

Neben seinem wissenschatlichen Engagement zeichnete sich Manfred Herrmann als allseitig interessierte und informierte Persönlichkeit aus. Er war ein freundlicher Mann, offen, tolerant und humorvoll; leicht fand er Kontakt, auch zu jungen Leuten.

Seine kulturellen, insbesondere historischen Interessen teilte er mit seiner Ehefrau Gerda Herrmann, mit der er seit 1961 verheiratet war. Viele Mathematiker schätzten kulturhistorische Exkursionen mit den Herrmanns und Einladungen in ihre Bonner Wohnung, die den Mitarbeitern und Studenten offen stand. Wer einmal dort zu Gast war, wird bestätigen, daß es neben mathematischen Gesprächen stets auch angeregten Austausch über Kunstausstellungen, Literatur und Theater gab.

Geboren im schlesischen Königszelt, war Manfred Herrmann mit seiner Familie in Folge des Krieges nach Halle (Saale) umgesiedelt worden, wo er nach dem Abitur im Jahre 1951 ein Studium der Mathematik und Physik an der Martin-Luther-Universität Halle-Wittenberg aufnahm. Er diplomierte im Jahre 1956 als Schüler von Professor Ott-Heinrich Keller. Nach einer kurzen Assistenz bei Professor Maria Hasse, an der Technischen Universität Dresden kehrte er nach Halle zurück. Seine Promotion *‚Über birationale Berührungstransformationen zweiter Ordnung‘* (November 1958) und die Habilitation *‚Zur Multiplizitätsbestimmung in der abzählenden Geometrie bei der Behandlung von Berührungsproblemen‘* (Juli 1963) entstanden ebenfalls während seiner Halleschen Zeit am I. Mathematischen Institut der Martin-Luther-Universität. Bestimmt war diese wissenschaftlich aktive Phase auch durch die Persönlichkeit seines Lehrers Ott-Heinrich Keller und dessen Einfluß als Forscher, wie sie Manfred Herrmanns Kollegen Ludwig Stammler und Wolfgang Vogel in [SV] schildern.

Nach der Ernennung zum Universitätsdozenten (Februar 1964) und der Berufung zum Professor mit einfachem Lehrauftrag an der Universität Halle (September 1966) mit besonderer Wahrnehmung der Forschung auf dem Gebiet der Algebra und der Algebraischen Geometrie erfolgte Manfred Herrmanns Berufung zum ordentlichen Professor für Mathematik an die Universität Halle zum September 1969 und an die Humboldt-Universität zu Berlin im September 1970, wo er bis 1978 wirkte. In dieser Zeit, geprägt durch mühevolle Kleinarbeit in ständiger Auseinandersetzung mit der Bürokratie, gelang es ihm, internationale Kontakte herzustellen und dauerhaft zu pflegen, einer durchaus vorhandenen Tendenz zum Provinziellen in der Forschung der DDR entgegenwirkend.

Im Jahre 1976 wurde Manfred Herrmann zum Mitglied der *Deutschen Akademie der Naturforscher Leopoldina* in Halle (Saale) gewählt, was ihm weitere Möglichkeiten wissenschaftlichen Austausches ermöglichte, wirkte doch die Leopoldina als älteste Wissenschaftlervereingung Deutschlands auch in der Zeit der Teilung fort. In diesem Rahmen gelang ihm – gemeinsam mit Ott-Heinrich Keller und Friedrich Hirzebruch – die Vorbereitung und Organisation des Leopoldina-Symposiums *Singularitäten*, das im Mai 1978 im thüringischen Schloß Reinhardsbrunn stattfand. Die Tagung war eine hochkarätige Veranstaltung, die neben zwei Fields-Medaillen-Preisträgern, David Mumford und Heisuke Hironaka, die internationale Fachwelt zusammenführte (siehe [HK]). Nicht zuletzt durch die unmittelbaren Kontakte – auch mit den vielen Teilnehmern aus der Bundesrepublik – wurde die Veranstaltung zu einem nachhaltigen Ereignis, das die wissenschaftliche Entwicklung vieler jüngerer Leute aus dem Osten Deutschlands beeinflusste.

Manfred Herrmann war auch maßgeblich an der Gründung der Zeitschrift *Beiträge zur Algebra und Geometrie* beteiligt (zusammen mit Ott-Heinrich Keller und Andor Kertesz) [HKK]. Diese Zeitschrift ermöglichte die Veröffentlichung mathematischer Arbeiten, ohne daß man sich einem staatlichen Antragsverfahren stellen mußte, wie es insbesondere für Veröffentlichungen im Westen erforderlich war. (Siehe hierzu auch die Darstellung in [Ko].)

Manfred Herrmanns ständiges Bestreben, Kontakte und Austausch mit Wissenschaftlern aus aller Welt, nicht nur für sich selbst, sondern auch für andere Forscher in der DDR zu ermöglichen, führten letztendlich dazu, daß ihm staatlicherseits seine wissenschaftsorganisatorische Arbeit zunehmend erschwert wurde. Dies empfand er auch als eine Behinderung seines wissenschaftlichen Wirkens insgesamt. Seiner konsequenten Auffassung wissenschaftlicher Freiheit folgend, entschloß er sich anläßlich einer privaten Reise in die BRD – sein Vater lag im Sterben – zum Verbleib im Westen Deutschlands. Die Schwere und Reichweite persönlicher Konsequenzen dieses Schrittes stehen außer Frage. Er selbst aber betonte immer, daß er sich gar nicht anders entscheiden konnte. Seiner Ehefrau erlaubte man erst nach 2 ½ Jahren, ihm in den Westen zu folgen.

Manfred Herrmann verlor niemals den Kontakt zu ehemaligen Kollegen aus Halle, Dresden und Berlin. Und nach der Wiedervereinigung der beiden deutschen Staaten war er einer der ersten, die für einen Ideenaustausch und Kommunikation zwischen allen deutschen Mathematikern sorgten. Nicht zuletzt setzte er sich für den Fortbestand traditionsreicher Fachgebiete im Osten nach der Wiedervereinigung ein.

Im Westen Deutschlands setze Manfred Herrmann mit ungebrochenem Leistungswillen seine Arbeit fort. Nach einer kurzen Tätigkeit an der Ruhruniversität Bochum und einer einjährigen Gastprofessur am *SFB Theoretische Mathematik* der Universität Bonn erhielt er zum Wintersemester 1979 einen Ruf an die Universität Köln, wo er bis zu seinem Tode mit bemerkenswerter Schaffenskraft wirkte.

Häufige Studienaufenthalte im Ausland, Präsenz auf Fachtagungen, die Pflege seiner Arbeitsgruppe zur kommutativen Algebra in Köln, die schnell internationale Anerkennung fand, und die Heranführung des wissenschaftlichen Nachwuchses an aktuelle Forschungsgebiete waren ihm eine Selbstverständlichkeit. Er verstand es, andere für ‚seine' Mathematik zu begeistern und ständig einen größeren Mitarbeiterstab um sich zu scharen.

Während seiner Kölner Zeit entstanden bis zu seinem Tode über 40 wissenschaftliche Arbeiten. Die Anzahl der Publikationen, welche durch ihn beeinflußt, motiviert oder gar erst ermöglicht wurden, läßt sich schwer abschätzen. Neben Gägeregt durch die durch Ott-Heinrich Keller vermittelten Kenntnisse der Jungschen Arbeiten im Flächenfall (siehe [KE]). Insbesondere aber unter dem Einfluß von Hironakas fundamentaler Arbeit zu diesem Thema (siehe [Hi]) fühlte sich Manfred Herrmann zu dem Studium der algebraischen Singularitäten hingezogen. In diesem Umfeld entwickelte er zahlreiche Beiträge zur Theorie der normalen Flachheit, einem Hilfsmittel, das die Übertragung lokaler Eigenschaften von Ringen auf Spezialisierungen ermöglicht. Als besonders hervorhebenswert sei hier die Arbeit [4] genannt, die gemeinsam mit seinem Schüler Rolf Schmidt entstand. Neben einer Reihe weiterer Doktoranden, vornehmlich aus seiner Kölner Zeit, war Rolf Schmidt ein von ihm besonders geschätzter Mitarbeiter. Trotz vielfältiger Bemühungen gelang es Manfred Herrmann nicht, Rolf Schmidt als Mitarbeiter für seine Berliner Arbeitsgruppe zu gewinnen. Die politischen Umstände der DDR verhinderten dies; Rolf Schmidt hatte sich 1968 als Student offen gegen den Einmarsch des Warschauer Paktes in die Tschechoslowakei ausgesprochen, was eine seinen Fähigkeiten entsprechende akademische Laufbahn nachträglich verhinderte.

Eine Zusammenfassung der Arbeiten zur normalen Flachheit stellt die gemeinsam mit Rolf Schmidt und Wolfgang Vogel vorgelegte Monographie [5] dar.

Während seiner Kölner Zeit entstand zusammen mit Shin Ikeda und Ulrich Orbanz seine umfangreichste Monographie (siehe [6]). Diese basierte unter anderem auch auf dem von Manfred Herrmann und Ulrich Orbanz initiiertem Studium der äquimultiplen Ideale. Diese Eigenschaft gestattet es, für Aufblasungsringe Eigenschaften zu übertragen, wie man sie für reguläre Folgen kennt.

Manfred Herrmanns anfängliches Interesse für globale Aspekte von Aufblasungsringen erweiterte sich insbesondere in Richtung homologischer Eigenschaften wie z.B. Cohen-Macaulay- und Gorenstein-Ringe sowie in Richtung multi-graduierter Strukturen. Es entstanden u. a. gemeinsame Veröffentlichungen mit S. Goto (Tokyo), C. Huneke (Purdue), E. Hyry (Helsinki), S. Ikeda (Nagoya), J. Ribbe (Köln), N.V. Trung (Hanoi) und S. Zarzuela (Barcelona).

Dem jungen japanischen Mathematiker Takesi Kawasaki gelang kürzlich die Konstruktion der Macaulayfizierung eines quasi-projektiven Schemas (siehe [Ka]). Um diese Abschwächung der Auflösung von Singularitäten rangen in der unmittelbar zurückliegenden Zeit zahlreiche wissenschaftliche Beiträge, initiiert durch Faltings Arbeit [F]. Takesi Kawasaki weilte für ein Jahr als Gast in Köln, wo er seine Ideen im Rahmen der Herrmannschen Arbeitsgruppe vorstellte und weiterführte.

In jüngster Zeit beschäftigte sich Manfred Herrmann in erster Linie mit Eigenschaften von multigraduierten Rees Algebren und deren Zusammenhang mit der *klassischen* Theorie der Aufblasungsringe. Neben spezielleren Themen wie Multiplizitäten, Reduktionsexponenten, a-Invarianten, Gorenstein-Eigenschaften von Veronese-Unterringen von Rees-Algebren und rationalen Singularitäten galt seine Aufmerksamkeit immer wieder der Entwicklung einer Theorie multigraduierter Aufblasungsringe, zu der er gemeinsam mit seinen Schülern beitrug.

Am 2. und 3. Juni 2000 fand am Max-Planck-Institut für Mathematik in Bonn unter dem Titel ‚*Commutative Algebra, Algebraic Geometry and Singularity*

Theory – A Tribute to Manfred Herrmann‘ eine Konferenz zum Gedenken an Manfred Herrmann statt. Während des Treffens, organisiert durch die Professoren J. Herzog (Essen), F. Hirzebruch (Bonn), N. V. Trung (Hanoi), G. Valla (Genua), O. Villamayor (Madrid) und S. Zarzuela (Barcelona), erörterten Mathematiker aus zwölf Ländern neuere Forschungen im Zusammenhang mit Manfred Herrmanns Werk.

Schriften (Auswahl)

1. Über ein Problem der abzählenden Geometrie I–III. *Math. Ann.* **146** *(1962), 256–264 und* **147** *(1962), 86–97, 339–346.*
2. Zur Erweiterung algebraischer Spezialisierungen. *Math. Ann.* **179** *(1968), 47–52.*
3. (Mit L. Stammler und U. Sterz) Geometrie auf Varietäten. *VEB Deutscher Verlag der Wissenschaften, Berlin (1975).*
4. (Mit R. Schmidt) Zur Transitivität der normalen Flachheit. *Inventiones Math.* **28** *(1975), 129–136.*
5. (Mit R. Schmidt und W. Vogel) Theorie der normalen Flachheit. *Teubner-Texte zur Mathematik, Teubner (1977).*
6. (Mit U. Orbanz) Faserdimensionen von Aufblasungen lokaler Ringe und Äquimultiplizität. *J. Math. Kyoto Univ.* **20** *(1980), 651-659.*
7. (Mit S. Ikeda und U. Orbanz) Equimultiplicity and Blowing up. *Springer, Berlin-Heidelberg-New York (1988).*
8. (Mit S. Ikeda) On the Gorenstein property of Rees algebras. *Manus. Math.* **59** *(1987), 471–490.*
9. (Mit J. Ribbe und P. Schenzel) On the Gorenstein property of form rings. *Math. Z.* **213** *(1993), 301–309.*
10. (Mit J. Ribbe und S. Zarzuela) On the Gorenstein property of Rees and form rings of powers of ideals. *Trans. AMS* **342** *(1994), 631–643.*
11. (Mit E. Hyry und J. Ribbe; Anhang von N.V. Trung) On multi-Rees algebras. *Math. Ann.* **301** *(1995), 249–279.*
12. (Mit E. Hyry und T. Korb) On Rees algebras with a Gorenstein Veronese subring. *J. Algebra* **200**, *(1998), 279–311.*

References

[F] G. Faltings: Über Macaulayfizierung, *Math. Ann.* **238** *(1978), 175-192.*

[Hi] H. Hironaka: Resolution of singularities of an algebraic variety over a field of characteristic zero. *Ann. Math. (II. ser.)* **79** *(1964), 109–203, 205–326.*

[HK] F. Hirzebruch und O.-H. Keller (Herausgeber): Singularitäten. *Nova Acta Leopoldina, Neue Folge, Bd.* **52**, *Deutsche Akademie der Naturforscher Leopoldina, Johann Ambrosius Barth, Leipzig (1981).*

[HKK] M. Herrmann, O.-H. Keller und A. Kertesz (u.a. Herausgeber): Beiträge zur Algebra und Geometrie. *Bände* **1** *bis* **6**, *VEB Deutscher Verlag der Wissenschaften, Berlin (1966-77).*

[Ka] T. Kawasaki: On Macaulayfication of Noetherian schemes. *Trans. Amer. Math. Soc. 352 (2000),2517–2552.*

[Ko] H. Koch: Mathematik in der DDR. *Mitteilungen der DMV, Heft 2, 1999, S. 34-41.*

[KE] O.-H. Keller und W. Engel: Heinrich Wilhelm Ewald Jung. *Jahresber. DMV* **58** *(1955), 5–10.*

[SV] L. Stammler und W. Vogel: Ott-Heinrich Keller. *Jahresber. DMV* **95** *(1993), 95–102.*

Thomas Korb
Institut für Mathematik der
Universität zu Köln
Weyertal 86–90
D-50931 Köln
korb@netcologne.de

Peter Schenzel
FB Mathematik und Informatik
Martin-Luther-Universität Halle-Wittenberg
D-06099 Halle (Saale)
schenzel@mathematik.uni-halle.de

(*Eingegangen 26. 06. 2000*)

Jber. d. Dt. Math.-Verein.
103 (2001) 7–18
Mathematics Subject Classification: 20E42, 01A70, 20F55, 20G15, 20D05, 20E08, 51E24
Keywords and Phrases: Tits, Tits-System, Coxeter-Gruppe, Coxeter-Komplex, Bruhat-Zerlegung, Zwillingsgebäude, Tits-Alternative, halbeinfache algebraische Gruppe, einfache Gruppe

Cantor-Medaille für Jacques Tits

H. Abels, Bielefeld

Jacques Tits wurde am 12.8.1930 in Uccle in Belgien geboren. Er studierte (1945–1948), promovierte 1950 und habilitierte sich 1955, alles an der Universität Brüssel. Dazwischen war er 1951/1952 Gast am Institute for Advanced Studies in Princeton. An der Universität Brüssel wurde er zuerst Assistent (1956/57), dann außerordentlicher (bis 1962) und schließlich ordentlicher Professor. Von 1964 bis 1975 war er ordentlicher Professor an der Universität Bonn und seit 1975 ist er Professor am Collège de France in Paris.

Er erhielt Einladungen als Gastprofessor an viele Universitäten und Forschungseinrichtungen auf der ganzen Welt. Er ist Mitherausgeber zahlreicher Zeitschriften und war von 1980 bis 1999 Chefredakteur der Publications Mathématiques des IHES.

Für seine wissenschaftlichen Leistungen erhielt Tits zahlreiche Ehrungen und Preise. 1965 wurde er mit dem Preis der belgischen Regierung für Reine Mathematik ausgezeichnet, einem Preis, der nur alle zehn Jahre vergeben wird. 1976 verlieh ihm die Académie des Sciences in Paris den Grand Prix des Sciences Mathématiques et Physiques. 1977 wurde er Mitglied der Deutschen Akademie der Naturforscher Leopoldina in Halle. 1979 wurde er zum Mitglied der Académie des Sciences in Paris gewählt, nachdem er schon 1977 korrespondierendes Mitglied dieser Akademie geworden war. 1988 war er Gründungsmitglied der Academia Europaea. Ebenfalls seit 1988 ist er ausländisches Mitglied der Koninklijke Nederlandse Akademie van Wetenschapen, seit 1991 Mitglied der Académie Royale de Belgique, seit 1992 Honorary Member der American Academy of Arts and Sciences, ebenfalls seit 1992 ausländisches Mitglied der National Academy of Arts and Sciences, seit 1993 Ehrenmitglied der London Mathematical Society. Ihm wurden die Ehrendoktorwürden einer Reihe von Universitäten verliehen (Utrecht 1970, Gent 1979, Bonn 1986, Löwen 1992). Im Jahre 1993 wurde er mit dem Wolf Preis ausgezeichnet und im Jahre 1995 wurde ihm der Orden Pour le Mérite für Wissenschaft und Künste verliehen.

Im Jahre 1996 erhielt er die Cantor-Medaille der Deutschen Mathematiker-Vereinigung. Das war der Anlaß für die vorliegende Würdigung des Werks von Jacques Tits. Ich fand diese ehrenvolle Aufgabe nicht leicht: Es ist sehr schwer, dem Werk von Jacques Tits gerecht zu werden. Ich habe mich deshalb entschlossen, das Hauptaugenmerk auf die Themenbereiche Gebäude und Tits-Systeme zu richten und einen möglichst elementaren Einblick in diese Theorie zu geben. Andere, ebenfalls wichtige Resultate von Jacques Tits, werden dagegen nur kurz behandelt.

In der Verleihungsurkunde der Georg Cantor-Medaille heißt es: „Die [Deutsche Mathematiker-]Vereinigung ehrt einen herausragenden Wissenschaftler, der die Mathematik durch fundamentale Beiträge gefördert und geprägt hat. Er entwickelte die Axiomatik der BN-Paare und die Theorie der Gebäude, die unverzichtbare Hilfsmittel für die Behandlung von algebraischen und einfachen Gruppen geworden sind. Seine Klassifikation von halbeinfachen algebraischen Gruppen über beliebigen Körpern und die Bruhat-Tits-Theorie über lokalen Körpern sind bleibende Ergebnisse mathematischer Forschung und gleichzeitig die Basis neuer Entwicklungen in Geometrie, Algebra und Arithmetik“.

1 Tits-Systeme

Was ist ein Tits-System? Um diese Frage zu beantworten, beginne ich mit einem Beispiel. Es sei $G = GL(n,k)$ die Gruppe der invertierbaren $n \times n$-Matrizen mit Einträgen aus dem Körper k. Betrachten wir die Untergruppe B von G der oberen Dreiecksmatrizen. Der Buchstabe B rührt daher, daß B eine sogenannte *Borel-Untergruppe* von G ist. Geometrisch gesprochen ist B die Untergruppe von G derjenigen linearen Automorphismen von k^n, die die Standardfahne $0 = V_0 < V_1 < \ldots < V_n = k^n$ invariant lassen. Dabei ist V_i der Aufspann der ersten i Vektoren der Standardbasis $e_1, \ldots, e_n$ von k^n. Es sei W die symmetrische Gruppe S_n auf n Symbolen. Wir können W als Untergruppe von G ansehen, indem wir der Permutation $w \in W$ diejenige lineare Abbildung zuordnen, die die Basisvektoren $e_1, \ldots, e_n$ entsprechend permutiert, d. h. $w(e_i) = e_{w(i)}$. Die Gruppe W heißt die *Weyl-Gruppe* von G. Eine grundlegende Tatsache ist nun, daß sich jedes Element g aus G in der Form $b\,w\,b'$ mit $b, b' \in B$ und eindeutig bestimmtem $w \in W$ schreiben läßt. Anders gesagt, G ist die disjunkte Vereinigung der Doppelnebenklassen $B\,w\,B$,

$w \in W$. Diese Tatsache beweist man mit einem Verfahren ähnlich dem Gaußschen Algorithmus für das Lösen linearer Gleichungssysteme – ein Algorithmus, der sich übrigens schon in einem chinesischen mathematischen Text aus der Zeit der Han-Dynastie (ca. -200 bis $+200$) findet.

Die disjunkte Zerlegung $G = \bigcup_{w \in W} B\,w\,B$ heißt die *Bruhat-Zerlegung* von G. Bruhat entdeckte nämlich im Jahre 1954, daß die analoge Aussage für alle einfachen Lie-Gruppen G gilt: Die Doppelnebenklassen von G nach der Borel-Untergruppe B werden auf natürliche Weise durch die Weyl-Gruppe W indiziert. Diese Tatsache hat Chevalley kurz darauf auch für die nach ihm benannten Serien von einfachen Gruppen nachgewiesen und bei der Klassifikation der einfachen Gruppen über algebraisch abgeschlossenen Körpern verwendet.

Hier setzt nun Tits ein. Er axiomatisiert die Eigenschaften der Bruhat-Zerlegung und gelangt so zum Begriff des *BN-Paares* [1, 2]. Bourbaki [19] hat die BN-Paare nach ihrem Entdecker in Tits-Systeme umbenannt. Ich erläutere mit Blick auf unser Beispiel das wichtigste Axiom eines Tits-Systems. Zu einem Tits-System für eine Gruppe G gehört außer den Gruppen B und W noch ein weiteres Bestimmungsstück, nämlich eine Menge S von Erzeugenden von W. In unserem Beispiel $W = S_n$ ist S die Menge der Transpositionen benachbarter Zahlen $s_i = (i, i+1)$, $i = 1, \ldots, n-1$. Das wichtigste Axiom eines Tits-Systems besagt, daß das Produkt einer Doppelnebenklasse $B\,w\,B$ mit einer Doppelnebenklasse $B\,s\,B$ für ein Element s des Erzeugendensystems S in der Vereinigung von zwei ganz bestimmten Doppelnebenklassen enthalten ist, nämlich

$$B\,w\,B \cdot B\,s\,B \subset B\,w\,B \cup B\,ws\,B.$$

Die Doppelnebenklasse $B\,ws\,B$ tritt offensichtlich immer auf. Und nur in besonderen Fällen tritt nur diese Doppelnebenklasse auf. Aus den Axiomen eines Tits-Systems kann man folgern, daß die Gruppe W zusammen mit dem Erzeugendensystem S eine Coxeter-Gruppe bildet. Coxeter-Gruppen spielen sowohl für Tits-Systeme als auch für die Theorie der Gebäude eine wichtige Rolle. Deshalb werden wir in einem eigenen Abschnitt die grundlegenden Eigenschaften von Coxeter-Gruppen zusammenstellen.

Zurück zu Tits-Systemen. Es ist eine Tatsache von grundlegender Bedeutung, daß alle einfachen Gruppen, die von algebraischen Gruppen herrühren, auf

kanonische Weise ein Tits-System besitzen. Der Beweis ist in der gemeinsamen Arbeit [4] von Borel und Tits enthalten. Das Wort einfach ist hier im Sinne der jeweils zuständigen Theorie gemeint: algebraische Gruppen, Lie-Gruppen, endliche Gruppen. Einschränkend muß man hinzufügen, daß man ein nicht-triviales Tits-System, d. h. $B \neq G$, nur dann erhält, wenn die Gruppe G *isotrop* ist. Für einfache Gruppen über $\mathbb{R}$ ist „isotrop" äquivalent mit „nicht kompakt".

Blicken wir zurück zu unserem Beispiel $G = GL(n, k)$, so ist ein (nicht nur technischer) Punkt zu erwähnen. Die Gruppe G ist nicht einfach, sie enthält ja den Normalteiler $SL(n, k)$ und sie hat ein Zentrum, bestehend aus den konstanten Diagonalmatrizen. Trotzdem fällt sie unter die Th[illegible] theoretische Annahmen erfüllt. Der Punkt ist natürlich, daß diese Annahmen wesentlich leichter nachzuprüfen sind, als die Einfachheit der vorgelegten Gruppe. Ein zusätzlicher Gewinn, den Tits aus diesem Kriterium ziehen konnte, war der Nachweis, daß die nach ihm benannte endliche Gruppe einfach ist. Es ist die Kommutatorgruppe der ${}^2F_4(2)$.

2 Coxeter Gruppen

An dieser Stelle soll ein Exkurs über Coxeter-Gruppen eingeschaltet werden. Denn einerseits bildet die Theorie der Coxeter-Gruppen und der zugehörigen Coxeter-Komplexe eine Grundlage für die Theorie der Gebäude und auch der Tits-Systeme, und andrerseits hat Tits auch zu jener Theorie wichtige Erkenntnisse beigetragen.

Eine orthogonale Abbildung s heißt *Spiegelung*, wenn die Menge ihrer Fixpunkte eine Hyperebene ist. Eine endliche Gruppe von orthogonalen Abbildungen heißt *endliche Spiegelungsgruppe*, wenn sie von Spiegelungen erzeugt wird. Zum Beispiel ist die symmetrische Gruppe $W = S_n$ – wie oben betrachtet als Untergruppe von $GL(n, \mathbb{R})$ – eine Spiegelungsgruppe, denn die Transposition (i, j) ist ja die Spiegelung an der Hyperebene $\{(x_1, \dots, x_1) \in \mathbb{R}^n; x_i = x_j\}$.

Die Geometrie der endlichen Spiegelungsgruppen versteht man gut. Ich nenne die Hauptergebnisse. Sei W eine Spiegelungsgruppe, die in der orthogonalen Gruppe des euklidischen Vektorraums V enthalten ist. Sei T die Menge der Spiegelungen in W. Zu jeder Spiegelung t gehört die Hyperebene H_t ihrer Fixpunkte. Die Hyperebenen H_t zerlegen den Vektorraum V in endlich viele *Kammern*. Genauer gesagt heißt eine Zusammenhangskomponente von $V \setminus \bigcup_{t \in T} H_t$ eine offene Kammer. Eine Kammer ist per definitionem der Abschluß einer offenen Kammer. Dann gilt: Die Gruppe W wirkt einfach transitiv auf der Menge der Kammern. Jede Kammer C ist eine Fundamentalmenge für die Wirkung von W auf V im striktesten Sinne des Wortes, nämlich jede Bahn Wv, $v \in V$, trifft C in genau einem Punkt. Wenn C eine Kammer ist, dann heißt eine Menge der Form $H_t \cap C$, $t \in T$, eine *Wand* der Kammer C, wenn $H_t \cap C$ in keinem echten Untervektorraum von H_t enthalten ist. Unter gewissen Irreduziblilitätsvoraussetzungen an W gilt weiter: Jede Kammer hat genau $\dim V$ Wände. Für eine gegebene Kammer C sei S die Menge der s in T, für die $H_s \cap C$ eine Wand von C ist. Dann ist S ein Erzeugendensystem von W. Für zwei Elemente s, t aus S habe die Drehung st in W die Ordnung $m(s, t)$. Diese Zahl kann man aus den Winkeln zwischen den entsprechenden Wänden ablesen:

$$\measuredangle\ (H_s \cap C, H_t \cap C) = \pi/m(s, t)$$

falls $s \neq t$. Für $s = t$ setze man $m(s, s) = 1$. Weiter gilt, daß die Relationen

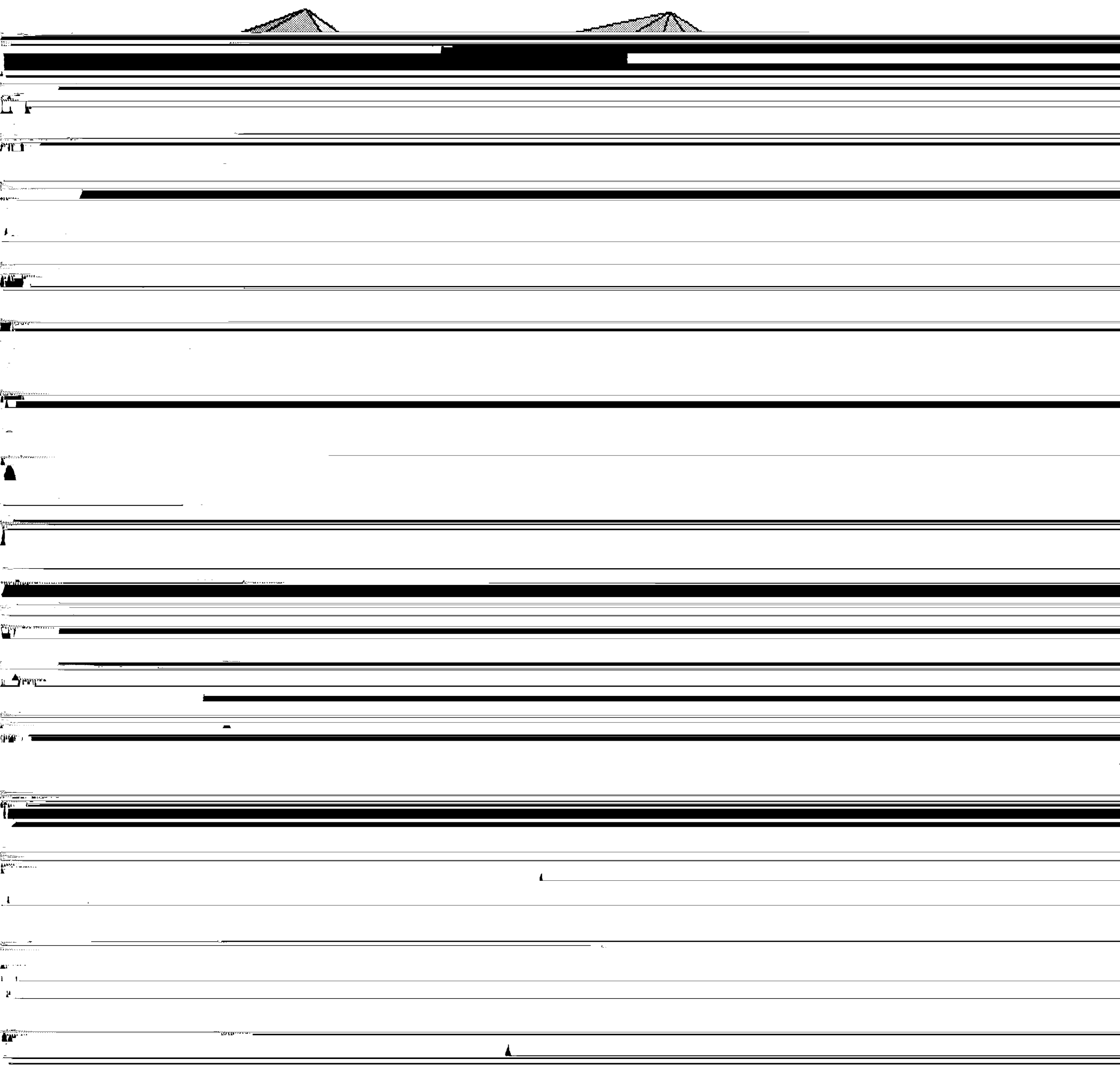
$$(st)^{m(s,t)} = e \text{ für } s, t \in S \tag{$*$}$$

eine Präsentation der Gruppe W bilden, d. h. jede Relation in W zwischen den Elementen aus S ist eine Folgerung aus den Relationen $(*)$.

Ein *Coxeter-System* ist nun definiert als ein Paar (W, S) bestehend aus einer Gruppe W und einem Erzeugendensystem S, so daß die Relationen $(*)$ eine

Präsentation von W bilden. Wir haben gesehen, daß man zu jeder irreduziblen endlichen Spiegelungsgruppe W ein Erzeugendensystem S finden kann, so daß (W, S) ein Coxeter-System ist. In unserem Beispiel $W = S_n$ betrachtet als Untergruppe von $GL(n, \mathbb{R})$ ist $C = \{(x_1, \ldots, x_n) \in \mathbb{R}^n; x_1 \leq x_2 \leq \ldots \leq x_n\}$ eine Kammer, deren Wände gerade die Mengen $H_s \cap C$ mit $s \in S = \{s_1, \ldots, s_n\}$ sind. In diesem Fall ist $m(s_i, s_j) = 3$ falls $|i - j| = 1$ und $m(s_i, s_j) = 2$ falls $|i - j| \geq 2$. Die Darstellung von W auf $\mathbb{R}^n$ ist nicht irreduzibel, aber ihre Einschränkung auf die Hyperebene $V = \{(x_1, \ldots, x_n) \in \mathbb{R}^n, \Sigma x_i = 0\}$ ist irreduzibel. Dann ist $\dim V = \#S = n - 1$ im Einklang mit der Theorie.

Für eine irreduzible endliche Spiegelungsgruppe W in dem euklidischen Vektorraum V kann man jetzt den *Coxeter-Komplex* $|X(W, S)|$ leicht beschreiben. Es ist die Einheitssphäre in V zusammen mit der Triangulierung dieser Sphäre, die durch die Durchschnitte von Kammern mit der Sphäre gegeben ist. Die Bezeichnung $|X(W, S)|$ ist dadurch gerechtfertigt, daß dieser Komplex die geometrische



wenn W endlich ist. Jedes $s \in S$ wird durch eine Spiegelung dargestellt. Insbesondere erhält man also, daß jede endliche Coxetergruppe W als endliche Spiegelungsgruppe dargestellt werden kann. Eine *Coxetergruppe* ist dabei natürlich eine Gruppe W, in der es eine Teilmenge S gibt, so daß (W, S) ein Coxeter-System ist. Die Kardinalität von S heißt der *Rang* des Coxeter-Systems. Der zugehörige Coxeter-Komplex $X(W, S)$ hat dann die Dimension $\dim X(W, S) = \text{Rang} - 1$

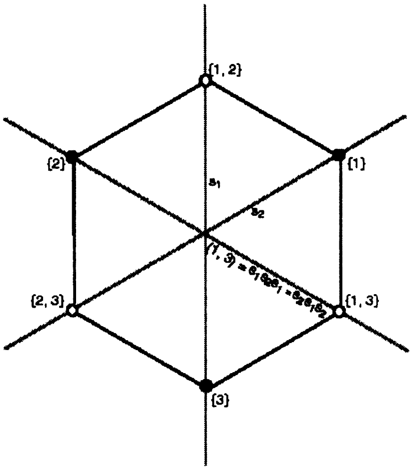
Die Standardreferenz für das in diesem Abschnitt Gesagte ist Bourbaki [19], ein Buch, an dessen Entstehung Tits stark mitgewirkt hat.

3 Gebäude

Eine bahnbrechende Leistung von Tits ist die Theorie der Gebäude. Ein *Gebäude* im Sinne von Tits ist ein geometrisches Objekt mit einer sehr reichen Struktur, die wir im nächsten Absatz näher beschreiben werden. Die Bedeutung für die Theorie der algebraischen, der Lieschen und der einfachen endlichen Gruppen besteht darin, daß Tits zu jeder Gruppe mit Tits-System ein Gebäude definiert. Und wir hatten im Abschnitt über Tits-Systeme herausgestellt, daß Borel und Tits zu jeder isotropen reduktiven, insbesondere jeder isotropen einfachen algebraischen Gruppe ein Tits-System konstruiert haben. Die Gruppe wirkt dann auf natürliche Weise auf dem zugehörigen Gebäude. Diese Wirkung der Gruppe auf dem Gebäude gibt ein geometrisches Verständnis der Gruppe. Auf diese Art sind Gebäude zu einem unverzichtbaren Hilfsmittel für die Behandlung von algebraischen, arithmetischen und einfachen Gruppen geworden. In unserem Beispiel der allgemeinen linearen Gruppe $GL(n, k)$ ist das zugehörige Gebäude die Menge der Fahnen von Untervektorräumen von k^n.

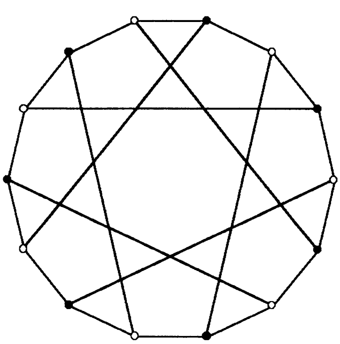
Was ist ein Gebäude? Ein Gebäude im Sinne von Tits setzt sich aus *Wohnungen* (*Apartments*) zusammen. Jede einzelne Wohnung ist ein Coxeter-Komplex, hat also eine wohlverstandene Struktur. Je zwei Wohnungen in einem Gebäude sind isomorph. Das Gebäude enthält sehr viele Wohnungen. Genauer gesagt, sind je zwei *Kammern* (= Simplexe maximaler Dimension) in einer gemeinsamen Wohnung des Gebäudes enthalten.

Betrachten wir wieder das Beispiel der allgemeinen linearen Gruppe $G = GL(n, k)$. Das Gebäude Δ von G ist ein Simplizialkomplex. Ein Vertex in Δ ist ein Untervektorraum von k^n. Dabei läßt man die beiden trivialen Unterräume $\{0\}$ und k^n weg. Die Simplexe in Δ sind die Fahnen von nicht trivialen Untervektorräumen von k^n. Die Wohnungen in diesem Gebäude erhält man wie folgt: Fixieren wir eine Basis $\mathcal{B} = \{v_1, \ldots, v_n\}$ von k^n. Dann sei $\mathcal{A}_\mathcal{B}$ derjenige Unterkomplex von Δ, dessen Vertices diejenigen nicht trivialen Untervektorräume von k^n sind, die von einer Teilmenge unserer Basis $\mathcal{B}$ aufgespannt werden. Die Simplexe in $\mathcal{A}_\mathcal{B}$ sind die Fahnen von solchen Unterräumen. Für jede Basis $\mathcal{B}$ von V ist $\mathcal{A}_\mathcal{B}$ eine Wohnung in Δ und jede Wohnung in Δ ist von dieser Form. Offensichtlich ist der Simplizialkomplex $\mathcal{A}_\mathcal{B}$ isomorph zu demjenigen Simplizialkomplex, dessen Vertices die Teilmengen $\neq \emptyset$, $\{1, \ldots, n\}$ von $\{1, \ldots, n\}$ sind und dessen Simplexe die Fahnen von solchen Mengen sind. Dieser Komplex ist isomorph zu $X(W, S)$, denn $W = S_n$ wirkt auf na-



Für kleine Dimensionen n (Ränge $n-1$) erhalten wir für $GL(n,k)$ die folgenden Gebäude Δ. Für $n=1$ ist Δ leer. Für $n=2$ ist Δ die Menge der Geraden in k^2 ohne weitere Struktur. Für $n=3$ erhält man einen Graph. Die Vertices gehören zu zwei Typen, entsprechend den eindimensionalen und den zweidimensionalen Unterräumen. Man verbindet zwei Vertices durch eine Kante, wenn zwischen den entsprechenden Unterräumen eine Inklusion besteht.

Eine Wohnung ist also ein Sechseck mit zwei Typen von Eckpunkten. In der obigen Abbildung dieser Wohnung, also des Coxeter-Komplexes von $(S_3, \{s_1, s_2\})$ sind in der Beschriftung die beiden hier vorgestellten Beschreibungen dieses Komplexes berücksichtigt. Einerseits ist er der Komplex der Teilmengen $\neq \emptyset$, $\{1,2,3\}$ von $\{1,2,3\}$. Dazu sind bei den Vertices die zugehörigen Teilmengen von $\{1,2,3\}$ angegeben. Zum anderen ist er die (eckig gemachte) Sphäre im 2-dimensionalen Vektorraum $V = \{(x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{R}^3;\, x_1 + x_2 + x_3 = 0\}$ mit der natürlichen Darstellung der Spiegelungsgruppe S_3. Hierzu sind bei den Wänden der Kammern jeweils die nicht trivialen Elemente der zugehörigen parabolischen Untergruppe von S_3 angegeben.



Für den Körper $k = \mathbb{F}_2$ mit 2 Elementen hat das Gebäude der $GL(3, \mathbb{F}_2)$ je 7 Vertices vom Typ „Geraden“ und vom Typ „Ebenen“. Jeder Vertex ist mit genau 3 Vertices vom anderen Typ verbunden. Das vorausgehende Bild kann nicht die ganze Schönheit des Gebäudes Δ zeigen, weil man ihm nicht die vielen Symmetrien von Δ ansehen kann. Auch fallen die 28 Wohnungen nicht ins Auge. Die Gebäudeaxiome sind aus dem Bild auch nicht zu erkennen. Die Gruppe aller typerhaltenden Automorphismen von Δ gibt uns wieder $GL(3, \mathbb{F}_2)$ zurück. Das bringt uns zur allgemeinen Theorie zurück.

Wir hatten oben erklärt, daß zu jeder isotropen einfachen algebraischen Gruppe über einem Körper ein Gebäude gehört. Nicht alle Gebäude entstehen auf diese Art. Aber es gilt der folgende tiefliegende Klassifikationssatz, den Tits in seinem Buch [11] bewiesen hat. Alle dicken Gebäude vom Rang ≥ 3 und von sphärischem, irreduziblem Typ kommen von solchen oder eng mit ihnen verwandten Gruppen her. Ein Gebäude heißt *sphärisch*, wenn seine Wohnungen endlich sind. Der Name sphärisch rührt daher, daß die Wohnungen dann triangulierte Sphären sind. Die Voraussetzungen „dick" und „irreduzibel" sind notwendig und sollen hier nicht weiter erläutert werden. Die wichtige Einschränkung ist die über den Rang. Eine Klassifikation der Gebäude vom Rang 2 ist nicht zu erwarten (es sei denn, man macht einschränkende Voraussetzungen, etwa daß das Gebäude die Moufang-Eigenschaft hat). Eine Klassifikation der Gebäude vom Rang 2 würde insbesondere eine Klassifikation aller projektiven Ebenen einschließen.

Eine weitere tiefliegende Aussage in Tits' Buch ist der Satz, daß man die Ausgangsgruppe aus dem Gebäude zurückerhält. Sie ist nämlich im wesentlichen die Automorphismengruppe des Gebäudes. Das gilt für alle Ränge ≥ 2. Dieser Satz ist eine umfassende Verallgemeinerung des Hauptsatzes der projektiven Geometrie.

Leser, die mehr über die Theorie der Gebäude erfahren wollen, können natürlich die erwähnten Quellen studieren. Ihnen kann man aber auch zur Einführung das Buch von K. Brown [20] und den Übersichtsartikel von R. Scharlau [24] empfehlen. Erwähnt seien auch noch die Bücher von M. Ronan [23] und R. Garrett [21] zum Thema.

4 Affine Gebäude

Die bisher besprochenen Gebäude sind sphärisch, das heißt ihre Wohnungen sind endlich. Aufbauend auf Beispielen von Iwahori und Matsumoto haben Bruhat und Tits [8, 13] für algebraische Gruppen über bewerteten Körpern eine ganz andere Klasse von Tits-Systemen und Gebäuden erhalten. Diese Gebäude sind *affin*, in dem Sinne, daß die Wohnungen triangulierte affine Räume sind. Diese *Bruhat-Tits-Gebäude* spielen für lineare Gruppen über nicht archimedischen lokalen Körpern, also z. B. $\mathbb{Q}_p$ oder $\mathbb{F}_q((t))$, eine ähnliche Rolle wie die symmetrischen Räume für reelle und komplexe Lie-Gruppen. Die Gruppe wirkt nämlich auf dem Bruhat-Tits-Gebäude auf natürliche Weise. Das Bruhat-Tits-Gebäude ist zusammenziehbar. Und Bruhat und Tits haben einen dem Cartanschen Fixpunktsatz analogen Fixpunktsatz bewiesen mit entsprechenden Folgerungen für kompakte Untergruppen.

Das Bruhat-Tits-Gebäude $\Delta(G, k, v)$ einer algebraischen Gruppe G über dem bewerteten Körper k mit Bewertung v ist eng verbunden mit dem gewöhnlichen Tits-Gebäude $\Delta(G, k)$ von G über k und mit dem gewöhnlichen Tits-Gebäude $\Delta(G, \mathfrak{o}/\mathfrak{m})$ von G über dem Restekörper $\mathfrak{o}/\mathfrak{m}$ von k. Das Gebäude $\Delta(G, k)$ kann als Menge der unendlich fernen Punkte im Bruhat-Tits-Gebäude $\Delta(G,k,v)$ angesehen werden. Und das Tits-Gebäude $\Delta(G,\mathfrak{o}/\mathfrak{m})$ des Restekörpers tritt als Umgebungsrand (Link) im Bruhat-Tits-Gebäude $\Delta(G,k,v)$ auf. Allgemeiner gilt, daß Links von Simplexen in Gebäuden selbst wieder Gebäude sind von genau angebbarem Typ.

Im einfachsten Fall $G = SL_2$ ist das Bruhat-Tits-Gebäude $\Delta(G,k,v)$ ein Baum, falls k ein Körper mit der Bewertung v ist. Man beachte die Dimensionsverschiebung. Das gewöhnliche Tits-Gebäude $\Delta(G,k)$ ist in diesem Fall eine Menge von Punkten ohne weitere Struktur, also 0-dimensional. Das Bruhat-Tits-Gebäude $\Delta(G,k,v)$ ist dagegen 1-dimensional. Bereits für diesen einfachsten Fall hat die Wirkung von $SL(2,k)$ auf dem zugehörigen Baum weitreichende Konsequenzen für die Gruppe $SL(2,k)$ und ihre Untergruppen, wie Serre in seinem Buch über Bäume herausgearbeitet hat.

Auch für affine Gebäude hat Tits einen Klassifikationssatz [14] bewiesen, der wieder besagt, daß die affinen Gebäude vom Rang ≥ 4 diejenigen sind, die von algebraischen Gruppen über lokalen Körpern herrühren. Beim Beweis konstruiert er das Gebäude im Unendlichen. Dieses Gebäude ist sphärisch und sein Rang ist um eins kleiner, vgl. die oben angesprochene Dimensionsverschiebung. Dann verwendet er die Klassifikation der sphärischen Gebäude von Rang ≥ 3, um die gesuchte Gruppe und den gesuchten Körper zu finden. Es bleibt die Bewertung zu konstruieren.

5 Kac-Moody-Gruppen, Zwillingsgebäude

Seit längerem hat Tits an der Entwicklung einer algebraischen Theorie von Kac-Moody-Gruppen gearbeitet. Vor den Kac-Moody-Gruppen sind die *Kac-Moody-Algebren* studiert worden. Das sind Lie-Algebren, die durch eine bestimmte Präsentation definiert werden. Diese Präsentation verallgemeinert die von Serre angegebene Präsentation der endlich-dimensionalen halbeinfachen Lie-Algebren. Die Kac-Moody-Algebren sind unendlich-dimensional, bis auf die Ausnahme der endlich-dimensionalen halbeinfachen. In der Arbeit [15] hat Tits nun ganz allgemein für Kac-Moody-Algebren und beliebige Ringe R Kac-Moody-Gruppen mit Koeffizienten in R definiert, ähnlich wie Chevalley das für die endlich-dimensionalen halbeinfachen Lie-Algebren getan hat.

Kac-Moody-Gruppen über Körpern haben nun *Zwillings-Tits-Systeme*, aus denen Ronan und Tits wiederum *Zwillingsgebäude* (*Doppelgebäude, twin buildings, immeubles jumelés*) konstruiert haben [16]. Ein Zwillingsgebäude besteht aus zwei Gebäuden, die durch eine zusätzliche Struktur (Kodistanz, Oppositionsrelation) mtieinander verbunden sind. Auch für Zwillingsgebäude hat Tits in [16] ein Klassifikationsprogramm entworfen und wichtige Beiträge dazu geliefert, insbesondere zur Eindeutigkeit. Das Programm ist in wesentlichen Teilen zum Abschluß gebracht worden durch die Habilitationsschrift von B. Mühlherr [22]. Auch hier stellt sich heraus, daß die Existenz der klassifizierten Zwillingsgebäude algebraisch erklärt werden kann, in dem Sinne, daß sie zu gewissen „Formen“ von Kac-Moody-Gruppen gehören.

Am besten verstanden sind die sogenannten affinen Kac-Moody-Algebren und Gruppen. Dazu gehören z. B. im algebraischen Kontext die Chevalley-Gruppen über Laurent-Polynom-Ringen $k[t, t^{-1}]$, aber auch – im analytisch-topologischen Kontext – die Schleifengruppen. Eine Schleifengruppe ist die Gruppe derjenigen (z. B. analytischen) geschlossenen Wege in einer halbeinfachen Lie-Gruppe, die im Einselement beginnen und enden. Die Doppelgebäude ergeben natürliche Wirkräume für die Kac-Moody-Gruppen mit entsprechenden Folgerungen für diese Gruppen und ihre Untergruppen, z. B. arithmetische Gruppen.

Ronan und Tits haben gemeinsam einen ganz anderen Teil der Theorie der Zwillingsgebäude entwickelt, nämlich der *Zwillingsbäume* [17, 18]. Das ist der 1-dimensionale Fall. Aber dieser Fall ist weder ein Spezialfall noch ein Modell der allgemeinen Theorie der Zwillingsgebäude; er ist ganz anders.

6 Klassifikation der halbeinfachen algebraischen Gruppen

Die halbeinfachen komplexen Lie-Algebren wurden im 19. Jahrhundert von Killing und Cartan klassifiziert. Das Ergebnis schreibt man am übersichtlichsten in Form der zugehörigen Dynkin-Diagramme auf. Daraus folgt die Klassifikation der komplexen halbeinfachen Lie-Gruppen. Chevalley hat eine vollkommen analoge Klassifikation der halbeinfachen algebraischen Gruppen über algebraisch abgeschlossenen Körpern bewiesen. In der Arbeit [5] hat Tits eine Klassifikation der halbeinfachen algebraischen Gruppen über beliebigen Körpern vorgelegt. Die Bestimmungsstücke sind 1) der Typ über dem algebraisch abgeschlossenen Hüllkörper, 2) der Index, im wesentlichen ist das eine Wirkung der Galoisgruppe auf dem Dynkin-Diagramm und 3) der anisotrope (über $\mathbb{R}$ bedeutet das: kompakte) Kern. Durch diese Stücke ist die Gruppe eindeutig bestimmt, wie Tits zeigt. In wichtigen Fällen werde die möglichen Indizes zu 2) klassifiziert. Die Klassifikation der anisotropen Kerne ist ein schwieriges offenes Problem. Für den Fall des Körpers $\mathbb{R}$ kennt man natürlich die kompakten Lie-Gruppen.

7 Tits-Alternative

In der Arbeit [9] hat Tits bewiesen, daß für jeden Körper K jede endlich erzeugte Untergruppe von $GL(n, K)$ entweder eine auflösbare Untergruppe von endlichem Index enthält oder eine freie nicht-abelsche Untergruppe enthält. Für Körper der Charakteristik null gilt das sogar für beliebige, also nicht nur für endlich erzeugte Untergruppen von $GL(n, K)$. Abgesehen davon, daß das Resultat für sich sehr schön und wichtig ist, hat diese Arbeit Entwicklungen in zwei Richtungen ausgelöst: Sie hat erstens Anlaß gegeben zu fragen, ob ähnliche Tits-Alternativen für andere Klassen von Gruppen gelten. Und zweitens haben die Methoden der Arbeit, nämlich die Dynamik linearer Abbildungen zu studieren, sich als sehr fruchtbar erwiesen.

8 Endliche einfache Gruppen

Die Theorie der Gebäude und der Tits-Systeme hat wichtige Anwendungen auf die Theorie der endlichen einfachen Gruppen. Alle Gruppen vom Lie Typ tragen ja solche Strukturen. Damit hat man geometrische Interpretationen für alle endlichen einfachen Gruppen bis auf die alternierenden und die 26 (bekannten) sporadischen. Das sehr allgemeine Einfachheitskriterium, das Tits aus der Theorie der Tits-Systeme ableitet, wurde schon am Ende des Abschnitts über Tits-Systeme erwähnt. Ebenso die Anwendung auf die Tits-Gruppe, die trotz ihrer eigenartigen Eigenschaften nicht zu den sporadischen Gruppen gehört. Hervorzuheben sind noch Tits' Existenzbeweis des Monsters in drei schönen Preprints und sein Einfluß auf die Entwicklung der Theorie von Geometrien, die allgemeiner sind als Gebäude und die für die meisten sporadischen Gruppen geometrische Interpretationen liefern.

9 Weitere Arbeiten

An weiteren wichtigen Arbeiten möchte ich noch folgende erwähnen. Tits hat grundlegende Ergebnisse erhalten zum Thema Wirkungen von Gruppen auf Bäumen [7, 12], einem Forschungsgebiet, das sich letzter Zeit sehr entwickelt hat. Auf den Zusammenhang mit Gebäuden und Zwillingsgebäuden habe ich schon hingewiesen: eindimensionale affine Gebäude sind Bäume, und Zwillingsbäume sind eindimensionale Zwillingsgebäude.

Weiter möchte ich die gemeinsame Arbeit [10] von Tits mit Borel erwähnen, in der die Struktur von einfachen algebraischen Gruppen qua abstrakte Grup-

[6] *Le problème des mots dans les groupes de Coxeter*, Ist. Naz. Alta Mat. Symp. Math. **1** (1968), 175–185.
[7] *Sur les groupes des automorphismes d'un arbre*, Essays on topology and related topics: Mémoires dédiés à George de Rham (A. Haefliger and R. Narasimhan, eds.) Springer-Verlag (1970), 188–211.
[8] mit F. Bruhat, *Groupes réductifs sur un corps local*, Publ. Math. IHES **41** (1972), 5–251.
[9] *Free subgroups in linear groups*, J. Algebra (1972), 250–270.
[10] mit A. Borel, *Homomorphismes „abstraits" de groupes algébriques simples*, Ann. of Math. (2) **97** (1973), 499–571.
[11] *Buildings of spherical type and finite BN-pairs*, Lecture Notes in Math. **386**, Springer (1974).
[12] *A „theorem of Lie-Kolchin" for trees*, Contrib. to Algebra. Collect. Pap. dedic. E. Kolchin (1977), 377–388.
[13] mit F. Bruhat, *Groupes réductifs sur un corps local, II, Schémas en groupes. Existence d'une donnée radicielle valuée*, Publ. Math. IHES **60** (1984), 1–194.
[14] *Immeubles de type affine*, CIME Conf. Como, Lecture Notes in Math. **1181** (1986), 159–190.
[15] *Uniqueness and presentation of Kac-Moody groups over fields*, J. Algebra **105** (1987), 542–573.
[16] *Twin buildings and groups of Kac-Moody type*, in W.M. Liebeck and J. Saxl (eds.): Groups, combinatorics and geometry (Durham 1990), London Math. Soc. Lecture Note Ser. **165**, Cambridge Univ. Press, 249–286.
[17] mit M.A. Ronan, *Twin trees, I*, Invent. Math. **116** (1994), 463–479.
[18] mit M.A. Ronan, *Twin trees, II, Local structure and a universal construction*, Israel J. Math. **109** (1999), 349–377.

Arbeiten anderer Autoren

[19] N. Bourbaki, *Groupes et algèbres de Lie*, Chapitre IV–VI. Gemäß der Danksagung am Ende der Einleitung „de nombreuses conversations avec J. Tits nous ont apporté une aide précieuse".
[20] Brown, K.S., *Buildings*, Springer-Verlag (1989).
[21] Garrett, P., *Buildings and classical groups*, Chapman and Hall (1997)
[22] Mühlherr, B., *On the existence of 2-spherical twin buildings*, Habilitationsschrift Dortmund 1999.
[23] Ronan, M., *Lectures on buildings*, Academic Press (1989).
[24] Scharlau, R., *Buildings*, Handbook of Incidence geometry, Chapter 11, Elsevier (1995).

Herbert Abels
Fakultät für Mathematik
Universität Bielefeld
Postfach 10 01 31
D-33501 Bielefeld
abels@mathematik.uni-bielefeld.de

(*Eingegangen 15.09.2000*)

Jber. d. Dt. Math.-Verein. © 2001 B. G. Teubner Wiesbaden · Stuttgart · Leipzig
103 (2001) 19–36
Mathematics Subject Classification: 62-02, 62-07, 62 H 99
Keywords and Phrases: curse of dimensionality, dimension reduction, high-dimensional data, multivariate methods

The Curse of Dimensionality – A Challenge for Mathematical Statistics

U. Gather, C. Becker

1 Introduction

It is a well-known fact that in almost any field of applied research, nowadays progress is achieved mainly or to a large extent by analyzing and properly interpreting either experimental or empirical data. One may think of the life sciences here (e. g. analyzing the human genome, understanding the functioning of the brain) or of the engineering sciences (e. g. understanding the influence of process parameters on the final quality properties of a product).

For at least two reasons the data which have to be analyzed here to gain more information are very high-dimensional. The first reason is that the open research questions themselves have become more and more complex. Already known relationships – e. g. in medicine – can only be described by functions between high-dimensional influential and response variables. The second reason comes from the immense increase of facilities to collect, store and process high-dimensional and massive data by modern computer power, which makes it possible for the first time to actually investigate such complex research questions. In any case, the claim for statistical methods and data analytical tools which are able and appropriate to extract the essential information from high-dimensional data structures is a real and urgent one.

From a pure mathematical first perspective one might argue that statistical methods for multivariate data do already exist, and very often their (in some sense) optimal performance has been proved, independently of the dimension of the data. However, optimal can be very bad in high dimensions.

It is the objective of the first part of this paper to show the principal and algorithmic problems which constitute the new challenge for mathematical statistics here. In the second part, some procedures will be presented which are constructed to cope with the curse of dimensionality. These will be prototypical examples of approaches, for which we will also investigate some new problems they are still generating, leaving us with enough open questions in mathematical statistics.

The oral presentation of this paper was given as a plenary lecture at the Annual Conference of the DMV (German National Mathematical Society). It was meant to give a partial overview on the problem of analyzing high-dimensional data and was addressed to an audience with a general mathematical background

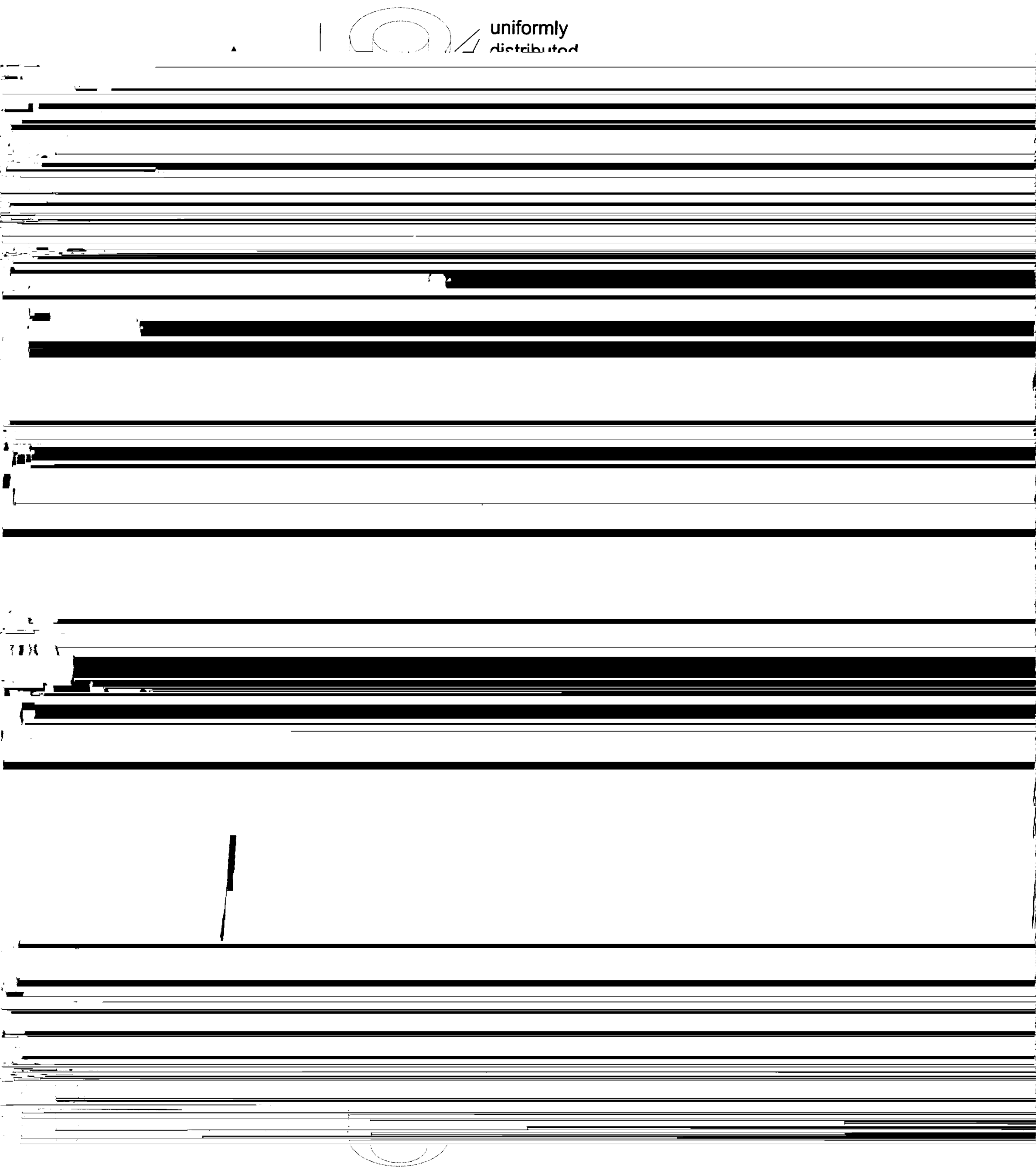
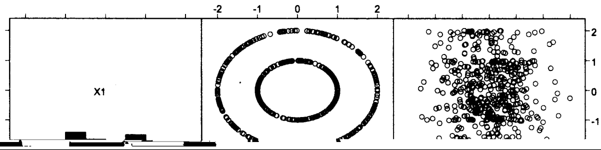


Fig. 1. Nested cylinders

not necessarily familiar with special methods in mathematical statistics and data analysis.

We therefore chose to start at a rather elementary level and to show principal problems as well as some solutions by means of prototypical examples such as regression modeling with high-dimensional influential variables and outlier identification in high-dimensional data from simple distributions.


-2
-1
0
1
2
X1
2
1
0
-1

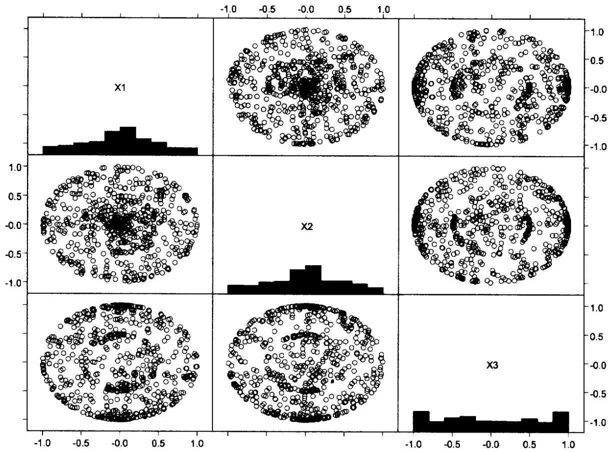


Fig. 4. Nested spheres data: one- and two-dimensional projections

can be seen in Figure 4. This time, the structure is no longer visible in any of the projected data sets. One just might suspect that there is some inherent structure.

From the very simple Examples 2.1 and 2.2 it becomes clear that already for three-dimensional data, it can become difficult to detect existing structures by means of lower dimensional projections. On the other hand, in high-dimensional data situations, where we also lack geometrical imagination, the detection of structures heavily depends on such projections. Hence, generally we do not have any chance to gain informative visualizations by simply projecting high-dimensional data into lower-dimensional spaces.

There is another problem coming along with high dimensions, and this is a principal one which we will illustrate by an example from nonparametric regression.

Example 2.3. *Consider a univariate response variable $Y \in \mathbb{R}$ which depends on a multivariate random regressor variable $\boldsymbol{X} \in \mathbb{R}^d$ by some unknown link function g, $Y = g(\boldsymbol{X}, \varepsilon)$, where ε denotes an additional error term. Standard methods to estimate g in such a nonparametric regression setting use nearest neighbour techniques. That means, to estimate $g(\boldsymbol{x}_0)$ at some point $\boldsymbol{x}_0 \in \mathbb{R}^d$, we take observations of $\boldsymbol{X}$ and the corresponding Y values in a neighbourhood of $\boldsymbol{x}_o$. But this method fails in high dimensions. If, for example, we want to estimate the value of g at the origin, we have to face the fact that even in a quite large neighbourhood of the origin, in a ball with radius* 0.5, *say, we find observations of $\boldsymbol{X}$ only with very small probability (see Table 1). Even worse: with increasing dimension d, this probability rapidly decreases towards zero.*

The conclusion drawn from Example 2.3 is that even for very large samples in $\mathbb{R}^d$, say from $d = 5$, the sample space is only sparsely filled and all observations are rather far away from each other. Consequently, for estimation purposes we must either take into account points which are very distant – yielding a large bias

Table 1: Probability of X to lie in a sphere with radius 0.5 around the origin for d-dimensional uniformly and normally distributed X

	dimension d			
$P(\|\|X\|\| \leq 0.5$	1	5	10	20
$X \sim U_d[0,1]$	0.5	0.0313	0.001	$< 10^{-6}$
$X \sim N_d(0,1)$	0.3839	0.1175	$< 10^{-6}$	≈ 0

of an estimator – or we are confronted with the problem of not taking enough observations – yielding a large variance of the estimator.

This phenonemon that the high-dimensional sample space is hardly filled densely enough with observations even for massive data sets, is called the "curse of dimensionality" (Bellman, 1961, Friedman, 1994).

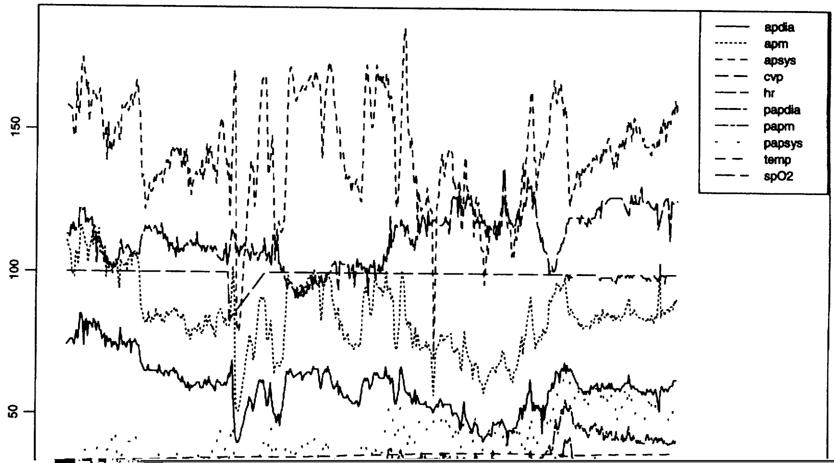
There is a further well-known problem connected to the curse of dimensionality, which is an algorithmic one. We illustrate this problem by the following example which also discusses a new method in robust regression.

Example 2.4. *Consider a data set* $(x_{1,i}, \ldots, x_{d,i}, y_i) \in \mathbb{R}^{d+1}, i = 1, \ldots, n$, *consisting of observations of a one-dimensional dependent variable Y and a d-dimensional regressor* $X = (X_1, \ldots, X_d)^T$. *The idea of Rousseeuw and Hubert (1999) is to look for a best linear fit, not with respect to least squares, but as a hyperplane which lies in some sense "as deep as possible" in the data. This leads to the definition of the so-called* **regression depth** *which can be seen as a generalization of the median to the regression setting. For a formal definition see Rousseeuw and Hubert (1999). The method is highly robust against deviations from the assumption of a normal distribution for* X *(for the concept of robustness cf. Huber, 1981). It also has caught attention in analytical geometry and within complexity theory. By use of methods from these fields it has been shown that every algorithm for determining the deepest regression fit exactly must be of order* $\mathcal{O}(n^{2d+1}\log(n))$ *for* $d > 1$ *(Amenta et al., 2000). This means that the runtime of every exact algorithm grows exponentially with the dimension d.*

Altogether, we can summarize the difficulties for the statistical analysis of high-dimensional data as:

- the problem of visualization,
- the curse of dimensionality,
- the numerical and algorithmic realization of valuable methods.

The problem of analyzing high-dimensional data is of course not only interesting from a theoretical point of view. Such data sets occur in real-world problems. We illustrate this by two brief examples. The first deals with data from a biopsychological experiment. For a sample of test persons, certain hormone levels and several intellectual as well as physiological abilities were observed. The goal was to find out about a possible interrelationship between hormone levels and abilities to solve certain tasks (cf. Hausmann et al., 2001), and the related study dealt with a total of 30 variables, yielding indeed a high-dimensional situation.



apdia
apm
apsys
cvp
hr
papdia
papm
papsys
temp
spO2
150
100
50

some given class $\mathcal{F}$ of distributions. Typical tasks in this situation are to estimate certain features of F such as the expectation $E(F)$ or the covariance matrix $Cov(F)$, or to find "interesting structures" in a sample $(\boldsymbol{x}_1, \ldots, \boldsymbol{x}_n)$ of $\boldsymbol{X}$, i. e. to learn more about the unknown F. Statistical methods for this latter purpose are often called "data mining" procedures (Hand, 1998). Methods in this model class include

- the grand tour (Asimov, 1985) and other projection pursuit methods (Huber, 1985),
- methods for dimension reduction like
  - principal component analysis (cf. Jolliffe, 1986, Pearson, 1901),
  - factor analysis (cf. Lawley and Maxwell, 1971, Pison et al., 2000),
  - neural networks (cf. White, 1989),
- robust covariance estimation (e. g. for outlier detection, compare Davies, 1987, Rocke, 1996, Rousseeuw, 1985).

Examples 2.1 and 2.2 already showed that projection based procedures may not always really be helpful in finding structures. However, projection pursuit methods are quite popular since they are sometimes the only possible choice and in their sophisticated versions they might be able to render a first clue of the data generating mechanism. We will therefore give a short view on the projection pursuit principle in the next section.

As a second model we will consider the simple high-dimensional nonparametric regression model from Example 2.3. Key methods in this situation are

- neural networks (cf. White, 1989),
- the support vector machine (cf. Christmann et al., 2000, Vapnik, 1998),
- projection pursuit regression (Friedman and Stuetzle, 1981),
- MARS / MART (Friedman, 1991, 1999a,b),
- dimension reduction methods like SIR (Li, 1991), PHD, SAVE (Cook, 1998, Cook and Weisberg, 1991, Li, 1992), DAME (Gather et al., 2001a).

We will briefly comment on neural networks in this context.

3.1 Projection pursuit methods

The so-called grand tour (Asimov, 1985) consists of the automatic animation of two-dimensional projections of a d-dimensional data cloud. This results in a three-dimensional rotation of the projections and mainly is a tool for visualization of high-dimensional data. As we have seen in Examples 2.1 and 2.2, such a method might not be helpful in finding structures in a data set. Moreover, the grand tour will discover interesting projections (if such exist) only in passing by, as it does not search for those systematically. In contrast to this, projection pursuit methods (Huber, 1985) do a directed search for "interesting" projections. Their focus can be e. g. to detect a nonlinear structure, holes in the point cloud, the central mass, or main directions of variability.

The directed search in such projection pursuit methods is performed by means of maximizing (or minimizing) a certain real-valued projection index I. Let $\boldsymbol{X}_n = (\boldsymbol{x}_1, \ldots, \boldsymbol{x}_n)$ be a sample of size n of some d-dimensional random variable $\boldsymbol{X}$,

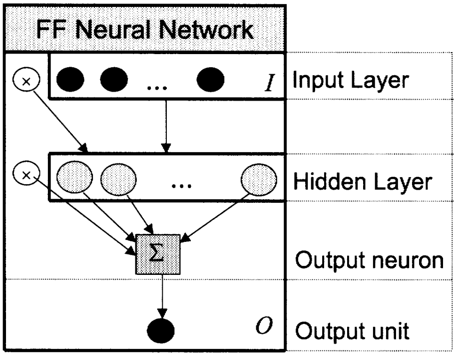


Fig. 6. Feedforward neural network, schematic description

then a projection pursuit method determines that linear projection A for which $I(AX_n) = \max$, where the maximum is taken over all possible linear projections into $\mathbb{R}^p, p < d$, and $I(AX_n) = I((Ax_1, \ldots, Ax_n))$. The value of $I(AX_n)$ can be interpreted as the degree of interest of the projection. As the maximization takes place in $\mathbb{R}$, and since we project into some lower-dimensional space, we thus escape from the curse of dimensionality. A very simple well-known example of a projection pursuit method is principal component analysis (e. g. Jolliffe, 1986), where we project into $\mathbb{R}$, and the projection index equals the sample variance, $I(AX_n) = Var(AX_n)$.

Compared to the grand tour, projection pursuit methods can be seen as more advanced. But the search is computationally rather expensive, and the problems of visualization as shown before still occur.

3.2 Neural networks for regression

The general idea of neural network methods is to copy the idea of efficient information management of biological neural systems by clever mathematical modeling. This is done by assuming that certain input variables yield a certain output by hidden links (see Figure 6 for a schematic description). Neural networks are used in various applications to approximate unknown complex functional relationships.

To forecast the output from given observations of the input variables, the network has to be "trained" first. Translated into statistical terms, this means we have to estimate the network's parameters. These are part of the mathematical-statistical model for a feedforward neural network, given in the following form:

$$y = \text{output}(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{w}) = \boldsymbol{x}^T a + \sum_{j=1}^{M} \beta_j g_j \left(\sum_{i=1}^{d} \gamma_{ji} x_i \right),$$

where $\boldsymbol{x} = (x_1, \ldots, x_d)^T \in \mathbb{R}^d$ denotes an input variable, $\boldsymbol{a} = (a_1, \ldots, a_d)^T$ and $\boldsymbol{w} = (\beta_1, \ldots, \beta_M, \gamma_{1,1}, \ldots, \gamma_{M,d})^T$ are the vectors of network weights, and $g_j(.), j = 1, \ldots, M$, are the so-called activation functions. These functions and also their number, M, have to be chosen beforehand. The network weights are the above mentioned network's parameters which have to be estimated or "learned" (in the neural network terminology) from the data. This is done by minimization of certain criteria. We note that – statistically seen – finding such a feedforward neural network reduces to fitting a generalized linear model to a data set of input and output observations (also see Warner and Misra, 1996). The frequently praised flexibility of the neural network approach originates from the possibility of choosing the functions g_j as desired. Also, a dimension reduction takes place in the sense that only a single index model is considered, which means that we do not model any interactions. Moreover, modern algorithms in neural network methods are numerically very stable and indeed rather flexible.

4 Some special problems in high dimensions

We now focus on some special tasks in the high-dimensional data situation. First, we consider again the simple model of a sample of size n from some d-dimensional elliptically contoured null distribution like the multivariate normal. We assume that the majority of the data in the sample come from this null distribution. Some of the observations are assumed to be outlying in the sense that they lie in a region of low probability mass of the null distribution. They are outliers in the sense of Davies and Gather (1993). We consider the task of detecting all such outliers in the sample with respect to the (at least partially) unknown target distribution.

4.1 Covariance estimation / outlier detection

We consider simultaneous rules for outlier identification, i. e. rules which detect all outliers in a sample in one step. An observation $\boldsymbol{x}_i \in \mathbb{R}^d$ is declared as outlying iff its generalized Mahalanobis distance $d_i^2 = (\boldsymbol{x}_i - \boldsymbol{m})^T \boldsymbol{S}^{-1}(\boldsymbol{x}_i - \boldsymbol{m})$ exceeds some suitably chosen critical value $c(d, n, \alpha_n)$ (Barnett and Lewis, 1994, Becker and Gather, 1999, Rousseeuw and Leroy, 1987, Rousseeuw and van Zomeren, 1990). Here, $\boldsymbol{m}$ and $\boldsymbol{S}$ denote estimators of the d-dimensional location vector $\boldsymbol{\mu}$ and the covariance matrix $\boldsymbol{\Sigma}$, respectively, of the underlying target distribution from which the majority of the data $(\boldsymbol{x}_1, \dots, \boldsymbol{x}_n)$ is assumed to come. The constant $c(d, n, \alpha_n)$ can for example be determined such that in a sample of size n from the d-variate normal distribution, an observation exceeds c only with probability α for some given value $\alpha \in [0, 1]$ (Becker and Gather, 1999, see also Davies and Gather, 1993). Figure 7 illustrates the idea of such an outlier identification rule. Observations lying outside the ellipsoid are identified as outlying, meaning that they lie too far away from the center of the main data cloud with respect to its shape.

Quite obviously, identification methods as just described need estimators of the center and shape of the underlying null distribution which are themselves insensitive against the influence of possible outlying observations in the sample. This means that the problem of finding the outliers in a sample is more or less equivalent to the problem of finding a "good" estimation of the covariance structure when outliers may be present. It is well known that independently of the dimension d, we need highly robust estimators of location and covariance – in the sense of maximum breakdown point – to guarantee the maximum possible protection against

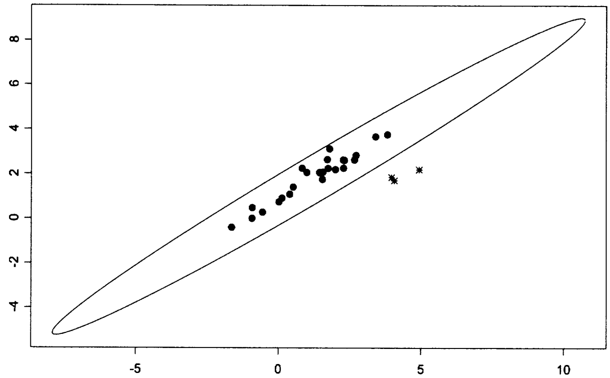


Fig. 7. Simultaneous outlier identification rule: points marked as asterisks are detected as outlying

misclassification of observations as outliers or non-outliers (masking, swamping), respectively (Becker and Gather, 1999, Rocke, 1996). Suitable estimators are for instance the minimum volume ellipsoid (MVE) and the minimum covariance determinant (MCD) estimators (Rousseeuw, 1985), S-estimators (Davies, 1987, Rocke, 1996), as well as projection based approaches like the Stahel-Donoho estimators (Donoho, 1982, Stahel, 1981) or projection pursuit estimators (Li and Chen, 1985).

In this context, S-estimators $(\boldsymbol{m}, \boldsymbol{S})$ for location and covariance are optimal in various ways (Becker and Gather, 1999, 2001). They are defined as the simultaneous solution of the problem of minimizing the determinant of some positive definite matrix $\boldsymbol{S}$ under certain constraints concerning $\boldsymbol{m}$ and $\boldsymbol{S}$ (Davies, 1987, Rocke, 1996). Algorithmically, solutions can be found by an iterative procedure starting with highly robust initial estimates such as MVE or MCD. For details see Rocke (1996). The following example illustrates the application of a simultaneous outlier identification rule based on S-estimators.

Example 4.1. *(Becker, 2000) We take a two-dimensional sample of size* $n = 50$, *where* 30 *observations come from the bivariate standard normal, while* 20 *observations are placed at a point with coordinates* $(0, 30)$, *i. e. they are located quite distant from the true center. Figure 8 (upper part) shows this data set together with the critical ellipse for outlier identification, resulting from estimating location and covariance structure by means of a biweight S-estimator according to Rocke (1996). We can see that the estimated covariance structure does not allow for identifying the outliers, even though we use highly robust estimators. However, the procedure does not yield arbitrarily bad results as can be seen in the lower part of Figure 8. If we move the outliers to some farther distance, namely place them at the point* $(0, 50)$, *they are clearly classified as outlying by the rule. Somewhere in between* $(0, 30)$ *and* $(0, 50)$, *we find the distance at which the behaviour of the procedure changes from not identifying the outliers to detecting them. We call this distance the size of the largest nonidentifiable outlier.*

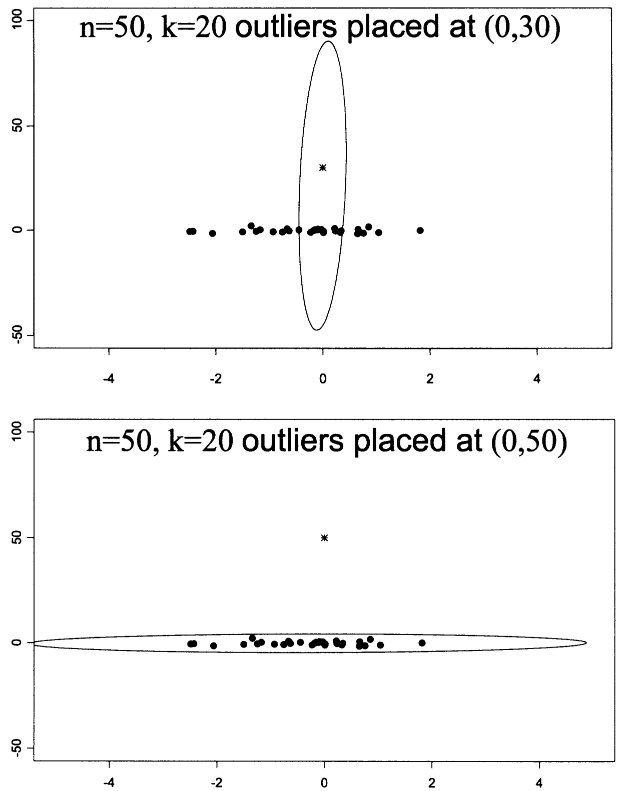


Fig. 8. S-estimator identification: $n = 50$, $k = 20$ outliers placed at (0,30) and (0,50), respectively

Closer investigations of the size of the largest nonidentifiable outlier can be found in Becker (2000) and Becker and Gather (2001). The results can be summarized as follows. Let us first consider the size of the largest nonidentifiable outlier as a performance criterion for a simultaneous outlier identification rule in the lower dimensional case. For samples of size $n = 20, 50$ in dimension $d = 4$, we compare the mean sizes of the largest nonidentifiable outliers found by simulation for three identification rules. The methods are based on S-estimators as described before, and on the robust MVE and MCD estimators which are also used as the initial estimates in the S-estimator algorithm. Figure 9 shows the results (from Becker and Gather, 2001). We observe that

1. the solid line lies below the others, especially for large proportions of outliers in the samples; hence, the S-estimator identification yields a lower "bias" in the sense of a smaller value of the largest nonidentifiable outlier, and the S-estimator iteration obviously leads to an improved outlier identification relative to the performance of the identification based on the initial estimates;

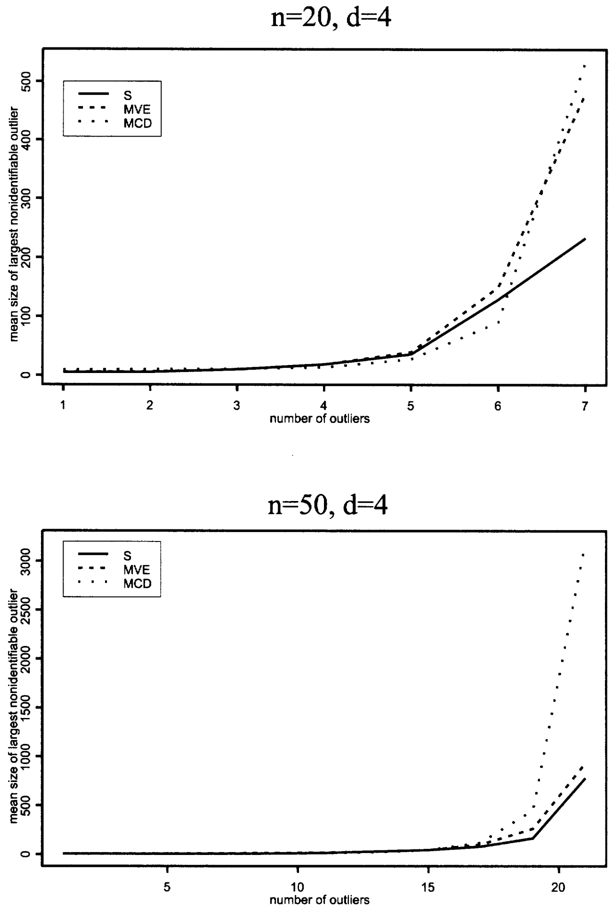


Fig. 9. Mean size of the largest nonidentifiable outlier: low-dimensional case

2. there is only one line drawn for the S-estimator identification rule; for low to medium dimensions, the size of the largest nonidentifiable outlier does not depend on the choice of the initial estimate in the S-estimator iteration.

Both effects disappear in high dimensions (see Figure 10, from Becker, 2000).

1. The results are no longer independent of the choice of the initial estimate. Instead, the sizes of the largest nonidentifiable outliers are mainly identical for the MVE-identification rule and for the S-estimator identification based on an initial MVE estimate. The same is true for the MCD case.
2. This implies that the S-estimator iteration no longer provides an improvement relative to the initial estimates.

To conclude, we find that for low to medium dimensions of the data a simultaneous outlier identification rule based on an S-estimator possesses good (theoretical) robustness properties and shows a good (practical) performance in most cases. More-

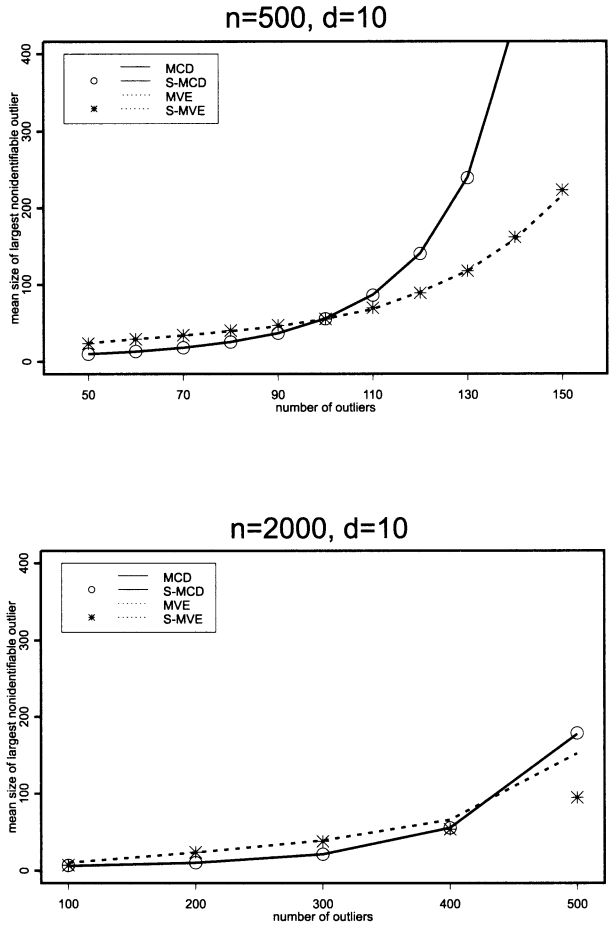


Fig. 10. Mean size of the largest nonidentifiable outlier: high-dimensional case

over, we often even get improved results by the S-estimator iteration, compared to the results of the rules based on the initial estimates. But for high dimensions, the well-behaved covariance S-estimator looses its advantages over the initial estimates, and the performance is no longer independent of their behaviour. Hence, we either need to improve the iterative algorithm for calculating S-estimators, or we need to construct completely new algorithms which are suitable for the use with high-dimensional data. In general, we see that there is a rather strong need for new, robust covariance estimators which are especially designed for high dimensions.

4.2 Dimension reduction in regression

In the second part of this section, we focus on the situation of a nonparametric regression model, where the regressor is d-dimensional. In Example 2.3 we have already seen why usual nonparametric regression techniques fail when d is large. A natural goal is thus to reduce the dimension of the regressor to avoid the curse of dimensionality.

To fix ideas, let us consider a univariate response $Y \in \mathbb{R}$ which depends on a d-dimensional random regressor variable $\boldsymbol{X} = (X_1, \dots, X_d)^T \in \mathbb{R}^d$ by some unknown function $g : \mathbb{R}^d \mapsto \mathbb{R}$ and some error ε, $Y = g(\boldsymbol{X}) + \varepsilon$, $d \geq 2$. We then assume that we can write this functional relationship by means of some function $f : \mathbb{R}^{K+1} \mapsto \mathbb{R}$ (also unknown) which is defined on some lower dimensional subspace of dimension $K < d$. More exactly, the high-dimensional regressor $\boldsymbol{X}$ is projected into this subspace by so-called dimension reducing (dr) directions $\boldsymbol{\beta}_1, \dots, \boldsymbol{\beta}_K$ such that one may write $Y = f(\boldsymbol{\beta}_1^T \boldsymbol{X}, \dots, \boldsymbol{\beta}_K^T \boldsymbol{X}, \varepsilon)$. Hence, we assume a multi-index model, for which it seems to be reasonable to estimate the space $\mathcal{B}$ spanned by the directions $\boldsymbol{\beta}_1, \dots, \boldsymbol{\beta}_K$ in a first step and to find the function f in the reduced space afterwards by appropriate standard methods. Sliced inverse regression (SIR; Li, 1991) is a compound procedure to estimate the dimension reducing space $\mathcal{B}$ as well as the dimension K of this space. The idea behind this method is that under suitable design conditions, the appropriately normalized inverse regression curve (i. e. the conditional expectation of $\boldsymbol{X}$ given Y) lies almost surely in that linear subspace which is spanned by the dr directions. This fact is used for estimating the dr directions by first approximating the inverse regression function very roughly by a vector valued "step function" where the sets of Y-values with equal step function values are called "slices". Then the K directions of maximal variability of these vectors are gained by a principal component analysis. These directions yield the estimates for the dr directions $\boldsymbol{\beta}_1, \dots, \boldsymbol{\beta}_K$.

SIR and its modifications (Cook and Weisberg, 1991, Li, 1991, 1992, Cook, 1998) got a lot of attention as methods for dimension reduction. Asymptotic results as well as optimality properties under certain models have been proved.

Since SIR is meant as a first step prior to the further analysis of the data, it is very important that this method is robust against small model deviations and against the occurrence of (a few) errors in the data. Unfortunately, this is not the case, as can be seen in the following simple, two-dimensional example (see Gather et al. 2001a,b for details).

Example 4.2. *In the situation of a nonparametric regression model as described above, assume that* $Y = g(\boldsymbol{X}) = g(X_1, X_2) = f(X_1)$. *That means,* $\mathcal{B} = span(\boldsymbol{\beta}_1) = span((1,0)^T)$ *and* $K = 1$. *Consider a sample of a bivariate normally distributed regressor variable* $(X_1, X_2)^T$, *containing a few very far outlying observations, lying in the direction of* $\boldsymbol{\beta}_1$. *If we further assume K to be known, estimating* $\boldsymbol{\beta}_1$ *by SIR can lead to a direction* $\widehat{\boldsymbol{\beta}}_1$ *which is almost orthogonal to the true* $\boldsymbol{\beta}_1$. *Figure 11 shows an example of such a situation. If, on the other hand, we assume the more realistic situation that also K itself is unknown, for the data of Figure 11 we estimate* $\widehat{K} = 0$ *which means that in this case we would not even conclude that Y is related to* $\boldsymbol{X}$ *(compare Gather et al., 2001b).*

This phenomenon of SIR being extremely sensitive against outliers can also be shown very generally. For contaminated samples with outliers tending to lie infinitely far away from the main part of the data, the estimated dr directions tend to become orthogonal to the true dr directions in the limit (Gather et al., 2001b). In

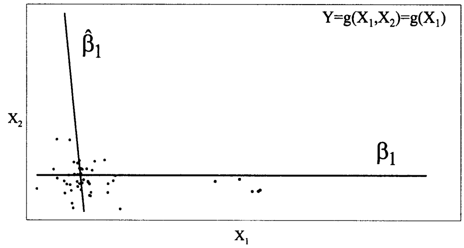


Fig. 11. Estimation of dr direction by SIR for a sample containing outliers

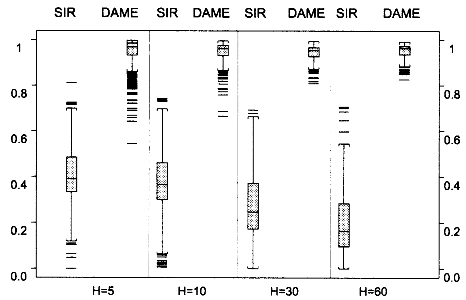


Fig. 12. Simulation results: boxplots of absolute value of correlation between true and estimated dr direction by SIR and DAME for samples containing outliers

this sense, SIR can break down. One main reason for this behaviour of SIR lies in the principal component analysis based on the classical, nonrobust empirical covariance matrix. If we replace all nonrobust estimators in the SIR procedure by robust ones, meaning that we also perform a robust principal component analysis (e. g. Croux and Haesbroeck, 2000), we can improve the performance. Gather et al. (2001a) introduce such a robustified version of SIR called dimension adjustment method (DAME) and show the improved performance in samples with outliers. Figure 12 illustrates the results of a simulation study for $d = 10$, $K = 1$, $g(\boldsymbol{X}, \varepsilon) = f(X_1) + \varepsilon = X_1 + 0.1\tilde{\varepsilon}$, $X_1, \ldots, X_{10}, \tilde{\varepsilon}$ i.i.d. $N(0,1)$ variables, and 10% of the data contaminated by adding $2\sqrt{\chi^2_{d;0.999}}$ to the first component. For several choices of a free parameter H (the number of slices), boxplots of the absolute value of the correlation between true and estimated dr direction are shown for both procedures. The boxplots clearly demonstrate that in the outlier situation DAME is able to estimate the dr direction almost correctly (abs. correlation near one) far more often than SIR. One main reason for this is the use of robust estimators of the covariance matrix in the steps of DAME (for details see Gather et al., 2001a) which shows again the importance of good robust covariance estimators for high-dimensional data.

5 Conclusion

The problem of analyzing and modeling high-dimensional data is becoming more and more compelling. We are confronted with such data in many fields of modern research, in the life sciences as well as in sociology and economics, to just mention some. The reason for this can be found in the growing complexity of open problems as well as in growing possibilities of storage and computer power.

We have seen that, already when dealing with simple model structures and simple tasks for high-dimensional data, we are facing special problems. Some of them are fundamental in nature, coming with the inherent curse of dimensionality. Some are algorithmic ones due to the complexity of connected mathematical problems, such as high-dimensional optimization.

Some special solutions for partial problems are available, especially under the assumption of an underlying elliptically symmetric distribution. Often, these solutions yield new mathematical and statistical problems such as the claim for more robust methods for dimension reduction or the task of constructing “feasible” covariance matrix estimates in high-dimensional models.

Acknowledgements

The financial support of the Deutsche Forschungsgemeinschaft (SFB 475, “Reduction of complexity in multivariate data structures”) is gratefully acknowledged.

References

[1] *N. Amenta, M. Bern, D. Eppstein and S.-H. Teng:* Regression depth and center points, Discrete Comput. Geom. **23** (2000), 305–323.

[2] *D. Asimov:* The grand tour: A tool for viewing multidimensional data, SIAM J. Sci. Statist. Comput. **6** (1985), 128–143.

[3] *V. Barnett and T. Lewis:* Outliers in statistical data, 3rd ed., Wiley, New York 1994.

[4] *M. Bauer, U. Gather and M. Imhoff:* Analysis of high dimensional data from intensive care medicine (in *R. Payne and P. Green (eds.):* Proceedings in Computational Statistics, Physica, Heidelberg 1998), 185–190.

[11] *R.D. Cook and S. Weisberg:* Comment on "Sliced inverse regression for dimension reduction" by K.-C. Li, J. Amer. Statist. Assoc. **86** (1991), 328–332.

[12] *C. Croux and G. Haesbroeck:* Principal component analysis based on robust estimators of the covariance or correlation matrix: Influence functions and efficiencies, Biometrika **87** (2000), 603–618.

[13] *P.L. Davies:* Asymptotic behaviour of S-estimates of multivariate location parameters and dispersion matrices, Ann. Statist. **15** (1987), 1269–1292.

[14] *P.L. Davies and U. Gather:* The identification of multiple outliers (with discussion), J. Amer. Statist. Assoc. **88** (1993), 782–801.

[15] *D.L. Donoho:* Breakdown Properties of Multivariate Location Estimators, Ph.D. Qualifying Paper, Department of Statistics, Harvard University 1982.

[16] *J.H. Friedman:* Multivariate adaptive regression splines (with discussion), Ann. Statist. **19** (1991), 1–141.

[17] *J.H. Friedman:* An overview of predictive learning and function approximation (in *V. Cherkassky, J.H. Friedman and H. Wechsler (eds.):* From statistics to neural networks. Theory and pattern recognition applications, Springer, Berlin 1994), 1–61.

[18] *J.H. Friedman:* Greedy function approximation: A gradient boosting machine, http://www-stat.stanford.edu/~jhf/ftp/trebst.ps (1999a).

[19] *J.H. Friedman:* Stochastic gradient boosting, http://www-stat.stanford.edu/~jhf/ftp/stobst.ps (1999b).

[20] *J.H. Friedman and W. Stuetzle:* Projection pursuit regression, J. Amer. Statist. Assoc. **76** (1981), 817–823.

[21] *U. Gather, T. Hilker and C. Becker:* A robustified version of sliced inverse regression, to appear in Proc. Workshop on Statistical Methodology for the Sciences: Environmetrics and Genetics, Ascona, 23.05.–28.05.1999 (2001a).

[22] *U. Gather, T. Hilker and C. Becker:* A note on outlier sensitivity of sliced inverse regression, submitted for publication (2001b).

[23] *D.J. Hand:* Data mining: Statistics and more? Amer. Statist. **52** (1998), 112–118.

[24] *M. Hausmann, C. Becker, U. Gather, O. Güntürkün:* Functional cerebral asymmetries during the menstrual cycle: A cross sectional and longitudinal analysis, submitted for publication 2001.

[25] *P.J. Huber:* Robust statistics, Wiley, New York 1981.

[26] *P.J. Huber:* Projection pursuit, Ann. Statist. **13** (1985), 435–525.

[27] *I.T. Jolliffe:* Principal component analysis, Springer, New York 1986.

[28] *D.N. Lawley and A.E. Maxwell:* Factor analysis as a statistical method, 2nd ed., Butterworths, London 1971.

[29] *G. Li and Z. Chen:* Projection-pursuit approach to robust dispersion matrices and principal components: Primary theory and Monte Carlo, J. Amer. Statist. Assoc. **80** (1985), 759–766. Correction: J. Amer. Statist. Assoc. **80** (1985), 1084.

[37] *P.J. Rousseeuw and A.M. Leroy:* Robust regression and outlier detection, Wiley, New York 1987.

[38] *P.J. Rousseeuw and B.C. van Zomeren:* Unmasking multivariate outliers and leverage points, J. Amer. Statist. Assoc. **85** (1990), 633–639.

[39] *W.A. Stahel:* Breakdown of covariance estimators, Research Report **31**, Fachgruppe für Statistik, ETH Zürich 1981.

[40] *V. Vapnik:* Statistical learning theory, Wiley, New York 1998.

[41] *B. Warner and M. Misra:* Understanding neural networks as statistical tools, Amer. Statist. **50** (1996), 284–293.

[42] *H. White:* Learning in neural networks: A statistical perspective, Neural Comp. **1** (1989), 425–464.

Ursula Gather, Claudia Becker
Fachbereich Statistik
Universität Dortmund
D-44221 Dortmund
gather@statistik.uni-dortmund.de
cbecker@statistik.uni-dortmund.de

(*Eingegangen 28.02.2001*)

Buchbesprechungen

Cornell, G., Silverman, J. H., Stevens, G. (Editors), Modular Forms and Fermat's Last Theorem, New York u. a.: Springer 1997, 582 S.

An den Rand seiner Bachet-Ausgabe von Diophants Arithmetik schrieb der Jurist Fermat vor über 350 Jahren, daß die Gleichung $x^n + y^n = z^n$ für $n > 2$ keine Lösung in natürlichen Zahlen $x, y, z > 0$ habe. Für den Fall $n = 4$ reichte der Rand für Fermat noch aus, um einen Beweis zu geben; den schwierigeren Fall $n = 3$ hat er vermutlich verstanden (der erste publizierte Beweis stammt, in mehreren Etappen, über 100 Jahre später von Euler); welche Ideen er für den allgemeinen Fall hatte, ist unbekannt. Mit der posthumen Publikation der Randnotizen durch seinen Sohn war dieser „große Fermatsche Satz" in der Öffentlichkeit, war zugleich Ansporn und Kuriosität für die Zahlentheoretiker. Sie schufen im 19. Jahrhundert die Disziplin der algebraischen Zahlentheorie und rückten dem Problem mit deren Methoden auf den Leib, allen voran Kummer, der die tiefsten Resultate vor Wiles erzielte. Aber ein für alle Exponenten n gültiger Beweis wollte sich nicht finden lassen. Mehrfach wurden Preise zur Lösung der Fermatschen Behauptung ausgesetzt, am berühmtesten (weil am besten dotiert) wurde der 1908 von Wolfskehl ausgesetzte Preis, der das ganze 20. Jahrhundert über zu zahlreichen Versuchen von Amateuren führte, die die professionellen Mathematiker mit „Beweisen" für die Fermatsche von Richard Taylor nach bangen und langen Versuchen geschlossen bzw. umgangen werden, im Mai 1995 wurde das Manuskript vom Oktober 1994 in den Annals of Mathematics gedruckt. Es ist ein schmaler Pfad, der zum Erfolg führt, die Taniyama-Shimura-Vermutung wird gerade so weit gezeigt, daß die Fermatsche Vermutung gefolgert werden kann. Es ist eine tour de force, die viele moderne Theorien, etwa über elliptische Kurven, Modulformen (Hecke, Eichler, Shimura, Selberg, Langlands, Tunnell), kommutative Algebra, insbesondere über Galoisdarstellungen (Deligne, Serre, Ribet) und ihre Deformationstheorie (Mazur) benutzt. Schon die benutzten Hilfsmittel sind vielseitig und tiefgründig, der von Wiles gefundene Weg ist nochmals ein kunstvoller Gang, immer knapp am Abgrund des Nichtwissens bzw. Scheiterns angelegt.

Der Beweis von Wiles hat viele Darstellungen von verschiedenem Niveau gefunden, auf zahlreichen Konferenzen wurde versucht, Wesentliches aus dem Beweis einem breiteren Publikum nahe zu bringen. Für den Nichtfachmann am beeindruckendsten sind in meinen Augen das faszinierende BBC-Video von Simon Singh sowie sein im Anschluß daran geschriebenes Buch *Fermat's Last Theorem* (London 1997), deutsch *Fermats letzter Satz* (Hanser 1998). Unter den tiefer gehenden Darstellungen des Beweises von Wiles mit Aufarbeitung der von Wiles benutzten Hilfsmittel sticht das hier zu besprechende Buch als die ausführlichste und gründlichste Darstellung hervor. Das Buch ist aus einer instructional conference on number theory and arithmetical geometry, die 1995 in Boston abgehalten wurde, hervorgegangen, die dortigen Vorträge wurden überarbeitet, erweitert und nach Möglichkeit kohärent gestaltet. In 21 Kapiteln wird nicht nur der Beweis und seine Grundlagen studiert, es werden auch historische Aspekte, Weiterentwicklungen, Einordnung in allgemeinere Entwicklungen behandelt.

In Kap. I gibt G. Stevens eine Übersicht über den Beweis von Wiles. In den nächsten vier Kapiteln werden Grundlagen referiert, nämlich elliptische Kurven (Silverman), Modulkurven mit Hecke-Korrespondenzen und L-Reihen (Rohrlich), Galois-Kohomologie (Washington) und endliche flache Gruppenschemata (Tate). In Kap. VI stellt S. Gelbart einen ersten spezifischen Schritt im Beweis von Wiles vor, er zeigt auf dem Hintergrund der Langlands-Reziprozität für Artinsche L-Reihen und des Satzes von Langlands-Tunnell (partielle Artin-Vermutung), daß die Galois-Darstellung auf der 3-Torsion einer elliptischen Kurve modular ist, falls sie irreduzibel ist. In Kap. VII (Gross/Edixhoven) wird Serre's Vermutung über Modulformen in Charakteristik p behandelt und die Zusammenhänge mit der Shimura-Taniyama-Vermutung sowie der Fermatschen Vermutung., insbesondere Resultate von Carayol, Mazur und Ribet. In Kap. VIII und IX (Mazur, de Smith, Lenstra) wird die Deformationstheorie von Galoisdarstellungen begonnen und der universelle Deformationsring einer absolut irreduziblen Darstellung konstruiert, die Darstellbarkeit des flachen Deformationsfunktors wird in Kap. XIII (Conrad) gezeigt. In Kap. X (Tilouine) wird die von Wiles benutzte Gorenstein-Eigenschaft für die Hecke-Algebra studiert, in einem Anhang korrigiert Mazur einen Fehler in seiner berühmten Eisenstein-Ideal-Arbeit. In Kap. XI (de Smit, Rubin, Schoof) werden Kriterien entwickelt, die die Isomorphie von gewissen Deformationsringen mit Hecke-Algebren liefern. Kap. XII (Diamond, Ribet) und Kap. XIV (de Shalit) enthalten den Kern des Beweises von Wiles. Es werden l-adische modulare Darstellungen behandelt und die Wiles'sche Vermutung über Isomorphismen zwischen bestimmten Deformationsringen und Heckealgebren wird formuliert und gezeigt. Der Schlußstein von Wiles Beweis, der berühmte und glücklich gelungene 3-5-Shift zwischen den Galoisdarstellungen auf der 3-Torsion bzw. 5-Torsion einer semistabilen elliptischen Kurve (keine anderen Primzahlen kann man hier brauchen!), wird in Kap. XV (Silverberg) und XVI (Rubin) sorgfältig ausgebreitet. Damit ist Wiles Beweis dargestellt; tatsächlich ist mehr entwickelt, als für den Beweis von Fermats Vermutung notwendig gebraucht wird; doch diese ist zwar spektakulär, aber kein Schlußstein in dieser reichhaltigen mathematischen Landschaft.

Die weiteren Kapitel bringen Abrundungen: In Kap. XVII (Diamond, Kramer) werden die Resultate von Wiles zur Modularität elliptischer Kurven weiterentwickelt; inzwischen ist die Taniyama-Shimura-Vermutung vollständig gezeigt, aber so weit war man bei Fertigstellung des Buches noch nicht. Kap. XVIII (Lenstra, Stevenhagen) und XIX (Rosen) enthalten historische Bemerkungen zur Fermatschen Vermutung, Kap. XX (Frey) und XXI (Darmon) verallgemeinern die Betrachtungen von der Fermatschen Gleichung zu anderen diophantischen Gleichungen und zeigen, welche Bedeutung die Wilesschen Ergebnisse für die Arithmetik elliptischer Kurven haben.

Das Buch ist eine hervorragende Basis, um in die moderne Arithmetik einzudringen, und zeigt zugleich in besonderer Eindringlichkeit die Schlagkraft der in den letzten Jahrzehnten entwickelten abstrakten Methoden, um konkrete diophantische Probleme wie die Fermatsche Vermutung zu lösen.

Erlangen W.-D. Geyer

Cox, D., Little, J., O'Shea, D., Using algebraic Geometry. Graduate Texts in Mathematics, New York u. a.: Springer 1998, 499 S., DM 78,–

Trotz des höheren Anspruchs und Tempos kann das vorliegende Buch als Fortsetzung und Ergänzung des Buchs [CLO] der gleichen Autoren angesehen werden (vergleiche die Besprechung im vorigen Band). Auch hier geht es um das Wechselspiel zwischen Computeralgebra und algebraischer Geometrie. Besonderer Wert wird auf Anwendungen in anderen Bereichen der Mathematik gelegt. Dabei spielen neben Gröbner-Basis-Techniken auch Resultanten eine wichtige Rolle. Im Unterschied zu [CLO] ist das jetzt vorliegende Buch nicht in sich abgeschlossen: Für einige wichtige Beweise wird auf die Literatur verwiesen.

Wie das alte enthält auch das neue Buch neun Kapitel.

In Kapitel 1 werden in kompakter Weise Grundtatsachen über Polynome, Ideale, monomiale Ordnungen, Division mit Rest, Gröbner-Basen für Ideale in Polynomringen und affine Varietäten zusammengestellt.

Kapitel 2 beschäftigt sich mit dem Lösen polynomialer Gleichungssysteme mit Hilfe von Elimination (hier: Gröbner-Basis-Techniken) bzw. Eigenwertberechnungen.

In Kapitel 3 geht es um Resultanten. Ausgehend von der klassischen Resultante für zwei Polynome in einer Variablen wird die multipolynomiale Resultante eingeführt. Diese wird benutzt zur Elimination von Variablen aus drei oder mehr polynomialen Gleichungen und damit zum Lösen von solchen Gleichungen. Dazu gehen die Autoren auch auf die Berechnung von Resultanten ein.

Motiviert durch die Einführung von Vielfachheiten und Milnor-Zahlen geht es in Kapitel 4 darum, wie man in lokalen Ringen wie etwa der Lokalisierung eines Polynomrings im Verschwindungsideal des Nullpunkts rechnet. Dazu betrachtet man einen allgemeineren Ordnungsbegriff (man verzichtet auf die Voraussetzung Wohlordnung). Die entsprechenden Gröbner-Basen für von Polynomen erzeugte Ideale (in diesem Zusammenhang nach Hironaka und Grauert auch Standardbasen genannt) können mit dem Analogon zu Buchbergers Algorithmus berechnet werden, wenn man Division mit Rest nach Mora zu Grunde legt.

In Kapitel 5 und 6 wird die Theorie der Gröbner-Basen und der Buchberger-Algorithmus auf Untermoduln von freien Moduln über einem Polynomring übertragen. Danach wird Schreyers Ansatz zur Berechnung von Syzygien sowie der sich daraus ergebende Beweis des Hilbertschen Syzygiensatzes vorgestellt. Es folgt eine Behandlung minimaler freier Auflösungen im graduierten Fall. Einige Anwendungen unterstreichen die Bedeutung von Syzygien für die algebraische Geometrie.

In Kapitel 7 geht es um Zusammenhänge zwischen der Geometrie konvexer Polytope, die durch die Exponenten von Laurent-Polynomen bestimmt sind, und Resultanten. Insbesondere gehen die Autoren auf sparse resultants und torische Varietäten, auf Bernsteins Satz über die gemeinsamen Nullstellen mehrerer Laurent-Polynome und auf die Berechnung von (mixed) sparse resultants und deren Anwendung zum Lösen von Gleichungssystemen wie in Kapitel 3 ein.

Kapitel 8 beschäftigt sich mit einigen Anwendungen von Gröbner-Basen-Techniken in den Bereichen ganzzahlige Optimierung, Kombinatorik und Splines.

In Kapitel 9 werden Anwendungen von Computeralgebra und algebraischer Geometrie in der Codierungstheorie studiert. Insbesondere werden Reed-Solomon-Codes und ihre Decodierung besprochen. Der letzte Abschnitt ist eine kurze Einführung in die Theorie der geometrischen Goppa-Codes.

[illegible]

theoretischen auch viele praktische Aufgaben mit Computeralgebrasystemen (vor allem Macaulay, Maple und Singular). Zusammen mit [CLO] ist es sehr gut geeignet als erste Einführung in die angesprochenen Themenkreise. Dabei können viele Kapitel des Buchs im Wesentlichen unabhängig von den anderen Kapiteln gelesen werden. Zu den meisten Kapiteln wird vertiefende Literatur angegeben.

[CLO] Cox, D., Little, J., O'Shea, D.: Ideals, Varieties, and Algorithms. New York u. a.: Springer 1997

Saarbrücken W. Decker

Hofmann, K. H., Morris, S. A., The Structure of Compact Groups. A Primer for the Student – A Handbook for the Expert (De Gruyter Studies in Mathematics Vol. 25) Berlin – NewYork: de Gruyter 1998, xvii+835 S., DM 278.00 (US$ 174.00 approx.).

Ein gewaltiges Werk. So der erste – äußere – Eindruck, wenn man dieses Buch sche Lie-Theorie). Man findet einen Zugang zum aktuellen Stand dieses Zweigs der Strukturtheorie kompakter Gruppen etwa in der Monographie von John S. Wilson: Profinite Groups, London Mathematical Society Monographs New Series 19, Oxford Science Publ. 1998.

Die Autoren haben sich offenbar bemüht, eine in sich abgeschlossene Monographie zu schreiben, die (eine nicht unerhebliche mathematische Reife der Lesenden vorausgesetzt) weitgehend ohne Zitate auskommt. Insofern wäre dann der erste Teil des Untertitels – „A Primer for the Student" – zu verstehen. Allerdings ist hier wohl an fortgeschrittene Studierende zu denken. Die zweite Hälfte des Untertitels – „A Handbook for the Expert" – wird gerade nicht als Entschuldigung genommen, die „Selbstverständlichkeiten" nicht mehr zu erwähnen oder nur noch zu zitieren. Vielmehr haben sich die beiden Autoren der Aufgabe gestellt, auch die „Folklore" gewissenhaft darzustellen. Damit ist ein Nachschlagewerk entstanden, das sowohl einen guten Überblick über die Ergebnisse als auch vollständige Beweise bietet.

Kompakte Gruppen kann man nicht studieren, ohne den abelschen Gruppen ihren Platz einzuräumen. Es ist für den Neuling doch überraschend, welche Reichhaltigkeit die Klasse aller kompakten abelschen Gruppen aufweist. Der Grund liegt darin, dass via Pontrjagin-Dualität diese Klasse gerade der Klasse *aller* (diskreten) abelschen Gruppen entspricht. Diese Dualität bildet folgerichtig auch den Kristallisationskern des ersten Kapitels. Sie wird später im siebten Kapitel bewiesen und weiter diskutiert.

Die nächsten drei Kapitel widmen sich der Darstellungstheorie kompakter Gruppen. Das Haar-Integral wird auf ökonomische Weise eingeführt und zum Beweis, dass die unitären Darstellungen auf Hilbert-Räumen endlicher Dimension die Punkte trennen, verwendet. Dies führt zur Lösung des fünften Hilbertschen Problems im speziellen Fall kompakter Gruppen. Eine unkonventionelle, aber im geschaffenen Rahmen völlig angemessene Definition kompakter Liegruppen schließt sich an. Im dritten Kapitel geht es um die Algebra $R(G, \mathbb{K})$ der fast-invarianten stetigen Funktionen von einer kompakten Gruppe G nach $\mathbb{K} \in \{\mathbb{R}, \mathbb{C}\}$. Es wird gezeigt, in welcher Weise diese Algebra als Katalog der einfachen G-Moduln über $\mathbb{K}$ zu lesen ist. Nach der Darstellung dieses klassischen Resultats von Peter und Weyl dreht sich die Diskussion um Mittlungsoperatoren und Fixpunktmengen, um dann im „großen" Satz von Peter und Weyl (3.51) zu kulminieren. Das vierte Kapitel stellt die klassische Charaktertheorie dar, geht allerdings über den Standardstoff hinaus: die Zerlegung eines Moduls in isotypische Komponenten wird nicht nur für Hilbert-Moduln, sondern unter stark abgeschwächten Vollständigkeits-Voraussetzungen gezeigt (4.22).

Im fünften und sechsten Kapitel werden Lie-Gruppen als gewisse Untergruppen der multiplikativen Gruppen von Banach-Algebren behandelt. Das ist für den Fall kompakter Lie-Gruppen auch völlig adäquat, weil diese stets lineare Gruppen sind. Ein solcher Zugang wird von K.H. Hofmann seit seinen (unter Eingeweihten berühmten) Tulane Lecture Notes (1966–69) propagiert.

Das siebte Kapitel entwickelt die Dualitätstheorie für lokal kompakte abelsche Gruppen. Es wird außerdem gezeigt, dass auch schwach vollständige reelle Vektorräume und reelle Vektorräume mit der feinsten lokal konvexen Vektorraumtopologie einen Dualitätssatz erfüllen. Das achte Kapitel ist voller Anwendungen der Dualitätstheorie auf kompakte abelsche Gruppen. Jede Eigenschaft einer kompakten abelschen Gruppe ist qua Dualität verknüpft mit einer notwendigerweise rein algebraischen Eigenschaft des diskreten Duals. Besonderes Augenmerk erfahren verschiedene Zusammenhangsbegriffe (topologischer, wegeweiser, lokaler, einfacher Zusammenhang sowie die Verfeinerungen zu Homotopie und Homologie). Vielleicht eine der für den Neuling überraschendsten Aussagen ist die, dass durch die Topologie einer kompakten zusammenhängenden abelschen Gruppe auch die algebraische Struktur bis auf Isomorphie eindeutig festgelegt ist (8.59).

Das neunte Kapitel enthält die grundlegenden Struktursätze über kompakte Gruppen: Der Satz von Levi und Mal'cev (9.24) stellt jede zusammenhängende kompakte Gruppe dar als Quotient eines cartesischen Produkts der Zusammenhangskomponente des Zentrums und einer Familie einfach zusammenhängender einfacher Liegruppen nach einer total unzusammenhängenden zentralen Untergruppe. Der Satz über maximale abelsche (zusammenhängende) Untergruppen (9.32) verallgemeinert die in der Lie-Theorie bekannten Sätze über maximale Tori. Der Zerfällungssatz (9.39) von Borel, Scheerer und Hofmann zeigt, dass man jede zusammenhängende kompakte Gruppe als semidirektes Produkt ihrer Kommutatorgruppe und einer abelschen (im Allgemeinen nicht zentralen) Untergruppe erhält. Der Supplementsatz (9.41) von Dong Hoon Lee erlaubt es, ein total unzusammenhängendes Supplement (wenn auch kein Komplement) zur Zusammenhangskomponente einer kompakten Gruppe zu finden, das außerdem noch eine maximal abelsche Untergruppe normalisiert.

Im zehnten Kapitel wird die Theorie kompakter Transformationsgruppen im Hinblick auf die Existenz von (lokalen) Schnitten zur Quotientenabbildung auf den Bahnenraum so weit getrieben, dass die Konsequenz für die Strukturtheorie gezogen werden kann: Der einer kompakten Gruppe zu Grunde liegende topologische Raum zerfällt als Produkt der Zusammenhangskomponente und des Quotienten nach derselben. Natürlich sind die Aussagen über Schnitte für sich allein interessant und wichtig.

Die gemeinsamen Beiträge der beiden Autoren zur Theorie kompakter Gruppen finden sich im elften Kapitel, das sich (naturgemäß) nicht ohne Hintergrundwissen über Kategorien verstehen lässt. Appendix 3 stellt einen (steilen) Kurs in Kategorientheorie dar, der jedenfalls zur Auffrischung dieses Wissens genügen mag.

Im zwölften Kapitel geht es um Kardinalzahl-Invarianten wie Gewicht, Erzeugungsrang, Dichte, Dimension (der Lie-Algebra) und Rang des Pontrjagin-Duals. Insbesondere werden Beziehungen zwischen diesen Invarianten diskutiert.

Die Appendices erfüllen zunächst den üblichen Zweck, Hintergrundwissen bereit zu stellen und Bezeichnungen zu erklären. Allerdings gehen sie teilweise über diesen Rahmen hinaus. Appendix 1 über abelsche Gruppen enthält neben den Grundlagen, wie sie im Hauptteil des Buches benötigt werden, auch substanzielle Aussagen zum Whitehead-Problem. Appendix 2 behandelt auch Überlagerungsgruppen topologischer Gruppen, die nicht lokal euklidisch sind, sowie Anwendungen auf lokale Gruppen und lokale Homomorphismen.

Bei einem Buch dieses Umfangs bleiben Druckfehler nicht aus. Die Autoren stellen freundlicherweise eine Liste der ihnen bislang bekannten Fehler zur Verfügung; man findet diese unter der Netzadresse http://linus.levels.unisa.edu.au/~sid/errata.pdf

Ein gewaltiges Werk. Dies bleibt auch zu sagen, wenn man das Buch nach näherer Beschäftigung wieder weglegt – aber nicht zu weit weg, denn man wird es wieder zur Hand nehmen. Jede mathematische Bibliothek sollte ein Exemplar einstellen.

Stuttgart M. Stroppel

Elstrodt, J., Grunewald, F., Mennicke, J., Groups acting on Hyperbolic Space, Harmonic Analysis and Number Theory, Berlin u. a.: Springer 1998, 524 S., DM 149,–

Hyperbolische Räume und deren Isometriegruppen wurden erstmals in der ersten Hälfte des letzten Jahrhunderts durch Lobachevsky betrachtet. Während zum zweidimensionalen hyperbolischen Raum eine große Zahl an Monographien existiert, so gibt es nur wenig geschlossene Abhandlungen, die den dreidimensionalen Fall behandeln.

Das vorliegende Buch schließt hier eine Lücke und nicht nur diejenigen Mathematiker, die sich für die Maaß-Selberg-Theorie auf hyperbolischen 3-Mannigfaltigkeiten und den damit verbunden zahlentheoretischen Anwendungen interessieren, werden das Erscheinen dieses Buches dankbar aufnehmen.

Das Fehlen einer komplexen Struktur auf dem dreidimensionalen hyperbolischen Raum führt zwangsläufig dazu, dass der Maaß-Selberg-Theorie eine zentrale Bedeutung bei der Untersuchung hyperbolischer Mannigfaltigkeiten zukommt.

Das vorliegende Buch behandelt diese Theorie zusammen mit der damit verbundenen harmonischen Analyse auf hyperbolischen 3-Mannigfaltigkeiten und zwar denjenigen, die zu kofiniten Untergruppen der Isometriegruppe gehören, in großer Ausführlichkeit in den Kapiteln 3 bis 6.

Zuvor werden im ersten Kapitel vier Standard-Modelle für den dreidimensionalen hyperbolischen Raum besprochen sowie im zweiten Kapitel viele wohlbekannte und grundlegende Tatsachen über diskrete kofinite und speziell kokompakte Untergruppen seiner Isometriegruppe.

Poincaré-Reihen und speziell Eisenstein-Reihen zu einer kofiniten, nicht kokompakten Gruppe werden dann in Kapitel drei eingeführt. Die Eisenstein-Reihen sind erste Beispiele für die sog. automorphen Funktionen der Maaß-Selberg-Theorie. Ein wichtiger Bestandteil der Theorie im nicht kokompakten Fall, der in diesem Kapitel angesprochen wird, bildet die Fourierentwicklung automorpher Formen. Die Maaß-Selberg-Relationen, eine explizite Formel für die Selberg-Transformation sowie eine Anwendung hiervon auf die Berechnung des Residuums eine Poincaré-Reihe sind weitere Punkte in diesem Kapitel.

Das Kapitel 4 beinhaltet die eigentliche Spektralanalyse des Laplace-Beltrami-Operators im Falle kofiniter Gruppen. Die wesentliche Selbstadjungiertheit wird gezeigt und als entscheidendes Resultat ergibt sich die Darstellung des Resolventenoperators als Integraloperator mit der bereits im Kapitel 3 eingeführten Maaß-Selberg-Reihe als Kern. Es wird gezeigt, dass dieser Resolventenoperator auf der Resolventenmenge vom Hilbert-Schmidtschen Typ ist. Für kofinite, nicht kokompakte Gruppen gilt dies nicht mehr, hier hilft jedoch ein Approximationsargument weiter.

Anwendungen und feinere Aspekte der Spektraltheorie werden nun für den kokompakten Fall in Kapitel 5 und für den kofiniten nichtkokompakten Fall in Kapitel 6 behandelt. Ein wesentliches Ziel ist in beiden Fällen die Herleitung der Selbergschen Spurformel in einer möglichst expliziten Gestalt.

Ein wesentlicher Unterschied zwischen diesen Fällen stellt hierbei das Auftreten eines kontinuierlichen Spektrums im nicht kokompakten Fall dar. Die Analyse dieses Teil des Spektrums ist eng mit den Eisensteinreihen verbunden, deren meromorphe Fortsetzung als Funktion von s hierfür benötigt wird.

Im kokompakten Fall ist das Spektrum rein diskret.

Als Anwendungen dre Spektraltheorie und der Selbergschen Spurformel im besonderen werden u.a. das Weylsche asymtotische Gesetz über die Verteilung der Eigenwerte, als auch zahlentheoretische Anwendungen wie das hyperbolische Gitterpunktproblem und der geodätische Primzahlsatz besprochen.

Ab Kapitel 7 beginnt dann der im Untertitel des Buches angekündigte eigentliche zahlentheoretische Teil. Hier werden konkrete Beispiele diskreter Untergruppen der Isometriegruppe besprochen und zwar insbesondere die aus zahlentheoretischer Sicht bedeutsamen (projektiven) speziellen linearen Gruppen über den ganzen Zahlen imaginär quadratischer Zahlkörper.

Im Kapitel 7 werden Fundamentalbereiche dieser Gruppen, ihre feinere gruppentheoretische Struktur, die Kommensurabilitätsklasse, Kongruenzuntergruppen, Hecke-operatoren sowie eine untere Abschätzung für den ersten Laplace-Eigenwert für Kongruenzuntergrupen behandelt.

Das 8. Kapitel widmet sich der Untersuchung der Eisensteinreihen zu den obigen Gruppen, ihre Beziehungen zu Zetafunktionen zu imaginär quadratischen Zahlkörpern und der Untersuchung spezieller Werte der Eisenteinreihen. Als Anwendungen der Untersuchungen der Eisensteinreihen geben die Autoren einen Beweis über das Nichtverschwinden von L-Reihen, die Berechnung des Volumens des Fundamentalbereichs sowie ein Beweis der Weylschen Formel.

Das 9. Kapitel beschäftigt sich mit Anwendungen auf die Theorie binärer hermitscher Formen über imaginär-quadratischen Zahlkörpern, deren Reduktionstheorie, Darstellungsanzahlen sowie einen weitern auf Humbert zurüchgehenden Beweis der bereits oben erwähnten Formel für das Kovolumen.

Abgerundet wird die Monographie im letzten Kapitel durch die Konstruktion und Diskussion einer Fülle diskreter kofiniter Untergruppen der Isometriegruppe, arithmetische Untergruppen, die als Norm-1 Untergruppe geeigneter Quaternionenalgebren sowie Untergruppen, die als Erzeugnis der Spiegelungen an einem hyperbolischen Polyeder entstehen.

Das vorliegende Buch hat alle Chancen, eine Standardreferenz zu werden. Es eignet sich sowohl als Nachschlagewerk für Experten in diesem Bereich als auch als Lektüre für Einsteiger. Vielleicht werden einige vermissen, dass die Thurstonschen Arbeiten in diesem Buch nicht besprochen werden. Nur, das wäre „a book on its own“ und hätte den Rahmen des mit über 500 Seiten bereits sehr umfangreichen Buches deutlich gesprengt.

Kassel R. Matthes

Hodges, W., Shorter, A., Model Theory. Cambridge University Press, 1997, 310 S., £22.95

Dieses Buch ist eine gekürzte und überarbeitete Version von Hodges' *Model Theory* (Encyclopedia of Mathematics and its Applications, Bd. 42, CUP 1993, 772 S.). Während jenes Buch seiner Reihe gerecht wurde und neben den klassischen Resultaten die wichtigsten Entwicklungen in der Modelltheorie der letzten 30 Jahre in lockerem Stil und unter teilweise ungewohntem Blickwinkel vorstellt (ein herrliches Buch zum Schmökern!), ist die vorliegende Fassung auch als Lehrbuch gedacht und geeignet. Ein Lehrbuch allerdings, das nicht nur eine gewisse Vertrautheit mit elementarer Logik erfordert, sondern zudem einiges für die mathematische Allgemeinbildung des Lesers tut: Hodges begnügt sich in seinen Beispielen und Übungsaufgaben nicht mit einfachen Konstrukten ohne mathematischen Inhalt, sondern behandelt reale Strukturen aus Algebra, Kombinatorik und Modelltheorie: Den Cayley Graphen einer Gruppe, Sym(Ω) als topologische Gruppe, das Surjektivitätsprinzip für algebraisch abgeschlossene Körper, die Theorie reell abgeschlossener Körper und O-minimalität. In den Lesehinweisen am Ende jedes Kapitels finden sich neben weiterführender Literatur auch hochkomplizierte Artikel der aktuellen Forschung: Wer sich nach Lektüre des vierten Kapitels an die angegebenen Artikel von Hrushovski und Zilber wagt, muß Durchhaltevermögen mitbringen ... .

In seiner Einleitung definiert Hodges Modelltheorie als „algebraische Geometrie abzüglich der Körper“; wenngleich dies einigen Zweigen der Modelltheorie Unrecht tut, so bezeichnet es doch den Blickwinkel des Buches, und steht für zwei der (die beiden?) wichtigsten gegenwärtigen Forschungsrichtungen: O-minimalität und Simplizitätstheorie. In beiden Fällen untersucht man die definierbaren Mengen einer Klasse von Strukturen, so wie man in der algebraischen Geometrie die Varietäten untersucht, und versucht sie zu klassifizieren. Eine wichtige Rolle spielt hier die Trichotomie von Zilber: eindimensionale Mengen sollten entweder maximal eine binäre Struktur tragen, Vektorräumen ähneln, oder Varietäten über einem definierbaren Körper gleichen. Während die Vermutung im o-minimalen Fall von Peterzil und Starchenko bewiesen wurde, konnte Hrushovski im simplen Fall ein Gegenbeispiel konstruieren; unter einer Zusatzhypothese, die in vielen

Anwendungen erfüllt ist, gilt jedoch die Trichotomie (Hrushovski-Zilber) und bildet die Grundlage für Hrushovski's Beweise der Vermutungen von Mordell-Lang und Manin-Mumford. (Für das vorliegende Buch sind diese Ergebnisse freilich zu kompliziert; es finden sich jedoch Hinweise auf die entsprechende Literatur.)

Ähnlich Poizats *Cours de Théorie des Modèles* (Nur al-Mantiq wal-Ma'rifah 1985, 586 S.) reduziert Hodges syntaktische Überlegungen auf ein Mindestmaß und argumentiert vorwiegend semantisch (er geht sogar soweit, das syntaktische Implikationszeichen $\vdash$ für semantische Folgerung $\models$ zu verwenden) und unter Verwendung von Ehrenfeucht-Fraïssé Spielen. Konsequenterweise führt das zur Sprache $\mathcal{L}_{\infty\omega}$ und zur Betonung von automorphismus-invarianten Teilmengen; erst ab Kapitel 5 konzentriert er sich auf die Sprache erster Stufe. Einen weiteren Schwerpunkt bildet das Amalgamierungsdiagramm, das Hodges u. a. zum Beweis der Interpolationstheoreme benutzt.

Kapitel 1 führt Strukturen und atomare Formeln ein, Kapitel 2 die Sprachen $\mathcal{L}_{\infty\omega}$ und $\mathcal{L}_{\omega\omega}$, elementare Äquivalenz und Quantorenelimination, Kapitel 3 Ehrenfeucht-Fraïssè Spiele und Kapitel 4 Interpretationen. Der Kompaktheitssatz wird in Kapitel 5 bewiesen und das Amalgamierungsdiagramm eingeführt, Kapitel 6 behandelt abzählbar unendliche Strukturen (den Typenauslassungssatz, den Satz von Ryll-Nardzewski sowie Fraïssés Amalgamierungsmethode für die Konstruktion des abzählbaren universell-homogenen Modells einer Klasse von endlich erzeugten Strukturen) und Kapitel 7 untersucht existenziell abgeschlossene Strukturen und Modellvollständigkeit. Kapitel 8 über Saturiertheit, Ein- und Zwei-Kardinal-Sätze und Ultraprodukte ist ein Vorspiel für das letzte Kapitel, in dem Morleys Kategorizitätssatz mittels Ehrenfeucht-Mostowski Modellen und ein wenig Stabilitätstheorie bewiesen wird. Diese kurze Inhaltsangabe kann jedoch bei weitem nicht den Reichtum an Themen und Ideen abdecken, der gleichsam nebenbei entfaltet wird.

Ein paar kleinere Kritikpunkte: die unterschiedliche Behandlung der f. c. p. für A und A^{eq} auf Seite 116 erscheint mir unnötig und eher verwirrend, Neumanns Lemma (Corollary 5.6.4) erscheint namenlos, λ-*universell* definiert Hodges sinnvollerweise in Anlehnung an λ-saturiert und λ-homogen als Einbettbarkeit von Strukturen der Kardinalität $< \lambda$, ohne darauf hinzuweisen, daß die üblichere Definition lediglich Kardinalität $\leq \lambda$ fordert. Morleyrang wird mit der Bedingung „$RM(\psi) \geq \delta$ (Limitzahl) gdw. $RM(\psi) \geq \alpha$ für alle $\alpha < \delta$" eingeführt (welche Ordinalzahl erfüllte dies nicht?), und die Schichtungen (layerings) am Ende von Abschnitt 8.4.2 könnten ein wenig besser motiviert werden. Dennoch: Eine schöne und reichhaltige Einführung in die moderne Modelltehorie, in der die ungewöhnliche Organisation des Materials manchen unerwarteten Zusammenhang ans Licht bringt.

Lyon F. Wagner

Traub, J. F., Werschulz, A. G., Complexity and Information, Cambridge: Cambridge University Press 1998, 139 S., pb. \$ 19.95, hb. \$ 54.95.

Die Komplexitätstheorie ist inzwischen eine hochentwickelte Disziplin. Sie beschäftigt sich meist mit diskreten Problemen, d.h. mit der Berechnung von (partiellen) Funktionen, die auf $\mathbf{N}^d$ (oder auf der Vereinigung dieser Räume) definiert sind. Allerdings sind viele Modelle, etwa der Physik oder der Ökonomie, „stetig", d.h. sie beruhen auf Funktionen, die auf $\mathbf{R}^d$ (oder der Vereinigung dieser Räume) definiert sind.

Die Numerische Mathematik beschäftigt sich besonders mit stetigen Problemen. Sie gilt gelegentlich noch immer als eklektische Wissenschaft ohne strenge Grundlagen, siehe etwa [2]. Daneben gibt es schon seit 40 Jahren Ansätze zur Systematisierung, zu nennen sind die Namen Kolmogorov, Bakhvalov, Smale, Traub und WoŹniakowski. Siehe [1] und besonders die Monographie [3].

Die Vorteile einer Systematisierung bestehen darin, daß wichtige Fragen nicht jedesmal neu geklärt werden müssen. Typische Fragen, die im vorliegenden Buch diskutiert werden, sind:

- Was ist die Komplexität wichtiger Probleme der Numerischen Mathematik? Wieviel Resourcen benötigt man zur Lösung etwa von partiellen Differentialgleichungen? Wie wirkt sich die Glattheit der beteiligten Funktionen auf den nötigen Rechenaufwand aus?
- Gibt es einen Fluch der Dimension, d.h. sind Probleme mit vielen Variablen notwendigerweise extrem schwierig?
- Wann lohnen sich Monte Carlo Methoden, d.h. randomisierte Algorithmen?
- Kann man von der Menge aller Verfahren und insbesondere von optimalen Verfahren sprechen?
- Unter welchen Bedingungen sind adaptive Verfahren allen nichtadaptiven Verfahren überlegen?
- Unterscheiden sich Aussagen über den average case erheblich von solchen über den worst case?

In der Numerik ist noch selten von Algorithmen im allgemeinen die Rede – üblicherweise werden nur einige spezielle Algorithmen vorgestellt und miteinander verglichen. Um Aussagen über alle Verfahren machen zu können, insbesondere für den Beweis von unteren Schranken, benötigt man natürlich ein Berechenbarkeitsmodell. Es liegt nahe, eine algebraische RAM mit Orakel (zur Berechnung etwa von Funktionswerten) zu betrachten.

Zu obigen Fragen gibt es inzwischen viele Erkenntnisse, und das vorliegende Buch kann und will nur ein erster Wegweiser sein. Sein Stil ist informell, sein Ziel ist Motivation und Orientierung. Es ist eine sehr aktuelle Einführung in die Komplexitätstheorie stetiger Probleme, enthält aber nur wenige Sätze und fast keine Beweise.

Zunächst werden grundlegende Begriffe eingeführt. Als Beispiel dient das Problem der Integration von lipschitzstetigen Funktionen. Dem Leser wird erklärt, warum (bei diesem einfachen Problem) eine lineare und nichtadaptive Methode worst case optimal ist.

In den Anwendungen hat man es häufig mit hochdimensionalen Problemen zu tun, hier gibt es derzeit stürmische Fortschritte. Daher nimmt die Diskussion hochdimensionaler Probleme (auch deren Anwendung in der Finanzmathematik und die Berechnung von Pfadintegralen) einen breiten Raum ein. Aussagen über optimale Konvergenzordnungen sind nur bedingt interessant, da häufig eine bescheidene Genauigkeit ausreichend ist.

Ein Kapitel behandelt schlechtgestellte Probleme, ein anderes nichtlineare Gleichungen und Integralgleichungen. Auch Lineare Optimierung, Verifikationsprobleme und verrauschte Daten werden diskutiert, immer mit vielen Hinweisen auf die weiterführende Literatur.

Das Buch schließt mit geschichtlichen Bemerkungen und einem umfangreichen Literaturverzeichnis auf mehr als 20 Seiten. Jeder, der sich für Numerik und wissenschaftliches Rechnen interessiert, kann das Buch oder Teile davon mit großem Gewinn lesen. Es enthält viele Anregungen und offene Probleme und geizt nicht mit Motivation. Der Rahmen des Buches läßt häufig nur Raum für eine erste Diskussion, man findet aber viele Hinweise und Vorschläge für die weitere Lektüre. Die wichtigste Quelle ist nach wie vor [3], auch wenn diese Monographie in manchen Einzelfragen nicht mehr auf dem neuesten Stand ist.

[1] N. S. Bakhvalov: Optimization of Computational Algorithms. In: Encyclopaedia of Mathematics, Vol. 6, Kluwer, 1990. (russ. Original: Band 4, 1984)
[2] S. Smale: Some Remarks on the Foundation of Numerical Analysis. SIAM Review **32** (1990), 211–220.
[3] J. F. Traub, G. W. Wasilkowski, H. Woźniakowski: Information-Based Complexity. Academic Press, 1988.

Erlangen E. Novak

Koblitz, N., Algebraic Aspects of Cryptography (Alg. and Comp. in Mathem. 3), Berlin u. a., Springer 1998, 206 S., Hardcover, DM 98,–

Der Autor eröffnet in seinem Vorwort das Buch mit dem Satz: „This book is intended as a text for a course on cryptography with emphasis on algebraic methods. It is written so as to be accessible to graduate or advanced undergraduate students, as well as to scientists in other fields".

So beginnt der Autor in Kapitel 1 mit einer Einführung in die Kryptographie auf 16 Seiten.

Kapitel 2 gibt eine Kurzeinführung in die Komplexitätstheorie, Kapitel 3 eine Kurzeinführung in die benötigte Algebra, um dann in den folgenden Kapiteln, 4, 5 und 6, drei Klassen von algebraischen Kryptosystemen einzuführen: Sog. „Hidden-Monomial"-Kryptosysteme, „Kombinatorisch-Algebraische"-Kryptosysteme, sowie „Elliptische" bzw. „Hyperelliptische" Kryptosysteme. In einem Appendix wird eine sehr schöne zusätzliche Einführung in die Theorie hyperelliptischer Kurven von den Autoren A.J. Menezes, Y.-H. Wu und R.J. Zuccerato gegeben; damit wird das bereits in Kapitel 6 vom Autor angesprochene Thema vertieft und erklärt. Aufgaben am Ende eines jeden Paragraphen sowie Lösungshinweise runden das Buch ab.

Das Kapitel über „Hidden-Monomial"-Kryptosysteme stellt Varianten eines Systems, basierend auf affinen Transformationen und nichtlineraren Gleichungssystemen, [redacted]
und ein Beispiel für eine mögliche Kryptoanalyse wird gegeben.

Das folgende Kapitel über sog. „Kombinatorisch-Algebraische" Systeme hat eher erwähnenden Charakter, – in dem Sinne, als daß auf die Schwierigkeit hingewiesen wird, geeignete Instanzen NP-harter Probleme zu erzeugen und somit diese für die Kryptographie nutzbar zu machen.

Vom wissenschaftlichen Inhalt her stellt das letzte Kapitel, dem Ansehen und der Herkunft des Autors entsprechend, eine sehr gute und knappe Einführung in die Algebra elliptischer und hyperelliptischer Kryptosysteme dar. Leider hat der Autor die algorithmischen Aspekte dieses so anspruchsvollen Gebietes moderner angewandter Algebra nicht in der gleichen Tiefe behandelt. So fehlen dem Buch die, zum einen für Mathematik- und Informatik-Studenten, sowie auch für Wissenschaftler anderer Gebiete interessanten der Ordnung p einer elliptischen Kurve über einem endlichen Körper der Charakteristik p in $O(\log p)$ Operationen gelöst werden kann (ein ähnliches Ergebnis läßt sich auch für die Klassengruppe hyperelliptischer Funktionenkörper erreichen; der DLog einer Untergruppe der Ordnung p berechnet sich hier in $O(g^3 \log p)$, g das Geschlecht des Körpers [8]). Desweiteren wird die sog. Frey-Rück-Paarung nur zitiert, aber nicht definiert, dabei demonstriert sie eine, gerade auch für die Kryptographie wichtige Methode: Problemreduktion auf eine Erweiterung des Konstantenkörpers.

Grundsätzlich ist zu bemerken, daß die Sicht des Autors bei der Problemdefinition zu sehr auf den speziellen Datentyp, als auf kryptographische Primitive gerichtet ist. So hätte z.B. das einführende Kapitel in die Kryptographie, in diesem Fall, nach dem Titel des Buches, die algebraische Kryptographie, durchaus die Definition des diskreten Logarithmusproblems in einer zyklischen Gruppe ertragen. Protokolle lassen sich so in hervorragender Weise „modellunabhängig" einführen, was, von didaktischen Gründen einmal abgesehen, auch eine kryptographische Notwendigkeit darstellt.

Aus didaktischer und wissenschaftlicher Sicht hat der Autor zudem einem wichtigen Grundsatz der wissenschaftlichen Kryptologie nicht genügend Rechnung getragen: Nämlich, daß man Kryptosysteme nicht über ihre gewünschten Fähigkeiten allein, d.h. über ihre Spezifikation, einführt und unterrichtet. Vielmehr erfordert gerade eine wissenschaftliche Auseinandersetzung mit Kryptosystemen und den sie einschließenden Protokollen, daß sogenannte „Freund-Feind-Szenarios" und Angriffszenarios studiert und formale (algebraische!) Beweise geführt werden, unter welchen Umständen ein solches Kryptosystem sicher ist. So fehlt z.B. in dem Buch jeglicher Hinweis darauf, daß das klassische Diffie-Hellman Protokoll gegen einen Angriff aus der Mitte nicht geschützt und ohne weitere Authentisierungsmaßnahmen für die Praxis völlig unbrauchbar ist [5]. Der Autor mag vom Standpunkt ausgegangen sein, daß dieses für die algebraischen Aspekte der Kryptologie eine nicht wesentliche Fragestellung ist. Der Referent weist jedoch darauf hin, daß das Buch sich gerade auch an Leser anderer Gebiete wendet, so daß insbesondere Informatiker und Nachrichtentechniker von diesem Kurs Gebrauch machen, ohne auch nur ein „caveat" der Kryptographie zu lernen. Gerade diese machen das Gebiet der Kryptographie so ausgesprochen schwierig und lassen es damit zu einer echten wissenschaftlichen Herausforderung werden, die von vielen Außenstehenden und Newcomern wegen des falsch verstandenen „Geheimdienst-Appeals" nicht verstanden oder akzeptiert wird.

Die Auseinandersetzung des Autors mit Fragen der Komplexitätstheorie [6] im Zusammenhang mit kryptographischen Fragen stellt, in einigen Fällen, den Leser vor Probleme, die z.T. von etwas eigenwillig anmutenden, in der gängigen Kryptographie nicht üblichen Definitionen (z.B. durch die Definition des „trapdoor-problems") herrühren. Eigentliche (komplexitätstheoretische) Fragen, die sich in der Public-Key Kryptographie stellen, sind nach wie vor offen, wie z.B. der Beweis für die Härte oder die Brechbarkeit eines Public-Key Kryptosystems, das auf diskreten Logarithmen in geeigneten Gruppen beruht: Die Veröffentlichung von Shors Algorithmus, aus dem Jahre 1994, zur Faktorisierung mit Quanten-Rechnern (vom Autor nicht erwähnt) beinhaltet ein häufig übersehenes weiteres Ergebnis, das ebenfalls auf der leichten polynomialen Implementierbarkeit der Quanten-Fouriertransformation beruht: Nämlich die diskrete Logarithmierung in beliebigen zyklischen Gruppen, deren Multiplikationsoperation auf klassischen Rechnern mit polynomialem Aufwand dargestellt werden kann. Da dies für alle hier betrachteten Kryptosysteme gilt, dürfte die Frage nach der (Un-)Brechbarkeit bis zur Klärung dieser kommenden Computertechnologie ohnehin weit offen bleiben.

Zum Abschluß dieser Buchbesprechung möchte ich auf die ersten Seiten des ersten Kapitels zurückkommen, auf denen der Autor sich mit der Geschichte der Kryptographie beschäftigt. Die Veröffentlichung dieses Buches im Jahre 1998 hätte an Aktualität für Autor, Verlag und Leser gewonnen, wäre die kürzlich bekannt gewordene Tatsache in den Inhalt aufgenommen worden, daß nicht Diffie und Hellman die Erfinder der Public-Key Kryptographie gewesen sind, sondern britische Mathematiker im Government Communication Headquarters in Cheltenham, UK [7]:

- Jim Ellis, der bereits im Jahre 1969, also sieben Jahre vor Diffie und Hellman, das Konzept einer Einwegfunktion erfunden hat,
- Clifford Cocks, der im Jahre 1973 das Prinzip der RSA-Verschlüsselung als Realisierung angab und, last but not least,
- Malcolm Williamson, der kurz darauf im Jahre 1974 das Diffie-Hellman Protokoll (mit Authentifikations-Handshake!) auf einer allgemeinen zyklischen Gruppe definierte.

Der Rezensent wird Teile dieses Buches in Zukunft sicherlich im Rahmen seiner Vorlesungen über Kryptologie, Public-Key Kryptosysteme und Computeralgebra gezielt einsetzen. Dem mit der Kryptologie und den theoretischen, technischen und politischen Aspekten der modernen Informatik nicht vertrauten Leser sei jedoch empfohlen, dringend weitere Literatur, wie sie etwa in den aktuellen Lecture Notes in Computer Science Bänden zu den Konferenzen Eurocrypt, Crypto und Asiacrypt veröffentlicht werden, zu konsultieren, da die wesentliche Problematik im Zusammenspiel zwischen der Algebra und der Informatik der modernen Sicherheitstechnologie liegt.

Ich schließe dieses Referat mit einem Zitat von E. Artin aus dem Artikel: „Zur Problemlage der Mathematik" [1]:

> „Wegen des großen Stoffes, der auf kleinem Raume bewältigt werden muß, sind die heutigen Lehrbücher nicht mehr in dem behäbigen Stil des vorigen Jahrhunderts geschrieben, und ein Leser muß heute schon angestrengt mitarbeiten, um in ein Gebiet einzudringen."

[1] E. Artin: *Zur Problemlage der Mathematik*, in *The Collected Papers of Emil Artin*, Addison-Wesley, 1965, pp. 552–560

[2] F. Schaefer-Lorinser: *Arithmetik auf elliptischen Kurven zur Konstruktion von kryptographischen Einwegfunktionen*, Dissertation, Universität Karlsruhe, 1993

[3] G.B. Agnew, R.C. Mullin, I.M. Onyszchuk, S.A. Vanstone: *An Implementation for a Fast Public-Key Cryptosystem*, Journal of Cryptology, Vol. 3, pp. 63–79, 1991

die traditionell durch den Fortsetzungssatz von Caratheodory bzw. den Satz von Daniell-Stone erledigt wird.

Die neue Vorgehensweise bei der Konstruktion von Maßen zeichnet sich unter anderem durch folgende Charakteristika aus:

1. Ausgangsdaten sind isotone (modulare) Mengenfunktionen φ auf Verbänden $\mathfrak{S}$ von Teilmengen einer Grundmenge X (an der Stelle von Inhalten auf Ringen oder Semiringen).
2. Das übliche Caratheodorysche äußere Maß wird durch die äußere Einhüllende φ^σ mit $\varphi^\sigma(A) = \inf\{\sup_{l\in\mathbb{N}} \varphi(S_l) \colon (S_l)_l$ in $\mathfrak{S}$ mit $S_l \uparrow S \supset A\}$ ersetzt. Diese Konstruktion der sequentiellen oder σ-Theorie hat natürliche Analoga φ^* bzw. φ^τ, wenn $(S_l)_l$ durch endliche aufsteigende Folgen (endliche oder $*$-Theorie) bzw. durch beliebige aufsteigend filtrierende Familien ersetzt wird (nicht-sequentielle oder τ-Theorie). Die Definitionen erlauben es dem Verfasser die drei Fortsetzungstheorien weitgehend simultan zu entwickeln.
3. Den obigen durch Approximation von außen entstandenen Mengenfunktionen φ^*, φ^σ, φ^τ lassen sich natürlich entsprechende durch Approximation von innen gebildete Mengenfunktionen φ_*, φ_σ, φ_τ gegenüberstellen. Die inneren Fortsetzungstheorien entsprechen daher in vollständiger Symmetrie den äußeren. (Der Autor zeigt sogar, dass auf einem etwas abstrakteren Niveau die inneren und äußeren Theorien identisch sind).
4. Die gewünschten Fortsetzungen ergeben sich aus einer Modifikation des klassischen Caratheodory-Verfahrens. In der Regel werden notwendige und hinreichende Bedingungen für die Fortsetzbarkeit mit vorgegebenen Regularitäts- und Stetigkeitseigenschaften angegeben.
5. Bei allen Fortsetzungssätzen spielen innere bzw. äußere Regularitätseigenschaften durchgehend eine entscheidende Rolle.
6. Die sogenannte topologische Maßtheorie, d. h. die Konstruktion von Baire-, Borel- und Radon-Maßen erweist sich als Spezialfall der vorher entwickelten abstrakten Maßtheorie. Dies ist u. a. der Tatsache zu verdanken, dass die Maßkonstruktion durch Approximation von innen gleichberechtigt neben derjenigen durch Approximation von außen steht, während letztere traditionell bevorzugt wird.

Ein weiterer Schwerpunkt des Buches liegt in der Formulierung und Herleitung eines allgemeinen Satzes vom Daniell-Stoneschen Typ auf Verbandskegeln von Funktionen, der einerseits die klassischen Sätze von Daniell-Stone und Bourbaki als Spezialfälle enthält, andererseits aber auch den klassischen Rieszschen Darstellungssatz und einen Rieszschen Darstellungssatz für beliebige Hausdorffräume als direkte Folgerungen liefert. (Hier ergeben sich in der Zielsetzung deutliche Überschneidungen mit dem Buch „Radon Integrals" von B. Anger und C. Portenier, Birkhäuser 1992, jedoch sind dessen Methoden eher funktionalanalytisch.)

Im folgenden möchte ich den Inhalt der vorliegenden Monographie etwas genauer beschreiben, indem ich stichwortartig auf die einzelnen Abschnitte eingehe.

In der Einleitung erläutert der Verfasser die Unterschiede und Vorteile seines Zugangs im Vergleich zum traditionellen Vorgehen.

In Abschnitt 1 werden die grundlegenden Begriffe und Notationen für Mengensysteme bereitgestellt, wie z. B. Verband, Oval, Ring, Algebra und die entsprechenden σ-Versionen.

In Abschnitt 2 werden Additivitäts-, Stetigkeits- und Regularitätseigenschaften von Mengenfunktionen auf Verbänden eingeführt, z. B. Modularität, Super-/Submodularität, Additivität, Super-/Subadditivität, σ- und τ-Stetigkeit von oben und unten sowie innere und äußere Regularität. Außerdem werden Inhalte und Maße in einem erweiterten Sinn sowie als Beispiel das n-dimensionale Volumen kompakter Mengen definiert und hinsichtlich elementarer Eigenschaften untersucht.

Abschnitt 3 befaßt sich mit der Eindeutigkeit klassischer Inhalte, einer Verallgemeinerung des Satzes von Smiley-Horn-Tarski über die Forsetzung von modularen Mengenfunktionen zu Inhalten und mit der Frage, wann eine Mengenfunktion zu einer modularen Mengenfunktion fortgesetzt werden kann.

In Abschnitt 4 werden auf Mengenverbänden simultan äußere $*$-, σ- und τ-Prämaße als isotone Mengenfunktionen definiert, die eine Fortsetzung zu einem verallgemeinerten Inhalt mit $*$-, σ- bzw. τ-Stetigkeits- und Regularitätseigenschaften von außen besitzen. Weiter werden die äußeren Einhüllenden φ^*, φ^σ und φ^τ von isotonen Mengenfunktionen $\varphi\colon \mathfrak{S} \to]-\infty, \infty]$ eingeführt und ihre Stetigkeits– und Regularitätseigenschaften diskutiert. Anschließend wird die (verallgemeinerte) Caratheodory Klasse einer auf einer Potenzmenge definierten Mengenfunktion bereitgestellt.

In Abschnitt 5 wird ein zentraler Fortsetzungs- und Charakterisierungssatz für

den. Es wird dann dargestellt, wie sich das Lebesguesche Maß in den vorgegebenen Rahmen einordnet.

Abschnitt 6 enthält die Bergriffsbildungen und Sätze der inneren Theorie, die in völliger Symmetrie zur in den Abschnitten 4 und 5 beschriebenen äußeren Theorie entwickelt werden. Die Ergebnisse lassen sich sogar durch eine einfache Transformation auf die entsprechenden Resultate der äußeren Theorie zurückführen.

In Abschnitt 7 werden unter anderem innere und äußere Theorie verglichen.

Abschnitt 8 liefert als Anwendung der in Abschnitt 6 dargestellten inneren Theoauf Hausdorffschen topologischen Räumen formuliert und durch Rückführung auf den allgemeinen Satz von Daniell-Stone in Abschnitt 15 bewiesen.

Abschnitt 17 behandelt einen Daniell-Stoneschen Satz im Rahmen der $*$-Theorie.

Die Abschnitte 18 und 19 beschäftigen sich mit dem Problem der „Transplantation" von Inhalten bzw. Maßen: Gegeben eine Mengenfunktion φ auf einem Mengenverband $\mathfrak{S}$ und ein weiterer Mengenverband $\mathfrak{T}$. Gesucht ist – grob gesprochen – ein Prämaß $\psi\colon \mathfrak{T} \to \mathbb{R}$ mit $\varphi = \psi_*|_{\mathfrak{S}}$ bzw. $\varphi = \psi_\sigma|_{\mathfrak{S}}$ bzw. $\varphi = \psi_\tau|_{\mathfrak{S}}$. Der Autor analysiert diese Situation sorgfältig und leitet als Anwendung eine Verallgemeinerung des Satzes von Łos-Marczewski über die Forsetzung von Inhalten und weitere Resultate über die Fortsetzung von Baire- zu Borel-Maßen ab.

In den Abschnitten 20–22 werden einerseits die klassischen Produktmaße (auf 2 Faktoren) eingeführt und andererseits neue, auf den früher entwickelten Fortsetzungstheorien basierende Produktmaßbildungen im Rahmen abstrakter Maßtheorie behandelt. Die Konstruktion von Produkt-Radonmaßen ergibt sich dann als Spezialfall der letztgenannten Vorgehensweise. Außerdem werden entsprechend angepaßte Versionen der Sätze von Fubini-Tonelli und Fubini vorgestellt.

Schließlich wird in den Abschnittten 23/24 gezeigt, wie sich der Jordansche und Hahnsche Zerlegungssatz, der Lebesguesche Zerlegungssatz und der Satz von Radon-Nikodym in den Rahmen der beschriebenen Theorie einordnen lassen.

Die obige Beschreibung des Inhalts verdeutlicht nach meiner Meinung, dass hier ein überzeugender, in sich geschlossener Aufbau der Maß- und Integrationstheorie vorliegt. Seit dem Erscheinen der Monographie hat der Verfasser diesen Eindruck durch weitere Publikationen verstärkt (siehe etwa: H. König, Image measures and the so-called image measure catastrophe, Positivity **1** (1997), 255–270, - - , Measure and integration: Mutual generation of outer and inner premeasures; Integral representations of isotone functionals, Annales Universitatis Saraviensis, Series Mathematicae **9**(1998), 99–153, - -, What are signed contents and measures, Math. Nachr. **204** (1999), 101–124, - -, Measure and integration: comparison of old and new procedures, Arch. Math. **72**(1999), 192–205). Im Gegensatz zu traditionellen Darstellungen vermeidet dieser Aufbau einen Bruch zwischen topologischer und abstrakter Maßtheorie. Vielmehr präsentiert er die topologische Theorie als Spezialfall der abstrakten. Dieses Ergebnis wird erzielt, ohne dass der technische Aufwand im Vergleich zum klassischen Zugang entscheidend wächst. Da das Buch hervorragend geschrieben ist, mit sehr überlegten (wenn auch zunächst ungewohnten) Notationen arbeitet und seine Beweise sich durch Eleganz und Schnörkellosigkeit auszeichnen, kann ich es mir gut als Grundlage von Vorlesungen über Maß- und Integrationstheorie vorstellen.

Die zahlreichen, sehr informativen bibliographischen Anmerkungen erlauben dem Leser eine gute Einordnung der vorgestellten Resultate in den historischen Kontext.

Man könnte meinen, dass zum Thema Maß und Integral in zahlreichen Lehrbüchern bereits alles wesentliche festgehalten ist. Der Verfasser beweist jedoch mit diesem Werk, dass das Gebiet lebt und durchaus noch grundlegend neue Einsichten möglich sind. Ich möchte daher das Buch allen an Maß- und Integrationstheorie interessierten Mathematikern nachdrücklich zur Lektüre empfehlen.

Passau S. Graf

Kallenberg, O., Foundations of Modern Probability (Probability and its Applications), Berlin u. a.: Springer 1997, 530 S., DM 112,–

Der Autor sagt im Vorwort, er habe ein Buch über die gesamte Wahrscheinlichkeitstheorie schreiben wollen, nach dem Vorbild *Probability Theory* von Loève (1955).

Sein Ziel sei es gewesen, die Einheit dieser mathematischen Disziplin gegenüber den Tendenzen zu Spezialisierung und Zersplitterung zu stärken. Außerdem gebe es derzeit eine sehr lebendige Wechselwirkung zwischen den verschiedenen Teilen der Wahrscheinlichkeitstheorie, und der Forscher tue daher gut daran, Techniken und Resultate auch außerhalb seines engeren Gebiets zur Kenntnis zu nehmen. Das intendierte Buch solle eine allgemeine Übersicht über das ganze Feld geben; sein Charakter sei der eines „Nachschlagewerks" (general reference), und man könne es sich als Grundlage für Kurse unterschiedlichen Niveaus vorstellen. Er sagt weiter, die Fülle des heute verfügbaren Wissens habe eine radikale Beschränkung der in das Buch aufzunehmenden Gegenstände erzwungen; das Prinzip, nach dem er ausgewählt habe, sei ein chronologisches gewesen: nur solche Resultate, die zu Anfang der 70er Jahre bereits bekannt waren, oder zu denen zumindest die Fragestellungen damals schon vorlagen. Da neuere Themen ausgelassen werden mußten – explizit genannt werden: große Abweichungen, Gibbsche und Palmsche

Versuchen wir auch eine Inhaltsangabe durch Negation, indem wir Themen nennen, die nicht vertreten sind. Solche Themen gibt es auch außerhalb jener neueren Gebiete, die der Autor bewußt ausgeklammert hat (siehe Aufzählung Ende des ersten Absatzes). Das Kapitel über Markovketten ist sehr knapp ausgefallen: Irrfahrten als im wesentlichen einzige Beispiele, keine praktischen Kriterien für (positive) Rekurrenz. Es gibt den Wienerprozeß und den isonormalen Gaußprozeß, der durch die Elemente eines Hilbertraums indiziert ist, aber keine Gaußprozesse zu einer allgemeineren Indexmenge und ihre pfadweisen Eigenschaften. Empirische Maße kommen nur in R^1 vor, als empirische Verteilungsfunktionen. Den Satz vom iterierten Logarithmus sehen wir in der einfachsten Form, nicht in der Version von Strassen (1964). Es fehlen der multiplikative Ergodensatz von Oseledec (1968), der Martin-Rand, ein zentraler Grenzwertsatz für Summen abhängi-

Theorie der reversiblen Prozesse (Dirichletformen). An manchen Stellen bedauert man, daß der Grad der Ausführlichkeit, mit der ein Thema dargestellt wird, begrenzt ist und manche Pointe daher ausbleibt: im Kapitel über stetige additive Funktionale der Brownschen Bewegung wäre es schön gewesen, wenn zur Trägermenge der Revuz-Maße etwas gesagt worden wäre und auch dazu, welche Funktionen dabei als Potentiale auftreten können; der angeführte Satz 19.23 (Volkonsky 1960) gibt für letzteres nur eine hinreichende Bedingung. Diese Liste der fehlenden Themen ist, wie man sieht, vollkommen willkürlich zusammengestellt und beliebig fortsetzbar. Daß nicht alles im Buch stehen kann, folgt aus den räumlichen Vorgaben. Wenn wir einige Fehlstellen benannt haben, so nicht unbedingt um zu kritisieren, wir wollten vielmehr an konkreten Einzelfällen zeigen, Spezialfall ein altehrwürdiges und immer wieder neu entdecktes Resultat verbirgt, nämlich der Erhalt der Poissoneigenschaft unter unabhängigen Bewegungen der Punkte und folglich die Invarianz eines geeigneten Poissonmaßes unter bestimmten Dynamiken im Konfigurationsraum. Da die Formulierung ohne das Wort „Poisson" auskommt, ist auch der die Proposition ankündigende umgangssprachliche Satz keine allzu große Hilfe.) Die Definitionen sind Teil des laufenden Texts, die einzuführenden Begriffe sind durch Kursivdruck hervorgehoben und dank des vorzüglichen Sachwortregisters leicht aufzufinden. Spezielle Beispiele zur Illustration der allgemein beschriebenen Sachverhalte findet man nur wenige; das ist ein weiterer Grund, das Buch nicht als Lehrbuch für Anfänger einzustufen, sondern als deduktive systematische Darstellung eines Wissensgebiets. Den Kreis der möglichen Benutzer bilden Dozenten und fortgeschrittene Studenten der Mathematik, einschließlich Doktoranden. Anwender der Stochastik, die von außerhalb der Mathematik kommen, wie Ingenieure, Physiker, Ökonomen, werden mit dem Buch nicht übermäßig glücklich werden, weil es wegen seines „grundlegenden" Charakters die speziellen Resultate, an denen sie interessiert sind, nicht enthält und es dazu eine sehr theoretische Sprache spricht.

Die Präsentation des Materials zeichnet sich durch erstaunliche Klarheit und Prägnanz aus. Der Überblick des Autors über die verschiedensten Teilgebiete der Wahrscheinlichkeitstheorie und seine Sachkunde im Detail sind beeindruckend. In einer langjährigen Tätigkeit als Forscher, akademischer Lehrer und Zeitschriftenherausgeber hat er sich in vielen Gebieten eine tiefreichende Kompetenz erworben. Wo immer man liest, alle Kapitel sind gründlich durchgearbeitet und in Stromlinienform gebracht. Man ahnt, daß es den Autor eine ungeheure Anstrengung gekostet haben muß, um diesen Endzustand zu erreichen, aber man sieht nichts von ihr. Sein im Vorwort genanntes Ziel, klare und ökonomische Beweise für die aufgeführten Sätze zu geben, hat er in bewundernswertem Maß erreicht. (Man kann auch das als eine Antwort auf die Frage nach der Neuheit und Besonderheit des Werks ansehen.) Das Buch ist ausgesprochen leserfreundlich geschrieben. Jedes Kapitel trägt im Inhaltsverzeichnis und im Text einen aus 8 bis 10 Schlüsselbegriffen bestehenden Untertitel; es beginnt mit einer kurzen Inhaltsangabe und anschließenden Querverweisen; es endet mit einer Reihe von Übungsaufgaben. Die Aufgaben sind so beschaffen, daß jemand, der nach dem Buch lernt, mit ihnen sein Verständnis der logischen Zusammenhänge testen kann; sie haben nicht die Funktion, den Stoff mit Beispielen zu illustrieren oder neues Material einzuführen. Im Anhang gibt es zu jedem Kapitel einen kurzen historischen Überblick, der Quellen zu den wichtigsten Sätzen und Begriffen nennt; weiter, und das macht das Buch für den Nachschlagenden und den Lernenden wertvoll, findet man dort eine Reihe von neueren Monographien, in denen das jeweilige Thema ausführlicher und aus heutiger Sicht behandelt wird. Wir haben oben die additiven Funktionale oder den iterierten Logarithmus als Beispiele knapper Darstellung erwähnt; mit dieser Knappheit läßt sich dank der vorzüglichen Bibliographie ganz gut leben. Insgesamt umfaßt das Verzeichnis aller Originalarbeiten und Monographien knapp 500 Titel. Auf das sorgfältige und informative Sachwortregister wurde schon hingewiesen. Ich kann mich nicht erinnern, daß ich in jüngerer Zeit einmal ein derart sorfältig durchgearbeitetes Mathematikbuch in der Hand gehalten hätte. Ein Lob daher auch dem Haus Springer (bzw. dem *Applied Pro-bability Trust*)!

Heidelberg H. Rost

Hornung, U., Homogenization and Porous Media, Berlin u.a.: Springer 1997, XIII + 279 S., DM 98,00

Unter Homogenisierung versteht man einen mathematischen Ansatz, der es gestattet, (Differentialgleichungs-)Modelle mit stark variierenden Parametern durch Übergang zum singulären Grenzwert in diesen Parametern zu „mitteln". Auf diese Weise ist es möglich, den Übergang zu vollziehen von einer Mikroskala, in der alle Details aufgelöst werden, zu einer Makroskala, auf der die Details der Mikroskala nur noch z.B. in Form von „effektiven" Koeffizienten sichtbar sind. Dies ist oft ein entscheidender Schritt für die Praktikabilität mathematischer Modellierung für natur- oder ingenieurwissenschaftliche Prozesse, sind doch die Mikrostrukturmodelle weder mit vertretbarem Aufwand numerisch zu approximieren noch entsprechen ihre Größen den gemessenen Größen, da auch beim Meßvorgang eine „Mittelung" stattfindet.

Diese allgemein beschriebene Situation liegt insbesondere bei Fließ-, Transport- und Reaktionsprozessen in porösen Medien vor. Unter einem porösen Medium versteht man ein inhärent heterogenes Material, gebildet durch ein Feststoffskelett und den dadurch entstehenden, zusammenhängenden Porenraum, der mit Fluiden (Gas, Wasser, Öl) gefüllt ist. Die Mikroskala ist also die der Betrachtung einer „einzelnen" Pore, in der die Fluide den Gesetzen der Kontinuumsmechanik, also etwa den (Navier-)Stokes-Gleichungen gehorchen. Aber schon 1856 fand der französische Wasserbauingeniuer *H. Darcy*, daß die Sickergeschwindigkeit von Wasser durch einen Boden sich als proportional zum negativen Gradienten eines Potentials aus dem hydrostatischen Druck und einem Gravitationsanteil beschreiben läßt. Der Proportionalitätsfaktor, genauer der darin enthaltene mediumsabhängige, *Permeabilität* genannte Anteil, ist ein „effektiver" Koeffizient, der die zugrundeliegende Mikrostruktur des porösen Mediums widerspiegelt. Als Fragestellung ergeben sich also: Die rigorose Rechtfertigung des experimentell erhaltenen *Gesetzes von Darcy* und eine möglichst explizite Darstellung der Permeabilität. Während eine ganze Reihe von Ansätzen, z.B. die Methode der Volumenmittelung, für die prinzipielle Rechtfertigung solcher „gemittelter" Gleichungen herangezogen werden kann, liefert die Homogenisierung, zumindestens in einfacher geometrischen Situation, auch die effektiven Koeffizienten explizit. Dies ist der Fall, wenn das Medium räumlich periodisch, d.h. periodisch aus einer auf Längeneinheit ε skalierten repräsentativen Zelle zusammengesetzt ist. Dies ist der in weiten Teilen des vorliegenden Buches vorausgesetzte Fall, der aber gerade bei natürlichen porösen Medien wie Böden an seine Grenzen stößt. Hier sind Erweiterun-

gen nötig und möglich, die von einer stochastischen Beschreibung des Mediums ausgehen, wie in Kapitel 5 kurz angesprochen.

stehenden Modelle. Es ist somit eine große Hilfe für jeden Mathematiker, der auf dem Gebiet der Homogenisierung oder der porösen Medien arbeitet, sollte aber auch zugänglich sein für den mathematisch gebildeten Natur- oder Ingenieurwissenschaftler. Dieser wird viele in diesen Gebieten schon lange bekannte makroskopische Modelle in neuem Licht finden, aber auch neue Modelle, die auf ihre Anwendung noch harren. Andere Monographien über Homogenisierung streifen das Gebiet der porösen Medien nur am Rande oder gar nicht ([JKO94], [BP89]) oder können wegen ihres Alters ([BLP78], [EP87]) neuere Entwicklungen nicht enthalten. Sie bieten also keinen Ersatz für das vorliegende Buch. Dieses ist keine Monographie im klassischen Sinne, wurde es doch insgesamt von neun Autoren geschrieben, die alle auf dem Gebiet ihren Forschungsschwerpunkt haben. Es ist dennoch mehr als eine Zusammenstellung von Übersichtsartikeln, da auf eine einheitliche Nomenklatur und eine durchgehende Ordnung des Materials geachtet wurde. U. Hornung hat somit weit mehr als die übliche Arbeit eines Herausgebers geleistet. Da er kurz nach Erscheinen des Bandes auf tragische Weise verstarb, ist das Buch zu seinem Vermächtnis geworden.

Literatur

[BLP78] A. Bensoussan, J.L. Lions, and G. Papanicolaou. *Asymptotic Analysis for Periodic Structures.* North Holland-Elsevier Science Publishers, Amsterdam, 1978

[BP89] N. Bakhvalov and G. Panasenko. *Homogenization: Averaging Processes in Periodic Media.* Kluwer, Dordrecht, 1989

[EP87] H.I. Ene and D. Polisevski. *Thermal Flow in Porous Media.* D. Reidel, Dordrecht, 1987

[JKO94] V.V. Jikov, S.M. Kozlov, and O.A. Oleinik. *Homogenization of Differential Operators and Integral Functions.* Springer-Verlag, Berlin, 1994

Erlangen P. Knabner

Hart, J. D., Nonparametric Smoothing and Lack-of-Fit Tests (Springer Series in Statistics), Berlin u. a.: Springer 1997, 300 S:, DM 79,–

Methoden der nichtparametrischen Kurvenschätzung sind heutzutage weitverbreitet in der Angewandten Statistik und ihre asymptotischen Eigenschaften sind nun schon lange ein zentrales Thema der Mathematischen Statistik. Nichtparametrische Kurvenschätzer beruhen auf lokalen Glättungen der Daten, und ihre Gestalt wird nicht beeinträchtigt durch Modellannahmen wie bei Schätzungen in parametrischen Modellen (etwa in linearen oder polynomialen Regressionsmodellen). Solche parametrischen Modelle werden oft als zu einschränkend und ihre Annahme als zu restriktiv empfunden. Dies ist ein Grund für die Popularität nicht parametrischer Methoden. Andererseits legt diese Unvoreingenommenheit nahe, diese Methoden zur Konstruktion von Tests für einfache und zusammengesetzte, parametrische und nichtparametrische Hypothesen heranzuziehen. Dies kann zum Beispiel durch den Vergleich eines nichtparametrischen Kurvenschätzers mit einem parametrischen Schätzer oder mit einer hypothetisierten Kurve geschehen. Solche Tests („Lack-of-Fit Tests“) können einen zentralen Baustein im Rahmen einer statistischen Modellwahl bilden. Sie sind eine der wichtigsten Anwendungen der nichtparametrischen Kurvenschätzung. Ihre Darstellung ist Gegenstand dieses Buches.

Der erste Teil des Buches enthält eine Beschreibung einiger Glättungsmethoden und ihrer statistischen Eigenschaften. Hierbei konzentriert sich der Autor auf die Diskussion von Kernregressionsschätzern und Fourierreihenschätzern. Lokale Polynome, Glättungssplines und Waveletschätzer werden nur am Rande erwähnt (Kapitel 2). Einfache asymptotische Eigenschaften der Kernschätzer und Fourierreihenschätzer (quadratischer erwarteter Fehler, punktweise asymptotische Normalität des Kernschätzers) werden nachgewiesen (Kapitel 3). Kapitel 4 referiert über verschiedene statistische Ansätze der datenadaptiven Glättungsparameterwahl. Dies geschieht vor allem wieder für Kernschätzer und auf einem mehr intuitiven Niveau. Für Details wird auf neuere Literatur verwiesen. Kapitel 5 bis 9 diskutieren Lack-of-Fit Tests. Neben klassischen Ansätzen werden hier vor allem Tests betrachtet, die auf Fourierreihenschätzer beruhen. Ausführlich werden einfache Hypothesen (Kapitel 7) und die Hypothese eines linearen Modelles (Kapitel 8) behandelt. Die Anwendungen auf andere Modelle werden angedeutet bzw. auf einem mehr intuitiven Niveau diskutiert (Kapitel 8.3 und Kapitel 9).

Das Buch ist gut lesbar. Das mathematische Niveau ist recht einfach. Die allgemeine Einführung in die nichtparametrische Kurvenschätzung in den ersten Kapiteln ist informativ und gibt reichlich Referenzen zu aktueller Literatur. Dieser Teil des Buches ist auch für Leser von Interesse, die sich einen ersten Einblick in die nichtparametrische Kurvenschätzung verschaffen wollen. Im zweiten Teil mag stören, daß das Buch sich über weite Teile auf Fourierreihenschätzer beschränkt. Eine Einbeziehung anderer Glättungsverfahren wie Kernschätzer, Glättungssplines und Wavelets wäre hier wünschenswert gewesen. Eine Diskussion, wie Bootstrap- und Resamplingverfahren hier eingesetzt werden können, hätte auch Sinn gemacht. Trotz dieser Einseitigkeit vermittelt das Buch einen informativen Einblick in eine aktuelle statistische Problematik.

Heidelberg E. Mammen

Kress, R., Numerical Analysis (Graduate Texts in Mathematics 181), Berlin u.a.: Springer 1998, 335 Seiten, DM 78,–

Der Verfasser hat den Mut gehabt, den vielen auf dem Markt vorhandenen einführenden Büchern über numerische Mathematik ein weiteres hinzuzufügen, und er und auch der Verlag sind zum schönen Ergebnis zu beglückwünschen. Das Werk, hervorgegangen aus Lehrveranstaltungen des Autors, ist gedacht für einen zweisemestrigen Kurs für Studenten auf dem Niveau des zweiten Studienjahres an einer deutschen Universität. Es ist *analysis*-orientiert, sein Zweck ist ausdrücklich nicht die Vermittlung möglichst vieler Rechenrezepte, sondern die Vermittlung der Einsicht in die theoretischen Hintergründe. Es zeigt Mathematik (vor allem *Analysis*) in Aktion, ohne allerdings die Aspekte der Praxis aus den Augen zu verlieren. Solide Kenntnisse in Differential- und Integralrechnung sowie in linearer Algebra werden vorausgesetzt, erforderliche Grundlagen aus der Funktionalanalysis werden entwickelt. So ist das Buch hervorragend geeignet, das Gebiet der Numerik als Gegenstand der Mathematik erleben zu lassen, aber auch dem an Anwendungen interessierten Leser tieferes Verständnis über die Wirkungsweise von Verfahren zu geben. Der echte Praktiker wird sich allerdings notwendige Information über Rundungsprobleme und Fehlerfortpflanzung anderswo suchen müssen, diese Problematik paßt sozusagen nicht in dieses Buch, in dem gewissermaßen das numerische Rechnen in den Körpern **R** und **C** der reellen und komplexen Analysis stattfindet.

Beachtlich ist die Spannweite des dargestellten Stoffes. Nach der Behandlung algebraischer (nicht-iterativer) Methoden für Systeme linearer Gleichungen (Kapitel 2) führt Kapitel 3 ein in grundlegende funktionalanalytische Sachverhalte: normierte Räume, Skalarprodukte, beschränkte lineare Operatoren, Matrixnormen, beste Approximation, Fixpunktsatz von Banach. Letzterer dient in Kapitel 4 zunächst der Begründung iterativer Methoden für lineare Gleichungssysteme. Modellhaft werden in diesem Kapitel auch das *Defekt-Korrektur-Prinzip* und das *Mehrgitter-Verfahren* vorgestellt.

Es schließt sich an das Kapitel 5 über schlecht konditionierte lineare Systeme, in dem auch *Singulärwertzerlegung* und *Tikhonov-Regularisierung* auftreten. Es folgen in Kapitel 6 iterative Methoden für nichtlineare Systeme, auch Berechnung der Nullstellen von Polynomen und die Methode der kleinsten Quadrate, dann Kapitel 7 über Eigenwertprobleme.

Kapitel 8 behandelt polynomiale, trigonometrische und Spline-Interpolation, geht aber auch auf *Bézier-Polynome* ein. Ergebnisse dieses Kapitels dienen in Kapitel 9 der Gewinnung und Analyse von Quadraturverfahren. Reizvoll zu studieren ist der Abschnitt über *Quadratur periodischer Funktionen* (verwendet wird die Euler-Maclaurin-Formel), zu der auch mittels komplexer Analysis eine die schnelle Konvergenz zeigende ableitungsfreie Fehlerschranke bewiesen wird. Nach Vorstellung und Untersuchung der Romberg-Integration schließt dieses Kapitel mit einem Abschnitt über uneigentliche Integrale auf einem beschränkten Intervall, zu deren Berechnung eine vermittels Substitution zu gewinnende Verdichtung der Stützpunkte in Randnähe vorgeschlagen wird. Leider wird nicht darauf hingewiesen, daß man in konkreten Fällen oft mit viel einfacheren Techniken oder Tricks zum Ziel kommt.

Kapitel 10 ist den Einschritt- und Mehrschritt-Verfahren für Anfangswertaufgaben bei gewöhnlichen Differentialgleichungen gewidmet. Das Problem steifer Differentialgleichungen wird allerdings nur en passant erwähnt. Einen besonderen Charakter hat das Kapitel 11 über Randwertaufgaben (für gewöhnliche Differentialgleichungen). Nach Darstellung des Prinzips der Schießmethode und der Differenzenmethode kommt wieder die Funktionalanalysis ins Spiel. Am Modellproblem der *Sturm-Liouville-Randwertaufgabe* wird über die Begriffe *Koerzivität* und *schwache Lösung* die *Galerkin-Methode* und als Spezialfall die *Methode der finiten Elemente* vorgestellt, einschließlich Fehlerabschätzungen für Approximation mittels linearer Splines. Im abschließenden Kapitel 12 hat es sich der Verfasser nicht nehmen lassen, auf das ihm besonders am Herzen liegende Thema *Integralgleichungen* (hier zweiter Art) einzugehen. Nach einem Bericht über die Rieszsche Theorie stellt er zuerst abstrakte Operator-Approximations-Methoden dar, dann die Methode von *Nyström* und das Kollokationsverfahren.

Im Literaturverzeichnis (66 Titel) findet man eine gut gelungene repräsentative Auswahl von Quellen. Besonders hingewiesen sei auf die sorgfältige Auswahl von Übungsaufgaben (am Ende jedes Kapitels werden solche angeboten), bei deren Bearbeitung der Leser (die Leserin ist hier mit gemeint!) Gelegenheit hat, nicht nur den Stoff zu vertiefen, sondern auch Dinge kennen zu lernen, die im eigentlichen Text *vielleicht* zu kurz kommen (beispielsweise die *Peano-Kern-Methode* zur Gewinnung von Fehlerabschätzungen bei Approximation linearer Funktionale). Zu diesem „vielleicht“ ist zu sagen, daß der Verfasser sich um möglichst konzise Darstellung der Theorie bemüht und gar manches an gut gewählten einfachen Beispielen modellhaft behandelt hat. Das erleichtert einerseits das Studium, erlaubt andererseits auf den knapp dreihundert Seiten eine beachtliche Vielzahl von Ideen, Konzepten und Methoden vorzustellen. Wer mehr braucht, dem sollte es nach Studium dieses Werkes leichtfallen, in Einzelgebieten tiefergehende Literatur einzuordnen, zu erarbeiten und zu verwenden.

Ein empfehlenswertes Werk!

Berlin R. Gorenflo

Giaquinta, M., Modica, G., Souček, J., Cartesian Currents in the Calculus of Variations I and II (Erg. der Math. und ihrer Grenzgebiete 37 und 38), Berlin u. a.: Springer 1998, XXIV, 711 S. und XXIV, 697 S., DM 229,– und 229,–

Mit dem Titel „Cartesian Currents in the Calculus of Variations“ dieser aus zwei voluminösen Bänden bestehenden eindrucksvollen Monographie dürften die meisten Mathematiker nichts anzufangen wissen. Dies ist nicht allzu verwunderlich, da der Begriff „Cartesian Currents" (Kartesische Ströme) erst ca. 10 Jahre alt ist und von den Autoren des vorliegenden Werkes geprägt wurde. Wie weiter unten näher zu erläutern sein wird, bezeichnet er eine spezielle Klasse von „Currents" (Strömen), also von mathematischen Objekten, deren Studium einer der Hauptgegenstände der Geometrischen Maßtheorie ist. Gleichzeitig aber macht der Titel durch den Zusatz „... in the Calculus of Variations" deutlich, daß das Hauptaugenmerk auf den Anwendungen innerhalb der Variationsrechnung liegt.

Der erste Band „Cartesian Currents" ist naturgemäß grundlegender Natur, da in ihm die neuen Begriffe eingeführt und illustriert werden, und der Zusammenhang mit bestehenden Theorien aufgezeigt wird. Da es der Anspruch der Autoren war, die Darstellung elementar – wenn auch auf einem hohen Niveau – zu halten, und es dem Leser zu ermöglichen, einzelne Kapitel und Abschnitte unabhängig von der allgemeinen Theorie zu studieren, wurde es notwendig, z.B. Teile der Geometrischen Maßtheorie in den Text zu integrieren.

Der zweite Band „Variational Integrals" beinhaltet Untersuchungen einer Reihe von Variationsproblemen im Rahmen der Theorie der Kartesischen Ströme, wobei durchgehend der Vergleich mit dem klassischen Zugang über Sobolev Räume im Auge behalten wird. Aus den gleichen Gründen wie beim ersten Band beginnt hier die Darstellung deshalb mit einer Art Einführung in die Variationsrechnung.

Bevor ich eine detailliertere Übersicht über den Inhalt des vorliegenden Werkes gebe, möchte ich versuchen, die grundlegende Idee hinter dem Begriff „Cartesian Currents" zu skizzieren. Bei der direkten Methode der Variationsrechnung versucht man, z.B. eine Minimumstelle eines Funktionals $\mathcal{F}(u)$ zu finden, indem man sogenannte Minimalfolgen betrachtet, d.h. Folgen von Abbildungen $\{u_k\}$, so daß $\lim\limits_{k\to\infty} \mathcal{F}(u_k) = \inf\limits_{C} \mathcal{F}$, wobei C die Klasse zulässiger Vergleichsabbildungen ist. Möchte man nun eine konvergente Teilfolge $\{u_{k_l}\}$ auswählen, wobei die Art der Konvergenz noch zu klären ist, so sieht man sich im Allgemeinen gezwungen, von glatten Abbildungen zu (in einem geeigneten Sinn) schwach differenzierbaren Abbildungen überzugehen, d.h. C zu erweitern zu einer größeren Klasse $\tilde{C}$. In den meisten Fällen wird man dabei nichts besseres als schwache Konvergenz erwarten können. Ist nun das betrachtete Funktional $\mathcal{F}$ schwach unterhalbstetig, so erhält man aus $u_{k_l} \rightharpoonup u$ die Ungleichung

$$\mathcal{F}(u) \leq \liminf_{l\to\infty} \mathcal{F}(u_{k_l}) = \lim_{k\to\infty} \mathcal{F}(u_k) = \inf_{C} \mathcal{F}.$$

Gilt schließlich $u \in \tilde{C}$ und $\inf\limits_{C} \mathcal{F} = \inf\limits_{\tilde{C}} \mathcal{F}$, so hat man offenbar das gesuchte Minimum gefunden.

An diesem Punkt setzt dann die Regularitätstheorie ein, wenn man versucht nachzuweisen, daß es sich bei dem schwachen Minimum tatsächlich um ein klassisches (d.h. glattes) Minimum handelt. In den letzten 30 Jahren hat sich nun gezeigt, daß man bei Variationsproblemen für vektorwertige Abbildungen, also $u : \Omega \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^N$, Ω offen und $N > 1$, im Allgemeinen mit Singularitäten rechnen muß, d.h. man kann keine glatten Minima erwarten, sondern bestenfalls sogenannte Partielle Regularität. Umso wichtiger wird es in diesem Fall, den richtigen oder zumindest einen geeigneten Begriff der *schwachen Abbildung* zu haben. Zitat aus dem *Preface*: „The aim of this monograph is twofold: discussing a homological theory of weak maps, and in this context treating several typical and relevant variational problems."

Im Buch werden hauptsächlich *Geometrische Variationsprobleme* behandelt, bei denen das Variationsintegral von der Form $\mathcal{F}(u, \Omega) := \int\limits_{\Omega} f(x, u(x), Du(x))dx$ ist. Eine fundamentale Beobachtung der Autoren ist nun, daß der klassische Begriff der Distributionsableitung in vielen interessanten Fällen *nicht* der geeignete Begriff der schwachen Ableitung ist. Es stellt sich nämlich heraus, daß der Graph einer Abbildung und seine Tangentialebenen nicht adäquat durch die Distributionsableitung beschrieben werden, sondern dazu eher der maßtheoretische Begriff der *Approximativen Differenzierbarkeit fast überall* geeignet ist. Bei glatten Abbildungen gibt es da natürlich keinen Unterschied, aber das wohl einfachste Beispiel, das diesen Sachverhalt illustriert, ist die L^∞–Funktion $\frac{x}{|x|}: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, deren Distributionsableitung im wesentlichen die Deltadistribution δ_0 ist,

(hier: Tangente) fast überall horizontal ist. In der Tat isolieren die Autoren drei zentrale Elemente, die sich als relevant für eine zufrieden stellende geometrische Beschreibung schwacher Grenzwerte von Folgen glatter Abbildungen $\{u_k\}$ herausstellen. Dabei handelt es sich um die *Existenz der Tangentialebene fast überall*, d.h. um die Rektifizierbarkeit der Graphen der $\{u_k\}$'s, die *gleichmäßige Beschränktheit der Flächeninhalte* der approximierenden Graphen, und zuletzt um den *Rand* der Graphen innerhalb des Zylinders $\Omega \times \mathbb{R}^N$. Aus diesen Gründen betrachten die Autoren zunächst die Klasse

$$\mathcal{A}^1(\Omega, \mathbb{R}^N) := \{u \in L^1(\Omega, \mathbb{R}^N) | u \text{ ist f.ü. approximativ differenzierbar und alle Minoren von } Du \text{ gehören zu } L^1(\Omega)\}.$$

Für eine f.ü. approximativ differenzierbare Abbildung wird dann der 1-Graph von u in $\Omega \times \mathbb{R}^N$ durch

$$\mathcal{G}_{u,\Omega} := \{(x, u(x)) | x \in \mathcal{R}_u \cap \Omega\}$$

definiert, wobei $\mathcal{R}_u$ die Menge aller Punkte bezeichnet, die zur Lebesgue Menge von u

tel (Cartesian Currents in Euclidean Spaces) enthält schließlich neben der Definition von cart($\Omega \times \mathbb{R}^N$) Abgeschlossenheits- und Kompaktheitssätze sowie eine Strukturtheorie spezieller Kartesischer Ströme. Im letzten Kapitel (Cartesian Currents in Riemannian Manifolds) wird dann eine Homologie- und Kohomologietheorie für Kartesische Ströme entwickelt, die mit den klassischen Theorien im Fall glatter Abbildungen übereinstimmen und mit der schwachen Konvergenz von Strömen verträglich sind.

Der Band II ist folgendermaßen aufgebaut. Im ersten Kapitel (Regular Variational Integrals) werden allgemeine Variationsprobleme in parametrischer und nicht-parametrischer Form behandelt, sowie verschiedene Elliptizitätsbedingungen wie parametrische Elliptizität, Polykonvexität und Quasikonvexität vorgestellt, die fundamental für die Unterhalbstetigkeit sind. Der Rest des zweiten Bandes ist dann speziellen Variationsproblemen im Rahmen der Theorie Kartesischer Ströme gewidmet. Im Einzelnen geht es im zweiten Kapitel um schwache Diffeomorphismen und nicht-lineare Elastizität (Finite Elasticity and Weak Diffeomorphisms). Im Mittelpunkt der nächsten drei Kapitel (The Dirichlet Integral in Sobolev Spaces, The Dirichlet Energy for Maps into the Two Dimensional Sphere, Some Regular and Non Regular Variational Problems) stehen verschiedene Aspekte der Theorie harmonischer Abbildungen und die Diskussion verwandter Fragen. Das abschließende sechste Kapitel (The Non Parametric Area Functional) beschäftigt sich mit nicht-parametrischen Minimalflächen, sowohl in Kodimension Eins (Minimalflächengleichung) wie auch in beliebiger Kodimension.

Die gesamte Darstellung des Stoffes kann man als vorbildlich bezeichnen. Da ist zunächst das ausführliche Inhaltsverzeichnis zu nennen, in welchem jeder Abschnitt durch einige Stichworte erläutert wird. Darüber hinaus ist den einzelnen Kapiteln, Abschnitten und Unterabschnitten eine Art Leitfaden für die anschließenden Überlegungen vorangestellt. Jedes Kapitel wird durch „Notes“ beschlossen, in denen einerseits auf die jeweils benutzte und auf weiterführende Literatur eingegangen wird, und in denen andererseits nur kurz angesprochene bzw. verwandte Themen vertieft bzw. vorgestellt werden. Natürlich enthält jeder Band ein Stichwort- und Symbolverzeichnis. Besonders hervorzuheben ist auch die umfangreiche Bibliographie, die 686 Einträge umfaßt.

Ihrem eigenen Anspruch, den Text möglichst „self contained“ zu halten, sind die Autoren in vollem Umfang gerecht geworden. Alle (für das Thema) relevanten Sätze werden ausführlich und vollständig bewiesen. Der Theoriefluß aus Definitionen, Sätzen und Beweisen wird zum Vorteil des Lesers durch Erläuterungen unterbrochen, die Beispiele, Gegenbeispiele und Illustrationen umfassen. Da die Autoren sich auch nicht vor sinnvollen Wiederholungen scheuen, ist es möglich, einzelne Kapitel unabhängig vom Rest des Textes zu lesen, so daß diese durchaus als Vorlage einer Vorlesung oder eines Seminars dienen können. Nicht zuletzt ist das zweite Kapitel des ersten Bandes eine gelungene Einführung in Teile der Geometrischen Maßtheorie, die ja allgemein als schwer zugängliches Teilgebiet der Mathematik gilt. Der Stil der vorliegenden Monographie ist klar und präzise ohne formalistisch zu wirken. Es ist eine Freude in den beiden Bänden zu stöbern und sich festzulesen.

Aus meinen Ausführungen dürfte klar geworden sein, daß ich einen Umfang von zusammen 1408 Seiten in diesem Fall durchaus für gerechtfertigt halte, obwohl es sich bei dem Thema um ein engeres Teilgebiet der Variationsrechnung handelt. Durch die von den Autoren in den letzten zehn Jahren entwickelte Theorie der Kartesischen Ströme konnte ein tieferes Verständnis der Resultate und beobachteten Phänomene der Geometrischen Variationsrechnung der letzten 30 Jahre gewonnen werden. Diese neue Sichtweise ist der nichtlinearen Natur der untersuchten Probleme vielleicht eher angemessen als der klassische Zugang über die Sobolev Räume.

Bei dieser Monographie handelt es sich um einen Bericht von der vordersten Forschungsfront, der gleichzeitig jedem an dieser Art von Problemen interessierten Mathematiker zugänglich ist. Das ist ein seltener Glücksfall, für den man den Autoren gar nicht genug danken kann. Wer sich durch den schieren Umfang der beiden Bände nicht abschrecken läßt, wird diese, einmal zur Hand genommen, nicht so schnell wieder ins Regal zurückstellen wollen.

Saarbrücken M. Grüter

Snitzman, A.-S., Brownian Motion, Obstacles and Random Media, Berlin u. a., Springer, 1998, XVI, 353 S., DM 129,–

Ein zentrales Anliegen der Forschung im Bereich stochastischer Prozesse befaßt sich mit „Prozessen im zufälligen Medium". Darunter versteht man solche stochastische Prozesse, bei denen der Evolutionsmechanismus selbst zufällig erzeugt wird. Das kann so geschehen, daß Parameter des Modells zu dem Zeitpunkt 0 in einem Zufallsexperiment realisiert werden und dann fest bleiben, oder auch daß diese Parameter, auch das Medium genannt, selbst einer stochastischen Evolution in der Zeit unterliegen. Alle diese Klassen von Prozessen im zufälligen Medium zeigen eine Vielzahl neuer Phänomene, die im Fall fester Koeffizienten nicht auftreten.

Da Modelle des genannten Typs sehr komplexes Verhalten zeigen, ist man weniger bemüht eine allgemeine Theorie von Prozessen im zufälligen Medium zu entwerfen, sondern man studiert wichtige Prototypen von Prozessen. In diesem Geiste behandelt das Buch von A.-S. Snitman die Brownsche Bewegung in einem Poissonschen Arrangement von Hindernissen. Dieses Modell ist von großem Interesse in der mathematischen Physik. Sein mathematischer Reiz ist die enge Verknüpfung mit der Theorie der großen Abweichungen, der Potentialtheorie und Variationsproblemen und steht damit im engen Kontakt mit anderen im Moment sehr aktiven Gebieten der Stochastik. Hinzu kommt, daß die grundlegenden mathematischen Techniken sehr schön herausgearbeitet werden. Aus dem Abschluß des Buches wird deutlich, daß noch viel zu tun ist und das Buch nicht am Abschluß einer Entwicklung steht, sondern dem Leser eine Hilfe ist, sich in ein sich rapide entwickelndes Gebiet einzuarbeiten.

Die grundlegende Fragestellung des Buches ist die Folgende. Sei $V(x,\omega)$ $x \in \mathbb{R}^d$ ein zufälliges Potential der Form

$$V(x,\omega) = \sum_i W(x - x_i), \quad \omega = \sum_i \delta_{x_i},$$

wobei $(x_i)_{i\in I}$ eine Poissonsche Punktwolke ist und W eine beschränkte meßbare Funktion mit kompaktem Träger. Weiterhin sei $(Z_s)_{s\geq 0}$ eine Brownsche Bewegung. Der Poissonsche Punktprozeß und die Brownsche Bewegung sind voneinander stochastisch unabhängig. Man kann nun die Pfadmaße betrachten, die von der folgenden Dichte erzeugt werden: (quenched case)

$$Q_{t,\omega} = \frac{1}{S_{t,\omega}} \exp\left(- \int_0^t V(Z_s,\omega)ds \right),$$

wobei $S_{t,\omega}$ die Normalisierungskonstante ist (das heißt der Erwartungswert des Exponentialausdruckes über $(Z_s)_{s\geq 0}$). Daneben entsteht bei Betrachtung des Paares (Brownsche Bewegung, Medium) ein neues Maß auf dem Paar (Raum der Pfade, Medium) durch die Dichte

$$Q_t = \frac{1}{S_t} \exp\left(- \int_0^t V(Z_s,\omega)ds \right)$$

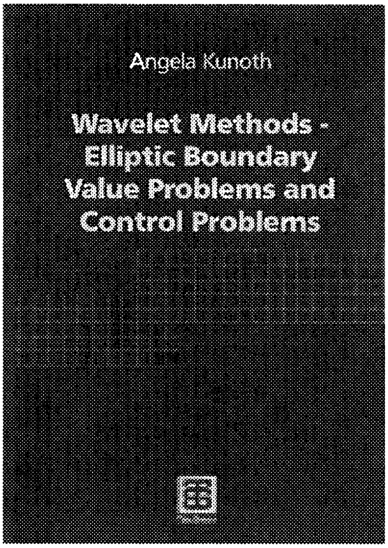
und wieder ist S_t die Normalisierungskonstante, das heißt der Erwartungswert über den Prozeß $(Z_s)_{s \geq 0}$ und das Medium.

Man kann die beiden oben genannten Objekte auf verschiedene Weise interpretieren. Folgende Interpretation ist besonders wichtig. Man betrachte $Q_{t,\omega}$ als Verteilung der Pfade einer Brownschen Bewegung, die im Punkt x mit Rate $V(x,\omega)$ absorbiert wird, falls das Medium ω realisiert wurde, aber die auf Nichtabsorbation bis zur Zeit t bedingt wird. Im zweiten Fall, d. h. Q_t, mittelt man über die Medien, was bedeutet, daß man die relative Verschiebung und das Medium von einem zufällig in den Raum gesetzten Teilchen aus betrachtet. Die entscheidende Frage, die das Buch behandelt, ist dann, wie verhalten sich die Normalisierungskonstanten $S_{t,\omega}, S_t$ und darauf aufbauend die Maße $Q_{t,\omega}, Q_t$ auf den Pfadräumen für $t \to \infty$.

Der Aufbau des Buches ist wie folgt. Das Buch entwickelt in sehr systematischer Form zunächst in einem Teil 1 das mathematische Rüstzeug bevor dann in Teil 2 die Auseinandersetzung mit dem stochastischen Modell beginnt.

Der erste Teil des Buches, der die technischen Voraussetzungen schafft, behandelt Feynman-Kac Formel und Halbgruppen, Potentialtheorie und größte Eigenwerte. Die Kapitel des Ergebnisteiles behandeln die Technik der Vergrößerungen von Hindernissen mit den sich ergebenden spektralen Abschätzungen und die hieraus

Wavelets for Control Problems



Angela Kunoth
Wavelet Methods - Elliptic Boundary Value Problems and Control Problems
2001. x, 141 pp. Softc.
DM 78,00
ISBN 3-519-00327-9

Contents: A General Concept - Multiscale Decomposition of Function Spaces - Wavelets on Bounded Domains and Manifolds - Elliptic de Gruyter Mathematics

de Gruyter Expositions in Mathematics

that theorem in several directions. The text