D 20577
103. Band Heft 4
ausgegeben am 21.12.2001

DMV

Jahresbericht
der Deutschen Mathematiker-Vereinigung

Herausgegeben von A. Krieg
unter Mitwirkung von
U. Gather, E. Heintze, B. Kawohl,
H. Lange, H. Triebel

B. G. Teubner Stuttgart · Leipzig · Wiesbaden

Jahresbericht

der Deutschen Mathematiker-Vereinigung

Der „Jahresbericht“ ist das offizielle Veröffentlichungsorgan der Deutschen Mathematiker-Vereinigung, für dessen inhaltliche Gestaltung im Auftrag des Präsidiums der jeweilige Herausgeber zuständig ist. Im „Jahresbericht“ sollen vornehmlich Überblicksartikel über Teilgebiete der

Jahresbericht

Printed in Germany – ISSN 0012-0456
Satz: Fotosatz Behrens, Oftersheim
Druck: pagina media gmbh, Hemsbach

Inhalt

1. Abteilung

2. Abteilung

Jahresbericht
der Deutschen Mathematiker-Vereinigung

Inhalt Band 103, Heft 4

1. Abteilung

2. Abteilung

In den nächsten Heften erscheinende Arbeiten:

I. Ekeland: Nonlinear systems of PDEs arising from economic theory

---

Anschriften der Herausgeber

Prof. Dr. Aloys Krieg, Lehrstuhl A für Mathematik, RWTH Aachen, 52056 Aachen
E-Mail: krieg@mathA.rwth-aachen.de

Prof. Dr. Ursula Gather, Lehrstuhl für Mathematische Statistik und industrielle Anwendungen, Universität Dortmund, 44221 Dortmund
E-Mail: gather@statistik.uni-dortmund.de

Prof. Dr. Ernst Heintze, Institut für Mathematik, Universität Augsburg, 86135 Augsburg

Prof. Dr. Bernhard Kawohl, Mathematisches Institut, Universität zu Köln, 50923 Köln
E-Mail: kawohl@mi.uni-koeln.de

Prof. Dr. Herbert Lange, Mathematisches Institut, Friedrich-Alexander-Universität Erlangen-Nürnberg, Bismarckstraße 1½, 91054 Erlangen
E-Mail: lange@mi.uni-erlangen.de

Jber. d. Dt. Math.-Verein. 103 (2001) 115–148
Mathematics Subject Classification: 01 A 60, 01 A 73, 01 A 80
Keywords and Phrases: Mathematical doctoral theses

Mathematische Dissertationen an deutschen Hochschuleinrichtungen, WS 1907/08 bis WS 1944/45

R. Tobies und U. Görgen, Kaiserslautern

Im Rahmen des von der Volkswagenstiftung geförderten Projekts „Frauen in der Mathematik – Determinanten von Berufsverläufen in der Mathematik unter geschlechtsvergleichender Perspektive“[1] wurden die mathematischen Dissertationen des Zeitraumes von WS 1907/08 bis WS 1944/45 erstmals erfasst und analysiert. Grundlage bildeten die nach Hochschulorten gegliederten „Jahresverzeichnisse der an den Deutschen Universitäten und Technischen Hochschulen erschienenen Schriften“, das – z. T. fehlerhafte – Verzeichnis der Dissertationen von Frauen bis 1933 [Boedeker 1939], fachspezifisch gegliederte Bibliographien von Dissertationen an Technischen Hochschulen [Niemann 1924; Niemann/Neufeld 1931] sowie Archivstudien.[2]

Als Beginn des Untersuchungszeitraumes wurde das WS 1907/08 gewählt, da seit dieser Zeit auch zunehmend Frauen promovierten. Die davor liegenden Promotionen von sieben Ausländerinnen in Göttingen [vgl. Tobies 1999] und der ersten Deutschen, Marie Gernet (1865–1924) im Jahre 1895 bei Leo Königsberger (1837–1921) in Heidelberg [vgl. Tobies 1997b, S. 137–140] gehen damit nicht in die Analyse ein. Das Ende des Untersuchungszeitraumes mit WS 1944/45 erklärt sich aus dem historischen Einschnitt.

Da das Datum von Promotionen wiederholt in erheblicher Zeitdifferenz auf den Tag der mündlichen Doktorprüfung (Rigorosum) folgte, die wesentlichen Promotionsleistungen jedoch mit dem Rigorosum als erledigt betrachtet werden können, wurde – soweit ermittelbar – das Datum des Rigorosum für die Analyse zugrunde gelegt.

Nach unseren Ermittlungen wurden im Untersuchungszeitraum 1354 mathematische Dissertationen an 35 deutschen Hochschuleinrichtungen (24 Univer-

[1] Interdisziplinäres Projekt, das in Kaiserslautern unter der Leitung von Herrn Prof. Dr. Dr. h.c. Helmut Neunzert und in Erlangen am Institut für Sozialpsychologie unter der Leitung von Frau Prof. Dr. Andrea Abele-Brehm durchgeführt wird.

[2] Für besondere Unterstützung bei den Archivstudien dankt die Autorin Frau Dr. Basikow (Archiv für bildungsgeschichtliche Forschung Berlin), Frau PD Dr. Richter (FB Mathematik U Halle), Frau Dr. Dr. habil. Voss (TU Dresden), Herrn Dr. Becker (UA Bonn), Herrn R. Giesler (UA Münster), Herrn Dr. Hunger (UA Göttingen), Herrn Dr. Schultze und Frau Seemel (UA Berlin).

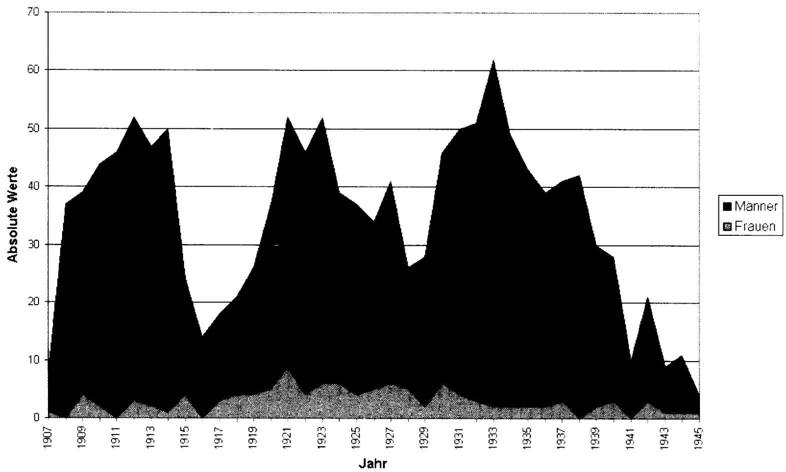


Abb. 1 Verteilung der mathematischen Dissertationen pro Jahr und Geschlecht

sitäten und 11 Technischen Hochschulen) verteidigt. Davon wurden 115 Dissertationen von Frauen und 1239 von Männern verfasst.[3]

Die Dissertationen wurden nach den folgenden Gesichtspunkten analysiert:

- Zeiträume, in denen sie geschrieben wurden;
- Zuordnung zu mathematischen Gebieten;
- Verteilung auf die Promotionsorte,
- Publikation in einer Zeitschrift oder nicht,
- Nationalitäten der Promovierenden.

Dabei wurde der Blick auf mögliche Gemeinsamkeiten und Unterschiede der von Frauen oder Männern verfassten Dissertationen gerichtet.

1 Zeitliche Verteilung der Dissertationen

Die steigende Zahl der Studierenden seit der Zeit um 1900 führte auch verstärkt zu Promotionsabschlüssen in Mathematik in der Zeit von 1908 bis 1914 (Abb. 1).

Der Rückgang im Zeitraum von 1915 bis 1920 kann als direkte Folge des Ersten Weltkrieges interpretiert werden. Viele Personen unterbrachen ihr Studium, um im Krieg zu dienen. Nach Kriegsende nahmen diese Personen ihr Studium wieder auf, woraus eine erneute Zunahme der Anzahl von Promotionen in den Jahren von 1920 bis 1923 resultierte. Während des Ersten Weltkrieges war die Zahl der Anfän-

[3] Die durch Herrn Prof. Dr. E. Schock, Kaiserslautern, angeregte Suche nach Alwin Walthers Dissertation (TH Dresden 1922, Beiträge zur Funktionentheorie) brachte an den Tag, dass die Bibliographien auch Desiderate aufweisen, insbesondere dort, wo die Dissertationen nicht gemeldet wurden und die Archive im Kriege Verluste erlitten. Durch Frau Prof. Dr. Ina Kersten wird die Liste der Dissertationen unter http://www.mathematik.uni-bielefeld.de/DMV/archiv/dissertationen.html bereitgestellt. Ergänzungen und Hinweise sind sehr willkommen.

gerstudierenden an deutschen Hochschuleinrichtungen sehr gering, weil viele Männer direkt nach dem Abitur am Krieg teilnahmen. Das ist auch eine Ursache für den Rückgang der Promotionen in den Jahren 1924 bis 1929. Der Einschnitt in diesen Jahren erklärt sich außerdem aus der Tatsache, dass die höheren Schulen mit Lehrern und Lehrerinnen überfüllt waren und die Aussicht auf eine Anstellung gesunken war. Auch für die in Mathematik promovierten Personen war zu diesem Zeitpunkt die Tätigkeit im höheren Schuldienst die dominante Berufskarriere [vgl. Abele et al. 2001]. Bis 1933 erhöhte sich die Zahl der Dissertationen in Deutschland wieder, sank danach und ging mit Ausbruch des Zweiten Weltkrieges drastisch zurück.

Frauen war – in den einzelnen deutschen Ländern unterschiedlich – im Zeitraum von 1900 bis 1909 an allen deutschen Universitäten und Hochschulen das Immatrikulationsrecht gewährt worden. Zusätzlich wirkte sich die Einführung des mathematisch-naturwissenschaftlichen Unterrichtes an den öffentlichen höheren Mädchenschulen in Preußen (Ministerial-Erlaß vom 18.8.1908) positiv auf die Zahl weiblicher Studierender in diesen Fächern aus. Im Zeitraum von 1909 bis 1919 wählten Frauen Mathematik als drittliebstes Studienfach [vgl. Tobies 1997a, S. 41 ff.]. Dies spiegelte sich auch in der wachsenden Zahl von Promotionen wider.

Der Anteil der Frauen, die im gesamten Untersuchungszeitraum eine Dissertation in Mathematik verteidigten, lag bei durchschnittlich 8,5 %. Für unterschiedliche Zeiträume (vgl. Tab. 1) sind stärkere Abweichungen von diesem Mittelwert erkennbar.

Tabelle 1: Verteilung der Promotionen in Mathematik auf bestimmte Zeitabschnitte

Zeitraum	Frauen Anzahl	Frauen %	Männer Anzahl	Männer %	Frauenanteil in %
1907–1909[4]	5	4,3	79	6,4	6,0
1910–1914	8	6,9	231	18,6	3,3
1915–1919	15	13,0	88	7,1	14,6
1920–1924	30	26,1	196	15,8	13,3
1925–1929	22	19,1	144	11,6	13,3
1930–1934	17	14,8	241	19,5	6,6
1935–1939	9	7,8	186	15,0	4,6
1940–1945[5]	9	7,8	74	6,0	10,8
Insgesamt	**115**	**100,0**	**1239**	**100,0**	**8,5**

Bis 1914 lag der Anteil weiblicher Promovierender unterhalb des Durchschnittswertes, von 1915 bis 1929 dagegen deutlich darüber. Die Gründe für diese Entwicklung differieren für verschiedene Zeitabschnitte (1915–1919 und 1920–1929). In der Periode, die den Ersten Weltkrieg umfasst, beruhte der relativ hohe Frauenanteil hauptsächlich auf der geringen Zahl männlicher Promovierender. Frauen wurden während dieser Zeit gebraucht und deshalb besonders gefördert und gefordert. Sie

[4] kürzerer Abschnitt
[5] 6-Jahresabschnitt wegen des Zweiten Weltkrieges

konnten erstmals Positionen als wissenschaftliche Assistentinnen einnehmen [vgl. Tobies 1997b]. Dieser Trend brach während der 20er Jahre nicht ab, als wieder hinreichend männlicher wissenschaftlicher Nachwuchs vorhanden war. Mit Beginn der NS-Zeit sank der Anteil der Frauendissertationen. Während der Zeit des Zweiten Weltkrieges erhöhte sich der Anteil weiblicher Promovierender weniger als in den Jahren des Ersten Weltkrieges.

Da die Zahl der Frauendissertationen insgesamt gering war, können die Er-

tik der Mathematik geschrieben. Die Dissertationen der beiden einzigen Frauen in diesem Bereich sind der *Philosophie der Mathematik* zuzuordnen.[6]

Zu **Grundlagen** sind Dissertationen aus den Teilgebieten *Axiomatik*, *Mengenlehre* und *Logik* zusammengefasst worden. Im gesamten Untersuchungszeitraum wurden dazu 35 Dissertationen verteidigt; dabei gehörten 16 Arbeiten in das Gebiet *Axiomatik*, 10 zur *Mengenlehre* und 9 zur *Logik*. Die beiden Dissertationen von Frauen in diesem mathematischen Gebiet fallen in das Gebiet *Axiomatik*.

In **Geometrie** wurden im Untersuchungszeitraum 399 Dissertationen geschrieben, davon 40 von weiblichen Promovierenden. Die geometrischen Dissertationen konnten folgenden Untergebieten zugeordnet werden: 162 Arbeiten in *Differentialgeometrie*, 109 Arbeiten in *algebraischer Geometrie*, 27 Arbeiten *in affiner und projektiver Geometrie*, 23 Arbeiten in *synthetischer Geometrie*, 17 Arbeiten in *Grundlagen der Geometrie*, 15 Arbeiten in *analytischer Geometrie*, sieben in *nichteuklidischer Geometrie* und zwei in *darstellender Geometrie*. 37 Dissertationen ließen sich keinem Untergebiet eindeutig zuordnen.

Die **Topologie** entwickelte sich von Beginn an in zwei Richtungen, die heute als allgemeine oder mengentheoretische Topologie bzw. als kombinatorische oder algebraische Topologie bekannt sind [vgl. Scriba/Schreiber 2000, S. 425 ff.]. Bei den Dissertationen unserer Untersuchung entschieden wir nicht zwischen den beiden Richtungen, da die Anzahl relativ gering war: Arbeiten von acht Frauen und 46 Männern.

Im Gebiet der **Zahlentheorie** wurden 85 Dissertationen verfasst, davon acht von weiblichen Promovierenden. Die Dissertationen wurden folgenden Untergebieten zugeordnet: 35 Arbeiten in *algebraischer Zahlentheorie*, 19 Arbeiten in *analytischer Zahlentheorie* und vier in *elementarer Zahlentheorie*. Die übrigen 27 Arbeiten konnten in kein Untergebiet eindeutig eingeordnet werden.

In **Algebra** schrieben 16 Frauen und 142 Männer eine Dissertation: 44 Arbeiten zur *Gruppentheorie*, 42 auf dem Gebiet der *Körpertheorie*, 15 Arbeiten zur *nichtkommutativen Algebra und Algebrentheorie*, 14 Arbeiten zur *Invariantentheorie*, acht Arbeiten auf dem Gebiet der *Gleichungstheorie*, acht Arbeiten befassten sich mit *Rechenmethoden der Algebra* und sechs mit *kommutativer Algebra*. 21 Arbeiten konnten in kein Untergebiet eindeutig eingegliedert werden.

In **Analysis** verteidigten 26 Frauen und 289 Männer ihre Dissertation: 121 Dissertationen befassten sich mit *Funktionentheorie*, 39 Dissertationen mit *gewöhnlichen Differentialgleichungen*, 30 Dissertationen mit *partiellen Differentialgleichungen*, 26 Dissertationen mit der *Theorie der Reihen*, 24 Dissertationen mit *Variationsrechnung*, 14 Dissertationen waren der *Funktionalanalysis*, 13 der *Integraltheorie*, je 12 der *Theorie der Integralgleichungen* und der *Potentialtheorie* sowie 10 dem Gebiet der *Konformen Abbildungen* gewidmet. 14 Dissertationen konnten keinem Untergebiet eindeutig zugeordnet werden.

---

[6] Weitere Dissertationen in diesen Gebieten wurden nicht in die Datenbank aufgenommen, wenn eindeutig ermittelt werden konnte, dass die Betreuung der Dissertation nicht durch einen Mathematik-Professor erfolgte und das Rigorosum nicht im Hauptfach Mathematik absolviert wurde.

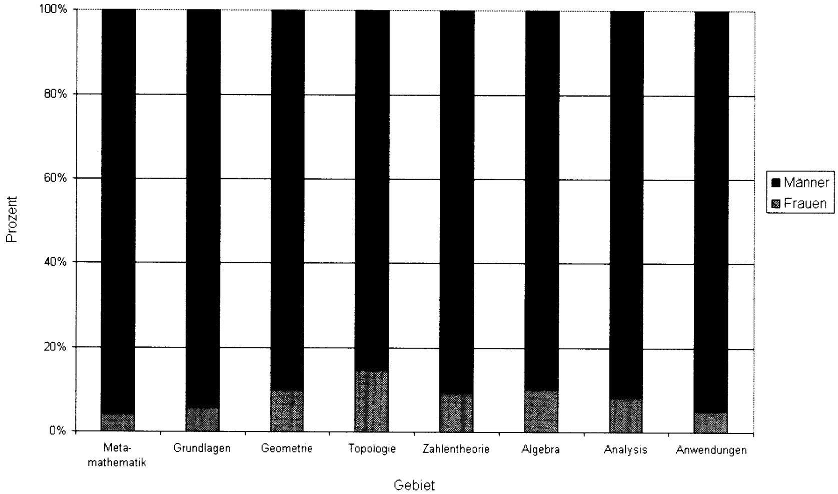


Abb. 3 Prozentuale Anteile der Dissertationen von Frauen und Männern in den einzelnen mathematischen Gebieten, WS 1907/08 bis WS 1944/45

Ein signifikanter Unterschied bestand nur bei den Dissertationen, die in Anwendungsgebieten der Mathematik geschrieben wurden: 11,3% der Frauen, 19,9% der Männer. Promovierende Frauen arbeiteten jedoch – über den gesamten Untersuchungszeitraum betrachtet – bereits stärker in anwendungsorientierten Gebieten als Frauen beim Staatsexamen. Bei den Absolvierenden des Staatsexamens (1902 bis 1940) bestand bei der Wahl des damals jungen Lehrgebietes „Angewandte Mathematik" eine noch größere Geschlechterdifferenz: nur 3% der Frauen, aber 21% der Männer hatten das Gebiet gewählt. [Abele et al. 2001].

Abb. 3 betrachtet die Anteile von Frauen und Männern bei den Dissertationen in den einzelnen Gebieten. Im Vergleich zum durchschnittlichen Frauenanteil von 8,5% war der Anteil in Topologie am höchsten. Über dem Durchschnittswert lagen außerdem die Anteile in Geometrie (10%), Algebra (10,1%) und Zahlentheorie (9,4%). Der geringe Anteil der Arbeiten in Anwendungsgebieten (5%) wurde nur vom Anteil in Metamathematik (4,1%) unterschritten. Der Frauenanteil in Analysis (8,3%) entsprach etwa dem Frauenanteil aller mathematischen Dissertationen im Untersuchungszeitraum.

2.2 Verteilung der Dissertationen in unterschiedlichen Zeiträumen

Wir untersuchten, ob sich in verschiedenen Zeiträumen unterschiedliche Schwerpunkte bei der Wahl der Dissertationsthemen erkennen lassen. Dabei prüften wir zunächst, ob sich während der NS-Zeit nicht nur der Anteil der Frauen an den Dissertationen, sondern auch die Wahl der Dissertationsgebiete änderte. Für die Zeit bis 1933 entspricht die Verteilung weitgehend der des gesamten Untersuchungszeitraumes, wobei die Frauenanteile – mit Ausnahme von Geometrie und Zahlentheorie – leicht höher waren (Tab. 2a, b).

Tabelle 2a: Verteilung der Dissertationen auf die mathematischen Teilgebiete (1907–1933)

Gebiet	Frauen Anzahl	%	Männer Anzahl	%	Insgesamt Anzahl	%	Frauenanteil in %
Metamathematik	2	2,1	31	3,3	33	3,2	6,1
Grundlagen	2	2,1	18	1,9	20	1,9	10,0
Geometrie	31	32,6	292	31,2	323	31,4	9,6
Topologie	7	7,4	33	3,5	40	3,9	17,5
Zahlentheorie	6	6,3	62	6,6	68	6,6	8,8
Algebra	12	12,6	102	10,9	114	11,1	10,5
Analysis	23	24,2	224	24,0	247	24,0	9,3
Anwendungen	12	12,6	173	18,5	185	18,0	6,5
Summe	**95**	**100,0**	**935**	**100,0**	**1030**	**100,0**	**9,2**

Tabelle 2b: Verteilung der Dissertationen auf die mathematischen Teilgebiete (1934–1945)

Gebiet	Frauen Anzahl	%	Männer Anzahl	%	Insgesamt Anzahl	%	Frauenanteil in %
Metamathematik	0	0	16	5,3	16	4,9	0,0
Grundlagen	0	0	15	4,9	15	4,6	0,0
Geometrie	9	45	67	22,0	76	23,4	11,8
Topologie	1	5	13	4,3	14	4,3	7,1
Zahlentheorie	2	10	15	4,9	17	5,2	11,8
Algebra	4	20	40	13,2	43	13,3	9,3
Analysis	3	15	65	21,4	68	21,0	4,4
Anwendungen	1	5	73	24,0	73	22,5	1,4
Summe	**20**	**100,0**	**304**	**100,0**	**324**	**100,0**	**6,2**

Während Männer auch nach 1933 Dissertationen in allen Gebieten verteidigten, schlossen Frauen in diesen Jahren in Metamathematik und Grundlagen der Mathematik keine Dissertation ab, in Topologie und zu Anwendungen der Mathematik (hier: Versicherungsmathematik) je eine Arbeit. Die meisten Männer absolvierten während dieser Zeit ihre Promotion mit einer anwendungsbezogenen Arbeit. 45% der von 1934 bis 1945 promovierenden Frauen schrieb eine Dissertation in Geometrie. Dieser Anteil lag deutlich höher als der Anteil für den gesamten Untersuchungszeitraum (34,8%). Bei den Männern lag er dagegen mit 22% unterhalb des durchschnittlichen Wertes von 29%. Dies könnte in den USA gewonnene Untersuchungsergebnisse bestätigen, die erbrachten, dass Frauen länger als Männer ein Dissertationsthema aus dem Gebiet der Geometrie bearbeiteten [vgl. Green/LaDuke 1987]. Wegen der geringen Zahl der Frauen-Dissertationen in den 30er Jahren sind wir bei einer entsprechenden Interpretation zurückhaltend.

Betrachten wir den Frauenanteil in der Zeit von 1934 bis 1945 in den einzelnen mathematischen Gebieten, so fällt auf, dass der Anteil in Geometrie und in Zahlentheorie (jeweils 11,8%) noch über dem des gesamten Untersuchungszeitrau-

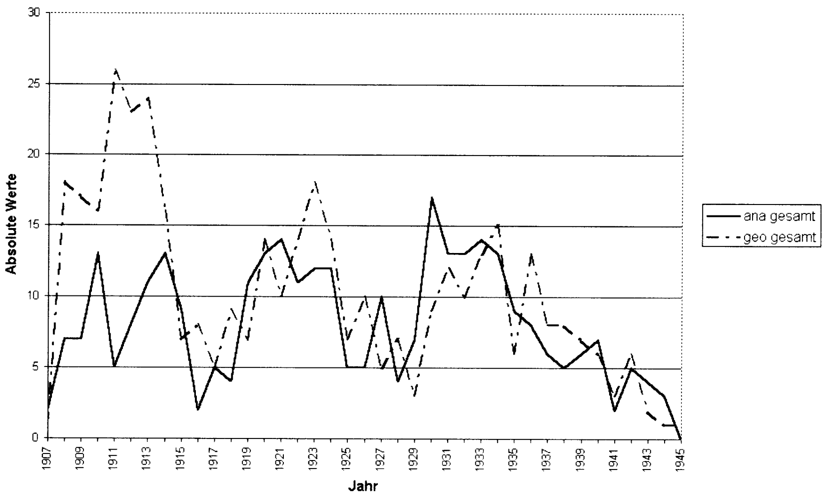


Abb. 4 Dissertationen in Geometrie und Analysis, WS 1907/08 bis WS 1944/45

mes lag. Insgesamt lag der Anteil der Frauendissertationen mit 6,2% unter dem des Gesamtzeitraumes.

Um zeitabhängige Einflüsse noch differenzierter zu erfassen, wurden außerdem Zehnjahresabschnitte analysiert. Dabei zeichneten sich vor allem eine abnehmende Tendenz bei Arbeiten auf dem Gebiet der Geometrie sowie eine zunehmende Tendenz bei Dissertationen zu Anwendungsgebieten der Mathematik ab. In den Jahren von 1907 bis 1914 schrieben 43,7% der Personen ihre Dissertation in Geometrie. Dieser Wert fiel bis auf 21,5% in der Zeit von 1925 bis 1934 und stieg in den Jahren von 1935 bis 1945 wieder leicht auf 22,1%. Der Anteil der anwendungsorientierten Dissertationen stieg von 14,9% (1907 bis 1914) bis auf 25,7% (1935 bis 1945). Die Frauendissertationen trugen diese grundlegenden Trends nicht mit und fielen wegen der Kleinheit der Zahlen nicht ins Gewicht.

2.3 Dissertationen in Geometrie und Analysis

Die in Geometrie und Analysis geschriebenen Dissertationen sollen hier gesondert betrachtet werden, da sie mehr als die Hälfte der Arbeiten ausmachten.

Von 1907 bis 1913 überwogen Arbeiten zur Geometrie, bis 1928 entwickelte sich die Zahl der Dissertationen in Geometrie und Analysis weitgehend analog. Von 1929 bis 1935 wurden deutlich mehr Dissertationen in Analysis als in Geometrie geschrieben; danach in den Jahren des allgemeinen Abwärtstrends überwogen geometrische Arbeiten leicht. Insgesamt zeigte sich, dass die Mehrzahl der Dissertationen in Geometrie über den gesamten Untersuchungszeitraum vor allem durch die Zeitspanne 1907 bis 1913 verursacht ist (vgl. Abb. 4).

Im Folgenden wird betrachtet, ob es geschlechtsspezifische Unterschiede hinsichtlich der Wahl der Dissertationsgebiete Geometrie und Analysis in bestimm-

Tabelle 3: Verteilung der Dissertationen in Analysis (ANA) und Geometrie (GEO) auf bestimmte Zeiträume (1907–1945)

Zeiträume	Frauen				Männer			
	GEO	ANA	GEO (%)	ANA (%)	GEO	ANA	GEO (%)	ANA (%)
1907–1913	3	2	60,0	40,0	122	51	70,5	29,5
1914–1928	25	16	61,0	39,0	126	114	52,5	47,5
1929–1935	4	6	40,0	60,0	64	80	44,4	55,6
1936–1939	1	1	50,0	50,0	35	24	59,3	40,7
1940–1945	7	1	87,5	12,5	12	20	37,5	62,5
Insgesamt	**40**	**26**	**60,6**	**39,4**	**359**	**289**	**55,4**	**44,6**

In der Zeit bis 1913 dominierten bei den Männern Arbeiten in Geometrie vor Analysis, während bei den Frauen keine Unterschiede erkennbar sind. In dem größeren Zeitabschnitt von 1914 bis 1928 war die Wahl der Dissertationsthemen bei den Männern weitgehend gleichverteilt auf Geometrie und Analysis, während bei den Frauen Geometrie deutlich überwog. Der Zeitraum von 1929 bis 1935 wies bei beiden Geschlechtern gleichverteilte Anteile in Analysis und Geometrie auf, wobei Analysis bevorzugt wurde. Wegen der sinkenden Zahl der Promotionen ab Mitte der 30er Jahre erscheint eine weitere Interpretation nicht sinnvoll.

2.4 Analyse der anwendungsbezogenen Dissertationen

Da sich die Zahl der anwendungsorientierten Dissertationen im Untersuchungszeitraum zunehmend erhöhte, werden sie gesondert analysiert. Wir schlüsseln die Dissertationen, die wir in das Gebiet Anwendungen der Mathematik gegliedert haben, in Untergebiete auf und prüfen, ob geschlechtsspezifische Unterschiede bestehen.

Tabelle 4: Verteilung der anwendungsbezogenen Dissertationen auf Untergebiete, WS 1907/08 bis WS 1944/45

Untergebiete	Frauen	Männer	Gesamt
Numerische Methoden	0	27	27
Graphische Methoden	1	18	19
Mechanik	2	62	64
Theoretische Physik	2	19	21
Kinematik	1	9	10
Aerodynamik	1	4	5
Elektrizitätslehre	1	2	3
Optik	0	1	1
Astronomie	0	11	11
Geodäsie	0	12	12
Technik	0	3	3
Wirtschaft	0	1	1
Statistik	0	20	20
Finanz- & Versicherungsmathematik	4	34	38
Wahrscheinlichkeitsrechnung	1	23	24
Summe	**13**	**246**	**259**

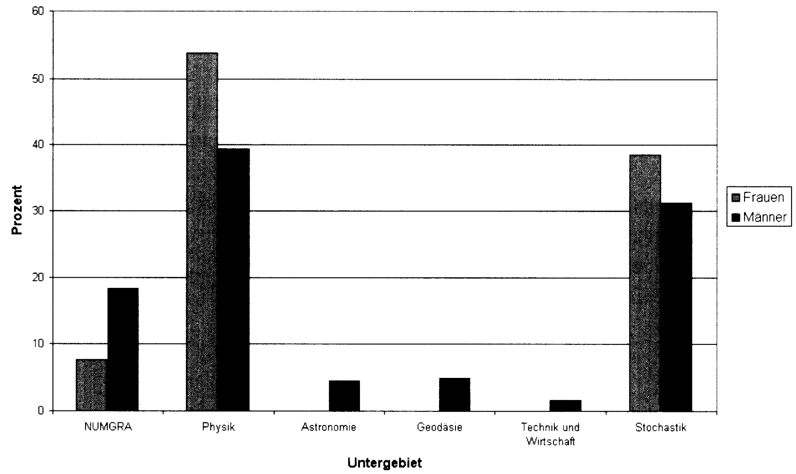


Abb. 5 Prozentuale Verteilung der anwendungsbezogenen Dissertationen auf ihre Untergebiete, WS 1907/08 bis WS1944/45)

Um die Verteilung auf die Untergebiete sinnvoll auswerten und darstellen zu können, fassen wir zunächst einige dieser Untergebiete thematisch zusammen und betrachten im folgenden sechs Untergebiete:

- Numerische- und graphische Methoden (= NUMGRA)
- Physik (Mechanik, Theoretische Physik, Kinematik, Aerodynamik, Elektrizitätslehre und Optik)
- Astronomie
- Geodäsie
- Technik (Elektrotechnik und Maschinenbau) und Wirtschaft
- Stochastik (Wahrscheinlichkeitsrechnung, mathematische Statistik, Versicherungs- und Finanzmathematik)

An erster Stelle standen Dissertationen, die sich mit Anwendungen in physikalischen Gebieten beschäftigten (40,2%), gefolgt von Arbeiten aus dem Bereich der Stochastik (31,7%) sowie Arbeiten zu numerischen und graphischen Methoden[9] mit 17,8%.

Hochschuleinrichtungen entwickelt hatte [vgl. u. a. Krengel 1990]. Ansonsten gab es keine Zeitspanne, in der besonders viele Arbeiten in einem speziellen anwendungsorientierten Gebiet verteidigt wurden.

Zwischen Frauen und Männern bestanden hinsichtlich der bevorzugten Wahl entsprechender Themen keine Unterschiede. Bei beiden dominierten Anwendungen in Physik vor Arbeiten im Gebiet der Stochastik und Arbeiten zu numerischen- und/bzw. oder graphischen Methoden. Da die Zahl der Frauendissertationen zu anwendungsorientierten Themen jedoch sehr gering war, sollten wir keine Schlüsse daraus ziehen. Wie oben angegeben (Abschnitt 2.1), lag der Frauenanteil von Dissertationen in Anwendungsgebieten der Mathematik mit 5% unter dem durchschnittlichen Anteil von 8,5%.

3 Verteilung der mathematischen Dissertationen auf die Promotionsorte

3.1 Frauen- und Männeranteil

Die 1354 im Untersuchungszeitraum ermittelten Dissertationen verteilten sich auf 35 deutsche Hochschuleinrichtungen. In unserer Hauptquelle, den Jahresverzeichnissen der Deutschen Hochschulschriften, wurden während der NS-Zeit ab 1938 die österreichischen Universitäten mit aufgelistet; diese Promotionen bleiben bei der vorliegenden Analyse unberücksichtigt. Die in Straßburg bis 1918 verteidigten Dissertationen werden dagegen einbezogen, da Straßburg von 1871 bis 1918 zu Preußen gehörte.

Die Göttinger Universität ragte im Untersuchungszeitraum mit 11,5% aller Promovierenden deutlich vor den Universitäten Berlin (7,1%), Leipzig (6,4%), Münster (4,8%), Hamburg (4,7%) und Halle (4,4%) als Promotionsort heraus (vgl. Tab. 5). Bei diesen Zahlen ist zu berücksichtigen, dass einige Universitäten nicht über den gesamten Untersuchungszeitraum existierten. Die Universität Frankfurt wurde 1914, die Universitäten in Hamburg und Köln erst 1919 gegründet. Unter diesem Gesichtspunkt ist der hohe Anteil von Promotionen in Hamburg hervorzuheben. Dagegen ist der Anteil der in Berlin verfassten Dissertationen nicht als besonders herausragend zu werten, da Berlin stets die höchsten Studierendenzahlen hatte, im Vergleich dazu aber weniger Promovierende.

Als Promotionsort der Männer dominierte eindeutig Göttingen (147 Arbeiten) vor Berlin (87 Arbeiten), Leipzig (83 Arbeiten), Hamburg (58 Arbeiten), Universität München und Münster (jeweils 56 Arbeiten) sowie Gießen (51 Arbeiten). Berücksichtigen wir die Promovierenden an Universität und Technischer Hochschule gemeinsam, wenn diese an einem Ort existierten (Berlin, Breslau, München), so lautete die bevorzugte Reihenfolge der Promotionsorte für die in Mathematik promovierenden Männer: Göttingen, Berlin, München, Leipzig.

Die Dissertationen der Frauen verteilten sich im Untersuchungszeitraum auf 25 Hochschuleinrichtungen. Dabei ragte Bonn (15 Arbeiten) quantitativ als Promotionsort vor Berlin, Breslau, Göttingen[10], Halle und Münster (jeweils 9 Arbeiten) heraus.

Von den Technischen Hochschulen ist besonders diejenige in Dresden hervorzuheben, wo im Untersuchungszeitraum 55 Promovierende, davon sieben Frauen, den Doktortitel mit einer mathematischen Dissertation erwarben.

Tabelle 5: Verteilung der in Deutschland von WS 1907/08 bis WS 1944/45 verteidigten mathematischen Dissertationen auf die Promotionsorte

Promotionsorte	Frauen		Männer		Promovierende	
	Anzahl	%	Anzahl	%	Anzahl	%
Aachen TH	1	0,9	3	0,2	4	0,3
Berlin	9	7,8	87	7,0	96	7,1
Berlin TH	1	0,9	20	1,6	21	1,6
Bonn	15	13,0	38	3,1	53	3,9
Braunschweig TH	0	0	1	0,1	1	0,1
Breslau	9	7,8	46	3,7	55	4,1
Breslau TH	0	0	5	0,4	5	0,4
Danzig TH	0	0	1	0,1	1	0,1
Darmstadt TH	0	0	21	1,7	21	1,6
Dresden TH	7	6,1	48	3,9	55	4,1
Erlangen	2	1,7	24	1,9	26	1,9
Frankfurt a. M.	7	6,1	29	2,3	36	2,7
Freiburg i. B.	3	2,6	22	1,8	25	1,8
Gießen	5	4,3	51	4,1	56	4,1
Göttingen	9	7,8	147	11,9	156	11,5
Greifswald	0	0	19	1,5	19	1,4
Halle	9	7,8	51	4,1	60	4,4
Hamburg	6	5,2	58	4,7	64	4,7
Hannover TH	0	0	3	0,2	3	0,2
Heidelberg	2	1,7	36	2,9	38	2,8
Jena	0	0	36	2,9	36	2,7
Karlsruhe TH	0	0	7	0,6	7	0,5
Kiel	2	1,7	31	2,5	33	2,4
Köln	1	0,9	8	0,6	9	0,7
Königsberg	5	4,3	37	3,0	42	3,1
Leipzig	3	2,6	83	6,7	86	6,4
Marburg	3	2,6	34	2,7	37	2,7
München	3	2,6	56	4,5	59	4,4
München TH	1	0,9	33	2,7	34	2,5

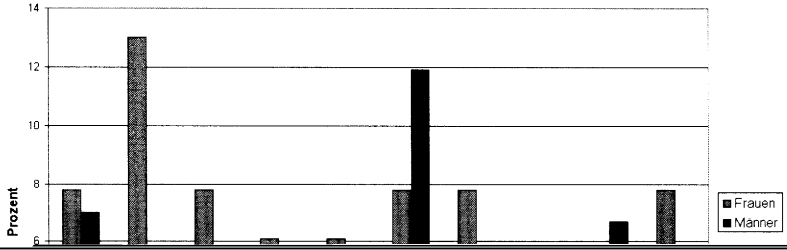
[10] Betrachten wir die vor 1907 verteidigten Dissertationen mit, so würden Göttingen und Bonn als Promotionsorte für Frauen quantitativ gleichauf liegen.

Tabelle 5: Fortsetzung

Promotionsorte	Frauen		Männer		Promovierende	
	Anzahl	%	Anzahl	%	Anzahl	%
Münster	9	7,8	56	4,5	65	4,8
Rostock	1	0,9	30	2,4	31	2,3
Straßburg	1	0,9	35	2,8	36	2,7
Stuttgart TH	0	0	7	0,6	7	0,5
Tübingen	1	0,9	44	3,6	45	3,3
Würzburg	0	0	32	2,6	32	2,4
Insgesamt	115	100,0	1239	100,0	1354	100,0

Um die vorhandenen geschlechtspezifischen Unterschiede bei der Wahl des Promotionsortes interpretieren zu können, wird im Folgenden genauer analysiert, wie sich die Dissertationen auf diejenigen Universitäten und Technischen Hochschulen verteilten, wo die Promotionszahlen besonders hoch waren (vgl. Abb. 6). Es werden die zehn Promotionsorte näher betrachtet, die hinsichtlich der verteidigten Dissertationen vorn liegen. Damit werden 72,2% der Frauendissertationen und 51,9% der Dissertationen von Männern erfasst.

Im Untersuchungszeitraum von 1907/08 bis 1944/45 lag der Frauenanteil der Promotionen an der Universität Bonn mit 28,3% am höchsten, auch an den Universitäten in Frankfurt (19,4%), Breslau (16,4%), Halle (15,0%) und Münster (13,8%), sowie an der Technischen Hochschule in Dresden (12,7%) lag er über dem durchschnittlichen Frauenanteil von 8,5%. Dagegen war dieser Anteil in Leipzig (3,5%) und in Göttingen (5,8%) relativ niedrig. Für Hamburg (9%) und Berlin (9,3%) lagen die Werte in der Nähe des Durchschnittswertes aller von Frauen im Untersuchungszeitraum verfassten Dissertationen.



Da die Anzahl der Frauenpromotionen gering war, könnten die gefundenen geschlechtsspezifischen Unterschiede natürlich zufälligen Charakter tragen. Ein tieferer Blick in die Quellen gestattet teilweise, inhaltliche Zusammenhänge abzuleiten. Wir betrachten hierzu die Verteilung der Promotionen an diesen zehn Hochschuleinrichtungen auf die einzelnen Jahre und beobachten den Frauenanteil über kürzere Zeiträume (vgl. Tab. 6).

In **Berlin** wurden im Untersuchungszeitraum bis 1919 nur wenig Dissertationen verteidigt. Dies beruhte auf der Tätigkeit der dort wirkenden Professoren Friedrich Schottky (1851–1935), Georg Frobenius (1849–1917), Hermann Amandus Schwarz (1843–1921) und Johannes Knoblauch (1855–1915), die schon relativ alt waren, mathematisch relativ einseitig wirkten und z. T. wenig interessiert waren, Schüler und Schülerinnen besonders zu fördern (vgl. Biermann 1988; Begehr 1998). Nach 1919, mit der Berufung neuer Mathematikprofessoren nach Berlin stieg die Zahl der Promotionen an. Auch Ende der 30er Jahre, als die Zahl der Dissertationen in Deutschland stark rückläufig war, wurden in Berlin relativ viele Arbeiten verteidigt; in der Zeit von 1935 bis 1945 war die Berliner Universität diejenige Hochschuleinrichtung in Deutschland, an der die meisten Dissertationen in Mathematik verteidigt wurden (vgl. Tab. 6). Die erste Mathematikerin promovierte in Berlin 1922 vergleichsweise spät bei Issai Schur (1875–1941), der – aus dem Frauen freundlichen Bonner Klima – als Extraordinarius nach Berlin gekommen und 1921 zum Ordinarius ernannt worden war. In seiner Berliner Zeit (1916–1935) führte er insgesamt 21 Personen zur Promotion, darunter drei Frauen [Schur 1973, S. 479 f.].

Tabelle 6: Dissertationen von Frauen und Männern an ausgewählten deutschen Hochschuleinrichtungen, in bestimmten Zeitabschnitten

Zeitraum	Berlin		Bonn		Breslau Uni		Dresden TH		Frankfurt	
	Frauen	**Männer**	**Frauen**	**Männer**	**Frauen**	**Männer**	**Frauen**	**Männer**	**Frauen**	**Männer**
1907–1914	**0**	**8**	**0**	**5**	**2**	**14**	**0**	**5**	**0**	**0**
1915–1924	**2**	**12**	**10**	**14**	**1**	**12**	**4**	**12**	**3**	**9**
1925–1934	**2**	**38**	**3**	**12**	**6**	**11**	**3**	**16**	**3**	**14**
1935–1945	**5**	**29**	**2**	**7**	**0**	**9**	**0**	**15**	**1**	**6**
Σ	9	87	15	38	9	46	7	48	7	29

Zeitraum	Göttingen		Halle		Hamburg		Leipzig		Münster	
	Frauen	**Männer**	**Frauen**	**Männer**	**Frauen**	**Männer**	**Frauen**	**Männer**	**Frauen**	**Männer**
1907–1914	**3**	**37**	**1**	**26**	**0**	**0**	**0**	**16**	**0**	**12**
1915–1924	**0**	**32**	**5**	**8**	**1**	**10**	**3**	**29**	**5**	**19**
1925–1934	**5**	**52**	**2**	**7**	**1**	**35**	**0**	**19**	**4**	**15**
1935–1945	**1**	**26**	**1**	**10**	**4**	**13**	**0**	**19**	**0**	**10**
Σ	9	147	9	51	6	58	3	83	9	56

Das Frauen fördernde Klima in **Bonn** beschrieb Gerhard Kowalewski (1876–1950) bereits früh [1950, S. 206]. Er selbst war im Untersuchungszeitraum derjenige Mathematiker in Deutschland, der die meisten Frauen zur Dissertation im Fach Mathematik anregte. Während seiner Bonner Zeit als Extraordinarius (1904–1909) betreute er die Dissertation von drei Frauen, die schließlich in Gießen verteidigt wurden, da Kowalewski 1909 einem Ruf nach Prag folgte. In der Zeit von 1915 bis 1924 lag der Frauenanteil bei den Promotionen in Bonn bei 41,7%. Bis 1921 promovierten acht Frauen in Bonn und „nur" 12 Männer.

Auch die anderen Bonner Mathematiker dieser Zeit förderten Frauen und führten sie früh zur Promotion. Eduard Study (1862–1930), der Kowalewski und später seinen Schüler Hans Beck (1876–1942) nach Bonn geholt hatte, führte drei Frauen zur Promotion. Unter Becks Leitung, der erst mit vierzig Jahren ohne Habilitation Professor geworden war, promovierten fünf Frauen in Bonn. Bei Issai Schur, der von 1913–1916 Extraordinarius in Bonn war, promovierte in seiner Bonner Zeit nur eine Frau; er regte jedoch weitere Frauen an, deren Verfahren schließlich unter Hans Hahn (1879–1934) abgeschlossen wurden: Hahn hatte in Bonn vier Doktorandinnen. – Im Zeitraum von 1961 bis 1970 wurden übrigens in Bonn die meisten mathematischen Dissertationen im Gebiet der Bundesrepublik Deutschland verteidigt (92), allerdings war darunter nur eine Frau [vgl. Butzer/Stark 1975].

An der Universität in **Breslau** promovierten die ersten beiden Frauen bereits im Jahre 1909 bei dem Mathematiker Rudolf Sturm (1841–1919), der sich schon 1897 sehr positiv zum Frauenstudium geäußert hatte [Kirchhoff 1897, S. 242]. Auch Adolf Kneser (1862–1930), der von 1905 bis 1928 in Breslau Professor war, führte vier Frauen zur Promotion. Der Anteil der Frauenpromotionen betrug 35,3% in den Jahren von 1925 bis 1934.

An der TH **Dresden** promovierten – im Vergleich zu den anderen Technischen Hochschulen – die meisten Personen im Mathematik (55), gefolgt von der TH München (34); beide Einrichtungen besaßen das Promotionsrecht früher als die preußischen technischen Hochschulen und hatten schon eher eine „allgemeine Abteilung", in der Lehramtskandidaten zum Abschluss geführt werden konnten. Der bereits als Bonner Extraordinarius erwähnte Kowalewski wirkte von 1920 bis 1938 als Ordinarius in Dresden, wo er auch Frauen als wissenschaftliche Assistentinnen anstellte [vgl. Voss 1997]. Neben Kowalewski führten auch Martin Krause (1851–1920), Paul Eugen Böhmer (1877–1958) und der Extraordinarius Emil Naetsch (1869–1945) Frauen zur Promotion.

An der 1914 in **Frankfurt a. M.** gegründeten Universität wurde erstmals im Jahre 1917 eine mathematische Dissertation abgeschlossen. Die Zahl der Dissertationen von Frauen verteilte sich gleichmäßig über den weiteren Zeitraum; der Anteil war mit 19,4% relativ hoch.

Das Aufblühen der Mathematik unter Felix Klein (1849–1925) und David Hilbert (1862–1943) hatte **Göttingen** zum dominanten Anziehungspunkt werden lassen. Beide Mathematiker errichteten hier ein internationales Zentrum der Mathematik [Tobies 1991]. Dabei fällt der hohe Ausländeranteil ins Gewicht, er lag mit 21,7% deutlich höher als an den anderen deutschen Hochschuleinrichtungen (vgl. Abschnitt 5). Obgleich Klein und Hilbert Mathematikerinnen besonders förderten [vgl. Tobies 1999] – ihre Promovendinnen fielen vor allem in die Zeit vor 1907 – blieb der Frauenanteil in Göttingen gering.

An der Universität **Halle** galt es als leichter zu promovieren, insbesondere im Vergleich zu Berlin. Es gab Personen, die nur in Berlin studierten, ihre Dissertation aber in Halle einreichten. In Halle gestaltete sich besonders unter den Professoren Albert Wangerin (1844–1933) und August Gutzmer (1860–1924) ein frauenfreundliches Klima [vgl. Tobies 1998, S. 20]. Sie führten fünf Frauen zur Promotion und förderten Mathematikerinnen auch als wissenschaftliche Assistentinnen. Seit der Zeit des Ersten Weltkrieges verringerte sich die Zahl der Abschlüsse, in den 1920er Jahren blieb der Aufschwung hier aus. Die erste Frau verteidigte 1912 eine Dissertation in Halle; weitere folgten erst, als Männer während des ersten Weltkrieges fehlten. In der Zeit von 1915 bis 1924 lag der Frauenanteil bei 38,5%; danach sank dieser Anteil bis auf 9,1% in der Zeit von 1935 bis 1945.

Obwohl die Universität **Hamburg** erst 1919 gegründet wurde, war der Anteil der dort erzielten Promotionsabschlüsse relativ hoch; der Frauenanteil erreichte 23,5% im Zeitraum von 1935 bis 1945 – im Unterschied zu anderen Hochschuleinrichtungen [vgl. auch Tobies 1997c].

In **Leipzig** verteilten sich die Promotionen der Männer relativ gleichmäßig über den Untersuchungszeitraum; die einzigen drei Frauen promovierten in den Jahren 1921 und 1922, zwei bei dem a. o. Professor Walter Schnee (1885–1958), eine bei Gustav Herglotz (1881–1953).[11]

Wie aus der Literatur bekannt ist, herrschte in **Münster** – einer katholischen Universität mit großem Einzugsbereich – relativ früh ein frauenfreundliches Klima. Im SS 1914 studierten hier bereits 48 Frauen Mathematik – nach Berlin (77) und Bonn (50) die meisten an einer preußischen Universität [vgl. Tobies 1997a, S. 23]. Unsere für Münster ermittelten Zahlen der Promotionen korrespondieren damit. Wie an anderen Universitäten auch, erlangten hier Frauen insbesondere seit der Zeit des Ersten Weltkrieges Zugang zu wissenschaftlicher Arbeit. Die erste mathematische Dissertation in Münster verteidigte eine Frau im Jahre 1917. Die Mathematikprofessoren Wilhelm Killing (1847–1923), Reinhold v. Lilienthal (1857–1935), Robert König (1885–1978), Ludwig Neder (1890–1960) und Heinrich Scholz (1884–1956) führten Frauen zur Promotion. Heinrich Behnkes (1898–1978) Schule umfasste im Untersuchungszeitraum keine Doktorandin.

3.2 Verteilung der Dissertationen hinsichtlich ihrer mathematischen Gebiete auf die Promotionsorte

In diesem Abschnitt wird betrachtet, ob es gewisse Teilgebiete der Mathematik gibt, in denen an bestimmten deutschen Hochschuleinrichtungen bevorzugt geforscht wurde.

[11] Die Gutachten zu den Dissertationen der Leipziger Mathematik-Promovendinnen sind publiziert in [Tobies 1995].

Tabelle 7: Verteilung der an den deutschen Hochschuleinrichtungen verteidigten Dissertationen auf die mathematischen Gebiete (1907/08–1944/45)

Orte	Meta-math.	Grund-lagen	Geo-metrie	Topo-logie	Zahlen-theorie	Algebra	Analysis	Anwen-dungen	Σ
Aachen TH	0	0	2	0	0	0	0	2	**4**
Berlin	2	1	13	5	7	24	22	22	**96**
Berlin TH	0	0	3	0	0	0	4	14	**21**
Bonn	2	1	27	3	2	6	9	3	**53**
Braunschweig TH	0	0	0	0	0	0	1	0	**1**
Breslau	1	0	18	0	4	1	24	7	**55**
Breslau TH	0	0	1	0	0	0	1	3	**5**
Danzig TH	0	0	0	0	0	0	0	1	**1**
Darmstadt TH	2	0	2	0	0	3	4	10	**21**
Dresden TH	0	0	24	1	0	2	8	20	**55**
Erlangen	4	1	8	3	0	5	3	2	**26**
Frankfurt a. M.	2	2	5	2	4	2	10	9	**36**
Freiburg i. B.	2	0	5	0	2	5	7	4	**25**
Gießen	1	0	19	1	1	10	20	4	**56**
Göttingen	2	11	8	5	18	19	45	48	**156**
Greifswald	0	0	10	1	0	2	4	2	**19**
Halle	1	0	23	4	1	10	9	12	**60**
Hamburg	1	0	17	2	10	17	3	14	**64**
Hannover TH	0	0	0	0	0	0	0	3	**3**
Heidelberg	13	0	12	4	0	0	7	2	**38**
Jena	2	0	19	0	3	1	5	6	**36**
Karlsruhe TH	0	0	2	0	0	0	0	5	**7**
Kiel	2	0	13	3	3	0	9	3	**33**
Köln	1	0	1	1	1	1	2	2	**9**

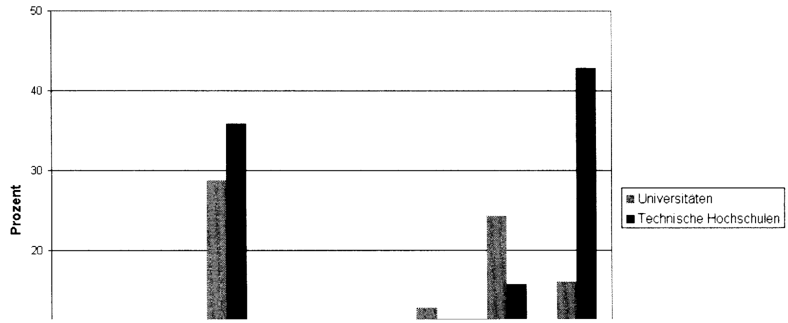
Tabelle 7 Fortsetzung

Orte	Meta-math.	Grund-lagen	Geo-metrie	Topo-logie	Zahlen-theorie	Algebra	Analysis	Anwen-dungen	Σ
Königsberg	1	2	18	2	3	7	5	4	**42**
Leipzig	6	5	10	9	10	10	24	12	**86**
Marburg	1	4	2	1	8	12	7	2	**37**
München	3	1	14	2	3	3	27	6	**59**
München TH	0	1	20	2	0	0	7	6	**34**
Münster	0	6	35	1	1	4	15	3	**65**
Rostock	0	0	19	3	0	2	1	6	**31**
Straßburg	0	0	18	0	2	7	2	7	**36**
Stuttgart TH	0	0	3	0	0	0	0	4	**7**
Tübingen	0	0	13	1	2	4	15	10	**45**
Würzburg	0	0	15	0	0	1	15	1	**32**
Insgesamt	**49 (3,6%)**	**35 (2,6%)**	**399 (29,5%)**	**54 (4,0%)**	**85 (6,3%)**	**158 (11,7%)**	**315 (23,3%)**	**259 (19,1%)**	**1354**

Zuerst prüfen wir, ob sich die Dissertationen hinsichtlich der Themenwahl unterschieden, wenn sie an einer Universität oder an einer Technischen Hochschule verteidigt wurden. Dabei wird der Geschlechtervergleich nicht geführt, da die Anzahl der Frauenpromotionen an Technischen Hochschulen sehr gering war; auftretende Erscheinungen deshalb zufälligen Charakter tragen könnten.

Tabelle 8: Verteilung der Dissertationen an Universitäten und an Technischen Hochschulen auf die mathematischen Teilgebiete (1907/08 – 1944/45)

Gebiet	Universitäten		Technische Hochschulen	
	Anzahl[12]	%	**Anzahl**	%
Metamathematik	47 (2)	3,9	2 (0)	1,3
Grundlagen	34 (2)	2,8	1 (0)	0,6
Geometrie	342 (33)	28,6	57 (7)	35,8
Topologie	53 (8)	4,4	1 (0)	0,6
Zahlentheorie	85 (8)	7,1	0 (0)	0,0
Algebra	153 (16)	12,8	5 (0)	3,1
Analysis	290 (25)	24,3	25 (1)	15,7
Anwendungen	191 (11)	16,0	68 (2)	42,8
Summe	**1195 (105)**	**100,0**	**159 (10)**	**100,0**



Insgesamt zeigt sich, dass über 94% aller an Technischen Hochschulen verteidigten Dissertationen auf den Gebieten Geometrie, Analysis und Anwendungen der Mathematik geschrieben wurden. Besonders auffällig ist hier der hohe Anteil der Dissertationen in Anwendungsgebieten (42,8%); dagegen fielen nur 16% aller an Universitäten entstandener Dissertationen in diesen Bereich.

Im Folgenden werden die Dissertationen an denjenigen Universitäten und Technischen Hochschulen näher analysiert, an denen im Untersuchungszeitraum mehr als 33 Arbeiten verteidigt wurden. Dabei betrachten wir die Verteilung der an den ausgewählten Hochschuleinrichtungen verteidigten Dissertationen auf die Teilgebiete, um festzustellen, ob es Gebiete gibt, in denen an einzelnen Orten bevorzugt geforscht wurde.

Tabelle 9: Prozentuale Verteilung der an ausgewählten Hochschuleinrichtungen verteidigten Dissertationen auf die mathematischen Gebiete (1907/08–1944/45)

Orte	Metamathe	Grundlagen	Geometrie	Topologie	Zahlentheorie	Algebra	Analysis	Anwendungen	Anzahl d. Diss.
Berlin	2,1	1,0	13,5	5,2	7,3	25,0	22,9	22,9	**96**
Bonn	3,8	1,9	50,9	5,7	3,8	11,3	17,0	5,7	**53**
Breslau	1,8	0	32,7	0	7,3	1,8	43,6	12,7	**55**
Dresden TH	0	0	43,6	1,8	0	3,6	14,5	36,4	**55**
Frankfurt	5,6	5,6	13,9	5,6	11,1	5,6	27,8	25,0	**36**
Gießen	1,8	0	33,9	1,8	1,8	17,9	35,7	7,1	**56**
Göttingen	1,3	7,1	5,1	3,2	11,5	12,2	28,8	30,8	**156**
Halle	1,7	0	38,3	6,7	1,7	16,6	15,0	20,0	**60**
Hamburg	1,6	0	26,6	3,1	15,6	26,6	4,7	21,9	**64**
Heidelberg	34,2	0	31,6	10,5	0	0	18,4	5,3	**38**
Jena	5,6	0	52,8	0	8,3	2,8	13,9	16,7	**36**
Königsberg	2,4	4,8	42,9	4,8	7,1	16,7	11,9	9,5	**42**
Leipzig	7,0	5,8	11,6	10,5	11,6	11,6	27,9	14,0	**86**
Marburg	2,7	10,8	5,4	2,7	21,6	32,4	18,9	5,4	**37**
München	5,1	1,7	23,7	3,4	5,1	5,1	45,8	10,2	**59**
München TH	0	2,9	58,8	0	0	0	20,6	17,6	**34**

Im Folgenden werden wir die Anteile der Dissertationen in bestimmten Gebieten an den Promotionsorten immer mit denen aller Doktorarbeiten vergleichen. Dabei soll auf größere Unterschiede bei der Wahl der Dissertationsthemen an einzelnen Orten in Bezug auf alle Dissertationen hingewiesen und – soweit möglich – sollen diese Unterschiede erklärt werden.

An der *Universität Berlin* war der Anteil von Dissertationen in Geometrie (13,5%) relativ gering; in Algebra (25%) und auf Anwendungsgebieten der Mathe-

matik (22,9%) lag die Anzahl der Dissertationen über dem Durchschnitt. Letzteres beruhte einerseits auf der algebraischen Schule um Issai Schur und andererseits vor allem auf dem Wirken Richard von Mises' (1883–1953), der als „persönlicher" Ordinarius das 1920 neu errichtete Institut für angewandte Mathematik übernahm. Beide wurden durch die NS-Diktatur zum Ausscheiden / zur Emigration gezwungen, konnten jedoch bis 1934/35 noch Promotionsverfahren zum Abschluss bringen.

An der *Universität Bonn* ragten die Dissertationen in Geometrie (50,9%) heraus; wenige Arbeiten wurden zu Anwendungsgebieten (5,7%) verfasst. Die meisten Dissertationen regten Eduard Study und Hans Beck an, die beide vorwiegend auf dem von Alfred Clebsch (1833–1872) begründeten Gebiet der algebraischen Geometrie arbeiteten.

Für die *Universität Breslau* ist ein hoher Anteil von Dissertationen in Analysis (43,6%) auffallend. Adolf Kneser, dessen Hauptforschungsgebiet die Variationsrechnung war, wirkte besonders anregend. Sein im Jahre 1900 publiziertes „Lehrbuch der Variationsrechnung" übte fast zwei Jahrzehnte einen bestimmenden Einfluss aus, indem es alle Forscher auf diesem Gebiet zu Beginn des 20. Jahrhun-

An der *Universität Gießen* lag der Anteil der Dissertationen in Analysis (35,7%) über dem Durchschnitt. Es ist die Tätigkeit Ludwig Schlesingers (1864–1933) hervorzuheben, der von 1911 bis 1930 hier Ordinarius war und mit Untersuchungen zur Theorie der linearen Differentialgleichungen herausragte.

In *Göttingen* waren besonders die Anteile bei Anwendungsgebieten (30,8%) und in Zahlentheorie (11,5%) weit über dem Durchschnitt. Die Arbeiten zu Anwendungen der Mathematik wurden in Wahrscheinlichkeitsrechnung, mathematischer Statistik und Versicherungsmathematik geschrieben (28 Dissertationen) und durch Felix Bernstein (1878–1956) angeregt. Carl Runge betreute weitere anwendungsorientierte Dissertationen. Für die große Zahl der Göttinger Dissertationen bis 1933 war das gleichzeitige Wirken bedeutender Mathematiker und Mathematikerinnen und ihrer Schulen entscheidend: insbesondere Hilberts breites Arbeitsfeld, Edmund Landaus (1877–1938) Wirken in der Zahlentheorie, Emmy Noether (1882–1935) in der Algebra[14], Richard Courant (1888–1972) in der Analysis und mathematischen Physik.

In *Halle* lag der Anteil geometrischer Arbeiten über dem Durchschnitt. Diese wurden vor allem von Gutzmer und Wangerin betreut. Helmut Hasse (1898–1979) wirkte hier von 1925 bis 1930 als Ordinarius, was sich im Anteil der algebraischen Dissertationen (16,6%) widerspiegelt.

Bei den an der *Universität Hamburg* verteidigten Dissertationen fallen die verhältnismäßig hohen Anteile der Arbeiten in Zahlentheorie (15,6%) und Algebra (26,6%) auf, wobei vor allem auf Erich Hecke (1887–1947) und Emil Artin (1898–1962) zu verweisen ist; Artins erste betreute Dissertation 1927 wurde von einer Frau, Käthe Hey (1904–1990), verteidigt [vgl. Tobies 1997c]. Die Arbeiten in Geometrie beruhten vornehmlich auf der Tätigkeit Wilhelm Blaschkes (1885–1962) in Hamburg. Dagegen wurde hier auf dem Gebiete Analysis (4,7%) vergleichsweise wenig geforscht.

In *Heidelberg* ragten Arbeiten im Gebiet Geschichte der Mathematik (Metamathematik) heraus (34,2%). Von insgesamt 28 mathematikhistorischen Arbeiten wurden zwölf in Heidelberg verteidigt. Hierzu hatte Moritz Cantor (1829–1920) – erstmals an einer deutschen Universität – umfassend geforscht und gelehrt. Diese Tradition setzte sich auch nach dessen Ausscheiden fort: Karl Friedrich Bopp (1877–1934) erhielt 1915 ein entsprechendes Extraordinariat. Der Anteil anwendungsbezogener Dissertationen war in Heidelberg gering (5,3%). Von 1922 bis 1935 bestimmten hier Arthur Rosenthal (1887–1959) und Heinrich Liebmann (1874–1939) maßgeblich das mathematische Leben [vgl. Scharlau 1990, S. 159], was sich u. a. in dem vergleichsweise hohen Anteil topologischer Arbeiten (10,5%) ausdrückt.

An der *Universität Jena* waren über die Hälfte aller Dissertationen geometrische Arbeiten (52,8%). Das ist der relativ langen Wirksamkeit zweier Mathematiker an diesem Ort zuzuschreiben: Robert Haussner (1863–1948), von 1905 bis 1934 o. Professor, und der Felix-Klein-Schüler Max Winkelmann (1979–1946), der

[14] Emmy Noether regte die Dissertation von mindestens 17 Personen an. Drei ihrer direkten Schüler waren bisher nicht bekannt und wurden erst im Rahmen vorliegender Untersuchung entdeckt.

bereits seit 1911 als a. o. Professor nach Jena kam und von 1923 bis 1946 den Lehrstuhl für angewandte Mathematik leitete.

In *Königsberg* lag der Anteil geometrischer Arbeiten (42,9%) ebenfalls über dem Durchschnitt. Hier wirkten bedeutende Geometer über kürzere Zeiträume: Wilhelm Blaschke von 1917 bis 1919, der auch Kurt Reidemeisters (1893–1971) Hinwenden zur Differentialgeometrie beeinflusst hatte, der von 1925 bis 1933 hier Ordinarius war. Über einen längeren Zeitraum, von 1899 bis 1924, war Franz Meyer (1856–1934) hier tätig.

Die *Leipziger* Dissertationen verteilten sich auffallend gleichmäßig auf die verschiedenen Gebiete, was ein Ausdruck der beschriebenen ausgewogenen Berufungspolitik sein kann [vgl. Scharlau 1990, S. 204]. In Leipzig wurde auch früher, als es dem allgemeinen Trend entsprach, von der Dominanz der Geometrie abgerückt, obgleich hier erstmals überhaupt ein besonderer Lehrstuhl für Geometrie (1880 für Felix Klein) eingerichtet worden war. Der Anteil topologischer Arbeiten war mit 10,5% relativ hoch, nur in Heidelberg war dieser Anteil ebenso hoch. In Leipzig setzte sich die mit Felix Hausdorff (1868–1942) begonnene Tradition fort, der ab 1910 nach Bonn, Greifswald und wieder Bonn gewechselt war.

In *Marburg* war der Anteil der Dissertationen in den Gebieten Grundlagen (10,8%), Zahlentheorie (21,6%) und Algebra (32,4%) relativ hoch. Dagegen wurden relativ wenige Arbeiten in Geometrie und zu Anwendungen der Mathematik (je 5,4%) verteidigt. Für Marburg ist vor allem Kurt Hensels (1861–1941) Wirken hervorzuheben, der hier von 1902 bis 1929 ein Ordinariat inne hatte, gefolgt von Hasse (1930 bis 1934).

An der *Universität München* ragt der hohe Anteil von Arbeiten in Analysis (45,8%) heraus. Dies ist vornehmlich auf die Tätigkeit der Mathematikprofessoren Alfred Pringsheim (1850–1941), Oskar Perron (1880–1975) und Constantin Carathéodory (1873–1950) zurückzuführen. Dagegen lag der Anteil von Dissertationen in Geometrie und Anwendungen der Mathematik unter dem Durchschnitt. Diese Gebiete waren an der *Technischen Hochschule München* stärker vertreten; dort wurden 58,8% aller Dissertationen in Geometrie geschrieben. Wie an den anderen Technischen Hochschulen wurde auch an der TH München hauptsächlich in den drei Gebieten Geometrie, Anwendungen und Analysis geforscht.

An der *Universität Münster* wurden verhältnismäßig viele Dissertationen in den mathematischen Gebieten Grundlagen (9,2%) und Geometrie (53,8%) abgeschlossen, dagegen wenig in Anwendungsgebieten der Mathematik (4,6%). Das Gebiet Grundlagen der Mathematik wurde vor allem von Heinrich Scholz (1884–1956) vertreten. Als Geometer wirkten in Münster besonders anregend die schon erwähnten Wilhelm Killing, Reinhold von Lilienthal und Ludwig Neder. Mit Heinrich Behnkes Berufung 1927 entfaltete sich hier eine bedeutende funktionentheoretische Schule.

In *Straßburg* wurden 50% der Arbeiten in Geometrie verfasst; der Anteil al-dieser Zeit vor allem die Mathematikprofessoren Heinrich Weber (1842–1913), der hier 1909 die erste Frau mit einer Arbeit zur Körpertheorie zur Promotion führte, sowie der Geometer Friedrich Schur (1856–1932).

In *Tübingen* lag der Anteil der Dissertationen in Analysis (33,3%) über dem Durchschnitt. Hier war u. a. Konrad Knopp (1882–1957) von 1926 bis zu seiner Emeritierung 1950 tätig, dessen Forschungen im wesentlichen die Analysis betrafen, Funktionentheorie, Theorie konvergenter Reihen, Theorie unendlicher Reihen. Knopp bearbeitete das von Hans von Mangoldt (1854–1925) verfasste dreibändige Lehrbuch „Einführung in die höhere Mathematik" und wurde vor allem dadurch breiter bekannt.

Insgesamt fällt auf, dass an den Orten, an denen Frauen besonders gefördert wurden (z. B. Bonn, Münster, Halle und Dresden) die dort ansässigen Geometer die längste Zeit wirkten und quantitativ die meisten Dissertationen anregten. Dies könnte ein Grund für den etwas höheren Anteil an Frauendissertationen in Geometrie sein.

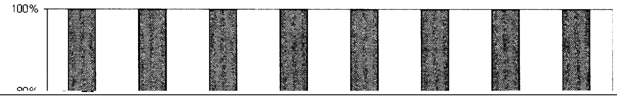
4 Dissertationen, die in wissenschaftlichen Zeitschriften publiziert wurden

Die Promotionsordnungen verlangten in der Regel, dass die Dissertationen zu publizieren sind. Ausnahmen wurden kurz nach dem Ersten Weltkrieg und auch im Zweiten Weltkrieg gestattet. In dieser Zeit konnten Dissertationen auch unpubliziert handschriftlich oder als Schreibmaschinenvervielfältigung eingereicht werden. Von diesen Dissertationen wurden manchmal, nicht immer, einige Seiten Thesen gedruckt. Wenn die Dissertationen publiziert wurden, konnten sie entweder in einer Zeitschrift veröffentlicht werden oder als selbständige Schrift in einem Verlag erscheinen, was selbst finanziert werden musste. Diejenigen Dissertationen, die in wissenschaftlichen Zeitschriften erschienen, können als Arbeiten von besonders hoher Qualität angesehen werden, zumal die Redaktionspolitik der Zeitschriften darin bestand, Dissertationen nur selten zu veröffentlichen [vgl. hierzu Tobies/Rowe 1990]. Insgesamt wurden 419 Dissertationen in wissenschaftlichen Zeitschriften veröffentlicht. Die übrigen Doktorarbeiten erschienen gesondert als Druckschrift in einem Verlag, als Manuskriptschrift oder auch nur als Handschrift, zum Teil mit einem kurzen gedruckten Auszug (45 Arbeiten im Untersuchungszeitraum).

Wir analysieren, ob Unterschiede zwischen den in wissenschaftlichen Zeitschriften veröffentlichen Dissertationen und anderen Dissertationen bestanden, wobei geschlechtsspezifische, themenspezifische und zeitspezifische Unterschiede betrachtet werden.

Geschlechtsspezifische Differenzen konnten nicht festgestellt werden. Von den 419 in Zeitschriften publizierten Dissertationen sind 35 von Frauen verfasst worden, was einer Quote von 8,4% entspricht. Dies ist nahezu gleich dem Anteil aller im Untersuchungszeitraum verteidigter Dissertationen von Frauen.

Hinsichtlich der zeitlichen Betrachtung ergaben sich Änderungen im Verlaufe des Untersuchungszeitraumes (vgl. Abb. 8). Der Anteil der in Zeitschriften publizierten Dissertationen erhöhte sich von 3,6% im Zeitraum von 1907–1909 bis


100%

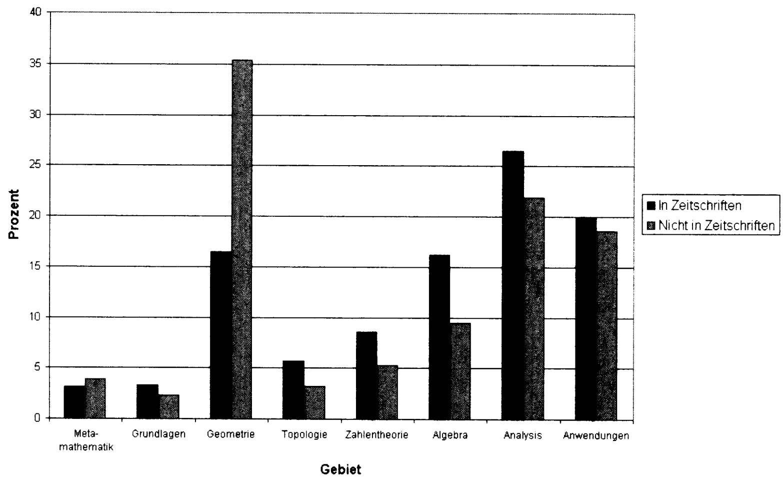


Abb. 9 Prozentuale Verteilung der in Zeitschriften bzw. nicht in Zeitschriften publi-

Tabelle 10: Verteilung der in Zeitschriften publizierten Dissertationen auf die einzelnen Organe

Zeitschriften	Frauen	Männer	Insgesamt
Mathematische Zeitschrift	**5**	**76**	**81**
Mathematische Annalen	**6**	**68**	**74**
Schriften des mathematischen Seminars und des Instituts für angewandte Mathematik an der Universität Berlin	**2**	**32**	**35**
Journal für die reine und angewandte Mathematik (Crelle-Journal)	**6**	**28**	**34**

5 Ausländische Mathematik-Promovierende in Deutschland

Insgesamt verteidigten von WS 1907/08 bis WS 1944/45 98 Ausländer und 3 Ausländerinnen ihre Dissertationen in Deutschland an 19 Hochschuleinrichtungen. Obwohl die ausländischen Frauen den Weg für deutsche Frauen an den Universitäten in Deutschland geebnet hatten, studierten nach 1907 kaum noch ausländische Frauen hier. Tabelle 11 gibt die Verteilung der ausländischen Promovierenden auf die Nationen an.

Tabelle 11: Nationalität der ausländischen Promovierenden (1907/08–1944/45)

Nationalität	**Anzahl**[15]
China	12
Russische Föderation	12
USA	11
Schweiz	9
Großbritannien	7 (2)
Österreich	6
Polen	6
Ungarn	5
Bulgarien	5
Türkei	4
Estland[16]	3
Indien	3
Luxemburg	2
Dänemark	2 (1)
Ukraine[17]	2
Frankreich	1
Schweden	1
Niederlande	1
Südafrika	1
Finnland	1
Litauen[18]	1
Griechenland	1
Island	1

[15] Gesamtzahl, davon die Frauen in Klammern.
[16] Estland war von 1918 bis 1940 eine unabhängige Republik; vor 1918 und nach 1940 gehörte Estland zur Russische Föderation.

Tabelle 11: Fortsetzung

Nationalität	**Anzahl**
Palästina[19]	1
Italien	1
Jugoslawien	1
Rumänien	1
Insgesamt	**101**

Wir analysierten, ob sich die mathematischen Dissertationen von Ausländer/innen auf bestimmte Zeiträume konzentrierten oder ob sie sich gleichmäßig auf den gesamten Untersuchungszeitraum verteilten. Tabelle 12 zeigt, dass sie im gesamten Untersuchungszeitraum an deutschen Hochschuleinrichtungen in Mathematik promovierten, wobei sich der durch den 1. Weltkrieg bedingte Rückgang abzeichnet. Durchschnittlich lag der Anteil der Dissertationen von Ausländer/innen bei 7,5%. Die Vermutung, dass mit Beginn der NS-Zeit in Deutschland der Anteil der Dissertationen ausländischer Promovierender stark fiel, bestätigte sich nicht. Obwohl viele hochbegabte Wissenschaftler aus rassistischen Gründen aus Deutschland vertrieben wurden und emigrierten, verteidigte weiterhin ein verhältnismäßig hoher Anteil von Ausländern ihre Dissertation an deutschen Hochschuleinrichtungen. Allerdings beschränkte sich dies auf eine geringe Anzahl von Nationen. Alle zwölf aus China stammenden Mathematik-Promovenden verteidigten ihre Dissertation erst nach 1933. Ohne diese chinesischen Wissenschaftler wäre in dieser Zeitspanne der Anteil der ausländischen Promovierenden sehr gering gewesen.

Tabelle 12: Verteilung der Promotionen der Ausländerinnen und Ausländer im Vergleich zu denen aller Promovierenden auf die einzelnen Zeiträume (1907/08–1944/45)

	Ausländische Promovierende (davon weiblich)		**Gesamtzahl der Promovierenden (davon weiblich)**		**Anteil an ausländischen Promovierenden**
Zeitraum	**Anzahl**	%	**Anzahl**	%	%
1907–1909	6 (0)	5,9	84 (5)	6,2	7,1
1910–1914	24 (2)	23,8	239 (8)	17,7	10,0
1915–1919	2 (0)	2,0	103 (15)	7,6	1,9
1920–1924	11 (0)	10,9	226 (30)	16,7	4,9
1925–1929	17 (1)	16,8	166 (22)	12,3	10,2
1930–1934	15 (0)	14,9	258 (17)	19,1	5,8
1935–1939	15 (0)	14,9	195 (9)	14,3	7,7
1940–1945	11 (0)	10,9	83 (9)	6,1	13,3
Insgesamt	**101**	**100,0**	**1354**	**100,0**	**7,5**

[19] Palästina war bis 1918 türkisch und stand von 1918 bis 1945 unter britischem Mandat.

Tabelle 13 betrachtet die Dissertationen der ausländischen Promovierenden hinsichtlich ihrer Themenwahl, wobei ein Vergleich mit den von Deutschen verteidigten Dissertationen vorgenommen wird.

Tabelle 13: Verteilung der Dissertationen auf die mathematischen Teilgebiete, Vergleich der ausländischen und deutschen Promovierenden

	Ausländische Promovierende		**Deutsche Promovierende**	
Gebiet	**Anzahl**[20]	%	**Anzahl**	%
Metamathematik	2	2,0	47 (2)	3,8
Grundlagen	4	4,0	31 (2)	2,5
Geometrie	16	15,8	383 (40)	30,6
Topologie	3	3,0	51 (8)	4,1
Zahlentheorie	8 (1)	7,9	77 (7)	6,1
Algebra	13 (1)	12,9	145 (15)	11,6
Analysis	41	40,6	274 (26)	21,9
Anwendungen	14 (1)	13,9	245 (12)	19,6
Summe	**101 (3)**	**100,0**	**1253 (112)**	**100,0**

Die Dissertationen der ausländischen Promovierenden verteilten sich auf alle Gebiete der Mathematik und ihrer Anwendungen. Auffällig im Vergleich zu den von Deutschen verteidigten Dissertationen ist der höhere Anteil von Arbeiten auf dem Gebiet Analysis: 40,6% (Deutsche 21,9%). Umgekehrt war das Verhältnis in Geometrie: 15,8% der ausländischen Promovierenden, aber 30,6% der Deutschen schrieben eine Dissertation in Geometrie. Des Weiteren fällt der etwas geringere Anteil der Arbeiten von Ausländern in Anwendungsgebieten der Mathematik auf.

Die nachfolgende Analyse bezieht sich auf die Hochschulorte, an denen die Ausländer und Ausländerinnen ihre Dissertationen verteidigten. Es wird geprüft, ob sie bestimmte Promotionsorte bevorzugten (Tab. 14).

[20] Gesamtzahl, davon Frauen in Klammern.

Tabelle 14: Verteilung der von Ausländer/innen in Deutschland verteidigten mathematischen Dissertationen auf die Promotionsorte (WS 1907/08 bis WS 1944/45)

Promotionsorte	Anzahl[21]	%
Berlin	**11**	**10,9**
Berlin TH	**1**	**1,0**
Bonn	**3**	**3,0**
Breslau	**3**	**3,0**
Darmstadt TH	**2**	**2,0**
Freiburg i.B.	**2 (1)**	**2,0**
Gießen	**3**	**3,0**
Göttingen	**34 (1)**	**33,7**
Halle	**2**	**2,0**
Hamburg	**3**	**3,0**
Heidelberg	**4**	**4,0**
Jena	**1**	**1,0**
Köln	**1**	**1,0**
Leipzig	**9**	**8,9**
Marburg	**4 (1)**	**4,0**
München	**7**	**6,9**
München TH	**2**	**2,0**
Straßburg	**3**	**3,0**
Würzburg	**5**	**5,0**
Insgesamt	101	100,0

Aus Tabelle 14 ist erkennbar, dass 33,7% der ausländischen Promovierenden im Untersuchungszeitraum ihre mathematische Dissertation in Göttingen verteidigten. Darin widerspiegelt sich die Tatsache, dass Göttingen bis 1933 international als das bedeutendste mathematische Zentrum galt. Zwar war Göttingen auch für die deutschen Promovierenden ein Anziehungspunkt, aber der Ausländeranteil von 21,7% bei den mathematischen Dissertationen in Göttingen drückt das Gewicht dieser Arbeiten aus. Mit Abstand folgten Berlin, Leipzig und München als Orte, an denen ausländische Mathematiker ihre Dissertation verteidigten. Dies entspricht weitgehend der Reihenfolge der (von Männern) bevorzugten Promotionsorte in Mathematik für den gesamten Untersuchungszeitraum.

Die zeitliche Verteilung der Promotionsverfahren an den einzelnen Orten erhellt, dass Göttingen – durch die Vertreibung zahlreicher bedeutender Mathematiker/innen ab 1933 – seine dominante Position als internationales Zentrum verlor. Während der Zeit des Nationalsozialismus erwarben in Göttingen nur noch drei Ausländer den Doktortitel mit einer mathematischen Dissertation.

Es wurde weiterhin geprüft, ob die Dissertationen der ausländischen Promovierenden häufiger in wissenschaftlichen Zeitschriften publiziert wurden als die

[21] Gesamtzahl, davon Frauen in Klammern.

Dissertationen deutscher Promovierender. 35,6% der von Ausländern und 30,6% der von Deutschen geschriebenen mathematischen Dissertationen erschienen im Untersuchungszeitraum in wissenschaftlichen Zeitschriften. Dieser Unterschied ist nicht signifikant.

6 Zusammenfassende Bemerkungen zum Geschlechtervergleich

1. Der Anteil der Frauen, die im gesamten Untersuchungszeitraum eine Dissertation in Mathematik verteidigten, lag bei durchschnittlich 8,5%. Für unterschiedliche historische Zeiträume bestanden jedoch stärkere Abweichungen von diesem Mittelwert. Besonders hervorzuheben ist, dass mit Beginn des Ersten Weltkrieges bis zum Ende der Weimarer Republik der Anteil der Frauendissertationen deutlich über dem Durchschnittswert des gesamten Untersuchungszeitraumes (WS 1907/08 bis WS 1944/45) lag.
2.1. Hinsichtlich der Wahl des mathematischen Dissertationsthemas bestand ein signifikanter Unterschied zwischen Frauen und Männern nur bei den in Anwendungsgebieten der Mathematik geschriebenen Arbeiten: 19,9% der Männer und 11,3% der Frauen schrieben eine entsprechende Dissertation. Vergleichen wir dies mit den Daten, die im Rahmen des VW-Projekts hinsichtlich der gewählten Fächer im Staatsexamen gewonnen wurden (vgl. Abele et al. 2001), so zeigt sich, dass der Prozentsatz der Frauen, die angewandte Mathematik als Fach im Staatsexamen wählten (3% Frauen, 21% Männer), weit unter dem Anteil der in Anwendungsgebieten promovierenden Frauen lag. Es ist also zu betonen, dass promovierende Frauen schon stärker – als Abschließende im Staatsexamen – in neuen anwendungsorientierten Gebieten arbeiteten.
2.2. Die schwerpunktmäßige Wahl der Dissertationsthemen veränderte sich im Verlaufe des Untersuchungszeitraumes. Am Anfang war Geometrie das Hauptforschungsgebiet: Von 1907 bis 1914 promovierten 43,7% der Personen in Geometrie; dieser Anteil fiel bis auf 21,5% in der Zeit von 1925 bis 1934, stieg im Zeitraum von 1935 bis 1945 wieder leicht auf 22,1% an (Durchschnittswert für den gesamten Untersuchungszeitraum: 29,5%). Bei den Frauendissertationen ist dieser allgemeine Trend allerdings nicht zu beobachten. So lag der Anteil an Dissertationen von Frauen in Geometrie zwischen 1907 und 1914 bei nur 23,1%. Dieser stieg in der Zeit von 1915 bis 1924 auf 44,4%, fiel dann zwischen 1925 und 1934 wieder auf 23,1% ab, bis er schließlich in der Zeit von 1935 bis 1945 auf 45% anstieg. Der relativ niedrige Wert bei den Frauen in der Zeit von 1907 bis 1914 kann u. a. damit erklärt werden, dass in diesen Jahren hauptsächlich diejenigen Frauen in Mathematik promovierten, die ihr Abitur weitgehend auf „Sonderwegen" erreicht hatten. Unter-

3. Als Promotionsort dominierte Göttingen – für deutsche und ausländische Promovierende. 33,7% aller in Deutschland promovierenden Ausländer/innen verteidigten ihre mathematische Dissertation im international anerkannten Zentrum der Mathematik; es folgten mit Abstand die Promotionsorte: Berlin, München, Leipzig, wenn wir bei Berlin und München die an der Universität und an der Technischen Hochschule verteidigten Arbeiten berücksichtigen (vgl. Tab. 5). Für die Frauen zeichneten sich deutliche Unterschiede hinsichtlich der bevorzugten Orte ab: im Untersuchungszeitraum stand Bonn an erster Stelle, gefolgt gleichauf von den Promotionsorten Berlin, Breslau, Göttingen, Halle und Münster.

4. Hinsichtlich der Frage, ob die Dissertationen in wissenschaftlichen Zeitschriften publiziert wurden, konnten keine geschlechtsspezifischen Differenzen festgestellt werden. Von den 419 in Zeitschriften publizierten Dissertationen sind 35 von Frauen verfasst worden, was einer Quote von 8,4% entspricht. Dies kam dem Anteil aller im Untersuchungszeitraum verteidigter Dissertationen von Frauen nahe.

5. Im Zeitraum von WS 1907/08 bis WS 1944/45 verteidigten drei Ausländerinnen und 98 Ausländer eine Dissertation an 19 Hochschuleinrichtungen in Deutschland. Zuvor, bis zum Jahre 1906 hatten bereits sieben Ausländerinnen ihre mathematische Dissertation in Göttingen verteidigt: vier Russinnen, zwei Amerikanerinnen und eine Engländerin. Obwohl diese und weitere ausländischen Frauen – die nur zum Zusatzstudium nach Deutschland kamen – den Weg für deutsche Frauen geebnet hatten, studierten nach 1906 nur noch wenige ausländische Frauen Mathematik an deutschen Universitäten, weil sich die Bedingungen für das Frauenstudium in ihren Mutterländern rascher verbessert hatten als in Deutschland.

Bibliographie

Abele, A.; Neunzert, H.; Tobies, R.; Krüsken, J. (2001): Frauen und Männer in der Mathematik – früher und heute. DMV-Mitt. 2/2001, 8–16.

Begehr, H. (Hg.) (1998): Mathematik in Berlin. Geschichte und Dokumentation. 2 Halbbde. Aachen.

Biermann, K.-R. (1988): Die Mathematik und ihre Dozenten an der Berliner Universität 1810–1933, Berlin.

Boedeker, E. (1939): 25 Jahre Frauenstudium in Deutschland. Verzeichnis der Doktorarbeiten von Frauen 1908–1933. Vier Hefte, Hannover.

Butzer, P. L.; Stark, E. L. (1975): Dissertationen in Mathematik an den deutschen Hochschulen der BRD in der Zeit von 1961 bis 1970 (eine Bibliographie). Stuttgart.

Görgen, U. (2001): Mathematische Dissertationen an deutschen Universitäten und Hochschulen von WS 1907/08 bis WS 1944/45. Vergleich von Frauen und Männern. Wissenschaftliche Prüfungsarbeit zum Ersten Staatsexamen für das Lehramt an Gymnasien, Universität Kaiserslautern.

Green, J.; LaDuke, J. (1987): Women in the American Mathematical Community: The Pre-1940 Ph.D.'s. The Mathematical Intelligencer 9, No. 1, 11–23.

Hentschel, K.; Tobies, R. (1999): Brieftagebuch zwischen Max Planck, Carl Runge, Bernhard Karsten und Adolf Leopold. Eingeleitet, annotiert und mit den Promotions- und Habilitationsakten Max Plancks und Carl Runges im Anhang (Berliner Beiträge zur Geschichte der Naturwissenschaften und der Technik, Bd. 24), Berlin.

Jahnke, H. N. (Hg.) (1999): Geschichte der Analysis, Heidelberg/Berlin.

Jahresverzeichnisse der an den Deutschen Universitäten und Technischen Hochschulen erschienenen Schriften, Bde. 23 bis 61 Berlin/Heidelberg/New York.

Kirchhoff, A. (Hg.) (1897): Die Akademische Frau. Gutachten hervorragender Universitätsprofessoren, Frauenlehrer und Schriftsteller über die Befähigung der Frau zum wissenschaftlichen Studium und Berufe. Berlin.

Kowalewski, G. (1950): Bestand und Wandel. Meine Lebenserinnerungen, zugleich ein Beitrag zur neueren Geschichte der Mathematik. München.

Krengel, U. (1990): Wahrscheinlichkeitstheorie, in: Ein Jahrhundert Mathematik 1890–1990 (Dokumente zur Geschichte der Mathematik, 6), hg. v. G. Fischer et al. Braunschweig/Wiesbaden, 457–489.

Niemann, W. B. (1924): Verzeichnis der Dr.-Ing. Dissertationen der Deutschen Technischen Hochschulen in sachlicher Anordnung nebst Namens- und Schlagwort-Verzeichnis 1913 bis 1922, Charlottenburg.

Niemann, W. B.; Neufeld, M. W. (1931), Verzeichnis der Dr.-Ing. Dissertationen der Technischen Hochschulen und Bergakademien 1923 bis 1927, Berlin-Charlottenburg.

Scharlau, W. (Hg.) (1990): Mathematische Institute in Deutschland 1800–1945 (Dokumente zur Geschichte der Mathematik, 5). Braunschweig/Wiesbaden.

Schur, I. (1973): Gesammelte Mathematische Abhandlungen, hg. v. A. Brauer und H. Rohrbach, Bd. III, Berlin.

Scriba, Ch. J.; Schreiber, P. (2000): 5000 Jahre Geometrie. Geschichte, Kulturen, Menschen, Berlin.

Tobies, R. (1991): Wissenschaftliche Schwerpunktbildung: der Ausbau Göttingens zum Zentrum der Mathematik und Naturwissenschaften, in: B. vom Brocke (Hg.), Wissenschaftsgeschichte und Wissenschaftspolitik im Industriezeitalter. Das „System Althoff" in historischer Perspektive. Hildesheim, 87–108.

Tobies, R. (1995): Zu den Anfängen einer wissenschaftlichen Karriere von Frauen in Mathematik und Naturwissenschaften. Literaturbericht und erste Ergebnisse, in: I. Nagelschmidt, Ilse (Hg.), Frauenforscherinnen stellen sich vor. Leipzig, 99–139.

Tobies, R. (1997a): Einflussfaktoren auf die Karriere von Frauen in Mathematik und Naturwissenschaften, in: R. Tobies (Hg.), „Aller Männerkultur zum Trotz" Frauen in Mathematik und Naturwissenschaften, Frankfurt a. M./ New York, 17–67.

Tobies, R. (1997b): Mathematikerinnen und ihre Doktorväter, in: Ebenda, 131–158.

Tobies, R. (1997c): Promotionen von Frauen in Mathematik – ausgewählte Aspekte einer historiographischen Untersuchung. Mitt. Math. Gesell. Hamburg, 16 (1997) 39–63.

Tobies, R. (1998): „Angewandte Mathematik ist schmutzige Mathematik!" Die Rolle von Frauen in diesem Gebiet in den ersten Jahrzehnten unseres Jahrhunderts. Mitt. Österr. Gesell. f. Wissenschaftsgeschichte, 18 (1998) 15–35.

Tobies, R. (1999): Felix Klein und David Hilbert als Förderer von Frauen in der Mathematik. Prague Studies in the History of Science and Technology, N.S., 3 (1999) 69–101.

Tobies, R. (2000) unter Mitarbeit von E. Dengel u. Ch. Leger: Analyse der Wege von Absolventinnen und Absolventen in Mathematik (1880–1942). Studiengestaltung und Studienabschluss mit Staatsexamen und Promotion. Projektbericht 5 des VW-Projekts „Frauen in der Mathematik", Kaiserslautern.

Tobies, R.; Rowe, D.E. (1990): Korrespondenz Felix Klein – Adolph Mayer. Auswahl aus den Jahren 1871 bis 1907 (TEUBNER-ARCHIV zur Mathematik, 14). Leipzig.

Vogt, Annette (1997): Die Promotionen von Frauen an der Philosophischen Fakultät von 1898 bis 1936 und an der Mathematisch-Naturwissenschaftlichen Fakultät von 1936 bis 1945 der Friedrich-Wilhelms-Universität zu Berlin sowie die Habilitationen von Frauen an beiden Fakultäten von 1919 bis 1945 (Findbuch). Preprint 57, Max-Planck-Institut für Wissenschaftsgeschichte Berlin.

Voss, Waltraud (1997): Die Schwestern Johanna und Gertraud Wiegand promovieren in Mathematik: Einflußfaktoren auf ihre Karriere, in: R. Tobies (Hg.), „Aller Männerkultur zum Trotz" Frauen in Mathematik und Naturwissenschaften, Frankfurt a. M./New York, 159–179.

Dr. habil. Renate Tobies
Fraunhofer-Institut für Techno- und Wirtschaftsmathematik
PF 3049
D-67653 Kaiserslautern
e-mail: tobies@mathematik.uni-kl.de

Ulrich Görgen
FB Mathematik
PF 3049
D-67653 Kaiserslautern

Jber. d. Dt. Math.-Verein.
103 (2001) 149–162
Mathematics Subject Classification: 35Q51, 37K10; 37K15, 39A70
Keywords and Phrases: Toda equation, Kac van Moerbeke equation, Solitons, Lax pair

Almost Everything You Always Wanted to Know About the Toda Equation

Gerald Teschl, Wien

Abstract

The present article reviews methods from spectral theory and algebraic geometry for finding explicit solutions of the Toda equation, namely for the N-soliton solution and quasi-periodic solutions. Along they way basic concepts like Lax pairs, associated hierarchies, and Bäcklund transformations for the Toda equation are introduced.

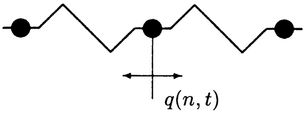
Preface

This article is supposed to give an introduction to some aspects of completely integrable nonlinear wave equations and soliton mathematics using one example, the Toda equation. Moreover, the aim is not to give a complete overview, even for this single equation. Rather I will focus on only two methods (reflecting my personal bias) and I will try to give an outline on how explicit solutions can be obtained. More details and many more references can be found in the monographs by Gesztesy and Holden [19], myself [39], and Toda [40].

The contents constitutes an extended version of my talk given at the joint annual meeting of the Österreichische Mathematische Gesellschaft and the Deutsche Mathematiker-Vereinigung in September 2001, Vienna, Austria.

1 The Toda equation

In 1955 Enrico Fermi, John Pasta, and Stanislaw Ulam carried out a seemingly innocent computer experiment at Los Alamos, [15]. They considered a simple model for a nonlinear one-dimensional crystal describing the motion of a chain of particles with nearest neighbor interaction.



The Hamiltonian of such a system is given by

$$\mathcal{H}(p,q) = \sum_{n\in\mathbb{Z}} \Big(\frac{p(n,t)^2}{2} + V(q(n+1,t) - q(n,t))\Big), \tag{1}$$

where $q(n,t)$ is the displacement of the n-th particle from its equilibrium position, $p(n,t)$ is its momentum (mass $m = 1$), and $V(r)$ is the interaction potential.

Restricting the attention to finitely many particles (e. g., by imposing periodic boundary conditions) and to the **harmonic interaction** $V(r) = \frac{r^2}{2}$, the equations of motion form a linear system of differential equations with constant coefficients. The solution is then given by a superposition of the associated *normal modes*. It was general belief at that time that a generic nonlinear perturbation would yield to *thermalization*. That is, for any initial condition the energy should eventually be equally distributed over all normal modes. The aim of the experiment was to investigate the rate of approach to the equipartition of energy. However, much to everybody's surprise, the experiment indicated, instead of the expected thermalization, a quasi-periodic motion of the system! Many attempts were made to explain this result but it was not until ten years later that Martin Kruskal and Norman Zabusky, [47], revealed the connections with solitons.

This had a big impact on soliton mathematics and led to an explosive growth in the last decades. In particular, it led to the search for a potential $V(r)$ for which the above system has soliton solutions. By considering addition formulas for elliptic functions, Morikazu Toda came up with the choice

$$V(r) = \mathrm{e}^{-r} + r - 1. \tag{2}$$

The corresponding system is now known as the **Toda equation**, [41].

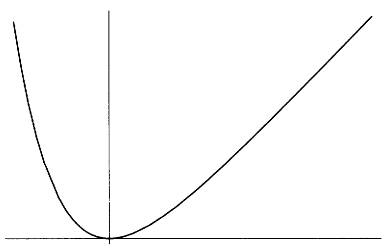


Fig. 1 Toda potential $V(r)$

This model is of course only valid as long as the relative displacement is not too large (i. e., at least smaller than the distance of the particles in the equilibrium position). For small displacements it is approximately equal to a harmonic interaction.

The equation of motion in this case reads explicitly

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt}p(n,t) &= -\frac{\partial\mathcal{H}(p,q)}{\partial q(n,t)} \\ &= \mathrm{e}^{-(q(n,t) - q(n-1,t))} - \mathrm{e}^{-(q(n+1,t) - q(n,t))}, \\ \frac{d}{dt}q(n,t) &= \frac{\partial\mathcal{H}(p,q)}{\partial p(n,t)} = p(n,t). \end{aligned} \tag{3}$$

The important property of the Toda equation is the existence of so called **soliton** solutions, that is, pulslike waves which spread in time without changing their size and shape. This is a surprising phenomenon, since for a generic linear equation one would expect spreading of waves (dispersion) and for a generic nonlinear force one would expect that solutions only exist for a finite time (breaking of waves). Obviously our particular force is such that both phenomena cancel each other giving rise to a stable wave existing for all time!

In fact, in the simplest case of one soliton you can easily verify that this solution is given by

$$q_1(n,t) = q_0 - \ln \frac{1+\gamma\exp(-2\kappa n \pm 2\sinh(\kappa)t)}{1+\gamma\exp(-2\kappa(n-1) \pm 2\sinh(\kappa)t)}, \quad \kappa,\gamma > 0. \tag{4}$$

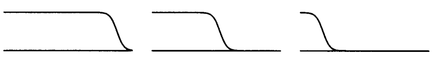


Fig. 2 One soliton

It describes a single hump traveling through the crystal with speed $\pm\sinh(\kappa)/\kappa$ and

width proportional to $1/\kappa$. In other words, the smaller the soliton the faster it propagates. It results in a total displacement 2κ of the crystal.

Such *solitary waves* were first observed by the naval architect John Scott Russel [34], who followed the bow wave of a barge which moved along a channel maintaining its speed and size (see the review article by Palais [33] for further information).

Existence of soliton solutions is usually connected to complete integrability

$$\begin{aligned} \dot a(t) &= a(t)\Big(b^+(t) - b(t)\Big),\\ \dot b(t) &= 2\Big(a(t)^2 - a^-(t)^2\Big). \end{aligned} \tag{6}$$

Here we have used the abbreviation

$$f^{\pm}(n) = f(n \pm 1). \tag{7}$$

To show complete integrability it suffices to find a so-called **Lax pair**, that is, two operators $H(t)$, $P_2(t)$ in $\ell^2(\mathbb{Z})$ such that the Lax equation

$$\frac{d}{dt}H(t) = P_2(t)H(t) - H(t)P_2(t) \tag{8}$$

is equivalent to (6). One can easily convince oneself that the right choice is

$$\begin{aligned} H(t) &= a(t)S^+ + a^-(t)S^- + b(t),\\ P_2(t) &= a(t)S^+ - a^-(t)S^-, \end{aligned} \tag{9}$$

where $(S^{\pm}f)(n) = f^{\pm}(n) = f(n \pm 1)$ are the shift operators. Now the Lax equation (8) implies that the operators $H(t)$ for different $t \in \mathbb{R}$ are unitarily equivalent:

Theorem 1 *Let $P_2(t)$ be a family of bounded skew-adjoint operators, such that $t \mapsto P_2(t)$ is differentiable. Then there exists a family of unitary propagators $U_2(t,s)$ for $P_2(t)$, that is,*

$$\frac{d}{dt}U_2(t,s) = P_2(t)U_2(t,s). \tag{10}$$

Moreover, the Lax equation (8) implies

$$H(t) = U_2(t,s)H(s)U_2(t,s)^{-1}. \tag{11}$$

If the Lax equation (8) holds for $H(t)$ it automatically also holds for $H(t)^j - H_0^j$. Taking traces shows that

$$\mathrm{tr}\Big(H(t)^j - H_0^j\Big), \quad j \in \mathbb{N}, \tag{12}$$

are conserved quantities, where H_0 is the operator corresponding to the constant solution $a_0(n,t) = \frac{1}{2}$, $b_0(n,t) = 0$ (it is needed to make the trace converge). For example,

$$\begin{aligned} \mathrm{tr}(H(t) - H_0) &= \sum_{n\in\mathbb{Z}} b(n,t) = -\frac{1}{2}\sum_{n\in\mathbb{Z}} p(n,t) \text{ and}\\ \mathrm{tr}\Big(H(t)^2 - H_0^2\Big) &= \sum_{n\in\mathbb{Z}} b(n,t)^2 + 2(a(n,t)^2 - \frac{1}{4}) = \frac{1}{2}\mathcal{H}(p,q) \end{aligned} \tag{13}$$

correspond to conservation of the total momentum and the total energy, respectively.

The Lax pair approach was first advocated by Lax [29] in connection with the Korteweg-de Vries equation. The results presented here are due to Flaschka [16], [17]. More informations on the trace formulas and conserved quantities can be found in Gesztesy and Holden [18] and Teschl [37].

3 Types of solutions

The reformulation of the Toda equation as a Lax pair is the key to methods for solving the Toda equation based on spectral and inverse spectral theory for the **Jacobi operator** H (tridiagonal infinite matrix). But before we go into further details let me first show what kind of solutions one can obtain by these methods.

The first type of solution is the general N-soliton solution

$$q_N(n,t) = q_0 - \ln \frac{\det(\mathbb{1} + C_N(n,t))}{\det(\mathbb{1} + C_N(n-1,t))}, \tag{14}$$

where

$$C_N(n,t) = \left(\frac{\sqrt{\gamma_i \gamma_j}}{1 - \mathrm{e}^{-(\kappa_i + \kappa_j)}} \mathrm{e}^{-(\kappa_i + \kappa_j)n - (\sigma_i \sinh(\kappa_i) + \sigma_j \sinh(\kappa_j))t} \right)_{1 \le i,j \le N} \tag{15}$$

with $\kappa_j, \gamma_j > 0$ and $\sigma_j \in \{\pm 1\}$. The case $N = 1$ coincides with the one soliton solution from the first section. Two examples with $N = 2$ are depicted below. These solu-

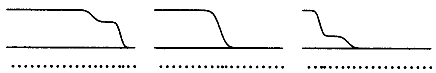


Fig. 3 Two solitons, one overtaking the other

tions can be obtained by either factorizing the underlying Jacobi operator according to $H = AA^*$ and then commuting the factors or, alternatively, by the **inverse scattering transform**.

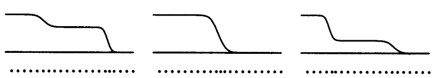


Fig. 4 Two solitons traveling in different directions

The second class of solutions are (quasi-)periodic solutions which can be found using techniques from **Riemann surfaces** (respectively algebraic curves). Each such solution is associated with a **hyperelliptic curve** of the type

$$w^2 = \prod_{j=0}^{2g+1} (z - E_j), \quad E_j \in \mathbb{R}, \tag{16}$$

where E_j, $0 \le j \le 2g+1$, are the band edges of the spectrum of H (which is independent of t and hence determined by the initial conditions). One obtains

$$q(n,t) = q_0 - 2(t\tilde{b} + n\ln(2\tilde{a})) - \ln \frac{\theta(\underline{z}_0 - 2n\underline{A}_{p_0}(\infty_+) - 2t\underline{c}(g))}{\theta(\underline{z}_0 - 2(n-1)\underline{A}_{p_0}(\infty_+) - 2t\underline{c}(g))}, \tag{17}$$

where $\underline{z}_0 \in \mathbb{R}^g$, $\theta : \mathbb{R}^g \to \mathbb{R}$ is the Riemann theta function associated with the hyperelliptic curve (16), and $\tilde{a}, \tilde{b} \in \mathbb{R}$, $\underline{A}_{p_0}(\infty_+), \underline{c}(g) \in \mathbb{R}^g$ are constants depending only on the curve (i. e., on E_j, $0 \le j \le 2g + 1$). If $a(n, 0)$, $b(n, 0)$ are (quasi-) periodic

5 The Kac-van Moerbeke hierarchy

Consider the **super-symmetric Dirac operator**

$$(23)\qquad D(t) = \begin{pmatrix} 0 & A(t)^* \\ A(t) & 0 \end{pmatrix},$$

and choose

$$(24)\qquad A(t) = \rho_o(t)S^+ + \rho_e(t), \qquad A(t)^* = \rho_o^-(t)S^- + \rho_e(t),$$

where

$$(25)\qquad \rho_e(n,t) = \rho(2n,t), \qquad \rho_o(n,t) = \rho(2n+1,t)$$

are the "even" and "odd" parts of some bounded sequence $\rho(t)$. Then $D(t)$ is associated with two Jacobi operators

$$(26)\qquad H_1(t) = A(t)^* A(t), \qquad H_2(t) = A(t)A(t)^*,$$

whose coefficients read

$$(27)\qquad \begin{aligned} a_1(t) &= \rho_e(t)\rho_o(t), & b_1(t) &= \rho_e(t)^2 + \rho_o^-(t)^2, \\ a_2(t) &= \rho_e^+(t)\rho_o(t), & b_2(t) &= \rho_e(t)^2 + \rho_o(t)^2. \end{aligned}$$

The corresponding Lax equation

$$(28)\qquad \frac{d}{dt} D(t) = Q_{2r+2}(t)D(t) - D(t)Q_{2r+2}(t),$$

Theorem 2 *For any given solution $\rho(t)$ of* $\mathrm{KM}_r(\rho) = 0$ *we obtain, via (27), two solutions* $(a_j(t), b_j(t))_{j=1,2}$ *of* $\mathrm{TL}_r(a,b) = 0$.

This is the analog of the Miura transformation between the modified and the original Korteweg-de Vries hierarchies.

The Kac-van Moerbeke equation has been first introduced by Kac and van Moerbeke in [23]. The Bäcklund transformation connecting the Toda and the Kac-van Moerbeke equations has first been considered by Toda and Wadati in [43].

6 Commutation methods

Clearly, it is natural to ask whether this transformation can be inverted. In other words, can we factor a given Jacobi operator H as A^*A and then compute the corresponding solution of the Kac-van Moerbeke hierarchy plus the second solution of the Toda hierarchy?

This can in fact be done. All one needs is a positive solution of the system

$$H(t)u(n,t) = 0, \qquad \frac{d}{dt}u(n,t) = P_{2r+2}(t)u(n,t) \tag{33}$$

and then one has

$$\begin{aligned} \rho_o(t) &= -\sqrt{\frac{-a(t)u(t)}{u^+(t)}}, \\ \rho_e(t) &= \sqrt{\frac{-a(t)u^+(t)}{u(t)}}. \end{aligned} \tag{34}$$

In particular, starting with the trivial solution $a_0(n,t) = -\frac{1}{2}$, $b_0(n,t) = 0$ and proceeding inductively one ends up with the N-soliton solutions.

The method of factorizing H and then commuting the factors is known as **Darboux transformation** and is of independent interest since it has the property of inserting a single eigenvalue into the spectrum of H.

Commutation methods for Jacobi operators in connection with the Toda and Kac-van Moerbeke equation were first considered by Gesztesy, Holden, Simon, and Zhao [22]. For further generalizations, see Gesztesy and Teschl [20] and Teschl [38]. A second way to obtain the N-soliton solution is via the inverse scattering transform, which was first worked out by Flaschka in [17].

7 Stationary solutions

In this case a short calculation gives

$$(36) \qquad (P_{2r+2}|_{\mathrm{Ker}(H-z)})^2 = H_{r+1}(z)^2 - 4a^2 G_r(z) G_r^+(z) =: R_{2r+2}(z),$$

where $R_{2r+2}(z)$ can be shown to be independent of n. That is, it is of the form

$$(37) \qquad R_{2r+2}(z) = \prod_{j=0}^{2r+1} (z - E_j)$$

for some constant numbers $E_j \in \mathbb{R}$. In particular, this implies

$$(38) \qquad (P_{2r+2})^2 = \prod_{j=0}^{2r+1} (H - E_j)$$

and the polynomial $w^2 = \prod_{j=0}^{2r+1}(z - E_j)$ is known as the **Burchnall-Chaundy polynomial** of P_{2r+2} and H. In particular, the connection between the stationary Toda hierarchy and the **hyperelliptic curve**

$$(39) \qquad \mathcal{K} = \{(z, w) \in \mathbb{C}^2 | w^2 = \prod_{j=0}^{2r+1} (z - E_j)\}$$

is apparent. But how can it be used to solve the Toda equation? This will be shown next. We will for simplicity assume that our curve is nonsingular, that is, that $E_j < E_{j+1}$ for all j.

The fact that two commuting differential or difference operators satisfy a polynomial relation, was first shown by Burchnall and Chaundy [9], [10]. The approach to stationary solutions presented here follows again Bulla, Gesztesy, Holden, and Teschl [8].

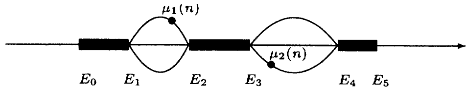
8 Jacobi operators associated with stationary solutions

Next some spectral properties of the Jacobi operators associated with stationary solutions are needed. First of all, one can show that

$$(40) \qquad \begin{aligned} g(z,n) &= \frac{G_r(z,n)}{R_{2r+2}^{1/2}(z)} = \langle \delta_n, (H-z)^{-1}\delta_n \rangle, \\ h(z,n) &= \frac{H_{r+1}(z,n)}{R_{2r+2}^{1/2}(z)} = \langle \delta_{n+1}, (H-z)^{-1}\delta_n \rangle. \end{aligned}$$

This is not too surprising, since g_j and h_j are by (21) just the expansion coefficients in the Neumann series of the resolvent.

But once we know the diagonal of the resolvent we can easily read off the spectrum of H. The open branch cuts of $R_{2r+2}^{1/2}(z)$ form an essential support of the absolutely continuous spectrum and the branch points support the singular spectrum. Since at each branch point we have a square root singularity, there can be no eigenvalues and since the singular continuous spectrum cannot be supported on finitely many points, the spectrum is purely absolutely continuous and consists of a finite number of bands.



The points $\mu_j(n)$ are the zeros of $G_r(z,n)$,

$$G_r(z,n) = \prod_{j=1}^{r} (z - \mu_j(n)), \tag{41}$$

and can be interpreted as the eigenvalues of the operator H_n obtained from H by imposing an additional **Dirichlet boundary condition** $u(n) = 0$ at n. Since H_n decomposes into a direct sum $H_{-,n} \oplus H_{+,n}$ we can also associate a sign $\sigma_j(n)$ with $\mu_j(n)$, indicating whether it is an eigenvalue of $H_{-,n}$ or $H_{+,n}$.

Theorem 3. *The band edges $\{E_j\}_{0 \le j \le 2r+1}$ together with the Dirichlet data $\{(\mu_j(n),\, \sigma_j(n))\}_{1 \le j \le r}$ for one n uniquely determine H. Moreover, it is even possible to write down explicit formulas for $a(n+k)$ and $b(n+k)$ for all $k \in \mathbb{Z}$ as functions of these data. Explicitly one has*

$$\begin{aligned} b(n) &= b^{(1)}(n) \\ a(n - {}^{0}_{1})^2 &= \frac{b^{(2)}(n) - b(n)^2}{4} \pm \sum_{j=1}^{r} \frac{\sigma_j(n) R_{2r+2}^{1/2}(\mu_j(n))}{2 \prod_{k \neq j} (\mu_j(n) - \mu_k(n))} \\ b(n \pm 1) &= \frac{1}{a(n - {}^{0}_{1})^2} \Big(\frac{2b^{(3)}(n) - 3b(n) b^{(2)}(n) + b(n)^3}{12} \\ &\qquad \pm \sum_{j=1}^{r} \sigma_j(n) R_{2r+2}^{1/2}(\mu_j(n)) \mu_j(n) 2 \prod_{k \neq j} (\mu_j(n) - \mu_k(n)) \Big) \\ &\;\;\vdots \end{aligned} \tag{42}$$

where

$$b^{(\ell)}(n) = \frac{1}{2} \sum_{j=0}^{2r+1} E_j^{\ell} - \sum_{j=1}^{r} \mu_j(n)^{\ell}. \tag{43}$$

These formulas already indicate that $\hat{\mu}_j(n) = (\mu_j(n), \sigma_j(n))$ should be considered as a point on the Riemann surface $\mathcal{K}$ of $R_{2r+2}^{1/2}(z)$, where $\sigma_j(n)$ indicates on which sheet $\mu_j(n)$ lies.

The result for periodic operators is due to van Moerbeke [30], the general case was given by Gesztesy, Krishna, and Teschl [21]. Trace formulas for Sturm-Liouville and also for Jacobi operators have a long history. The formulas for $b^{(\ell)}$, $\ell = 1, 2$, were already given in [30] for the periodic case. The formulas presented here and in particular the fact that the coefficients a and b can be explicitly written down in terms of minimal spectral data are due to Teschl [36]. Most proofs use results on orthogonal polynomials and the moment problem. One of the classical references is [1], for a recent review article see Simon [35].

9 Algebro-geometric solutions of the Toda equations

The idea now is to choose a stationary solution of $\mathrm{TL}_r(a,b)=0$ as the initial condition for $\mathrm{TL}_s(a,b)$ and to consider the time evolution in our new *coordinates* $\{E_j\}_{0\le j\le 2r+1}$ and $\{(\mu_j(n),\sigma_j(n))\}_{1\le j\le r}$. From unitary equivalence of the family of operators $H(t)$ we know that the band edges E_j do not depend on t. Moreover, the time evolution of the Dirichlet data follows from the Lax equation

$$(44)\qquad \frac{d}{dt}(H(t)-z)^{-1}=[P_{2s+2}(t),(H(t)-z)^{-1}].$$

Inserting (40) and (41) yields

$$(45)\qquad \frac{d}{dt}\mu_j(n,t)=-2G_s(\mu_j(n,t),n,t)\frac{\sigma_j(n,t)R^{1/2}_{2r+2}(\mu_j(n,t))}{\prod_{k\neq j}(\mu_k(n,t)-\mu_j(n,t))},$$

where $G_s(z)$ has to be expressed in terms of μ_j using (42). Again, this equation should be viewed as a differential equation on $\mathcal{K}$ rather than $\mathbb{R}$. A closer investigation shows that each Dirichlet eigenvalue $\mu_j(n,t)$ rotates in its spectral gap.

At first sight it looks like we have not gained too much since this flow is still highly nonlinear, but it can be straightened out using Abel's map from algebraic geometry. So let us review some basic facts first.

nus r and hence it has a basis of r holomorphic differentials which are explicitly given by

$$(46)\qquad \zeta_j=\sum_{k=1}^{r}c_j(k)\frac{z^{k-1}dz}{R^{1/2}_{2r+2}(z)}.$$

Sketch of proof. Consider the function (compare (19))

$$\phi(p,n,t) = \frac{H_{r+1}(p,n,t) + R^{1/2}_{2r+2}(p)}{2a(n,t)G_r(p,n,t)} = \frac{2a(n,t)G_r(p,n+1,t)}{H_{r+1}(p,n,t) - R^{1/2}_{2r+2}(p)}, \quad p \in \mathcal{K}, \tag{50}$$

whose zeros are $\hat{\mu}_j(n+1,t)$, ∞_- and whose poles are $\hat{\mu}_j(n,t)$, ∞_+. Abel's theorem implies

$$\underline{A}_{p_0}(\infty_+) + \sum_{j=1}^{r} \underline{A}_{p_0}(\hat{\mu}_j(n,t)) = \underline{A}_{p_0}(\infty_-) + \sum_{j=1}^{r} \underline{A}_{p_0}(\hat{\mu}_j(n+1,t)), \tag{51}$$

which settles the first claim. To show the second claim we compute

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt}\sum_{j=1}^{r} \underline{A}_{p_0}(\hat{\mu}_j) &= \sum_{j=1}^{r} \dot{\mu}_j \sum_{k=1}^{r} \underline{c}(k) \frac{\mu_j^{k-1}}{\sigma_j R^{1/2}_{2r+2}(\mu_j)} \\ &= -2\sum_{j,k}^{r} \underline{c}(k) \frac{G_s(\mu_j)}{\prod_{\ell \neq j}(\mu_j - \mu_\ell)} \mu_j^{k-1}. \end{aligned} \tag{52}$$

The key idea is now to rewrite this as an integral

$$\int_\Gamma \frac{G_s(z)}{G_r(z)} z^{k-1} dz, \tag{53}$$

where Γ is a closed path encircling all points μ_j. By (41) this is equal to the above expression by the residue theorem. Moreover, since the integrand is rational we can also compute this integral by evaluating the residue at ∞, which is given by

$$\begin{aligned} \frac{G_s(z)}{G_r(z)} &= \frac{G_s(z)}{g(z)} 1 R^{1/2}_{2r+2}(z) = \frac{z^{s+1}(1 + O(z^{-s}))}{R^{1/2}_{2r+2}(z)} \\ &= -2 \sum_{\ell = \max\{1, r-s\}} \underline{c}(\ell) d_{s-r+\ell}(\underline{E}) =: \underline{U}_s, \end{aligned} \tag{54}$$

since the coefficients of G_s coincide with the first s coefficients in the Neumann series of $g(z)$ by (26). Here $d_j(\underline{E})$ are just the coefficients in the asymptotic expansion of $1/R^{1/2}_{2r+2}(z)$. □

Since the poles and zeros of the function $\phi(z)$, which appeared in the proof of the last theorem, as well as their image under the Abel map are known, a function having the same zeros and poles can be written down using **Riemann theta functions** (**Jacobi's inversion problem** and **Riemann's vanishing theorem**). The **Riemann-Roch theorem** implies that both functions coincide. Finally, the function $\phi(z)$ has also a spectral interpretation as Weyl m-function, and thus explicit formulas for the coefficients a and b can be obtained from the asymptotic expansion for $|z| \to \infty$. This produces the formula in equation (17).

The first results on algebro-geometric solutions of the Toda equation were given by Date and Tanaka [11]. Further important contributions were made by Krichever, [24]–[28], van Moerbeke and Mumford [31], [32]. The presentation here follows Bulla, Gesztesy, Holden, and Teschl [8] respectively Teschl [39]. Another possible approach is to directly use the spectral function of H and to consider its t dependence, see Berezanskiĭ and coworkers [3]–[7]. For some recent developments based on Lie theoretic methods and loop groups I again recommend the review by Palais [33] as starting point.

Acknowledgments

I thank Fritz Gesztesy for his careful scrutiny of this article leading to several improvements, as well as Wolfgang Bulla and Karl Unterkofler for many valuable suggestions.

References

[1] N. Akhiezer, *The Classical Moment Problem*, Oliver and Boyd, London, 1965.
[2] S. J. Al'ber, *Associated integrable systems*, J. Math. Phys. **32**, 916–922 (1991).
[3] Yu. M. Berezanskiĭ, *Integration of nonlinear difference equations by the inverse spectral problem method*, Soviet Math. Dokl., **31** No. 2, 264–267 (1985).
[4] Yu. M. Berezanski, *The integration of semi-infinite Toda chain by means of inverse spectral problem*, Rep. Math. Phys., **24** No. 1, 21–47 (1985).
[5] Yu. M. Berezansky, *Integration of nonlinear nonisospectral difference-differential equations by means of the inverse spectral problem*, in "*Nonlinear Physics. Theory and experiment*", (eds E. Alfinito, M. Boiti, L. Martina, F. Pempinelli), World Scientific, 11–20 (1996).
[6] Yu. M. Berezansky and M. I. Gekhtman, *Inverse problem of the spectral analysis and non-Abelian chains of nonlinear equations*, Ukrain. Math. J., **42**, 645–658 (1990).
[7] Yu. Berezansky and M. Shmoish, *Nonisospectral flows on semi-infinite Jacobi matrices*, Nonl. Math. Phys., **1** No. 2, 116–146 (1994).
[8] W. Bulla, F. Gesztesy, H. Holden, and G. Teschl *Algebro-Geometric Quasi-Periodic Finite-Gap Solutions of the Toda and Kac-van Moerbeke Hierarchies*, Memoirs of the Amer. Math. Soc. **135/641**, 1998.
[9] J. L. Burchnall and T. W. Chaundy, *Commutative ordinary differential operators*, Proc. London Math. Soc. Ser. 2, **21**, 420–440 (1923).
[10] J. L. Burchnall and T. W. Chaundy, *Commutative ordinary differential operators*, Proc. Roy. Soc. London **A118**, 557–583 (1928).
[11] E. Date and S. Tanaka *Analogue of inverse scattering theory for the discrete Hill's equation and exact solutions for the periodic Toda lattice*, Prog. Theoret. Phys. **56**, 457–465 (1976).
[12] P. Deift, L.C. Li, and C. Tomei, *Toda flows with infinitely many variables*, J. Func. Anal. **64**, 358–402 (1985).
[13] S. N. Eilenberger, *An Introduction to Difference Equations*, Springer, New York, 1996.
[14] L. Faddeev and L. Takhtajan, *Hamiltonian Methods in the Theory of Solitons*, Springer, Berlin, 1987.
[15] E. Fermi, J. Pasta, S. Ulam̃, *Studies of Nonlinear Problems*, Collected Works of Enrico Fermi, University of Chicago Press, Vol.II, 978–988,1965. Theory, Methods, and Applications, 2nd ed., Marcel Dekker, New York, 2000.
[16] H. Flaschka, *On the Toda lattice. I*, Phys. Rev. B**9**, 1924–1925 (1974).
[17] H. Flaschka, *On the Toda lattice. II*, Progr. Theoret. Phys. **51**, 703–716 (1974).
[18] F. Gesztesy and H. Holden, *Trace formulas and conservation laws for nonlinear evolution equations*, Rev. Math. Phys. **6**, 51–95 (1994).
[19] F. Gesztesy and H. Holden, *Soliton Equations and their Algebro-Geometric Solutions I–III*, Cambridge Series in Advanced Mathematics, in preparation.
[20] F. Gesztesy and G. Teschl, *Commutation methods for Jacobi operators*, J. Diff. Eqs. **128**, 252–299 (1996).

[21] F. Gesztesy, M. Krishna, and G. Teschl, *On isospectral sets of Jacobi operators*, Com. Math. Phys. **181**, 631–645 (1996).
[22] F. Gesztesy, H. Holden, B. Simon, and Z. Zhao, *On the Toda and Kac-van Moerbeke systems*, Trans. Amer. Math. Soc. **339**, 849–868 (1993).
[23] M. Kac and P. van Moerbeke, *On an explicitly soluble system of nonlinear differential equations, related to certain Toda lattices*, Adv. Math. **16**, 160–169 (1975).
[24] I. M. Krichever, *Algebraic curves and nonlinear difference equations*, Russian Math. Surveys. **334**, 255–256 (1978).
[25] I. M. Krichever, *Nonlinear equations and elliptic curves*, Rev. of Science and Technology **23**, 51–90 (1983).
[26] I. M. Krichever, *Algebro-geometric spectral theory of the Schrödinger difference operator and the Peierls model*, Soviet Math. Dokl. **26**, 194–198 (1982).
[27] I. M. Krichever, *The Peierls model*, Funct. Anal. Appl. **16**, 248–263 (1982).
[28] I. Krichever, *Algebraic-geometrical methods in the theory of integrable equations and their perturbations*, Acta Appl. Math. **39**, 93–125 (1995).
[29] P. D. Lax *Integrals of nonlinear equations of evolution and solitary waves*, Comm. Pure and Appl. Math. **21**, 467–490 (1968).
[30] P. van Moerbeke, *The spectrum of Jacobi Matrices*, Inv. Math. **37**, 45–81 (1976).
[31] P. van Moerbeke and D. Mumford *The spectrum of difference operators and algebraic curves*, Acta Math. **143**, 97–154 (1979).
[32] D. Mumford, *An algebro-geometric construction of commuting operators and of solutions to the Toda lattice equation, Korteweg de Vries equation and related non-linear equations*, Intl. Symp. Algebraic Geometry, 115–153, Kyoto, 1977.
[33] R. S. Palais, *The symmetries of solitons*, Bull. Amer. Math. Soc., **34**, 339–403 (1997).
[34] J. S. Russel, *Report on waves*, 14th Mtg. of the British Assoc. for the Advance of Science, John Murray, London, pp. 311–390 + 57 plates, 1844.
[35] B. Simon, *The classical moment problem as a self-adjoint finite difference operator*, Advances in Math. **137**, 82–203 (1998).
[36] G. Teschl, *Trace Formulas and Inverse Spectral Theory for Jacobi Operators*, Comm. Math. Phys. **196**, 175–202 (1998).
[37] G. Teschl, *Inverse scattering transform for the Toda hierarchy*, Math. Nach. **202**, 163–171 (1999).
[38] G. Teschl, *On the Toda and Kac-van Moerbeke hierarchies*, Math. Z. **231**, 325–344 (1999).
[39] G. Teschl, *Jacobi Operators and Completely Integrable Nonlinear Lattices*, Math. Surv. and Monographs **72**, Amer. Math. Soc., Rhode Island, 2000
[40] M. Toda, *Theory of Nonlinear Lattices*, 2nd enl. ed., Springer, Berlin, 1989.
[41] M. Toda, *Theory of Nonlinear Waves and Solitons*, Kluwer, Dordrecht, 1989.
[42] M. Toda, *Selected Papers of Morikazu Toda*, ed. by M. Wadati, World Scientific, Singapore, 1993.
[43] M. Toda and M. Wadati, *A canonical transformation for the exponential lattice*, J. Phys. Soc. Jpn. **39**, 1204–1211 (1975).
[44] K. Ueno and K. Takasaki, *Toda lattice hierarchy*, in "*Advanced Studies in Pure Mathematics 4*", (ed. K. Okamoto), North-Holland, Amsterdam, 1–95 (1984).
[45] K. Ueno and K. Takasaki, *Toda lattice hierarchy. I*, Proc. Japan Acad., Ser. A **59**, 167–170 (1983).
[46] K. Ueno and K. Takasaki, *Toda lattice hierarchy. II*, Proc. Japan Acad., Ser. A **59**, 215–218 (1983).

Buchbesprechungen

Mader, A., Almost Completely Decomposable Groups, Gordon and Breach Science Publishers 2000, 354 S., \$ 50,–

Wenn wir mit dem Gauß-Algorithmus (von 1801) den Rang einer Matrix über einem Hauptidealring R ausrechnen, also mit Vorsicht dividieren, so erhalten wir bekanntlich den sogenannten Elementarteilersatz, der geringfügig modifiziert besagt, daß ein Teilmodul in einem endlich erzeugten R-Modul eine geschachtelte (stacked) Basis hat. Also gilt der Fundamentalsatz oder Gaußsche Satz für Abelsche Gruppen, daß jede endlich erzeugte abelsche Gruppe direkte Summe von zyklischen Gruppen ist. Dieser Satz wurde im vorletzten Jahrhundert mehrfach bewiesen, insbesondere 1870 von Kronecker mit dem erst dann neuen Begriff Gruppe bzw. abelsche Gruppe. Es ist faszinierend zu erkennen, daß zwei harmlos aussehende Verallgemeinerungen des Satzes von Gauß aus den 30-er Jahren des 20. Jahrhunderts der Ausgangspunkt für die wichtigsten Forschungsrichtungen auf diesem Gebiet in den letzten 30 Jahren wurden – der Satz von Pontryagin und ein Satz von Baer. Ersterer besagt, daß eine abzählbare abelsche Gruppe frei ist, sofern nur ihre reinen Untergruppen endlichen Ranges frei sind. Der andere Satz sagt, daß vollständig zerlegbare abelsche Gruppen (mit Summanden vom Rang 1)(cd-Gruppen) durch Invarianten charakterisiert werden können. Im Fall von Rang 1, also Untergruppen von $\mathbb{Q}$, sind das die schon bei Levi **[Bo]** beschriebenen (Baerschen) Typen, siehe [GGPS, Kapitel VIII]. Mit Pontryagin's Satz – also mit der Annahme, daß die reinen Untergruppen endlichen Ranges frei sind, betritt man erst dann unbearbeitetes Land, wenn man überabzählbare – oder $\aleph_1$-freie – abelsche Gruppen betrachtet. Erst Shelah's Lösung des Whitehead Problems aus dem Jahre 1974 lehrte uns wie man mit $\aleph_1$-freien Gruppen rechnen muß und wie die axiomatische Mengenlehre auf fast-freie Gruppen einwirkt. Durch den Einfluß der Entwicklungen in Modelltheorie/unendlicher Kombinatorik hat sich dieses Gebiet (mit Rückkopplung auf die Mengenlehre) spontan vielfältig entwickelt. Das Buch von Eklof, Mekler „Almost-free modules – set-theoretic methods" **[EM]** aus dem Jahre 1990 bedarf daher dringend einer Neuauflage, die im nächsten Jahr erscheinen wird.

Der andere Satz aus den 30-er Jahren fand seine zwei Steine des Anstoßes 1965 und ebenfalls 1974. Butler hatte bei der Untersuchung von torsionsfreien epimorphen Bil-

Impulse erfährt (und wir sind davon überzeugt, daß diese Richtung nicht nur wie bisher partiell, sondern auf breiter Front einschlagen wird).

Mader's Buch gliedert sich im Detail wie folgt. In Kapitel 1 und 2 werden die fundamentalen Ergebnisse aus der Theorie der torsionsfreien abelschen Gruppen erläutert sowie grundlegende Notationen eingeführt. Die auf Baer und Levi zurückgehende Klassifikation der Untergruppen der rationalen Zahlen durch ihre Typen wird hier behandelt

[illegible]

Eigenschaften von vollständig zerlegbaren Gruppen werden bewiesen. Butlergruppen und speziell fast vollständig zerlegbare Gruppen werden definiert und die so wichtigen Typenuntergruppen werden als Radikale und Sockel eingeführt. Ebenso werden Grundlagen über endliche partiell geordnete Mengen gelegt, die für spätere Zusammenhänge zwischen der Darstellungstheorie und den fast vollständig zerlegbaren Gruppen wichtig sind.

Kapitel 3 versorgt den Neuling mit einer Vielzahl an Beispielen und dem erfahrenen Leser ist es daher angeraten, die ersten drei Kapitel zu überspringen, oder aber nur diagonal zu lesen.

Kapitel 4 beinhaltet die zentralen Sätze und Begriffe zum Studium der acd-Gruppen. Hier werden regulierende Untergruppen und der Regulator eingeführt, der wie von Burkhardt gezeigt, die ausgezeichnete vollständig zerlegbare Unterguppe mit minimalem Index (regulierender Index) ist.

Kapitel 5 ermöglicht es, durch lokal-global Prinzipien viele Fragen auf den Fall einer Primzahlpotenz für den regulierenden Indexes zu reduzieren. Kapitel 6 beinhaltet ausgiebige Informationen zu Gruppen mit zyklischem regulierenden Index. Diese Klasse von acd-Gruppen ist besonders empfehlenswert für ein genaueres Studium, da sie als Testklasse für zahlreiche Spekulationen, Fragen oder Gegenbeispiele über acd-Gruppen dienen kann.

Kapitel 7 gibt Auskunft über die Existenz von vollständig zerlegbaren Summanden. Die interessanten Resultate sind für das Verständnis der nächsten Kapitel jedoch nicht notwendig. Im Gegensatz dazu bilden Kapitel 8 und 9 die Eckpfeiler in Mader's Buch. Hier werden die Anti-Darstellungen erläutert, die zur Definition von Type-Isomorphismus und Near-Isomorphismus führen, die sich als die richtige Äquivalenzrelation für acd-Gruppen entpuppen. Dies führt zu den starken eindeutigen Zerlegunssätzen aus Kapitel 10.

Kapitel 11 zeigt, daß der Computer durchaus seine Anwendung in der Theorie der unendlichen abelschen Gruppen hat und einige Maple Programme werden vorgestellt.

Kapitel 12 und 13 behandeln die bekannten Klassifikationssätze und pathologipen kennen lernen möchte, in dem der Computer seine Anwendung findet. Dem erfahrenen Abelianer dient das Werk sicher als kompetente Lektüre und Nachschlagewerk für eine Vielzahl von interessanten Ideen, Fragen, Beispielen und Ergebnissen in der Theorie der acd-Gruppen.

Mader's Buch eignet sich nicht nur zum Studium der fast vollständig zerlegbaren Gruppen sondern bietet auch eine ausführliche und lebendige Einführung in die aktive Forschung in der Theorie der torsionsfreien abelschen Gruppen im allgemeinen.

References

[A] D.M. Arnold, Abelian Groups and Representations of Finite Partially Ordered Sets, Lecture Notes in Math. 931, CMS Books in Math., Springer Verlag Berlin-Heidelberg-New York (2000).

[EM] P.C. Eklof and A. Mekler, Almost Free Modules; Set-Theoretic Methods, North-Holland (1990).

[F] L. Fuchs, Infinite Abelian Groups I, II, Academic Press (1970, 1973)

[La] E.L. Lady, Almost completely decomposable torsion-free abelian groups, Proc. Amer. Math. Soc. **45**, 41–47 (1974).

[L] F. Levi, Abelsche Gruppen mit abzählbaren Elementen, Habilitationsschrift, Leipzig, 1919.

[S] D. Simson, Linear representations of partially ordered sets and vector space categories, Gordon and Breach, Amsterdam, (1992).

Fachbereich 6 – Mathematik, University of Essen, 45117 Essen, Germany
E-mail address: R.Goebel@uni-essen.de
Fachbereich 6 – Mathematik, University of Essen, 45117 Essen, Germany
Current address: The Hebrew University, Givat Ram, Jerusalem 91904, Israel
E-mail address: lutz@math.huji.ac.il

Essen — R. Göbel
Jerusalem — L. Strüngmann

Garcia-Bondia, J. M., Figueroa, H., Varilly, J. C., Elements of Noncommutative Geometry, Boston, Birkhäuser, 2000, 400 S., DM 118,–

Das Buch *Elements of Noncommutative Geometry* (*EONCG*) ist das erste Werk seiner Art, welches einen wesentlichen Teil von Alain Connes' Nichtkommutativer Geometrie in einem Lehrbuchstil behandelt. Dabei trägt das Buch auch den neueren Entwicklungen Rechnung, die in den sechs Jahren seit dem Erscheinen von A. Connes' Buch *Noncommutative Geometry* hinzugekommen sind. *EONCG* richtet sich an Mathematiker, die sich über dieses neue Gebiet informieren wollen, als auch an mathematische Physiker. Notwendige Voraussetzungen sind Grundkenntnisse in Topologie, Differentialgeometrie, homologischer Algebra und Funktionalanalysis. Der Stil ist ein rein mathematischer und besondere Kenntnisse in Physik werden nicht vorausgesetzt. Ziel des Buches ist es zu zeigen, daß Alain Connes' Nichtkommutative Geometrie eine natürliche Verallgemeinerung der klassischen Differentialgeometrie darstellt. Häufig, zumindest in den eher technischen Arbeiten, sind für den Nicht-Experten die Fundamente der Nichtkommutativen Geometrie nur schwer mit den klassischen Konzepten in Verbindung zu bringen. Dieser Schwierigkeit wird dadurch Rechnung getragen, daß die klassischen kommutativen Strukturen immer auch in ihrer nichtkommutativen Formulierung diskutiert werden. Wie dabei mehrmals demonstriert wird geht mit den nichtkommutativen Beweisen von bekannten Resultaten aus der kommutativen Welt oft auch ein fundamentaleres Verständnis dieser klassischen Resultate einher. Als roter Faden werden auch jene Themen immer wieder aufgegriffen, welche auf lange Sicht für eine Beschreibung von Quantenfeldtheorie mit Nichtkommutativer Geometrie relevant erscheinen. Einige der populären Themen, wie zum Beispiel eine vollständige Behandlung von Indexsätzen, Fraktale, Details zum Standard Modell, Anwendungen in der Stringtheorie und der Quanten-Halleffekt wurden bewusst ausgeklammert, um den Rahmen nicht zu sprengen, aber dafür die behandelten Themen in einer nahezu selbsterklärenden Weise darstellen zu können. Die Bedeutung der erarbeiteten mathematischen Resultate für die Physik wird oft am Ende eines Abschnitts diskutiert.

Für ein Lehrbuch ist der Stil erfreulich frisch und lebendig. Es wird deutlich, daß die Autoren, die ihre Wurzeln in der Mathematik und der mathematischen Physik haben, selbst von der Thematik begeistert sind. Der persönlichen Expertise der Autoren, die neben Nichtkommutativer Geometrie insbesondere Quantenfeldtheorie, (Moyal-)Quantisierung, spezielle Fragen der Distributionentheorie sowie unendlichdimensionale Cliffordalgebren umfaßt wird durch detaillierte Behandlung dieser Themen Rechnung getragen wann immer diese im Text eine Rolle spielen. Angenehm, zum Beispiel im Vergleich mit A. Connes' Buch, sind ein ausführliches Stichwortverzeichnis, ein beeindruckendes Literaturverzeichnis und eine Liste der verwendeten Symbole, welche das Arbeiten mit dem Buch erleichtern. Übungsaufgaben, an denen der Leser sein erworbenes Verständnis jeweils testen kann und sollte, sind in den laufenden Text eingearbeitet. Wünschenswert, auch hinsichtlich eines unterschiedlichen Gebrauchs des Buches durch Experten und Nicht-Experten, wäre eventuell noch eine Skizzierung der logischen Abhängigkeit der einzelnen Kapitel voneinander gewesen. Im Gegensatz zu A. Connes' Buch (,The reader of the book should not expect proofs of theorems.' V.F.R. Jones) wird in diesem Buch grundsätzlich jeder Satz bewiesen, oder zumindest ein konkreter Verweis auf die Literatur gegeben. Die Beweise sind im allgemeinen kurz und prägnant und in vielen Fällen erheblich einfacher als die Orginalbeweise, auf die üblicherweise in der Literatur verwiesen wird. Einige der zentralen Resultate werden sogar auf verschiedenen Abstraktionsebenen diskutiert, um beim Leser auch ein anschauliches Verständnis zu ermöglichen. Überhaupt wird von den Autoren die große Spanne zwischen einer sehr abstrakten, funktoriellen Perspektive und ganz konkreten Rechnungen wie beim (nichtkommutativen) Torus, der Sphäre S^2 und insbesondere allen Details zu Clifford-Algebren und Spin-Geometrie ausgewogen und souverän abgedeckt. Oftmals wird es als Einstiegshürde in A. Connes' Nichtkommutative Geometrie empfunden, daß man für ein wirklich fundamentales Verständnis fast alle großen Gebiete der Mathematik simultan in die nichtkommutative Sprache zu übersetzen hat. In diesem Zusammenhang ist den Autoren ein Meisterstück gelungen, indem sie den Leser in nahezu selbsterklärender Weise auf einer Geodäte zu den interessanten Themen leiten. Während allerdings A. Connes' Buch angefüllt ist mit interessanten, zum Teil sogar vagen, Ideen und dort viele offene Fragen aufgeworfen werden, stellen sich die hier behandelten Themen – abgesehen vom vierten Paragraphen – mehr oder weniger abgeschlossenen dar. Auch wenn es nicht das wesentliche Ziel eines Lehrbuchs ist, hätten hier ein paar Worte mehr zu aktuellen offenen Fragen nicht geschadet. Insgesamt ist das Buch in vier große Paragraphen ,Topology', ,Calculus and Linear Algebra', ,Geometry' und ,Trends' unterteilt. In den ersten zwei Paragraphen werden unter anderem die später benötigten technischen Werkzeuge für die letzten zwei Paragraphen zur Verfügung gestellt. Der letzte Paragraph, welcher sich mit den neuesten Entwicklungen beschäftigt, ist stärker als der Rest des Buches durch Ideen aus der mathematischen Physik geprägt.

Im ersten Paragraphen werden die Grundlagen von ,Nichtkommutativer Topologie' und somit die erste Motivation für Nichtkommutative Geometrie erarbeitet. Zentrale

Themen sind der Satz von Gelfand-Naĭmark und Diskussion einiger topologischer Begriffe aus der dualen Perspektive. Ein Schnellkurs in die, für das Thema entscheidenden, C^*-Algebra-Grundlagen sowie einige Hopf-Algebra-Basics sind in zwei technischen Anhängen zusammengefasst. Das nächste Kapitel ist einer ausführlichen Diskussion des Satzes von Serre-Swan und dessen Bedeutung gewidmet. Danach werden kurz die relevanten Ergebnisse aus der K-Theorie von C^*-Algebren vorgestellt, und das letzte Kapitel beschäftigt sich mit verallgemeinerten Fredholm-Operatoren auf C^*-Moduln. Insgesamt ist der erste Paragraph mit der abstrakteste des Buches und kann wegen des großen Themenumfangs schwerlich einem Anspruch nach Vollständigkeit genügen.

Der zweite Paragraph ist zunächst wesentlich konkreter und weniger abstrakt. In den ersten zwei Kapiteln werden die Grundlagen von endlich-dimensionalen Cliffordalgebren und deren Darstellungen, sowie auch der unendlich-dimensionale Fall, welcher für Quantenfeldtheorie von großer Bedeutung ist, auf sehr ausführliche und selbsterklärende Weise behandelt. Hier können die Autoren insbesondere auch auf eigene Resultate zurückgreifen. Besondere Aufmerksamkeit wird dem Satz von Shale-Stinespring und dessen Bedeutung für die Quantenfeldtheorie zugemessen. Im nächsten Kapitel wird die nichtkommutative Integrationstheorie behandelt. Auch wenn hier die Resultate alle bereits mehr oder weniger bekannt sind, so werden die verschiedensten Perspektiven in einer Vollständigkeit und Klarheit diskutiert, wie sie bisher in der Literatur nur schwer zu finden war. Die Anhänge über Pseudodifferentialoperatoren, Homogene Distributionen und Ideale von kompakten Operatoren erweisen sich als hilfreich für den Leser, der bisher über keine Kenntnisse zu diesen Themen verfügt. Das letzte Kapitel gibt einen Abriß über nichtkommutative Differential-Kalküle. Es werden die universelle Differentialalgebra, Zyklen und deren Realisierung mit Fredholm Moduln, Zusammenhänge, nichkommutative Chern-Charakter und Hochschild Homologie vorgestellt. Als Abschluß und Höhepunkt des Kapitels wird Connes' verallgemeinerte (duale) Version des Satzes von Hochschild-Kostant-Rosenberg ausführlich diskutiert und bewiesen.

Der dritte Paragraph ist wohl als Herzstück des Buches anzusehen. Vorrangiges Ziel ist es, Connes' ‚Spin Mannigfaltigkeitssatz' zunächst zu motivieren und dann auch zu beweisen. Der erste Abschnitt stellt die Bausteine von klassischer Spin-Geometrie aus einer algebraischen Perspektive vor. Es werden Clifford-Moduln, Spin^c- und Spin-Strukturen diskutiert und zentrales Thema sind die algebraischen und analytischen Eigenschaften von (verallgemeinerten) Dirac-Operatoren. Zur Vertiefung werden diese Strukturen dann am Beispiel der Sphäre S^2 konkret identifiziert. Im zweiten Abschnitt ‚Spectral Triples' wird gezeigt, wie einige der zuvor diskutierten Größen in eine operatortheoretische Sprache zu übersetzen sind. Einer Einführung in die zyklische Kohomologie, als Verallgemeinerung der de Rham-Homologie, folgt eine Diskussion von Chern-Charakteren aus dieser Perspektive. Im nächsten Abschnitt werden einige nützliche operationelle Formeln erst Eigenschaften von Gruppen-C^*-Algebren diskutiert, um danach an dem Paradebeispiel des nichtkommutativen Torus die zuvor abstrakt diskutierten Eigenschaften einer Spin-Geometrie konkret zu identifizieren. Der zweite Abschnitt gibt einen Abriß ausgewählter mathematischer Aspekte von Quantenfeldtheorien. Zentrales Thema ist die Dyson-Entwicklung für QED in äußeren Feldern. Wie auch im folgenden Kapitel, können hier die Autoren auf aktuelle eigene Resultate zurückgreifen. Im letzten Kapitel des Buches werden als jüngste Entwicklungen die Hopf-Algebren von Wurzelbäumchen diskutiert. Neben rein mathematischen Aspekten wie Dualität, dem Zusammenhang mit Diffeomorphismengruppen und zyklischer Kohomologie von Hopf-Algebren wird auch die Bedeutung dieser Strukturen bei der Renormierung von Feynman-Graphen kurz angesprochen.

Auch wenn das Buch nicht viele bisher unbekannte Resultate enthält, so ist die Auswahl der Themen und deren Darstellung von einzigartiger Qualität und Klarheit. Es ist den Autoren gelungen, dem Leser einen großen Teil von A. Connes' Wörterbuch zwischen der kommutativen- und nichkommutativen Welt nahezubringen. Vielleicht hätte man jedoch an manchen Stellen etwas deutlicher zwischen dem absolut etablierten ‚Marmor' und dem (noch) ‚Holz' unterscheiden können. Gerade in einem sich noch heftig entwickelnden Gebiet wie der Nichtkommutativen Geometrie ist eine solche Unterscheidung für weitere Fortschritte absolut entscheidend. Natürlich ist, wie hier auch eindrucksvoll demonstriert wird, die klassische Spin-Geometrie eine ideale Startbasis für eine Reise in die nichtkommutative Welt. Jedoch werden Axiome auf einer solchen Basis schnell zu Dogmen die dann nur schwer zu ändern sind, falls sich doch der eine oder andere Punkt langfristig als nicht so praktikabel erweist wie erwartet. Insgesamt betrachte ich *EONCG* als wertvolles Komplement zu A. Connes' Meilenstein *Noncommutative Geometry*. Die Autoren haben hier erst einmal Maßstäbe gesetzt, und es ist gut möglich, daß sich *EONCG* als Standardreferenz für die nächsten Jahre etablieren wird.

Münster M. Walze

Reiter, H., Stegman, J. D., Classical Harmonic Analysis and Locally Compact Groups, London Math. Soc. Monographs, New Series **22**, Oxford Science Publications, 2000, 327 S., £ 60,–

Klassische Harmonische Analysis im Sinne des vorliegenden Buches bezieht sich auf den Zweig der Analysis, der sich aus den Arbeiten von Wiener und Carleman zu Fourierintegralen im euklidischen Raum durch die Verallgemeinerung auf den Kontext lokalkompakter abelscher Gruppen entwickelt hat. Der Weg hierzu wurde in erster Linie durch A. Weils richtungsweisende Monographie „L'intégration dans les groupes topologiques et ses applications" (1940) bereitet. Gegenstand der Theorie ist die Analyse der Faltungsalgebra $L^1(G)$ einer lokalkompakten abelschen Gruppe G. Ein wesentlicher Vorteil des abstrakten Kontextes ist, daß er eine einheitliche Behandlung der Theorie der Fourierreihen ($G = \mathbb{T}$, die Kreisgruppe), der Fouriertransformation ($G = \mathbb{R}^n$), der endlichen Fouriertransformation (G endlich) und auch der vor allem in der Zahlentheorie wichtigen Gruppen p-adischer Zahlen erlaubt. Hinzu kommt, daß durch den allgemeinen Zugang wichtige Zusammenhänge wie die Poissonsche Summationsformel in einen sehr natürlichen Kontext gestellt werden.

Das zentrale Werkzeug der harmonischen Analysis ist die Fouriertransformation. Im klassischen Kontext denken wir sie uns als Abbildung

$$\mathcal{F}\colon L^1(\mathbb{R}^\nu) \to C_0(\mathbb{R}^\nu), \quad \mathcal{F}(f) = \widehat{f}(x) := \int_{\mathbb{R}^\nu} e^{-2\pi i \langle x,t\rangle} f(t)\, dt.$$

Hierbei steht C_0 für die stetigen Funktionen, die im Unendlichen verschwinden. Im Kontext der lokalkompakten Gruppen ersetzt man $\mathbb{R}^\nu$ durch eine lokalkompakte Gruppe G, das Lebesgue-Maß durch ein Haarsches Maß dg und erhält so eine Abbildung

$$\mathcal{F}: L^1(G) \to C_0(\widehat{G}), \quad \mathcal{F}(f) = \widehat{f}(\chi) := \int_G \overline{\chi(g)} f(g)\, dg,$$

wobei $\widehat{G} := \mathrm{Hom}(G, \mathbb{T})$ die Gruppe der stetigen Homomorphismen in die Kreisgruppe $\mathbb{T}$ ist, die wir mit der kompakt-offenen Topologie versehen. Ein zentraler Punkt ist, daß $\widehat{G}$ hierdurch wieder zu einer lokalkompakten Gruppe wird und die Theorie dadurch eine bemerkenswerte Symmetrie zwischen G und $\widehat{G}$ erhält, denn die Charaktergruppe von $\widehat{G}$ ist wieder isomorph zu G. Ist G kompakt, so ist $\widehat{G}$ diskret und umgekehrt, so daß man insbesondere eine Dualität zwischen kompakten abelschen und diskreten abelschen Gruppen erhält.

Die Fouriertransformation ist ein injektiver Algebrenhomomorphismus, der $L^1(G)$ auf eine Algebra $\mathcal{F}^1(G)$ (die *Fourieralgebra*) stetiger Funktionen auf dem lokalkompakten Raum $\widehat{G}$ abbildet. Ziel ist es nun, die Struktur der Algebra $L^1(G)$ dadurch zu verstehen, daß man Eigenschaften der Unteralgebra $\mathcal{F}^1(G)$ von $C_0(\widehat{G})$ studiert. Dies wird

dadurch erschwert, daß die Fourieralgebra nicht in der Topologie der gleichmäßigen Konvergenz auf $\widehat{G}$ abgeschlossen ist, so daß Banachalgebra-Methoden nicht sehr effektiv einzusetzen sind. Man kann sich zwar dadurch behelfen, daß man $\mathcal{F}^1(G)$ mit der Norm versieht, die $\mathcal{F}$ zu einer Isometrie macht, aber diese Norm ist natürlich aus der Perspektive von $\widehat{G}$ sehr implizit.

Das Buch nähert sich dieser Thematik dadurch, daß im ersten Kapitel zunächst wichtige Resultate über $L^1(\mathbb{R}^\nu)$ diskutiert werden. Hier wird insbesondere der Satz von Wiener-Levy diskutiert, der im wesentlichen besagt, daß man auf jeder kompakten Teilmenge $K \subseteq \mathbb{R}^\nu$ Funktionen $\widehat{f}$ in der Fourieralgebra in auf $\widehat{f}(K)$ holomorphe Funktionen einsetzen darf und das Ergebnis auf K wieder durch ein Element der Fourieralgebra be-

Teilmenge mit verstreutem Rand (der Rand enthält keine nichtleeren abgeschlossenen Teilmengen ohne isolierte Punkte) ist eine Spektralsynthesemenge. Für metrische Räume ist diese Bedingung in dem Sinne scharf, daß sie das bestmögliche Resultat unabhängig von $\mathcal{A}(X)$ ist. Am Ende des Kapitels wird insbesondere die Schwartzsche Konstruktion von Teilmengen von $\mathbb{R}^\nu$ diskutiert, die keine Spektralsynthesemengen sind.

Kapitel 3 führt das Haarsche Maß auf nicht notwendigerweise abelschen lokalkompakten Gruppen ein. Insbesondere werden hier auch entsprechende Verallgemeinerungen der Beuerling-Algebren diskutiert. Ein Schwerpunkt liegt auf den Beziehungen zwischen $L^1(G)$ und $L^1(G/H)$ für abgeschlossene normale Untergruppen $H \trianglelefteq G$.

In Kapitel 4 wird eine Zusammenfassung der wichtigsten Aspekte der harmonischen Analysis auf abelschen lokalkompakten Gruppen gegeben. Wegen der späteren Anwendungen wird hier das Prinzip der Relativierung in den Vordergrund gestellt, bei dem man zu einer abgeschlossenen Untergruppe $H \subseteq G$ und einer Funktion f auf G die Einschränkung auf die Nebenklassen gH von H betrachtet und so eine Abbildung von G/H in Funktionen auf H erhält, auf die man z. B. die Fouriertransformation von H punktweise anwenden kann.

Zusammengeführt werden die verschiedenen Stränge in Kapitel 5, wo Funktionenräume auf lokalkompakten abelschen Gruppen systematisch studiert werden. Insbesondere wird hier gezeigt, daß die Fourieralgebra $\mathcal{F}^1(G)$ eine Wieneralgebra ist und die abstrakte Poissonsche Summationsformel bewiesen.

Verfeinert werden diese Resultate in Kapitel 6, in dessen Zentrum Verallgemeinerungen des Wienerschen Satzes stehen. Hier betrachtet man spezielle Klassen von Funktionenalgebren: Segal-Algebren und Beuerling-Algebren.

Weiter verfeinert wird die Theorie in Kapitel 7, in dem das „Spektrum“ einer beschränkten meßbaren Funktion auf G über das Annullatorideal des entsprechenden Faltungsoperators auf $L^1(G)$ definiert wird. Eine schöne Anwendung der Kombination von gruppentheoretischen und analytischen Methoden in diesem Abschnitt ist die Charakterisierung von Spektralsynthesemengen in Abschnitt 7.1. Auch hier werden Beuerling-Algebren ausführlich diskutiert.

Kapitel 8 beschäftigt sich wieder mit allgemeinen lokalkompakten Gruppen. Hier werden L^1-Räume auf G/H für allgemeine abgeschlossene Untergruppen bzgl. quasiinvarianter Maße betrachtet. Den Schwerpunkt bildet eine breite Diskussion von a priori verschiedenen Eigenschaften, die die *mittelbaren* lokalkompakten Gruppen charakterisieren.

Zu der Darstellung des Materials ist zu sagen, daß es dem Leser durch die zahlreichen historischen Anmerkungen leicht gemacht wird, die Entstehung der zentralen Ergebnisse durch die verschiedenen Abstraktionsstufen hindurch nachzuvollziehen. Dies entspricht der allgemeinen Strategie des Buches, von speziellen und klassischen Ergebnissen durch Abstraktion und Verallgemeinerung zu den zentralen Sätzen der Theorie vorzustoßen. Was man fast gänzlich vermißt, sind Einleitungen zu den einzelnen Kapiteln und Abschnitten, die der globalen Orientierung des Lesers innerhalb des Buches dienen, und erläutern, was die nächsten Schritte sind und wohin sie führen werden. Was das Buch ebenfalls gut ergänzt hätte, wären Erläuterungen der Bezüge zu Nachbargebieten gewesen, in denen die hier vorgestellten Ergebnisse verwertet werden.

Das vorliegende Buch ist eine Neuausgabe von Hans Reiter's Monographie des gleichen Titels, die 1968 bei Oxford, Clarendon Press, erschien und seinerzeit einen beträchtlichen Einfluß auf viele Bereiche der harmonischen Analysis hatte. Viele der dargestellten Ergebnisse gehen wesentlich auf seine Arbeiten zurück. Jan D. Stegman hat nun, nach Reiters Tod, das Manuskript vollständig überarbeitet und durch Ergänzungen einigen neueren Entwicklungen in der harmonischen Analysis Rechnung getragen. Insbesondere wurde das Buch ergänzt durch zwei neue Anhänge mit neuem Material und zusätzlichen Anmerkungen und Referenzen. Gerade in den letzten Jahren hat die harmonische Analysis durch die Theorie der Wavelets und der schnellen Fouriertransformation neue aktuelle Bedeutung erlangt, die es notwendig macht, daß die entsprechende Grundlagenliteratur in Lehrbuchform verfügbar ist. Das vorliegende Buch ist schon lange ein Klassiker und ihm gebührt nach wie vor sein Platz in der Lehrbuchliteratur, insbesondere als Brücke zwischen der euklidischen harmonischen Analysis und der abstrakten harmonischen Analysis, bzw. der Theorie der Banachalgebren.

Darmstadt K.-H. Neeb

Andrews, G. E., Askey, R. and Roy, R., Special Functions (Encyclopedia of Mathematics and Its Applications), Cambridge University Press, Taschenbuchausgabe, 2000, 664 S., £ 22,95

In früheren Zeiten fand ein mathematisches Ergebnis häufig in einer Formel seinen Ausdruck. Eisenstein und Kronecker sahen diese Art der Mathematik geradezu als den Idealfall an. Im zwanzigsten Jahrhundert richtete sich jedoch die Mathematik mehr auf Abstraktion und Existenzaussagen aus. Hardy sah Ramanujan um 100 Jahre zu spät gekommen und Littlewood rechnete die große Zeit der Formeln bereits der Vergangenheit an.

Seit den letzten 30 Jahren scheinen jedoch Formeln, wie sie in der Theorie der speziellen Funktionen gewonnen werden, wieder zunehmend Interesse zu finden. Das mag einerseits daran liegen, daß mit modernen Computern ein bequemes Arbeiten mit Formeln möglich wurde, zum anderen aber auch an einigen hervorragenden mathematischen Persönlichkeiten wie etwa Richard Askey.

Die Autoren des vorliegenden Buches bekennen sich jedenfalls uneingeschränkt zu einer Mathematik der Formeln, und es gelingt ihnen, ihre Begeisterung auch auf den Leser zu übertragen. Ihre Darstellung ist sehr historisch ausgerichtet. Sie präsentieren hervorragende, zum festen Grundbestand gehörende Beiträge von Euler, Legendre, Laplace, Gauß, Kummer, Eisenstein, Riemann, Ramanujan und einigen anderen, sie graben einige alte Ergebnisse aus, deren Bedeutung offenbar verkannt wurde, und sie nehmen neuere Ergebnisse auf, die ihrer Ansicht nach mehr Aufmerksamkeit verdienen und zum Grundwissen einer neuen Generation von Mathematikern im Gebiet der speziellen Funktionen gehören sollten. Die Autoren interessieren sich dabei nicht nur für die Ergebnisse selbst, sondern immer auch für den Weg, der dahin führt. Zu vielen Theoremen geben sie mehrere Beweise an und analysieren deren unterschiedliche Leistungsfähigkeit. So wird der Leser mit den Methoden vertraut. Ferner gehen die Autoren intensiv auf Anwendungen ein, auch wenn sie damit in andere Gebiete vordringen. Andererseits stellen sie auch klar, daß es nicht möglich ist, das gesamte Wissen über spezielle Funktionen in einem einzigen Buch zu erfassen und verweisen auf einige neuere Bücher, die sich mit verschiedenen speziellen, in dem vorliegenden Buch nicht behandelten Themen befassen.

Es sei nun detailliert auf den Inhalt eingegangen. Zentrales Anliegen des gesamten Buches sind die hypergeometrischen Reihen. Für deren Verständnis werden im ersten Kapitel die Gamma- und die Betafunktion behandelt, wobei die Autoren die letztere bevorzugt als Betaintegral bezeichnen, um in Hinblick auf mögliche Verallgemeinerungen den Aspekt eines *Integrals* hervorzuheben. Neben den bekannten Ergebnissen von Euler, Gauß und Bohr–Mollerup, den Verbindungen mit der Zetafunktion und der von Kummer stammenden Fourier-Entwicklung von $\log \Gamma(x)$ werden auch Analoga der Gamma- und Betafunktion für endliche Körper und die p-adische Gammafunktion vorgestellt.

Im zweiten Kapitel werden die hypergeometrischen Reihen als jene Reihen $\sum c_n$ eingeführt, bei denen der Quotient c_{n+1}/c_n eine rationale Funktion in n ist, die nach Zerlegung des Zähler- und Nennerpolynoms in Linearfaktoren den Vorfaktor x besitzt. Wenn man eventuell noch so erweitert, daß im Nennerpolynom der Faktor $n+1$ vorkommt und dann das Zählerpolynom den Grad p und das Nennerpolynom den Grad $q+1$ besitzt, so wird $\sum c_n$ zu einer hypergeometrischen Reihe des Typs ${}_pF_q(x)$. Der Fall ${}_2F_1(x)$ ergibt die hypergeometrischen Funktionen. Für diese werden drei verschiedene Zugänge, nämlich eine Integraldarstellung von Euler, der Weg über Differentialgleichungen zweiter Ordnung nach Riemann–Papperitz und die Kurvenintegraldarstellung nach Barnes, behandelt.

Das dritte Kapitel beschäftigt sich mit hypergeometrischen Transformationen und Identitäten. Unter anderem wird hier die Berechnung elliptischer Integrale durch sukzessive arithmetische und geometrische Mittelungen als eine Anwendung vorgestellt. Ferner werden mit Hilfe von ${}_4F_3$ die Wilson-Polynome eingeführt. Sie hängen von vier Parametern ab und erfassen die Jacobi-Polynome als Grenzfall.

Das vierte Kapitel widmet sich den konfluenten hypergeometrischen Funktionen, den Whittaker-Funktionen und einer umfassenden Behandlung der Bessel-Funktionen. Da letztere die trigonometrischen Funktionen verallgemeinern, bieten sich einige Zielsetzungen in natürlicher Weise an. Auch auf die Bedeutung der Bessel-Funktionen in der mehrdimensionalen Fourier-Transformation wird eingegangen.

In den Kapiteln fünf bis sieben werden orthogonale Polynome behandelt. Nachdem im fünften Kapitel die grundlegenden Eigenschaften und Formeln orthogonaler Polynome, die Gauß-Quadratur und die Beziehung zu Kettenbrüchen erarbeitet werden, beschäftigt sich das sechste Kapitel mit den klassischen orthogonalen Polynomen, also den Jacobi-Polynomen, den Laguerre-Polynomen und den Hermite-Polynomen. Damit wird auch wieder die Beziehung zum grundlegenden Thema hergestellt, denn die klassischen orthogonalen Polynome lassen sich durch hypergeometrische Reihen darstellen. Zwei auch noch in der modernen Forschung aktuelle Themen sind die Linearisierung von Produkten orthogonaler Polynome und Verbindungen zwischen orthogonalen Polynomen und Kombinatorik. Im siebten Kapitel werden einige spezielle Themen angehängt. Erwähnt seien: die Darstellung des Jacobi-Polynoms $P_n^{(\gamma,\delta)}$ in der Form $\sum_{k=0}^{n} c_{nk} P_k^{(\alpha,\beta)}$; die Positivität von Summen von Jacobi-Polynomen mit einem Ergebnis, das für de Branges in seinem Beweis der Bieberbachschen Vermutung von entscheidender Bedeutung war; ein Beweis der Irrationalität von $\zeta(3)$ nach Beukers (1979) mit Hilfe der Legendre-Polynome.

Das achte Kapitel widmet sich dem Selberg-Integral, das als eine mehrdimensionale Verallgemeinerung des Betaintegrals angesehen wird. Eine zentrale Rolle spielt die Selberg-Formel, für die zwei Beweise angegeben werden. Als Anwendungen werden Verbindungen zu einem Extremalproblem von Stieltjes hergestellt, und es werden die Diskriminanten der klassischen orthogonalen Polynome berechnet. Am Ende des Kapitels werden Analoga für endliche Körper behandelt.

Das neunte Kapitel beschäftigt sich mit den Kugelfunktionen. Neben der Herleitung ihrer wichtigsten Formeln wird auch auf ihre Bedeutung in der mehrdimensionalen Fourier-Analysis und auf ihre Verbindung zu den ultrasphärischen Polynomen eingegan-

Ein großer Teil dieses Kapitels widmet sich Anwendungen auf irreduzible Darstelrationale Funktion in q^n mit einem Vorfaktor x ist. Vor diesem allgemeinen Zugang wird das Interesse für q-Erweiterungen bekannter Formeln mit einem Beispiel aus der Kombinatorik geweckt. Das Kapitel enthält q-Erweiterungen für die Fakultäten, die Binomialformel, die Integration, die Gammafunktion, das Betaintegral und die ultrasphärischen Polynome. Die q-Erweiterung von $n!$ ist z. B. definiert durch

$$n!_q := (1+q)(1+q+q^2)\cdots(1+q+\cdots+q^{n-1}) = (1-q)^{-n}\prod_{\nu=1}^{n}(1-q^{\nu}).$$

Großes Gewicht erhält eine Summenformel von Ramanujan für die gleich drei verschiedene Beweise angegeben werden. Als Anwendung wird die Darstellung von ganzen Zahlen durch Summen von Quadraten behandelt. Die q-Analysis bietet auch einen geeigneten Rahmen zur Einführung und Untersuchung der Thetafunktionen und der elliptischen Funktionen.

Das relativ kurze elfte Kapitel beschäftigt sich ausschschließlich mit Anwendungen von q-Formeln in der Theorie der Partitionen.

Das letzte und ebenfalls sehr kurze zwölfte Kapitel trägt den Titel *Bailey Chains.* Zentrales Ergebnis ist ein Lemma von Bailey, das zeigt, wie man aus zwei linear mit gewissen q-Ausdrücken als Koeffizienten verknüpften Folgen, einem sogenannten Bailey-Paar, zwei neue Folgen gewinnen kann, die genau dieselbe Verknüpfung besitzen. Durch wiederholte Anwendung ergibt sich eine unendliche Folge von Bailey-Paaren, genannt eine Bailey-Kette. Es werden mehrere Anwendungen von Bailey-Ketten angegeben.

Das Buch endet mit einem sechsteiligen Anhang, in dem, um eventuelle Lücken in den Vorkenntnissen des Lesers zu füllen, Grundlegendes über unendliche Produkte, Limitierung, asymptotische Entwicklung, die Euler-Maclaurin-Formel Formel, die Langrangesche Inversionsformel und das Lösen von Differentialgleichungen durch Reihen

Wie bei nordamerikanischen Autoren üblich, enthält das Buch auch Aufgaben, sogar sehr viele. In manchen Kapiteln sind es mehr als 50, und selbst die verschiedenen Teile des Anhangs sind noch mit Aufgaben versehen. Diese Aufgaben machen einen sehr ansprechenden Eindruck. Sie ergänzen den behandelten Stoff oder führen zu weiteren interessanten Zugängen. In manchen Aufgaben werden für eine gewisse Formel mehrere verschiedene Beweise verlangt. Die oft anzutreffende Unsitte, daß Autoren ihre Beweise auf die eleganten Teile beschränken und den Rest in eine Aufgabe abschieben, hält sich hier sehr in Grenzen. Lösungen werden nicht angegeben. In manchen Fällen, etwa wenn für eine Reihe ein geschlossener Ausdruck zu finden ist, wäre die Kenntnis des Ergebnisses wünschenswert.

Wenn jemand primär daran interessiert ist, eine Formelsammlung für spezielle Funktionen zu besitzen, so ist er mit dem vorliegenden Buch vermutlich nicht optimal bedient. Wer dagegen das Gebiet der speziellen Funktionen von Grund auf kennenlernen möchte, der bekommt mit diesem Buch einen hervorragenden Zugang. Die einzelnen Kapitel beginnen mit einfachen und überzeugenden Motivationen. Der didaktische Aufbau

Hedenmalm, H., Korenblum, B., Zhu, K., Theory of Bergman Spaces (Graduate Texts in Math. 199), Berlin u. a., Springer, 2000, 286 S., DM 109,–

A function $f(z)$ analytic in the unit disk $|z| < 1$ is in the *Bergman space* A^p if $|f|^p$ has finite area integral, where $0 < p < \infty$. It is in the *Hardy space* H^p if the integrals $\int |f(re^{i\theta})|^p \, d\theta$ over circles $|z| = r < 1$ remain bounded as $r \to 1$. Thus $H^p \subset A^p$.

The theory of Hardy spaces was well developed by 1960. Zero-sets are easily determined, Blaschke products serve as isometric zero-divisors, there is a canonical factorization into *inner* and *outer* functions, invariant subspaces (invariant under multiplication by polynomials) have a simple description, and there are elegant theories of extremal problems and interpolation. Corresponding problems for the Bergman spaces were long considered intractible, but the last decade has seen remarkable progress. Hedenmalm [3] constructed contractive zero-divisors in A^2, and the extension to A^p (by Khavinson, Shapiro, Sundberg, and the reviewer [2]) revealed an intimate connection with the biharmonic Green function. Seip [4] gave complete descriptions of interpolation and sampling sets for A^2 in terms of certain densities. The invariant subspaces of A^2 were known to be far more complicated than those of H^2, but Aleman, Richter, and Sundberg [1] found a general structural formula. Completing earlier work of Korenblum, they also obtained a credible analogue for A^p of inner-outer factorization, where the "outer functions" are precisely the cyclic elements of A^p.

The book by Hedenmalm, Korenblum, and Zhu gives an authoritative account of these new developments and many other topics. Ambitious in scope, it culminates with technical accounts of cyclic vectors of the growth space $\mathcal{A}^{-\infty}$ and Korenblum's theory of premeasures, the Borichev–Hedenmalm construction of noncyclic invertible functions in A^p, and the Hedenmalm-Jacobsson-Shimorin theory of logarithmically subharmonic weights, which applies to generalize the contractive property of canonical divisors.

Since the book appears in a series called "Graduate Texts in Mathematics" and contains a number of exercises, it may appear to be a book for beginners. It will not be easy reading, however, for the uninitiated. Basic principles are hastily dispatched, some proofs are incomplete, and many of the exercises are quite difficult. On the other hand, the book offers fresh perspectives on recent developments and older topics alike, making those results more accessible to workers in Bergman spaces and related fields. As a research monograph, the book is a valuable resource and a very welcome addition to the literature.

[1] A. Aleman, S. Richter, and C. Sundberg, "Beurling's theorem for the Bergman space", *Acta Math.* **177** (1996), 275–310.

[2] P. Duren, D. Khavinson, H.S. Shapiro, and C. Sundberg, "Contractive zero-divisors in Bergman spaces", *Pacific J. Math.* **157** (1993), 37–56.

[3] H. Hedenmalm, "A factorization theorem for square area-integrable analytic functions", *J. Reine Angew. Math.* **422** (1991), 45–68.

[4] K. Seip, "Beurling type density theorems in the unit disk", *Invent. Math.* **113** (1994), 21–39.

University of Michigan Peter Duren

Neuauflage

Heinz Bauer

Wahrscheinlichkeits-theorie

2001. 24 x 17 cm. XX, 520 Seiten.
Broschur. DM 73,90 /öS 539,–* /
sFr 65,– /approx. US$ 37.00
Ab 1.1.2002: € 36,95 [D]

• ISBN 3-11-017236-4

(de Gruyter Lehrbuch)

lichkeitstheorie. Es gibt gute und ausführliche Literaturhinweise und ist für jede Stochastik-Bibliothek unumgänglich notwendig.“

„Die verschiedenen Ausgaben und Auflagen des Bauerschen Werkes über Wahrscheinlichkeits- und Maßtheorie haben einen kaum zu überschätzenden Einfluß auf die

The World of Applied Mathematics