

# Jahresbericht

der Deutschen Mathematiker-Vereinigung

Herausgegeben von A. Krieg  
unter Mitwirkung von  
U. Gather, E. Heintze, B. Kawohl,  
H. Lange, H. Triebel



# Jahresbericht

der Deutschen Mathematiker-Vereinigung

Der „Jahresbericht“ ist das offizielle Veröffentlichungsorgan der Deutschen Mathematiker-Vereinigung, für dessen inhaltliche Gestaltung im Auftrag des Präsidiums der jeweilige Herausgeber zuständig ist. Im „Jahresbericht“ sollen vornehmlich Überblicksartikel über Teilgebiete der reinen und angewandten Mathematik, Nachrufe sowie historische Artikel und Buchbesprechungen veröffentlicht werden.

## Manuskripte:

Alle für die Schriftleitung des Jahresberichts bestimmten Briefe und Manuskripte sind an Prof. Dr. A. Krieg zu richten. Für Buchbesprechungen ist Prof. Dr. H. Lange zuständig. Bücher, von denen eine Besprechung erfolgen soll, werden bei den Verlagen angefordert. Autoren von Buchbesprechungen und Artikeln werden gebeten, die vorhandenen LATEX-style-files für den Jahresbericht zu verwenden. Somit kann der Aufwand für die Satzarbeiten erheblich reduziert werden. Sollten Illustrationen in die Arbeiten integriert werden, können diese auch in das Satzsystem übernommen werden. Dazu ist es erforderlich, dass die Daten der Abbildungen nochmals in separaten Dateien einzeln abgespeichert werden. Die LATEX-style-files sind neben weiteren Informationen im Internet verfügbar unter

<http://www.mathA.rwth-aachen.de/dmv/index.html>

Auf Anfrage können die style-files auch auf Diskette zugeschickt werden. Grundsätzlich sollen nur solche Manuskripte eingereicht werden, die nicht gleichzeitig an anderer Stelle zur Veröffentlichung eingereicht oder bereits veröffentlicht worden sind. Mit der Annahme zur Veröffentlichung erwirbt der Verlag das Recht zur Vervielfältigung und Verbreitung sowie das Recht der Übersetzung in andere Sprachen.

## Verlag:

GWV Fachverlage  
B. G. Teubner GmbH Stuttgart · Leipzig · Wiesbaden  
Postfach 1546, 65173 Wiesbaden  
Abraham-Lincoln-Straße 46, 65189 Wiesbaden  
<http://www.teubner.de>  
<http://www.gwv-fachverlage.de>

*Geschäftsführer:* Dr. Hans-Dieter Haenel  
*Verlagsleitung:* Dr. Heinz Weinheimer  
*Gesamtleitung Anzeigen:* Thomas Werner  
*Gesamtleitung Produktion:* Reinhard van den Hövel  
*Gesamtleitung Vertrieb:* Heinz Detering

## Abo-/Leserservice:

Tatjana Hellwig  
Telefon: (06 11) 78 78-1 51  
Fax: (06 11) 78 78-4 23  
E-Mail: [tatjana.hellwig@bertelsmann.de](mailto:tatjana.hellwig@bertelsmann.de)

## Marketing/Sonderdrucke:

Stefanie Hoffmann  
Telefon: (06 11) 78 78-3 79  
Fax: (06 11) 78 78-4 39  
E-Mail: [stefanie.hoffmann@bertelsmann.de](mailto:stefanie.hoffmann@bertelsmann.de)

## Abonnentenverwaltung:

(Änderungen von Adressen und Bankverbindung, Rückfragen zu Rechnungen oder Mahnung) VVA-Zeitschriftenservice, Abt. D6F6 / Jahresbericht der Deutschen Mathematiker-Vereinigung,  
Postfach 7777, 33310 Gütersloh  
Ursula Müller  
Telefon: (0 52 41) 80-19 65  
Fax: (0 52 41) 80-96 20  
E-Mail: [ursula.mueller@bertelsmann.de](mailto:ursula.mueller@bertelsmann.de)

## Bezugsbedingungen:

Die Zeitschrift erscheint 4mal jährlich zum Jahresabonnementspreis von € 95,- (158,- sFr) inkl. Versandkosten. Der Bezug von Einzelheften ist nicht möglich. Schriftliche Kündigung des Abonnements spätestens sechs Wochen vor Ablauf des Bezugsjahres.  
Für persönliche Mitglieder der DMV, die den Jahresbericht zu beziehen wünschen, ist der zwischen DMV und Verlag vereinbarte Bezugspreis maßgebend, der im Rahmen des Mitgliedsbeitrags erhoben wird.

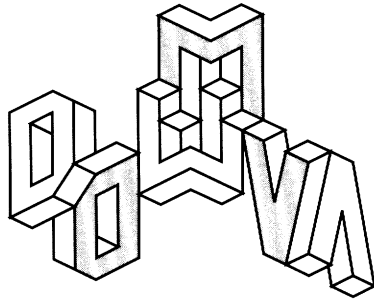
## Copyright ©

B. G. Teubner GmbH Stuttgart · Leipzig · Wiesbaden 2001. Printed in Germany. Der Verlag Teubner ist ein Unternehmen der Fachverlagsgruppe BertelsmannSpringer. Alle Rechte vorbehalten. Kein Teil dieser Zeitschrift darf ohne schriftliche Genehmigung des Verlages vervielfältigt oder verbreitet werden. Unter dieses Verbot fällt insbesondere die gewerbliche Vervielfältigung per Kopie, die Aufnahme in elektronischen Datenbanken und die Vervielfältigung auf CD-ROM und allen anderen elektronischen Datenträgern.

Satz: Fotosatz Behrens, D-68723 Oftersheim  
Druck: pagina media gmbh, D-69502 Hemsbach

ISSN 0012-0456

Beilagenhinweis: Diese Ausgabe enthält eine Fremdbeilage des Stern-Verlages Janssen & Co., Düsseldorf und eine Verlegerbeilage. Wir bitten unsere Leser um Beachtung



# Jahresbericht

der Deutschen Mathematiker-Vereinigung

104. Band

Herausgegeben von A. Krieg  
unter Mitwirkung von  
U. Gather, E. Heintze, B. Kawohl,  
H. Lange, H. Triebel



© B. G. Teubner GmbH Stuttgart/Leipzig/Wiesbaden, 2002

Der Teubner Verlag ist ein Unternehmen der Fachverlagsgruppe BertelsmannSpringer.

Alle Rechte vorbehalten. Kein Teil dieser Zeitschrift darf ohne schriftliche Genehmigung des Verlages vervielfältigt oder verbreitet werden. Unter dieses Verbot fällt insbesondere die gewerbliche Vervielfältigung per Kopie, die Aufnahme in elektronischen Datenbanken und die Vervielfältigung auf CD-ROM und allen anderen elektronischen Datenträgern.

Satz: Fotosatz Behrens, Oftersheim

Druck und buchbinderische Verarbeitung: pagina media gmbh, Hemsbach

Gedruckt auf säurefreiem und chlorfrei gebleichtem Papier

Printed in Germany

ISSN 0012-0456

Übersichtsartikel	Historischer Artikel	Buchbesprechungen
-------------------	----------------------	-------------------

<b>On the character space of commutative hypergroups</b>	3
R. Lasser . . . . .	3
<b>Wagners Vermutung und das Graphen-Minoren Projekt</b>	17
D. Rautenbach . . . . .	17
<b>Discriminants, Resultants and a Conjecture of S. Halperin</b>	26
V. Hauschild . . . . .	26
<b>Two Problems in Economics</b>	51
I. Ekeland . . . . .	51
<b>Von den Linienkoordinaten zu Regelvarietäten</b>	59
G. Fischer . . . . .	59
<b>Domain decomposition in optimal control problems for distributed parameter systems</b>	91
J. E. Lagnese, G. Leugering . . . . .	91
<b>Gitter und Modulformen</b>	125
G. Nebe . . . . .	125
<b>Atoms of Topology</b>	147
H.-J. Baues . . . . .	147
<b>Cantor's Set Theory from a Modern Point of View</b>	165
Sy D. Friedman . . . . .	165
<b>Fraktale Analysis aus der Sicht der Funktionenräume</b>	171
H. Triebel . . . . .	171

Übersichtsartikel	Historischer Artikel	Buchbesprechungen
-------------------	----------------------	-------------------

<b>Leopold Vietoris zum Gedächtnis</b>	75
H. Reitberger . . . . .	75

Übersichtsartikel	Historischer Artikel	Buchbesprechungen
-------------------	----------------------	-------------------

<b>H. Niederreiter, C. P. Xing: Rational Points on Curves over Finite Fields</b>	1
H. Stichtenoth . . . . .	1
<b>J. von zur Gathen, J. Gerhard: Modern Computer Algebra</b>	2
W. Decker . . . . .	2
<b>K. Hulek: Elementare Algebraische Geometrie</b>	4
Ch. Birkenhake . . . . .	4
<b>M. Väth: Volterra and Integral Equations of Vector Functions</b>	5
N. Jacob . . . . .	5
<b>K. Sato: Lévy Processes and Infinitely Divisible Distributions</b>	6
R. Schilling . . . . .	6
<b>T. M. Liggett: Stochastic Interacting Systems: Contact, Voter and Exclusion Processes</b>	10
A. Klenke . . . . .	10

<b>R. Korn, E. Korn: Option Pricing and Portfolio Optimization</b>	11
M. Schweizer . . . . .	11
<b>T. Rolski, H. Schmidli, V. Schmid, J. Teugels: Stochastic Processes for Insurance and Finance</b>	
D. Tasche . . . . .	13
<b>J. Nocedal, S. J. Wright: Numerical Optimization</b>	
J. Jahn . . . . .	14
<b>J. Appell, A. S. Kalitvin, P. P. Zabrejko: Partial Integral Operators and Integro-Differential Equations</b>	
N. Jacob . . . . .	15
<b>K. J. Engel, R. Nagel: One-Parameter Semigroups of Linear Evolution Equations</b>	
M. Demuth . . . . .	16
<b>R. G. Bartle: A Modern Theory of Integration</b>	
S. Graf . . . . .	18
<b>M. Hazewinkel (Ed.): Handbook of Algebra, Volume 2</b>	
H.-J. Nastold . . . . .	21
<b>B. Bolzano: Functionenlehre</b>	
B. Bolzano . . . . .	

<b>T. Needham: Anschauliche Funktionentheorie</b>	
Th. Bröcker . . . . .	25
<b>A. Juhl: Cohomological Theory of Dynamical Zeta Functions</b>	
J. Hilgert . . . . .	27
<b>K.-H. Neeb: Holomorphy and Convexity in Lie Theory</b>	
G. Ólafsson . . . . .	30
<b>A. Uchiyama: Hardy spaces on the Euclidean space</b>	
H. Triebel . . . . .	33
<b>J.-P. Aubin: Mutational and Morphological Analysis</b>	
K.-P. Hadeler . . . . .	34
<b>L. Ambrosio, N. Dancer: Calculus of Variations and Partial Differential Equations</b>	
M. Grüter . . . . .	36
<b>M. Chipot: Elements of Nonlinear Analysis</b>	
H. Kielhöfer . . . . .	37
<b>A. M. Etheridge: An Introduction to Superprocesses</b>	
A. Klenke . . . . .	39
<b>M. Eidi, B. Habala, B. Hejhal, V. Montesinos-Samartín, J. D. M. Jones, V. Ziz</b>	
. . . . .	

<b>G. Fischer, J. Pionkowski: Ruled Varieties</b>	45
E. Serresi . . . . .	45
<b>D. Burago, Y. Burago, S. Ivanov: A Course in Metric Geometry</b>	46
W. Ballmann . . . . .	46
<b>M. R. Murty: Problems in Analytic Number Theory</b>	48
S. J. Patterson . . . . .	48
<b>E. Krätzel: Analytische Funktionen in der Zahlentheorie</b>	49
S. J. Patterson . . . . .	49
<b>R. Carroll: Quantum Theory, Deformation and Integrability</b>	51
P. Vanhaecke . . . . .	51
<b>W. Arendt, C. J. K. Batty, M. Hieber, F. Neubrander: Vector-valued Laplace Transforms and Cauchy Problems</b>	52
R. Nagel . . . . .	52
<b>D. Eisenbud, D. R. Grayson, M. Stillman, B. Sturmfels: Computations in Algebraic Geometry with Macaulay 2</b>	55
S. Müller-Stach . . . . .	55
<b>C. F. Dunkl, Y. Xu: Orthogonal Polynomials of Several Variables, Encyclopedia of Mathematics and Its Applications</b>	57
H. J. Schmid . . . . .	57





**Vorwort** ..... 145

Übersichtsartikel	Historischer Artikel	Buchbesprechungen
-------------------	----------------------	-------------------

**Atoms of Topology**

H.-J. Baues ..... 147

**Cantor's Set Theory from a Modern Point of View**

Sy D. Friedman ..... 165

**Fraktale Analysis aus der Sicht der Funktionenräume**

H. Triebel ..... 171

Übersichtsartikel	Historischer Artikel	Buchbesprechungen
-------------------	----------------------	-------------------

**D. Eisenbud, D. R. Grayson, M. Stillman, B. Sturmfels: Computations in Algebraic Geometry with Macaulay 2**

S. Müller-Stach ..... 55

**C. F. Dunkl, Y. Xu: Orthogonal Polynomials of Several Variables, Encyclopedia of Mathematics and Its Applications**

H. J. Schmid ..... 57

### In den nächsten Heften erscheinende Arbeiten

**P. Ullrich:** Die Weierstraßschen „analytischen Gebilde“:  
Alternativen zu Riemanns „Flächen“ und Vorböten der komplexen Räume

---

### Anschriften der Herausgeber

Prof. Dr. Aloys Krieg, Lehrstuhl A für Mathematik, RWTH Aachen, 52056 Aachen  
E-Mail: [krieg@mathA.rwth-aachen.de](mailto:krieg@mathA.rwth-aachen.de)

Prof. Dr. Ursula Gather, Lehrstuhl für Mathematische Statistik und industrielle  
Anwendungen, Universität Dortmund, 44221 Dortmund  
E-Mail: [gather@statistik.uni-dortmund.de](mailto:gather@statistik.uni-dortmund.de)

Prof. Dr. Ernst Heintze, Institut für Mathematik, Universität Augsburg, 86135 Augsburg  
E-Mail: [heintze@math.uni-augsburg.de](mailto:heintze@math.uni-augsburg.de)

Prof. Dr. Bernhard Kawohl, Mathematisches Institut, Universität zu Köln, 50923 Köln  
E-Mail: [kawohl@mi.uni-koeln.de](mailto:kawohl@mi.uni-koeln.de)

Prof. Dr. Herbert Lange, Mathematisches Institut, Friedrich-Alexander-Universität  
Erlangen-Nürnberg, Bismarckstraße 1 $\frac{1}{2}$ , 91054 Erlangen  
E-Mail: [lange@mi.uni-erlangen.de](mailto:lange@mi.uni-erlangen.de)

Prof. Dr. Hans Triebel, Mathematisches Institut, Friedrich-Schiller-Universität,  
Ernst-Abbe-Platz 1–4, 07740 Jena  
E-Mail: [triebel@minet.uni-jena.de](mailto:triebel@minet.uni-jena.de)

### Bezugshinweis

Früher erschienene Bände (ab Band 68) des „Jahresberichts der Deutschen Mathematiker-Vereinigung“ können durch den Buchhandel oder den Verlag bezogen werden.

Nachdruck der Bände 41 bis 67 liefert: Swets & Zeitlinger, Heerweg 347 b, POB 810,  
NL-2160 SZ Lisse/Holland

## Vorwort

In diesem Heft finden Sie neben den Buchbesprechungen und der Arbeit von Herrn Baues die Ausarbeitungen der Plenarvorträge auf der diesjährigen DMV-Jahrestagung in Halle von Herrn Friedman und Herrn Triebel.

Die DMV-Tagung hatte als Schwerpunkt die mathematische Modellbildung in den Naturwissenschaften. Die Anwendungsorientierung wurde durch einen speziellen Industrie-Nachmittag unterstrichen. Aufgrund des Umfeldes von Halle spielte dabei die chemische Industrie eine besondere Rolle. Obwohl die Anwendungsorientierung in der letzten Zeit immer wieder gefordert wurde und die Veranstalter großes Engagement gezeigt haben, ist der erwartete größere Zuspruch leider ausgeblieben. Sicherlich werden in den kommenden Jahren weitere Organisationsformen getestet werden, damit die DMV-Jahrestagung der zentrale Treffpunkt der deutschen Mathematikerinnen und Mathematiker bleibt.

Sie werden in den nächsten Heften weitere Ausarbeitungen von Haller Plenarvorträgen finden. Neben den bis jetzt erschienenen Arbeiten von Herrn Friedman, Frau Nebe und Herrn Triebel haben noch Frau Hefendehl-Hebeler, Herr Mohnke und Herr Schuster Beiträge zugesagt.

A. Krieg



Übersichtsartikel

Historischer Artikel

Buchbesprechungen



We can think of Topology as the theory of spaces. A priori, one has for each  $n = 1, 2, 3, \dots$  an Euclidean space  $\mathbb{R}^n$  of dimension  $n$ . For  $n = 1$  this is the real line  $\mathbb{R}$  whose points are real numbers. Moreover  $\mathbb{R}^2$  is the plane. The 3-dimensional space  $\mathbb{R}^3$  is closest to our intuition and figures which we can see in the real world can be described by subsets of  $\mathbb{R}^3$ . In general  $\mathbb{R}^n$  consists of all tuples  $x = (x_1, \dots, x_n)$  where  $x_1, \dots, x_n$  are real numbers in  $\mathbb{R}$ .

In the following a *space* means a subset of an Euclidean space  $\mathbb{R}^n$  of arbitrary dimension so that spaces are very general geometrical figures. Spaces or figures are like topological molecules in which, as we show, a plan of molecular structure is deeply hidden. We use the analogy between spaces and molecules as a helpful tool to explain the mathematical results in this paper. In nature molecules have the well known properties in table 1.

#### Atoms in Nature

- (a) Each *molecule* splits into atoms; in order to obtain the splitting one needs *forces* of chemistry.
- (b) Atoms are indecomposable with respect to ...

The determination of atoms in topology leads to two outstanding problems of Mathematics: On the one hand the *computation of stable homotopy groups of spheres* which is equivalent to the computation of a list of atoms with 2 cells, and on the other hand the *universal problem of representation theory* (see table 3) which is equivalent to the determination of a complete list of atoms of dimension 9.

## 1 Finite spaces

Two spaces  $X$  and  $Y$  are *homeomorphic* if there exist continuous maps  $f : X \rightarrow Y$  and  $g : Y \rightarrow X$  such that the composites  $fg = 1_Y$  and  $gf = 1_X$  are the identity maps. A class of homeomorphic spaces is called a *homeomorphism type*. We identify homeomorphic spaces and we write  $X \approx Y$  if there is a homeomorphism  $X \rightarrow Y$ .

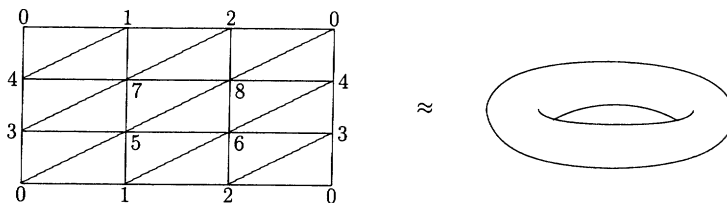
Homotopy types are equivalence classes of spaces which are considerably larger

$\Delta^n$ . There are “substructures”  $S$  of a simplex obtained by the union of several faces, that is,

$$S = \Delta_{a_1} \cup \Delta_{a_2} \cup \dots \cup \Delta_{a_k} \subset \Delta^n \text{ with } a^1, \dots, a^k \subset \{0, \dots, n\}.$$

*Finite polyhedra* are topological spaces  $X$  homeomorphic to such substructures  $S$  of simplexes  $\Delta^n, n \geq 0$ . A homeomorphism  $S \approx X$  is called a *triangulation* of  $X$ . Hence a polyhedron  $X$  is a space in which we do not see any simplexes. We can introduce simplexes in  $X$  via triangulation.

For example the *torus* is the product  $S^1 \times S^1$  of two 1-spheres. A triangulation of the torus is obtained as in the following picture:



Here the corresponding subsets  $a^i \subset \{0, \dots, 8\}$  are defined by triangles. In the sketch we use the fact that the torus  $S^1 \times S^1$  is obtained from the square by identifying sides in the boundary; for example the edge connecting vertices 0 and 3 on the left hand side is identified with the corresponding edge on the right hand side.

The initial problem of topology (Seifert and Threlfall [ST] called it the main problem) is the classification of homotopy types of finite polyhedra. A great deal of J. H. C. Whitehead’s work focused on this problem. Compare the article of Hilton-James [HJ].

**(1.1) Definition** A space  $X$  is *finite* if there exists a finite polyhedron homotopy equivalent to  $X$ .

The *dimension* of a polyhedron  $X$  is the maximal dimension of a simplex which can appear in a triangulation of  $X$ . The *homotopy dimension*  $\dim(X)$  of a finite space  $X$  is the minimal dimension of a polyhedron homotopy equivalent to  $X$ . Hence the homotopy dimension of a finite space  $X$  is an invariant of the homotopy type of  $X$ .

The *n-sphere*  $S^n$  is the set of all points  $x$  in  $\mathbb{R}^{n+1}$  with  $\|x\| = 1$  and the *(n + 1)-ball*  $B^{n+1}$  is the set of all  $x \in \mathbb{R}^{n+1}$  with  $\|x\| \leq 1$ . The sphere  $S^n$  is the boundary  $\partial B^{n+1}$  of  $B^{n+1}$ . A space  $X$  is *(n – 1)-connected* if each continuous map  $S^i \rightarrow X$  with  $i \leq n – 1$  admits a continuous extension  $B^{i+1} \rightarrow X$ . We call  $n – 1 = \text{conn}(X)$  the *connectivity* of  $X$  if  $X$  is  $(n – 1)$ -connected but not  $n$ -connected.

The complexity of a homotopy type in general is largely measured by the dimension and, for a given dimension, the complexity diminishes as the connectivity increases.

A space  $X$  is *contractible* if  $X$  is homotopy equivalent to a point. For a contractible space  $X$  we have  $\text{conn}(X) = \infty$  since  $X$  is  $n$ -connected for all  $n$  and  $\dim(X) = 0$ . All balls  $B^n$  are contractible. The torus  $S^1 \times S^1$  is 0-connected but not 1-connected so that  $\text{conn}(S^1 \times S^1) = 0$ .

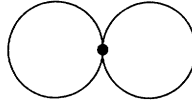
We need the notion of suspension originally termed „Einhangung“ by Freudenthal [F]. Given a space  $X$  we define the *suspension*  $\Sigma X$  of  $X$  as follows. For  $X \subset \mathbb{R}^n$  we





## 2 Atoms

We consider the *decomposition* of spaces. The *one point union*  $A \vee B$  of two spaces  $A$  and  $B$  is obtained by choosing points  $a_0 \in A$  and  $b_0 \in B$  and by identifying  $a_0$  and  $b_0$ ; i.e. by gluing the point  $a_0$  to the point  $b_0$ . The following picture shows the one point union  $S^1 \vee S^1$  of two 1-spheres  $S^1$



We have inclusions  $i_1 : A \rightarrow A \vee B$  and  $i_2 : B \rightarrow A \vee B$ . If  $A$  and  $B$  are 0-connected polyhedra then the homotopy type of  $A \vee B$  does not depend on the choice of the points  $a_0 \in A$  and  $b_0 \in B$ . The space  $X$  is *decomposable* if  $X$  is homotopy equivalent to a one point union  $A \vee B$  where  $A$  and  $B$  are non-contractible; otherwise  $X$  is *indecomposable*. We also call  $X \simeq A \vee B$  a *splitting of  $X$* .

For example the sphere  $S^n$ ,  $n \geq 1$ , is indecomposable. We are now ready to introduce the notion of an atom in topology.

**(2.1) Definition.** An *atom* is a finite space  $X$  which is indecomposable and satisfies

$$\dim(X) = 2\text{conn}(X) + 1.$$

Each atom  $X$  yields the sequence of *suspended atoms*  $X, \Sigma X, \Sigma^2 X, \dots, \Sigma^n X, \dots$ .

The 1-sphere  $S^1$  is an atom. The sphere  $S^n$  with  $n \geq 2$  is not an atom but a suspended atom  $S^n = \Sigma^{n-1} S^1$ . The next lemma yields property  $B$  in table 2.

**(2.2) Lemma.** *All suspended atoms are indecomposable. If suspended atoms  $\Sigma^k X \simeq \Sigma^k Y$  are homotopy equivalent then the atoms  $X \simeq Y$  are homotopy equivalent.*

Hence an atom  $X$  is indecomposable in the strong sense that  $X$  is indecomposable and also all iterated suspensions of  $X$  are indecomposable. In addition each iterated suspension of  $X$  determines the homotopy type of  $X$ . Such a property does not hold for an indecomposable space with  $\dim(X) > 2\text{conn}(X) + 1$ . For example the product  $S^n \times S^n$  of two spheres  $S^n$  has  $\text{conn}(S^n \times S^n) = n - 1$  and  $\dim(S^n \times S^n) = 2n$ . Such a product is indecomposable as a space but this property is not preserved by suspension since there is a homotopy equivalence

$$\Sigma(S^n \times S^n) \simeq S^{n+1} \vee S^{n+1} \vee S^{2n+1}$$

showing that  $\Sigma(S^n \times S^n)$  is decomposable.

**(2.3) Proposition.** *A finite space  $Y$  with*

$$(*) \quad \dim(Y) \leq 2\text{conn}(Y) + 1$$

*is homotopy equivalent to a finite one point union  $Y_1 \vee \dots \vee Y_r$  of suspended atoms  $Y_i$  with*

$$\text{conn}(Y) \leq \text{conn}(Y_i) < \dim(Y_i) \leq \dim(Y)$$

*for  $i = 1, \dots, r$ . (Here the empty one point union with  $r = 0$  denotes a point.)*

The next corollary yields for each finite space  $X$  atoms  $A_1, \dots, A_r$  associated to  $X$ . This corresponds to property (A) in table 2.

**(2.4) Corollary.** *Let  $X$  be any finite space. Then there are atoms  $A_1, \dots, A_r$  such that for appropriate natural numbers  $k, k_1, \dots, k_r \geq 0$  one has a homotopy equivalence*

$$\Sigma^k X \simeq \Sigma^{k_1} A_1 \vee \dots \vee \Sigma^{k_r} A_r$$

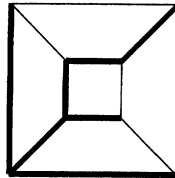
According to proposition (2.3) we have the following applications of theorem (2.5) on the classification of homotpy types.

**(2.6) Corollary.** *A 0-connected 1-dimensional finite space is homotopy equivalent to a finite one point union of 1-spheres  $S^1$ .*

This result is classical and has the following well known proof. Let  $X$  be a 0-connected 1-dimensional space so that  $X$  is homotopy equivalent to a connected graph  $Y$ . We can choose in  $Y$  a maximal tree  $T$  and by contracting the tree  $T$  to a point we obtain a homotopy equivalence

$$X \simeq Y \simeq S^1 \vee \dots \vee S^1$$

between  $X$  and a one point union of 1-spheres. For example the edges of a cube form a graph which is homotopy equivalent to a one point union of five 1-spheres:



The bold edges in the sketch describe a maximal tree.

Property (A) of atoms in table 2 describes a higher dimensional analogue of the old result (2.6) on connected graphs. As a next application of theorem (2.5) we get the following well known fact.

**(2.7) Corollary.** *A 1-connected 3-dimensional finite space is homotopy equivalent to a finite one point union of spheres  $S^2, S^3$  and Moore atoms.*

This result can be used to show that a 1-connected 3-dimensional manifold  $M$  is homotopy equivalent to a 3-sphere (the Poincaré conjecture claims that  $M$  is actually homeomorphic to the 3-sphere). Moreover corollary (2.7) is crucial for the classification of 1-connected 5-dimensional manifolds  $N$  (see Barden [Ba] and Stoecker [St]) since the complement of a point in  $N$  is a 1-connected 3-dimensional finite space.

The next application of theorem (2.5) is originally due to J. H. C. Whitehead [W1] and Chang [Ch].

**(2.8) Corollary.** *A 2-connected 5-dimensional finite space is homotopy equivalent to a finite one point union of spheres  $S^3, S^4, S^5$ , suspended Moore atoms, and Chang atoms.*

Moreover the next corollary of theorem (2.5) is proved in [BH].

**(2.9) Corollary.** *A 3-connected 7-dimensional finite space is homotopy equivalent to a finite one point union of spheres  $S^4, S^5, S^6, S^7$ , suspended Moore atoms suspended*

*Chang atoms and sequence-atoms.*

The complexity of atoms of dimension 9 involves the universal problem of representation theory in table 3. Therefore we cannot classify atoms of dimension  $\geq 9$  in general. We can, however, look at subclasses of atoms satisfying for example certain “homological” conditions.

In 1895 Poincaré introduced the *homology*  $H_n(X)$  of a polyhedron  $X$  which is an abelian group depending only on the homotopy type of  $X$ . Moreover this group is compatible with suspension, that is  $H_n(X) = H_{n+1}(\Sigma X)$ . In 1932 P. Alexandroff [A] wrote an introductory essay „Einfachste Grundbegriffe der Topologie“ on polyhedra and homology. Nowadays homology is one of the most important mathematical concepts.

The Moore atom  $M_q$  can be characterized by homology groups since  $M_q$  up to homotopy equivalence is the unique finite space which is 1-connected and satisfies  $H_2(M_q) = \mathbb{Z}/q\mathbb{Z}$  and  $H_n(M_q) = 0$  for  $n \neq 2$ .

**(2.10) Definition.** We say that a finite space  $X$  (or an atom  $X$ ) is *torsion free* if all homology groups  $H^n(X) \cong \mathbb{Z}^{\beta_n}$  are finitely generated free abelian groups,  $n \geq 0$ . Here the rank  $\beta_n$  is the  $n$ -th *Betti number* of  $X$ .

It is not possible to compute all atoms of dimension 9. If we restrict, however, to torsion free atoms we are able to classify them up to dimension 11, see [BD1,BD2,BD3].

**(2.11) Theorem.** For  $n \leq 13$  the number  $A(n)$  of all torsion free atoms of dimension  $n$  is given by the following table 4.

$n$	1	3	5	7	9	11	13
$A(n)$	1	0	1	1	67	324	infinite

Table 4

Moreover the computation of all torsion free atoms of dimension 21 requires the solution of the universal problem of representation theory, see table 3.

We shall describe the atoms of theorem (2.11) more explicitly in table 10 below in

terms of graphs which look like *lightning flashes*. Theorem (2.11) shows that up to dimension 11 there exists only a finite number of torsion free atoms and this number is 394. In

by identifying points  $y \in S^{m-1} \subset B^m$  with  $f(y) \in X$ . We call the subspace  $e^m = B^m - S^{m-1} \subset X \cup_f e^m$  a *cell* and the image  $f(S^{m-1})$  in  $X$  the *boundary* of the cell  $e^m$ . We shall consider spaces

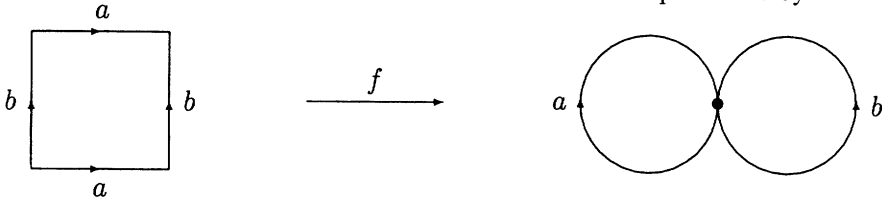
$$(3.2) \quad Y = (S^{n_1} \vee \dots \vee S^{n_k}) \cup e^{m_1} \cup \dots \cup e^{m_r}$$

obtained from a one point union  $S^{n_1} \vee \dots \vee S^{n_k}$  of spheres by inductive cell attachments where  $n_1, \dots, n_k, m_1, \dots, m_r \geq 1$ . The sphere  $S^n$  is considered to be a space with one  $n$ -cell obtained by the cell attachment  $* \cup e^n$ . Here  $*$  is the space consisting of a point. Therefore the space  $Y$  in 3.2 has  $k + r$  cells. Each finite *cell complex*  $Y$  as defined in (3.2) is a finite space in the sense of definition (1.1).

It is a lot more economical to use cell complexes instead of polyhedra. For example the torus  $S^1 \times S^1$  can be described by the cell attachment

$$S^1 \times S^1 \approx (S^1 \vee S^1) \cup_f e^2$$

where the attaching map  $f : S^1 \rightarrow S^1 \vee S^1$  is the commutator map sketched by



Hence the torus has 3 cells while the triangulation of the torus in section 1 uses 30 1-simplexes and 18 2-simplexes.

The cell attachment for a map  $\alpha : S^{m-1} \rightarrow S^n$  between spheres yields the cell-complex

$$(3.3) \quad S^n \cup_\alpha e^m.$$

If  $\alpha$  is homotopic to a map  $\beta : S^{m-1} \rightarrow S^n$  then there is a homotopy equivalence  $S^n \cup_\alpha e^m \simeq S^n \cup_\beta e^m$ . The homotopy type of  $S^n \cup_\alpha e^m$  is therefore defined by the element  $\alpha \in \pi_{m-1}(S^n)$  where  $\pi_{m-1}(S^n)$  is the set of homotopy classes<sup>3</sup> of maps  $S^{m-1} \rightarrow S^n$ . This set which canonically has the structure of an abelian group is termed a *homotopy group of a sphere*.

For example  $\pi_1(S^1) = \mathbb{Z}$ . Here the map  $q : S^1 \rightarrow S^1$  with  $q \in \mathbb{Z}$  carries  $x \in S^1 \subset \mathbb{C}$  to the  $q$ -th power  $x^q = x \cdot \dots \cdot x \in S^1$  where we use the multiplication of complex numbers. The suspension  $\Sigma^{n-1} q = q : S^n \rightarrow S^n$  is the map of Brouwer degree  $q \in \mathbb{Z}$ .

between spheres,  $S^{n+k} \rightarrow S^n$

$n=3$	$n=4$	$n=5$	$n=6$	$n=7$	$n=8$	$n=9$	$n=10$	$n=11$
$\infty$	$\infty$	$\infty$	$\infty$	$\infty$	$\infty$	$\infty$	$\infty$	$\infty$
$2$	$2$	$2$	$2$	$2$	$2$	$2$	$2$	$2$
$2$	$2$	$2$	$2$	$2$	$2$	$2$	$2$	$2$
$12$	$\infty + 12$	$24$	$24$	$24$	$24$	$24$	$24$	$24$
$2$	$(2)^2$	$2$	$0$	$0$	$0$	$0$	$0$	$0$
$2$	$(2)^2$	$2$	$\infty$	$0$	$0$	$0$	$0$	$0$
$3$	$24+3$	$2$	$2$	$2$	$2$	$2$	$2$	$2$
$15$	$15$	$30$	$60$	$120$	$\infty + 120$	$240$	$240$	$240$
$2$	$2$	$2$	$24+2$	$(2)^3$	$(2)^4$	$(2)^3$	$(2)^2$	$(2)^2$
$(2)^2$	$(2)^3$	$(2)^3$	$(2)^3$	$(2)^4$	$(2)^5$	$(2)^4$	$\infty + (2)^3$	$(2)^3$

For a prime power  $q = p^i \in \pi_2 S^2 = \mathbb{Z}$  the cell complex  $M_q = S^2 \cup_q e^3$  is the Moore atom in theorem (2.5). Moreover for  $n \geq 3$  each non trivial map  $\alpha \in \pi_{2n-2}(S^n)$  yields a torsion free atom  $S^n \cup_\alpha e^{2n-1}$  with 2-cells.

Hence the computation of all atoms with 2-cells requires the computation of stable homotopy groups of spheres. It remains one of the greatest challenges of Mathematics to compute and determine the structure of these homotopy groups. Serre [S] showed the surprising result that  $\pi_{2n-2}(S^n)$  is finite for all  $n \geq 3$ .

The distinguished nature of elements in homotopy groups of spheres is exemplified by the classical Hopf maps. The Hopf maps  $2 : S^1 \rightarrow S^1$ ,  $\eta : S^3 \rightarrow S^3$  and  $\nu : S^7 \rightarrow S^4$  are attaching maps for the projective planes

$$\mathbb{R}P_2 = S^1 \cup_2 e^2$$

$$\mathbb{C}P_2 = S^2 \cup_\eta e^4$$

$$\mathbb{H}P_2 = S^4 \cup_\nu e^8$$

The suspension of these projective planes are atoms as mentioned above. Here the suspension of  $S^n \cup_\alpha e^m$  satisfies  $\Sigma(S^n \cup_\alpha e^m) = S^{n+1} \cup_{\Sigma\alpha} e^{m+1}$  where  $\Sigma\alpha$  is the suspension of the map  $\alpha$ . The suspensions  $\Sigma\eta$  and  $\Sigma\nu$  generate the stable groups  $\pi_4 S^3 = \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$  and  $\pi_8 S^4 = \mathbb{Z}/24\mathbb{Z}$  respectively.

In order to define the *Hopf map*  $\eta : S^3 \rightarrow S^2$  (see [Ho]) we use the multiplication map

$$\mu : S^1 \times S^1 \rightarrow S^1$$

which carries  $(x, y)$  with  $x, y \in S^1 \subset \mathbb{C}$  to the product  $\mu(x, y) = x \cdot y$  of complex numbers<sup>4</sup>. For  $0 \leq \lambda \leq 1$  and  $x \in S^1$  we get  $\lambda x \in B^2$ . Now the Hopf map  $\eta$  is the composite

$$\eta : S^3 = \partial(B^2 \times B^2) = B^2 \times S^1 \cup S^1 \times B^2 \xrightarrow{\bar{\eta}} \Sigma S^1 = S^2$$

where  $\bar{\eta}$  carries  $(\lambda x, y)$  to  $(1 - \lambda)N + \lambda(x \cdot y) \in \Sigma S^1$  and carries  $(x, \lambda y)$  to  $(1 - \lambda)S + \lambda(x \cdot y) \in \Sigma S^1$ . In table 25 we show a perspective view of the Hopf map due to W. A. Dreckmann. This view describes for various points  $x \in S^2$  the fibers  $\eta^{-1}(x) \subset S^3 = * \cup e^3 \approx * \cup \mathbb{R}^3$ .

The quaternionic *Hopf map*  $\nu : S^7 \rightarrow S^4$  is defined by the multiplication map

$$\mu : S^3 \times S^3 \rightarrow S^3$$

which carries  $(x, y)$  with  $x, y \in S^3 \subset \mathbb{H} = \mathbb{R}^4$  to the product  $\mu(x, y) = x \cdot y$  of quaternionic numbers<sup>5</sup>. We obtain  $\nu$  by the composite

$$\nu : S^7 = \partial(B^4 \times B^4) = B^4 \times S^3 \cup S^3 \times B^4 \xrightarrow{\bar{\nu}} \Sigma S^3 = S^4$$

where  $\bar{\nu}$  is defined in terms of  $\mu$  similarly as  $\bar{\eta}$  above.



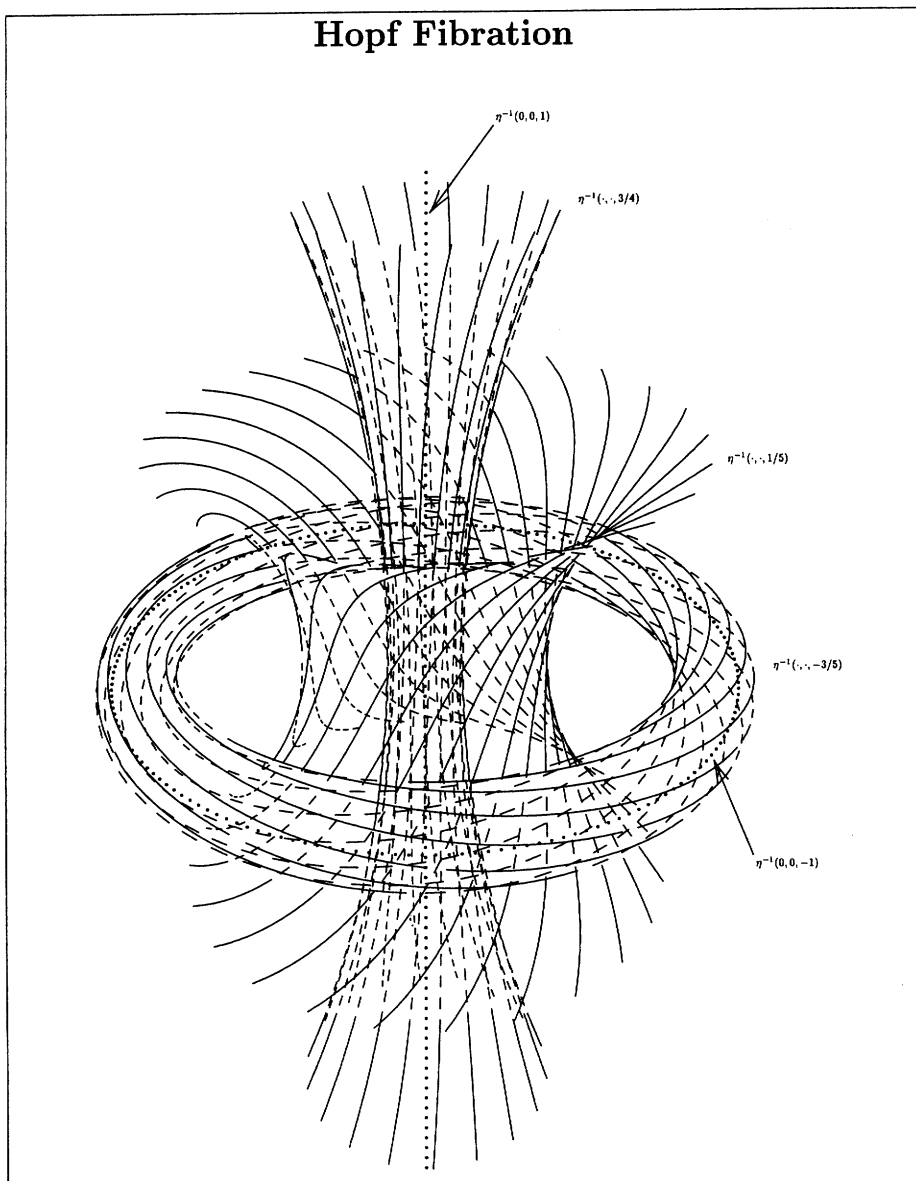


Table 6

## 4 The cell structure of atoms

The cell structure of atoms of low dimension can be described by certain connected graphs with vertices of level  $n = 1, 2, \dots$ . Such a vertex of level  $n$  describes a cell of dimension  $n$  (which is a sphere  $S^n$  if the vertex is not connected by an edge to a vertex of lower level). The edges characterize the attaching maps of cells.

For example atoms of dimension  $\leq 5$  are described by the graphs in table 7. The Chang atom corresponding to the graph at the right hand side of table 7 is accordingly a cell complex of the form  $S^3 \vee S^4 \cup e^4 \cup e^5$  with 4 cells.

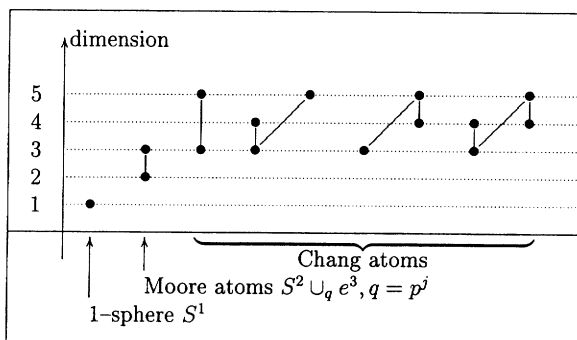


Table 7

The atoms of dimension 7 can be described similarly by connected finite subgraphs of maximal height in the infinite sequences of table 8. We therefore call the atoms of dimension 7 also “sequence-atoms”, see [BH], [B1], [B2]. The vertical edges in a Chang atom or in a sequence-atom are associated with a power of the prime 2 describing a direct summand of the homology of the atom.

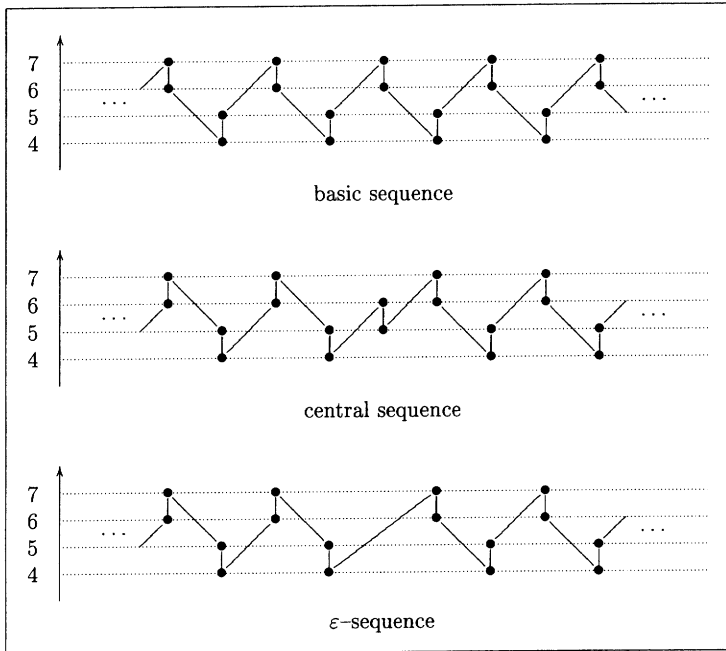


Table 8

For example a complete list of all atoms of dimension 7 for which homology groups are cyclic torsion groups is described by the graphs in table 9.

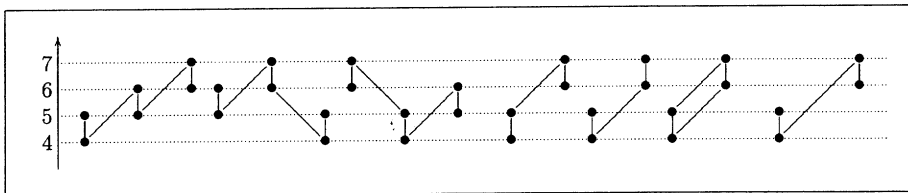


Table 9

Finally the lightning-flash-atoms in table 10 form a complete list of torsion free atoms of dimension  $\leq 11$ . Such atoms have at most 6 cells. A number in the bottom line of table 10 indicates the number of possible realizations of the corresponding graph as a cell-complex according to the choice of attaching maps. For example, a cell complex given by the graph at the right hand side of table 10 has the form  $S^6 \vee S^7 \vee S^8 \cup e^{10} \cup e^{11}$  and there are 36 possibilities to choose attaching maps. In a similar way one gets the cell structure of all torsion free atoms of dimension  $\leq 11$  by the lightning-flash graphs in table 10.

In order to achieve results on the classification of atoms as described in theorem (2.5) and theorem (2.12) one first has to translate the purely topological problem into an algebraic problem. For this we use methods of Algebraic Topology as developed in

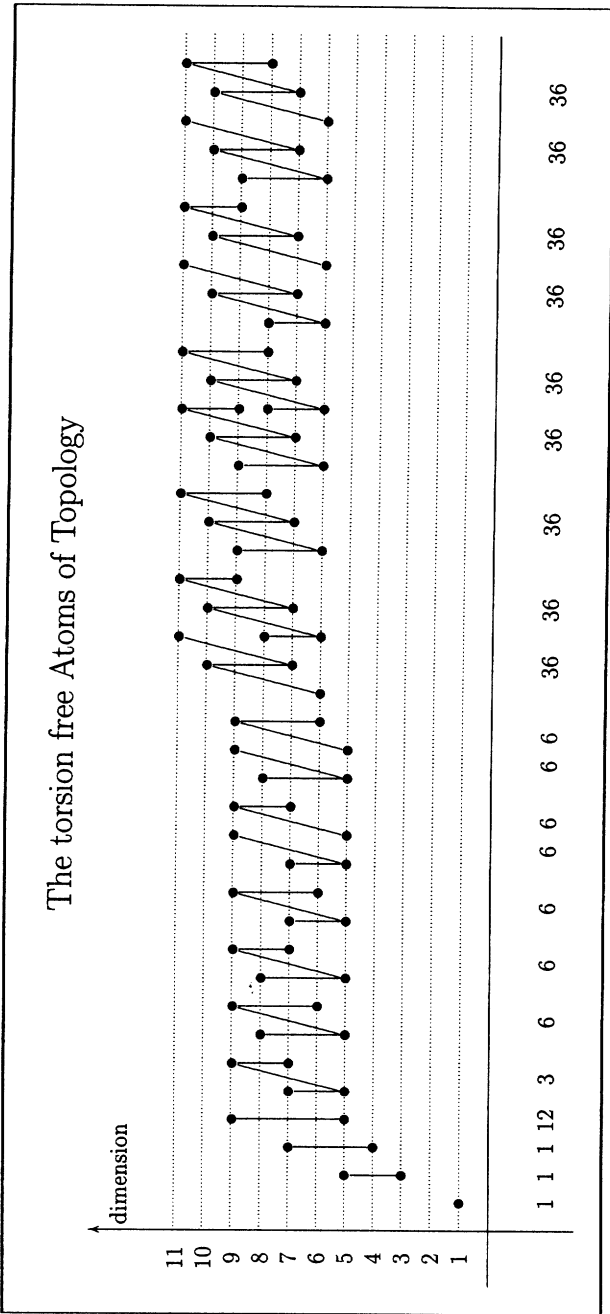


Table 10

the book [B1]; see also [U1], [U2] and [BG]. Then the highly sophisticated algebraic problem has to be transformed into an equivalent matrix problem which can be solved by methods of Representation Theory. For example the computation of torsion free atoms of dimension 11 in [BD3] leads to a ring  $R$  determined by the  $21 \times 21$ -matrix  $(M_{ij})$  in table 11. The ring  $R$  consists of all  $21 \times 21$ -matrices  $(A_{ij})$  for which  $A_{ij} \in \mathbb{Z}$  is divisible by  $M_{ij}$ . The classification of indecomposable matrices over this ring  $R$  yields the result on 11-dimensional torsion free atoms in table 10.

	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20	21	
1	1	2	2	2	2	2	2	2	2	2	2	2	2	2	2	2	2	2	2	2	12	12
2	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	12	6
3	1	2	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	12	12
4	1	2	2	1	2	1	2	2	2	1	2	1	2	1	2	1	2	2	2	2	12	12

## References

- [A] Alexandroff, P., *Einfachste Grundbegriffe der Topologie*, Springer Verlag (Berlin), 1932, 48 pages.
- [B1] Baues, H.-J., *Homotopy type and homology*, Oxford Math. Monographs, Oxford University Press, 1996, 596 pages.
- [B2] Baues, H.-J., *Homotopy types*, Handbook of algebraic topology, chapter I (1995), Edited by I. M. James, Elsevier Science, 1–71.
- [Ba] Barden, D.: *Simply connected five-manifolds*, Ann. Math. **82** (1965) 365–385.
- [BD1] Baues, H.-J. and Drozd, Y., *Representation theory of homotopy types with at most two non trivial homotopy groups*, Math. Proc. Camb. Phil. Soc. **128** (2000) 283–300.
- [BD2] Baues, H.-J. and Drozd, Y., *The homotopy classification of  $(n - 1)$ -connected  $(n + 1)$ -dimensional polyhedra with torsion free homology,  $n \geq 5$* , Expositiones Mathematicae, **17** (1999) 161–180.
- [BD3] Baues, H.-J. and Drozd, Y., *Classification of stable homotopy types with torsion free homology*, to appear in Topology.
- [BD4] Baues, H.-J. and Drozd, Y., *Indecomposable homotopy types with at most two non-trivial homology groups*. Preprint.
- [BG] Baues, H.-J. and Goerss, P., *A homotopy operation spectral sequence for the computation of homotopy groups*, Topology **39** (2000) 161–192.
- [BH] Baues, H.-J. and Hennes, M., *The homotopy classification of  $(n - 1)$ -connected  $(n + 3)$ -dimensional polyhedra,  $n \geq 4$* , Topology **30** (1991) 373–408.
- [Br] Brouwer, L. E. J., *Über Abbildungen von Mannigfaltigkeiten*, Math. Ann. **71** (1912) 97–115.
- [CJS] Cremer, E. and Julia, B. and Scherk, J.: *Supergravity theory in eleven dimensions*, Physics Letters B **76** (1978) 409–412.
- [Ch] Chang, S. C., *Homotopy invariants and continuous mappings*, Proc. R. Soc. London Ser. A **202** (1950) 253–263.
- [F] Freudenthal, H., *Über die Klassen der Sphärenabbildungen*, Comp. Math. **5** (1937).
- [H] Henn, H.-W., *Classification of  $p$ -local low dimensional spectra*, J. Pure Appl. Algebra **19** (1980) 159–169.
- [H1] Hilton, P. J., *An introduction to homotopy theory*, Cambridge University Press, 1953.
- [H2] Hilton, P. J., *Homotopy theory and duality*, Nelson Gordon and Breach, 1965.
- [HJ] Hilton, P. and James, I., *The Whitehead heritage*, The Math. Intelligencer **19** (1997) 58–63.
- [Ho] Hopf, H., *Über die Abbildungen von Sphären auf Sphären niedrigerer Dimension*, Fund. Math. **25** (1935).
- [N] Nahm, W. *Supersymmetries and their representation*, Nuclear Physics B **135** (1978) 149–166.
- [P] Poincaré, H., *Analysis Situs*, Journal de l'École Polytechnique **1** (1895) 1–121.
- [S] Serre, J. P., *Groups d'homotopie et classes groupes abéliens*, Ann. of Math. **58** (1953) 258–294.
- [St] Stöcker, R.: *On the structure of 5-dimensional Poincaré duality spaces*, Comment. Math. Helv. **57** (1982) 481–510.
- [ST] Seifert, H. and Threlfall, W., *Lehrbuch der Topologie*, Chelsea Publishing Comp. New York Teubner (1934).
- [T] Toda, H., *Composition methods in homotopy groups of spheres*, Annals of Math. Studies **49** (1962), Princeton University Press.
- [U1] Unsöld, H. M., *On the classification of spaces with free homology*, Dissertation FU Berlin (1987).
- [U2] Unsöld, H. M.,  *$A_n^4$ -Polyhedra with free homology*, Manuscripta Math. **65** (1989) 123–145.
- [W1] Whitehead, J. H. C., *The homotopy type of a special kind of polyhedron*, Ann. Soc. Polon. Math. **21** (1948) 176–186.
- [W2] Whitehead, J. H. C., *Combinatorial homotopy I*, Bull. Amer. Soc. **55** (1949) 213–245.



Applied set theory refers to the many successes of set theory either in solving mathematical problems or in showing that they are unsolvable, by virtue of their being neither provable nor refutable in ZFC. For example, Cantor himself applied set theory to answer an important question in the study of Fourier series. But he was unable to resolve the Continuum Problem (concerning the cardinality of the set of real numbers), and indeed this problem was later shown to be unsolvable in ZFC by Gödel and Cohen.

Pure set theory refers to the deeper investigation of the structure of infinity. Although Cantor left us with an excellent theory of counting into the transfinite and a powerful theory of cardinality, he provided no clear picture of the universe of sets as a whole. There is now evidence that such a picture is starting to emerge through the detailed analysis of subuniverses of the universe of all sets called *inner models*.

This talk emphasizes the exciting recent developments in set theory's pure side, with some reference to the striking applications which have served as important motivation for the subject's development.

Cantor earned his doctorate in Berlin in 1867 and was appointed in Halle in 1869, where he soon after habilitated. Under the influence of Heine, his work moved to the study of trigonometric series, which led him necessarily into his investigations in set theory. In addition to developing his profound theory of transfinite numbers and cardinality, he showed that the algebraic numbers are countable (and therefore almost all reals are transcendental), the reals are not countable and  $n$ -dimensional Euclidean space can be put into 1-1 correspondence with the real line. He was appointed to a chair in Halle in 1879.

Cantor founded the DMV in 1890 and was elected its first president the year after.

Cantor's ideas were revolutionary, and met significant opposition, especially from Kronecker. Mittag-Leffler persuaded Cantor to withdraw a paper that he had submitted to *Acta Mathematica*, on the grounds that he had submitted it "about 100 years too soon"! Fortunately Cantor also had the support of some important mathematicians, such as Dedekind.

Cantor's two key contributions were to provide us with theories of *transfinite counting* and of *infinite cardinality*.

Transfinite counting arises naturally when one considers the *Cantor derivative*: If  $C$  is a closed set of real numbers, then  $C'$  denotes the set of all limit points of  $C$ . Thus  $C \supseteq C' \supseteq C'' \supseteq \dots$ . Write  $C^\infty = C \cap C' \cap C'' \cap \dots$ . Then  $C^\infty \supseteq (C^\infty)'$ , and this inclusion may be strict. Thus one must keep counting past  $\infty$ :  $C^\infty \supseteq C^{\infty+1} \supseteq C^{\infty+2} \supseteq \dots$ !

The key feature of this new sequence of counting stages is that it forms a *wellordering*, a linear ordering with no infinite descending sequence of elements. Cantor showed that any two wellorderings are comparable in the sense that one is isomorphic to an initial segment of the other, and that the wellorderings can be canonically represented by special wellorderings where the ordering relation is given by the membership relation  $\in$ . Sets which carry such a special wellordering are called *ordinals*.

Cantor's view was that each well-defined set carries a wellordering. Thus every set can be placed in 1-1 correspondence with an ordinal. But this ordinal is *not* unique. A *cardinal* is an ordinal which cannot be put into 1-1 correspondence with a smaller ordi-



nal. Then every set can be put into 1-1 correspondence with a *unique* cardinal, called the *cardinality* of that set.

Zermelo later justified Cantor's view by proving that every set can indeed be well-ordered, using the Axiom of Choice. Thus, Cantor's theory does provide an excellent theory of cardinality for arbitrary sets. This theory left however one major gap:

The Continuum Problem: What is the cardinality of the continuum?

The Continuum Hypothesis (CH): Every uncountable set of reals has the same cardinality as the set of all reals.

Cantor failed to solve this problem, and in fact it was later discovered that this problem cannot be solved using the currently accepted axioms for set theory.

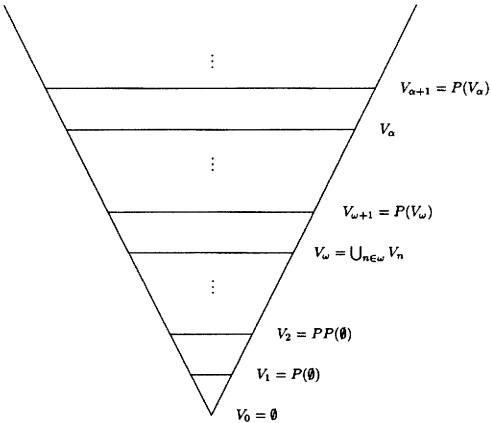
### Paradoxes

Cantor, and independently Burali-Forti, found paradoxes in Cantor's set theory. The most famous version of the paradox is due to Russell: If  $x$  consists of all sets  $y$  such that  $y \notin y$ , then  $x \in x \leftrightarrow x \notin x$ !

Zermelo's proposal was to avoid the paradoxes by confining oneself to established principles of set-formation. He developed an axiomatic theory of sets, Zermelo set theory, which captures these principles and to the present day does appear to be free of contradiction. Fraenkel added a missing axiom scheme to Zermelo's system, resulting in ZFC, Zermelo-Fraenkel set theory with the axiom of choice. This is the standard axiom system for set theory today.

### The Universe of Sets $V$

As a consequence of the ZFC axioms one has the following attractive picture of the set-theoretic universe  $V$ :



This provides the first picture of the universe of sets, based on the ordinals and power set operation. But this is not a canonical description, in light of  $\aleph_1$  set

a canonical, acceptable interpretation, or *standard model*, of ZFC which provides the “correct” answers to undecidable problems. Gödel’s  $L$  is surely canonical, but rejected as being too restrictive, given the ease with which it can be modified by forcing. Unfortunately the universes constructed using forcing are not canonical: If there is one Cohen (random) real over  $L$ , then there are many. How does one obtain canonical universes which are larger than  $L$ ?

An answer came from measure theory. From work of Scott [61] and Solovay [71], we have: If there is a countably additive extension of Lebesgue measure to all sets of reals, then  $V = L$ . And any model of ZFC with such a measure can be converted into

The justification of large cardinal hypotheses remains an important challenge for pure set theory. One approach to this problem makes use of endomorphisms. An inner model  $M$  is *rigid* iff there is no 1-1 embedding  $M \rightarrow M$  which preserves the basic set-theoretic operations union, product, difference, etc. The smallest large cardinal axiom, written “ $0^\#$  exists”, is equivalent to the statement that  $L$  is not rigid. If  $L$  is not rigid, there is a “canonical” inner model  $L^\#$  bigger than  $L$  which satisfies “ $L$  is not rigid”. Now do this again: If  $L^\#$  is not rigid then there is a canonical inner model  $L^{\#\#}$  where this is true, etc. There is a canonical  $\#$  operation which iterated in this way leads to models with Woodin cardinals. This is analogous to Gödel’s construction of  $L$ , obtained through iteration of a weak power set operation. In Gödel’s context, the axioms of ZFC justify the use of this operation. In the current context, one must argue for the non-rigidity of the models that arise in a canonical  $\#$ -iteration. Such an argument can provide a justification for the existence of inner models with Woodin cardinals.

However no canonical  $\#$  iteration is known which goes very far *beyond* Woodin cardinals. Luckily, most current applications of large cardinals do not use stronger hypotheses. But finding such an operation remains an important problem if we wish to achieve a satisfying picture of the set-theoretic universe, a picture which would not only give rise to numerous further applications of set theory and justify the use of large cardinal hypotheses, but also lend credence to the claim that the paradoxes that threatened Cantor in the infancy of set theory have been definitively resolved.

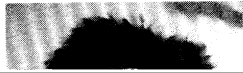
## References

- L. Harrington [78] Analytic determinacy and  $0^\#$ , *J. Symbolic Logic* 43 (1978), no. 4, pp. 685–693.  
 G. Hjorth [96]  $\Pi_2^1$  Wadge degrees, *Ann. Pure Appl. Logic* 77 (1996), no. 1, 53–74.  
 D. Martin [70] Measurable cardinals and analytic games, *Fund. Math.* 66, pp. 287–291.  
 D. Scott [61] Measurable cardinals and constructible sets, *Bull. Acad. Polon. Sci. Ser. Sci. Math. Astronom. Phys.* 9 (1961), pp. 521–524.  
 J. Silver [71] The consistency of the GCH with the existence of a measurable cardinal, in “Axiomatic Set Theory” (D. Scott, ed.), *Proc. Sympos. Pure Math.*, vol. XIII, Part 1, Amer. Math. Soc., 1971, pp. 391–395.  
 R. Solovay [70] A model of set theory in which every set of reals is Lebesgue measurable, *Ann. of Math.* (2) 92 (1970), pp. 1–56.  
 R. Solovay [71] Real-valued measurable cardinals, in “Axiomatic Set Theory” (D. Scott, ed.), *Proc. Sympos. Pure Math.*, vol. XIII, Part 1, Amer. Math. Soc., 1971, pp. 397–428.

Übersichtsartikel

Historischer Artikel

Buchbesprechungen



## 1 Einleitung

A. S. Besicovitch entwickelte (mit anscheinend nur wenigen Gleichgesinnten) im Laufe von etwa 40 Jahren, Ende der zwanziger Jahre bis Ende der sechziger Jahre des letzten Jahrhunderts, *The Geometry of Sets of Points* (Titel eines von ihm geplanten aber bis zu seinem Tode 1970 nicht vollendeten Buches). Auf dieser Grundlage entstand in den letzten 20 bis 25 Jahren jenes Teilgebiet der Mathematik, das man heute *fraktale Geometrie* nennt und wie es in den Monographien [17], [18], [29], [19] (um nur einige zu nennen) dargestellt wird. Das Wort *fraktal* (*fractal*) geht auf B. B. Mandelbrot (1975) zurück. Während Besicovitch eine rein innermathematische Theorie des Nicht-Glatten (etwa in Ergänzung der differenzierbaren Analysis und Geometrie) entwickelte, propagierte Mandelbrot die Idee, daß viele Objekte der Natur eine fraktale Struktur aufweisen, die durch die (differenzierbare) Analysis und Geometrie nicht angemessen beschrieben werden kann. Insbesondere suggerierte er den Begriff der *Selbstähnlichkeit* (*self-similarity*), der dann in [24] (1981) seine mathematische Formulierung fand. Zusammen mit seiner affinen Verallgemeinerung (*IFS: iterated function systems*) ist er ein Eckstein der fraktalen Geometrie und fraktalen Analysis bis zum heutigen Tage. Es hat immer wieder Vorschläge gegeben, wann eine Menge (etwa eine Punktmenge im  $\mathbb{R}^n$ ) *fraktal* genannt werden sollte. Eine befriedigende Definition gibt es aber wohl nicht und *fraktal* wird als unscharfes Synonym für *nicht-glatt* (das Objekt oder die zu seiner Bearbeitung zugelassenen Instrumente betreffend) akzeptiert. Man hat dann von Fall zu Fall zu sagen, was für Voraussetzungen im Einzelnen gemacht werden.

Im letzten Jahrzehnt und insbesondere in den letzten Jahren hat es eine Vielzahl neuer Entwicklungen zur fraktalen Geometrie und nunmehr auch zur fraktalen Analysis gegeben, ohne daß sich ein allumfassender Königsweg herausgebildet hätte. Bei der Frage nach adäquaten Geometrien *completely distinct from Euclidean geometry* findet man in [38], Preface:

*They suggest rather strong shifts in outlook, for what kind of geometries are really around, what one might look for, how one might work with them, and so on.*

Das wird ergänzt durch [13], Preface:

*The subject remains a wilderness, with no central zone, and many paths to try. The lack of main roadways is also one of the attractions of the subject.*

Ein Aspekt hiervon ist die Frage wieviel Geometrie man tatsächlich braucht, um wohl-bekannte signifikante Sätze der Analysis zu erhalten. Das hat zu einer Analysis auf metrischen Räumen geführt (gelegentlich durch Zutaten gespickt), wobei man [23] als eine erste zusammenfassende Darstellung ansehen kann.

Zur Analysis auf nicht-glatten Strukturen gehört seit längerer Zeit die Theorie der *Dirichletschen Formen* (*quadratischen Formen*) und der durch sie erzeugten Operatoren. Eine Darstellung der verschiedenartigen Aspekte findet man in [25], wobei wir insbesondere auf [30] verweisen.

Eine zentrale Frage, die mit besonderer Intensität in den letzten Jahren bearbeitet wurde, lautet:

*Was ist ein (oder der) Laplace-Operator auf einer fraktalen Struktur und was kann man über sein Spektrum sagen?*

Den gegenwärtigen Stand dieser und benachbarter Fragestellungen findet man in [26], woraus wir wie folgt zitieren:

*Why do you only study self-similar sets? The reason is that self-similar sets are perhaps the simplest and most basic structures in the theory of fractals. They should give us much information on what would happen in the general case of fractals. Although there have been many studies on analysis on fractals, we are still near the beginning in the exploration of this field.* ([26], Introduction, p. 5.)

Während die obigen skizzenhaften Ausführungen auf (direkt oder über Dirichletformen definierte) Operatoren auf fraktalen Strukturen hinauslaufen, kann man einen (aber nur scheinbar) umgekehrten Standpunkt einnehmen: Auf glatten Strukturen, etwa dem euklidischen Raum  $\mathbb{R}^n$ , oder beschränkten  $C^\infty$  Gebieten  $\Omega$  in  $\mathbb{R}^n$ , werden fraktale (Differential-)Operatoren untersucht. Prototypen hierfür sind

$$(1.1) \quad A = -\Delta + \mu \quad \text{und} \quad B = (-\Delta)^{-1} \circ \mu, \quad \Delta = \sum_{j=1}^n \frac{\partial^2}{\partial x_j^2},$$

wobei  $\mu$  etwa ein Radonsches Maß im  $\mathbb{R}^n$  mit kompaktem Träger und  $\mu(\mathbb{R}^n) < \infty$  ist. *Schrödinger-Operatoren* der Form  $A$  in  $\mathbb{R}^n$  sind von quantenmechanischer Relevanz und haben eine lange Geschichte, die auf Fermi (1936) zurückgeht, insbesondere wenn  $\mu$  eine endliche Summe von Dirac-Maßen ist. Eine umfassende Darstellung dieses Gegenstandes findet man in [2]. Operatoren der Form  $B$  treten bei der mathematischen Modellierung von Trommeln (vorzugsweise in der Ebene  $\mathbb{R}^2$ ) mit fraktaler Membran auf. Hierbei ist  $\Omega$  etwa ein beschränktes  $C^\infty$  Gebiet,  $(-\Delta)^{-1}$  ist der inverse Operator des Dirichlet-Laplace Operators in  $\Omega$  und der Träger von  $\mu$  ist eine kompakte Menge in  $\Omega$ . Sie sind Gegenstand späterer Ausführungen in dieser Arbeit.

Ein wesentliches Instrument der heutigen Analysis auf quasi-metrischen Räumen  $(X, \varrho, \mu)$ , bestehend aus einer Menge  $X$ , einer quasi-Metrik  $\varrho$  und einem Maß  $\mu$ , sind Funktionenräume. Soweit es sich um Sobolev-Räume  $W_p^1(X)$  mit  $1 < p < \infty$  handelt verweisen wir auf [20] und [23]. Bezüglich der sich entwickelnden Theorie der Räume vom Typ

$$B_{pq}^s(X) \quad \text{und} \quad F_{pq}^s(X) \quad \text{mit} \quad |s| \leq \theta \leq 1, \quad 1 < p < \infty, \quad 1 \leq q \leq \infty,$$

wurden erste zusammenfassende Darstellungen in [21] und [22] gegeben. Fraktale verschiedenster Art können als quasi-metrische Räume betrachtet werden und mit Hilfe der angedeuteten Theorie der Funktionenräume kann man etwa eine weitreichende Spektraltheorie von Riesz-Operatoren entwickeln, [49]. Aber auch dieses ist nicht Gegenstand der nachfolgenden Ausführungen.

Vielmehr ist das Anliegen dieser Arbeit die Darstellung einiger Aspekte der fraktalen Analysis, die auf der heutigen Theorie der Funktionenräume

$$B_{pq}^s(\mathbb{R}^n) \quad \text{und} \quad F_{pq}^s(\mathbb{R}^n), \quad 0 < p \leq \infty, \quad 0 < q \leq \infty, \quad s \in \mathbb{R},$$

beruhen. Diese Räume enthalten als Spezialfälle Hölder-Zygmund-Räume, Sobolev-Räume (ganzer und gebrochener Glattheit), klassische Besov-Räume und Hardy-Räume. Für diese Räume gibt es seit einiger Zeit atomare Zerlegungen und (zumindest für einige) auch Darstellungen durch wavelets. Dieses wurde in [41] und in [42] durch subatomare Zerlegungen (quarkonial decompositions) ergänzt. Die Elementarbausteine

(quarks) sind konstruktiv, überaus einfach und in hohem Maße flexibel. Insbesondere können sie beliebigen Strukturen, etwa fraktalen Mengen in  $\mathbf{R}^n$ , angepaßt werden. Selbstähnlichkeit ist nicht erforderlich. Auf diesem Wege ist es möglich, fraktale Operatoren, etwa vom Type  $B$  in (1.1) zu untersuchen. Gegenstand der nachfolgenden Ausführungen ist die Beschreibung diesbezüglicher Resultate wie sie in den letzten Jahren erzielt wurden. Einige Ergebnisse werden hier erstmals (ohne Beweise) publiziert. Wir beschränken uns auf die einfachsten Fälle (was die Formulierungen, nicht den beweistechnischen Aufwand anbelangt). Das zu den Beweisen verwendete Instrumentarium skizzieren wir erst im Abschnitt 6 der Arbeit, wobei wir hierbei auf [41] und insbesondere auf [42] verweisen können.

Natürlich ist die obige Aufzählung verschiedenster Aspekte der fraktalen Geometrie und der fraktalen Analysis etwas willkürlich, unvollständig und durch die persönlichen Interessen und Kenntnisse des Autors bestimmt. Die engen Beziehungen der Stochastik zur fraktalen Geometrie blieben ebenso unerwähnt wie etwa die Spektraltheorie des Laplace-Operators in beschränkten Gebieten im  $\mathbf{R}^n$  mit fraktalem Rand (hierzu geben wir aber später einige Literaturhinweise). Sinn der Aufzählung war lediglich, eine Standortbestimmung der nachfolgenden Ausführungen im Rahmen dessen, was man *fraktale Analysis* nennen könnte zu ermöglichen.

## 2 Fraktale Operatoren

### 2.1 Die schwingende Membran

Es sei  $\Omega$  ein beschränktes  $C^\infty$  Gebiet in der Ebene  $\mathbf{R}^2$  und es sei  $\Gamma$  eine kompakte Menge in  $\mathbf{R}^2$  mit

$$(2.1) \quad \Gamma \subset \Omega \quad \text{und} \quad |\Gamma| = 0,$$

wobei  $|\Gamma|$  das Lebesguesche Maß von  $\Gamma$  ist. Wir interpretieren  $\Omega$  als Trommel deren am Rand  $\partial\Omega$  fixierte aber ansonsten arg strapazierte Membran durch  $\Gamma$  beschrieben wird. Modellbildung, ausgehend vom klassischen Fall, legt nahe,  $\Gamma$  nicht als Punktmenge, sondern als Träger eines Radonschen Maßes  $\mu$ ,

$$(2.2) \quad \text{supp } \mu = \Gamma \subset \Omega, \quad 0 < \mu(\Gamma) = \mu(\mathbf{R}^2) < \infty,$$

zu sehen. Von besonderem Interesse (weil der Problemstellung gut angepaßt) sind *isotrope* Maße, also Maße für die es eine im Intervall  $(0, 1]$  definierte positive Funktion  $h(r)$  mit

$$(2.3) \quad \mu(B(\gamma, r)) \sim h(r), \quad \gamma \in \Gamma, \quad 0 < r \leq 1,$$

gibt, wobei  $B(\gamma, r)$  ein Kreis mit Mittelpunkt  $\gamma$  und Radius  $r$  ist. Wir benutzen hier und in Zukunft das Äquivalenzeichen  $\sim$  für zwei positive Funktionen  $a(x)$  und  $b(x)$  oder für zwei Folgen positiver Zahlen  $a_k$  und  $b_k$  (sagen wir mit  $k \in \mathbb{N}$ , natürliche Zahlen), wenn es zwei positive Zahlen  $c$  und  $C$  mit

$$(2.4) \quad c a(x) \leq b(x) \leq C a(x) \quad \text{oder} \quad c a_k \leq b_k \leq C a_k$$



für alle zugelassenen Variablen  $x$  und  $k$  gibt. Bezogen auf (2.3) bedeutet dies die Unabhängigkeit der positiven Äquivalenzkonstanten von  $\gamma$  und  $r$ . Von besonderem Interesse sind so-genannte  $d$ -Mengen mit

$$(2.5) \quad h(r) \sim r^d, \quad 0 < r \leq 1, \quad \text{und} \quad 0 < d < 2.$$

In diesem Fall ist jedes Radonsche Maß  $\mu$  mit (2.2), (2.3), (2.5) äquivalent zu  $\mathcal{H}^d|_{\Gamma}$ , der Einschränkung des Hausdorff-Maßes  $\mathcal{H}^d$  in  $\mathbb{R}^2$  auf  $\Gamma$ . Ist  $d = 1$ , so kann man an ein Geradenstück denken. Andere Beispiele sind (ein- und zwei-dimensionale) Cantor-Mengen, die v. Kochsche Kurve (snowflake), Sierpinski'sche Dreiecke usw. Wohl alle Bücher über fraktale Geometrie, etwa [18], [19], enthalten zahlreiche Beispiele solcher  $d$ -Mengen. Es stellt sich aber folgendes Problem:

*Für welche Funktionen  $h$  gibt es Radonsche Maße  $\mu$  mit (2.2), (2.3)?*

## 2.2 Die klassische Theorie

Die klassische Theorie bei der die Membran nicht eine singuläre Menge  $\Gamma$  mit (2.1), (2.2), sondern ganz  $\Omega$  oder  $\bar{\Omega}$  ist, ist wohlbekannt. Wir formulieren einige Aussagen in einer solchen Form, daß sie mit den späteren fraktalen Analoga vergleichbar sind. Im Rahmen der  $L_2$ -theorie betrachtet man im (komplexen) Hilbertraum  $L_2(\Omega)$  den selbstadjungierten, positiv-definiten Dirichlet-Laplace Operator  $-\Delta$ ,

$$(2.6) \quad -\Delta u(x) = -\frac{\partial^2 u}{\partial x_1^2} - \frac{\partial^2 u}{\partial x_2^2}, \quad \text{dom}(-\Delta) = H_0^2(\Omega),$$

wobei

$$(2.7) \quad H^2(\Omega) = W_2^2(\Omega) = \{f \in L_2(\Omega) : D^\alpha f \in L_2(\Omega), |\alpha| \leq 2\}$$

der wohlbekannte Sobolev-Raum und

$$(2.8) \quad H_0^2(\Omega) = W_{2,0}^2(\Omega) = \{f \in W_2^2(\Omega) : f|_{\partial\Omega} = 0\}$$

ist. Dann ist  $-\Delta$  ein selbstadjungierter positiv-definiter Operator mit reinem Punktspektrum. Die Eigenfrequenzen  $\lambda_k$  der schwingenden Membran und die zugehörigen Eigenfunktionen  $u_k$  sind durch

$$(2.9) \quad -\Delta u_k = \lambda_k^2 u_k, \quad u_k \in H_0^2(\Omega), \quad k \in \mathbb{N},$$

gegeben. ( $\mathbb{N}$  ist the Gesamtheit der natürlichen Zahlen). Für unsere Zwecke ist es sinnvoll, nicht nur den inversen Operator  $(-\Delta)^{-1}$  zu betrachten, sondern ihn auch an unsere späteren Bezeichnungen durch

$$(2.10) \quad B = (-\Delta)^{-1} = (-\Delta)^{-1} \circ \mu_L = (-\Delta)^{-1} \circ id^{\mu_L}$$

anzupassen, wobei  $\mu_L$  das Lebesguesche Maß (in der Ebene) ist. Dann kann man (2.9) als

$$B u = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{\lambda_k^2} \langle u, u_k \rangle u_k, \quad \langle u, u_k \rangle = \int_{\Omega} u(x) u_k(x) dx$$

für  $k \rightarrow \infty$ , schreiben, wobei  $\varrho_k = \lambda_k^{-2}$  die Eigenwerte des kompakten positiven selbstadjungierten Operators  $B$  in  $L_2(\Omega)$  sind. Wohlbekannt (und auf unsere späteren Zwecke zugeschnitten) sind folgende 3 Aussagen:

(a) (H. Weyl, 1912, [50], [51]),

$$(2.11) \quad \varrho_k \sim k^{-1}, \quad k \in \mathbb{N}.$$

(b) (R. Courant, 1924, [12], S. 398/99). Der größte Eigenwert  $\varrho_1$  ist einfach und (abgesehen von einer multiplikativen Konstanten) ist

$$(2.12) \quad u_1(x) > 0, \quad x \in \Omega,$$

*Nullstellenfreiheit* in der Terminologie von Courant.

(c) (Glattheit). Es gilt (in offensichtlicher Schreibweise)

$$(2.13) \quad u_k \in C^\infty(\bar{\Omega}), \quad k \in \mathbb{N}.$$

Für den beschriebenen klassischen Fall waren die Aussagen von Weyl von Anfang an schärfer als (2.11) und schlossen die Volumina von  $\Omega$  (Hauptterm) und von  $\partial\Omega$  (Restglied) ein. Spektraltheorie von (regulären und singulären elliptischen) Differentialoperatoren und Pseudodifferentialoperatoren ist seit dieser Zeit bis zum heutigen Tage ein zentrales Anliegen der Analysis, ein wahres Jahrhundertthema. Den heutigen Stand und insbesondere die heutigen Techniken findet man etwa in [37]. Unser Anliegen hier läßt sich in die Frage kleiden:

*Was wird aus den Eigenschaften (a), (b), (c), also (2.11), (2.12), (2.13), wenn in (2.10) das Lebesguesche Maß  $\mu_L$  (also die homogene Membran) durch ein Maß  $\mu$  mit (2.2) ersetzt wird und wie und wo ist ein diesbezüglich modifizierter Operator  $B$  definiert?*

### 2.3 Problemstellung

Es sei  $\Omega$  ein beschränktes  $C^\infty$  Gebiet im  $n$ -dimensionalen euklidischen Raum  $\mathbb{R}^n$ . Wenn man das nunmehr  $n$ -dimensionale Lebesguesche Maß  $\mu_L$  in (2.10) durch ein singuläres Maß  $\mu$  mit (2.1), (2.2) ersetzen möchte, dann ist klar, daß die in (2.6)–(2.10) beschriebene  $L_2$ -Theorie nicht mehr ausreichend ist. Insbesondere braucht man statt  $H^2(\Omega)$  und  $H_0^2(\Omega)$  in (2.7), (2.8) Räume geringerer Glattheit, wobei sich

$$H^1(\Omega) = W_2^1(\Omega) = \left\{ f \in L_2(\Omega) : \frac{\partial f}{\partial x_j} \in L_2(\Omega) \text{ mit } j = 1, \dots, n \right\}$$

und

$$(2.14) \quad \mathring{H}^1(\Omega) = \mathring{W}_2^1(\Omega) = \{ f \in H^1(\Omega) : f|_{\partial\Omega} = 0 \}$$

als geeignete Räume erweisen. Die Sobolev'schen Räume  $H^s(\mathbb{R}^n)$  kann man am einfachsten durch den Lift

$$(2.15) \quad H^s(\mathbb{R}^n) = (id - \Delta)^{-\frac{s}{2}} L_2(\mathbb{R}^n), \quad s \in \mathbb{R},$$

bestimmen. Dann ist  $H^s(\Omega)$  die Einschränkung von  $H^s(\mathbb{R}^n)$  auf  $\Omega$ . Da  $C_0^\infty(\Omega) = D(\Omega)$

dicht in  $\mathring{H}^1(\Omega)$  ist, kann man den dualen Raum von  $\mathring{H}^1(\Omega)$  im Rahmen der dualen Paarung  $(D(\Omega), D'(\Omega))$  betrachten und erhält

$$(2.16) \quad \left(\mathring{H}^1(\Omega)\right)' = H^{-1}(\Omega).$$

Nach [42], Proposition 20.3, S. 297, gilt (2.16) sogar für beliebige beschränkte Gebiete.

**Proposition 1.** (a) *Es sei  $\Omega$  ein beliebiges beschränktes  $C^\infty$  Gebiet im  $\mathbb{R}^n$ . Dann ist*

$$(2.17) \quad (-\Delta)^{-1} : H^{-1}(\Omega) \hookrightarrow \mathring{H}^1(\Omega)$$

*eine isomorphe Abbildung.*

(b) *Es sei  $\sigma \in \mathbb{R}$ . Dann ist*

$$(2.18) \quad (id - \Delta)^{-\sigma} : H^{-\sigma}(\mathbb{R}^n) \hookrightarrow H^\sigma(\mathbb{R}^n)$$

*eine isomorphe Abbildung.*

**Bemerkung 1.** Teil (b) ist eine wohlbekannte Lifteigenschaft und auch eine Folge von (2.15). Bezüglich Teil (a) verweisen wir auf [42], 19.2, S. 254/55, und die dortigen Literaturangaben.

Um nunmehr dem Operator  $B$  aus (1.1) einen Sinn zu geben, betrachten wir den

Spuoperator (trace)  $tr_\mu$  und den Identifikationsoperator  $id_\mu$ . Hierbei ist  $\mu$  ein Radonsches Maß im  $\mathbb{R}^n$  mit kompaktem Träger

$$(2.19) \quad \Gamma = \text{supp } \mu \quad \text{und} \quad 0 < \mu(\mathbb{R}^n) = \mu(\Gamma) < \infty.$$

Dann ist im Sinne stetiger Einbettung

$$(2.20) \quad tr_\mu : S(\mathbb{R}^n) \hookrightarrow L_2(\Gamma, \mu),$$

und

$$(2.21) \quad id_\mu : L_2(\Gamma, \mu) \hookrightarrow S'(\mathbb{R}^n),$$

wobei  $S(\mathbb{R}^n)$ ,  $S'(\mathbb{R}^n)$  (Schwartz-Raum, Raum der temperierten Distributionen) und  $L_2(\Gamma, \mu)$  (komplexer Hilbertraum  $L_2$  bezüglich  $\mu$ ) die übliche Bedeutung haben. Hierbei ist (vorerst)  $tr_\mu$  die punktweise Spur, also

$$(tr_\mu \varphi)(\gamma) = \varphi(\gamma) \quad \text{für} \quad \varphi \in S(\mathbb{R}^n) \quad \text{und} \quad \gamma \in \Gamma,$$

und  $id_\mu$  ist die übliche (und weil Radonsches Maß auch mögliche) Identifizierung von  $f \in L_2(\Gamma, \mu)$  mit der temperierten Distribution  $id_\mu f \in S'(\mathbb{R}^n)$  gemäß

$$(id_\mu f)(\varphi) = \int_{\Gamma} f(\gamma) \varphi(\gamma) \mu(d\gamma), \quad \varphi \in S(\mathbb{R}^n).$$

**Proposition 2.** *Es sei  $\mu$  ein Radonsches Maß im  $\mathbb{R}^n$  mit kompaktem Träger gemäß (2.19). Spuoperator und Identifikationsoperator seien durch (2.20), (2.21) gegeben. Dann ist*

$$(2.22) \quad tr'_\mu = id_\mu$$

*für den dualen Operator  $tr'_\mu$  von  $tr_\mu$ .*

**Beweis.** Mit üblichen Bezeichnungen folgt die Aussage aus

$$\begin{aligned} (tr'_\mu \psi)(\varphi) &= (tr_\mu \varphi)(\psi) = (tr_\mu \varphi, \bar{\psi})_{L_2(\Gamma, \mu)} \\ &= \int_{\Gamma} \varphi(\gamma) \psi(\gamma) \mu(d\gamma) \\ &= (id_\mu \psi)(\varphi), \end{aligned}$$

für alle  $\varphi \in S(\mathbb{R}^n)$  und  $\psi \in S(\mathbb{R}^n)$ .

**Problem 1.** Wie sich zeigen wird, reduziert sich die Frage wie  $B$  aus (1.1) in Verallgemeinerung von  $B$  aus (2.10) definiert werden kann auf das Problem ob sich  $tr_\mu$  aus (2.20) zu einer linearen stetigen Abbildung von  $H^1(\mathbb{R}^n)$  in  $L_2(\Gamma, \mu)$  fortsetzen läßt. Verallgemeinert auf  $H^s(\mathbb{R}^n)$  lautet das Problem:

*Es sei  $\mu$  ein Radonsches Maß im  $\mathbb{R}^n$  mit kompaktem Träger gemäß (2.19). Für welche  $s > 0$  gibt es eine positive Konstante  $c$  mit*

$$(2.23) \quad \|tr_\mu \varphi\|_{L_2(\Gamma, \mu)} \leq c \|\varphi\|_{H^s(\mathbb{R}^n)}$$

für alle  $\varphi \in S(\mathbb{R}^n)$ ?

Wir schreiben hier und in Zukunft  $\|a\|_A$  für die Norm von  $a \in A$  im Banachraum  $A$ . Gilt (2.23), so kann man  $tr_\mu$  durch Vervollständigung zu einem linearen und stetigen Operator

$$(2.24) \quad tr_\mu : H^s(\mathbb{R}^n) \hookrightarrow L_2(\Gamma, \mu)$$

fortsetzen (unter Beibehaltung der Schreibweise  $tr_\mu$ ). Gilt (2.24), so folgt aus (2.21), (2.22),

$$(2.25) \quad id_\mu : L_2(\Gamma, \mu) \hookrightarrow H^{-s}(\mathbb{R}^n) = (H^s(\mathbb{R}^n))'$$

Hieraus ergibt sich

$$(2.26) \quad id^\mu = id_\mu \circ tr_\mu : H^s(\mathbb{R}^n) \hookrightarrow H^{-s}(\mathbb{R}^n).$$

Wie üblich bedeutet  $\hookrightarrow$ , daß die entsprechende Abbildung linear und stetig ist.

**Proposition 3.** (a) *Es sei  $\mu$  ein Radonsches Maß im  $\mathbb{R}^n$  mit kompaktem Träger gemäß (2.19). Es sei  $s > 0$ , so daß  $tr_\mu$  gemäß (2.24) ein linearer und stetiger Operator ist. Dann ist*

$$(2.27) \quad B_s = (id - \Delta)^{-s} \circ id^\mu : H^s(\mathbb{R}^n) \hookrightarrow H^s(\mathbb{R}^n).$$

(b) *Es sei  $\Omega$  ein beschränktes  $C^\infty$  Gebiet im  $\mathbb{R}^n$ . Es sei  $(-\Delta)^{-1}$  der inverse Operator des Dirichlet-Laplace Operators entsprechend Proposition 1. Es sei  $\mu$  ein Radonsches Maß im  $\mathbb{R}^n$  mit*

$$\Gamma = \text{supp } \mu \subset \Omega, \quad 0 < \mu(\Gamma) < \infty.$$

Gilt (2.24) mit  $s = 1$ , so ist

$$(2.28) \quad B = (-\Delta)^{-1} \circ id^\mu : \dot{H}^1(\Omega) \hookrightarrow \dot{H}^1(\Omega).$$

**Beweis.** Teil (a) folgt unmittelbar aus (2.26), (2.18). Entsprechend erhält man Teil (b) aus (2.26) mit  $s = 1$  und (2.17).

**Bemerkung 2.** Der Operator  $B$  aus (2.28) ist die Präzisierung von  $B$  aus (1.1) und die sachgemäße Verallgemeinerung von (2.10). Wir verweisen auf [42], 9.2, 122–124, wo man weitergehende Ausführungen bezüglich der Dualität (2.22), und (2.24), (2.25) in allgemeineren Räumen findet.

### 3 Spuren und Maße

#### 3.1 Isotrope Maße

Nach Proposition 3 aus 2.3 reduziert sich die Frage der Beschränktheit der Operatoren  $B_s$  und  $B$  in (2.27) und (2.28) auf die Frage ob der Spuroperator  $tr_\mu$  in (2.24) beschränkt ist. Für allgemeine endliche Radonsche Maße im  $\mathbb{R}^n$  (und allgemeinere Funktionenräume) findet man in [42], Theorem 9.3, S. 125, ein etwas implizites Kriterium, das in [42], Corollary 9.8, S. 129/130, durch einfachere hinreichende Bedingungen ergänzt wurde. Es zeigt sich, daß man darüber hinaus für isotrope Radonsche Maße ein gleichermaßen einfaches wie abschließendes Kriterium angeben kann. In Verallgemeinerung von (2.3) nennen wir ein Radonsches Maß im  $\mathbb{R}^n$  mit

$$(3.1) \quad \Gamma = \text{supp } \mu \text{ kompakt und } 0 < \mu(\Gamma) = \mu(\mathbb{R}^n) < \infty$$

isotrop, falls es eine im Intervall  $(0, 1]$  definierte positive Funktion  $h(r)$  mit

$$(3.2) \quad \mu(B(\gamma, r)) \sim h(r), \quad \gamma \in \Gamma, \quad 0 < r \leq 1,$$

gibt, wobei  $B(\gamma, r)$  eine Kugel mit Mittelpunkt  $\gamma$  und Radius  $r$  ist. Wir erinnern an den Gebrauch des Äquivalenzzeichens  $\sim$  gemäß (2.4).

**Proposition 4.** (M. Bricchi, [5], [6], [7], [8]) *Es sei  $h$  eine im Intervall  $(0, 1]$  positive stetige monoton wachsende Funktion. Es existiert ein isotropes Radonsches Maß im  $\mathbb{R}^n$  mit (3.1), (3.2), dann und nur dann wenn es eine im Intervall  $(0, 1]$  positive stetige monoton wachsende Funktion  $\tilde{h}$  mit*

$$\tilde{h}(r) \sim h(r), \quad 0 < r \leq 1,$$

und

$$\frac{\tilde{h}(2^{-j-k})}{\tilde{h}(2^{-j})} \geq 2^{-kn} \quad \text{für } j \in \mathbb{N}_0 \text{ und } k \in \mathbb{N}_0$$

gibt.

**Bemerkung 3.** Hierbei ist  $\mathbb{N}_0 = \mathbb{N} \cup \{0\}$  die Gesamtheit der nicht-negativen ganzen Zahlen. *Monoton wachsend* heißt nicht fallend, die Funktion kann also auf Teilintervallen konstant sein. Prototypen sind die schon in 2.1 erwähnten so-genannten  $d$ -Mengen (nunmehr im  $\mathbb{R}^n$ ), also

$$(3.3) \quad h(r) = r^d, \quad 0 \leq d \leq n, \quad 0 < r \leq 1.$$

Weitere Beispiele sind Störungen von (3.3), etwa

$$(3.4) \quad h(r) = r^d \left| \log \frac{r}{2} \right|^b, \quad 0 < d < n, \quad b \in \mathbb{R}, \quad 0 < r \leq 1,$$

als Spezialfälle so-genannter  $(d, \Psi)$ -Mengen. Die endgültige Fassung der obigen Proposition findet man in [8], einschließlich von Nicht-Standard-Beispielen. Hierbei wurden die Resultate genutzt, um eine diesbezügliche Theorie entsprechender Funktionenräume aufzubauen. Im Falle der  $(d, \Psi)$ -Mengen und insbesondere Funktionen  $h$  mit (3.4) verweisen wir auf [42], Section 22, die dort angegebene Literatur und insbesondere auf [31], [32].

### 3.2 Spuren

Wie in der Einleitung schon angedeutet, beschränken wir uns auf die für uns interessantesten Fälle, das sind der Operator  $B$  aus (2.28) in der Ebene, also  $n = 2$ , und die Operatoren  $B_s$  aus (2.27) mit  $s = \frac{n}{2}$ . In beiden Fällen ist das die Frage nach der Existenz von  $tr_\mu$  gemäß (2.24), (2.23) mit  $s = \frac{n}{2}$ , d. h. der Stetigkeit von  $tr_\mu$ . Wir erinnern daran, daß  $\mathbb{N}$  die Gesamtheit der natürlichen Zahlen bezeichnet und daß  $\mathbb{R}^n$  der  $n$ -dimensionale euklidische Raum ist.

**Satz 1.** *Es sei  $\mu$  ein isotropes Radonsches Maß im  $\mathbb{R}^n$ ,  $n \in \mathbb{N}$ , mit (3.1), (3.2). Dann sind folgende 3 Aussagen äquivalent:*

- (i)  $tr_\mu : H_2^n(\mathbb{R}^n) \hookrightarrow L_2(\Gamma, \mu)$  ist stetig,
- (ii)  $tr_\mu : H_2^n(\mathbb{R}^n) \hookrightarrow L_2(\Gamma, \mu)$  ist kompakt,
- (iii)  $\sum_{j=0}^{\infty} h(2^{-j}) < \infty$ .

**Bemerkung 4.** Ein Beweis dieses überraschend einfachen und abschließenden Satzes wird später publiziert. [47] Er ist in G. B. Folland, "Harmonic Analysis on Real Groups",

$$\sum_{j=0}^{\infty} 2^{-jp'(s-\frac{n}{p})} h(2^{-j})^{p'-1} < \infty$$

gilt. Das macht die Sonderstellung von  $p = p' = 2$  und  $s = \frac{n}{2}$  im obigen Satz klar.

**Satz 2.** *Es sei  $\mu$  ein isotropes Radonsches Maß im  $\mathbb{R}^n$ ,  $n \in \mathbb{N}$ , mit (3.1), (3.2) und*

$$(3.5) \quad \sum_{j=0}^{\infty} h(2^{-j}) < \infty.$$

(a) *Dann ist der Operator*

$$(3.6) \quad B_{\frac{n}{2}} = (id - \Delta)^{-\frac{n}{2}} \circ id^{\mu} : H^{\frac{n}{2}}(\mathbb{R}^n) \hookrightarrow H^{\frac{n}{2}}(\mathbb{R}^n)$$

*gemäß (2.26), (2.27) kompakt.*

(b) *Es sei zusätzlich  $n = 2$  und  $\Omega$  sei ein beschränktes  $C^{\infty}$  Gebiet in der Ebene  $\mathbb{R}^2$ . Ferner sei  $\Gamma \subset \Omega$ , wobei  $\Gamma$  der Träger von  $\mu$  gemäß (3.1) ist. Dann ist der Operator*

$$(3.7) \quad B = (-\Delta)^{-1} \circ id^{\mu} : \mathring{H}^1(\Omega) \hookrightarrow \mathring{H}^1(\Omega)$$

*aus (2.26), (2.28) kompakt.*

**Beweis.** Dieser Satz ist eine unmittelbare Folge aus dem obigen Satz 1 und dem Beweis von Proposition 3 aus 2.3.

**Bemerkung 5.** Insbesondere sind die Operatoren  $B_{\frac{n}{2}}$  und  $B$  aus (3.6) und (3.7) kompakt, wenn  $\Gamma$  eine  $d$ -Menge gemäß (3.3) mit  $0 < d \leq \frac{n}{2}$  ist ( $n = 2$  im Fall von  $B$ ). Das gilt auch für die speziellen  $(d, \Psi)$ -Mengen mit (3.4).

**Bemerkung 6.** Nach Bemerkung 4 ist für  $s > 0$ ,

$$tr_{\mu} : H^s(\mathbb{R}^n) \hookrightarrow L_2(\Gamma, \mu)$$

genau dann kompakt, wenn

$$(3.8) \quad \sum_{j=0}^{\infty} 2^{-2j(s-\frac{n}{2})} h(2^{-j}) < \infty$$

gilt. Dann ist nach Proposition 3 aus 2.3 der Operator

$$B_s = (id - \Delta)^{-s} \circ id^{\mu} : H^s(\mathbb{R}^n) \hookrightarrow H^s(\mathbb{R}^n)$$

gemäß (2.26), (2.27) kompakt. Wegen der Beschränktheit der Folge  $h(2^{-j})$  ist (3.8) für  $s > \frac{n}{2}$  immer erfüllt. Erst für  $s \leq \frac{n}{2}$  stellt (3.8) eine zusätzliche Bedingung dar. Gemäß Satz 2 sind wir hier ausschließlich (abgesehen von den obigen Bemerkungen) an dem Limes-Fall  $s = \frac{n}{2}$  interessiert.

## 4 Die fraktale Trommel

### 4.1 Einleitung

Das Wort *fraktale Trommel* kann man auf verschiedene Weisen interpretieren. Man kann etwa an ein Fraktal oder eine fraktale Menge und die Spektraltheorie zugehöriger Laplace-Operatoren denken. Dem entspricht die in [26] dargestellte Theorie. Besser bekannt unter diesem Namen ist die Spektraltheorie des Dirichlet-Laplace Operators  $-\Delta$  in beschränkten Gebieten  $\Omega$  im  $\mathbb{R}^n$  (mit  $n = 2$  als herausragendem Fall) mit fraktalem Rand  $\partial\Omega$ . Die erste weitreichende Arbeit hierzu stammt von M. L. Lapidus, [27]. Weitere Literaturangaben findet man in [41], 26.2, S. 200. Für neuere Aspekte in dieser Richtung verweisen wir auf [28]. Genauer gesagt handelt es sich um

*Trommeln mit fraktalem Rand.*

Im Gegensatz hierzu entwickeln wir in [41], [42] und in dieser Arbeit eine Spektraltheorie von

*Trommeln mit fraktaler Membran.*

Es ist die Spektraltheorie des Operators  $B$  aus Proposition 3(b) aus 2.3 mit  $n = 2$ , also bezüglich beschränkter  $C^\infty$  Gebiete  $\Omega$  in der Ebene.

### 4.2 Vorbereitungen

Es sei  $\Omega$  ein beschränktes  $C^\infty$  Gebiet im  $\mathbb{R}^n$ . Dann rüsten wir den Raum  $\overset{\circ}{H}^1(\Omega)$  aus (2.14) mit dem Skalarprodukt

$$(4.1) \quad (f, g)_{\overset{\circ}{H}^1(\Omega)} = \sum_{j=1}^n \int_{\Omega} \frac{\partial f}{\partial x_j} \frac{\partial \bar{g}}{\partial x_j} dx$$

aus. Ferner benötigen wir die Hölder-Zygmund Räume  $C^s(\Omega)$  mit  $0 < s < 2$ . Ist  $0 < s < 1$ , so kann man  $C^s(\Omega)$  durch

$$(4.2) \quad \|f\|_{C^s(\Omega)}^* = \sup_{x \in \Omega} |f(x)| + \sup \frac{|f(x) - f(y)|}{|x - y|^s}$$

normieren mit  $x \in \Omega, y \in \Omega, x \neq y$ , im zweiten Supremum. Für  $0 < s < 2$  kann man

$$(4.3) \quad \|f\|_{C^s(\Omega)} = \sup_{x \in \Omega} |f(x)| + \sup \frac{|f(x) - 2f(\frac{x+y}{2}) + f(y)|}{|x - y|^s}$$

als Norm wählen mit  $x \in \Omega, y \in \Omega, \frac{x+y}{2} \in \Omega, x \neq y$ , im zweiten Supremum. (Ist  $0 < s < 1$ , so sind die beiden Normen in (4.2) und (4.3) äquivalent). Mit anderen Worten,  $C^s(\Omega)$  ist die Gesamtheit der komplex-wertigen stetigen Funktionen in  $\bar{\Omega}$ , so daß die Norm in (4.3) endlich ist.

**Bemerkung 7.** Man bezeichnet  $C^1(\Omega)$  auch als Zygmund-Klasse. Hierbei treten erstmals zweite Differenzen auf. Dieser Raum wurde in [52] untersucht. Wie dort angedeutet hat aber schon B. Riemann 1854 in seiner Habilitationsschrift [36] im Zusam-



menhang mit trigonometrischen Reihen nachhaltig darauf hingewiesen, daß man für Räume der Glattheit 1 erste Differenzen durch zweite Differenzen ersetzen sollte.

### 4.3 $d$ -Membrane

In diesem Abschnitt betrachten wir fraktale Trommeln (oder gemäß 4.1 Trommeln mit fraktaler Membran), wobei die Membran  $\Gamma$  eine  $d$ -Menge ist. Entsprechend den obigen Betrachtungen ist somit  $\Gamma$  eine kompakte Menge in  $\mathbb{R}^2$  zu der es ein isotropes Radonsches Maß  $\mu$  in  $\mathbb{R}^2$  gibt mit

$$(4.4) \quad \Gamma = \text{supp } \mu, \quad \mu(B(\gamma, r)) \sim r^d, \quad \gamma \in \Gamma, \quad 0 < r \leq 1,$$

wobei  $B(\gamma, r)$  ein Kreis mit Mittelpunkt  $\gamma$  und Radius  $r$  ist. Wie im Zusammenhang mit (2.5) ausgeführt, kann man  $\mu$  mit  $\mu = \mathcal{H}^d|_{\Gamma}$  identifizieren, der Einschränkung des Hausdorff-Maßes  $\mathcal{H}^d$  in der Ebene auf  $\Gamma$ . Dann ist klar, daß  $0 \leq d \leq 2$  ist. Ferner sei  $\Gamma \subset \Omega$ , wobei  $\Omega$  ein beschränktes  $C^\infty$  Gebiet in  $\mathbb{R}^2$  ist. Das führt auf den Operator  $B$  aus Satz 2(b) in 3.2. Es ist zu bemerken, daß  $B$  in  $\dot{H}^1(\Omega)$  kompakt ist, falls  $d > 0$  ist. Falls nicht, ist  $B$  nicht kompakt.

siert sind und  $|\Gamma| = 0$  verlangen, schließen wir auch  $d = 2$  aus. Dann bezeichnen wir  $\Gamma$  als  $d$ -Membran. Nach Satz 2(b) in 3.2 ist der zugehörige Operator  $B$  in  $\dot{H}^1(\Omega)$  kompakt. Es sei  $\omega = \Omega \setminus \Gamma$  und

$$(4.5) \quad \mathring{H}^1(\omega) = \left\{ f \in \dot{H}^1(\Omega) : \text{tr}_\mu f = 0 \right\}.$$

Die Spur existiert, da  $d > 0$  ist und (3.5) mit (iii) in Satz 1 aus 3.2 übereinstimmt. Obwohl  $\omega$  eine offene Menge mit irregulärem Rand  $\partial\Omega \cup \Gamma$  ist, ergibt sich, daß  $C^\infty(\omega)$  dicht in  $\mathring{H}^1(\omega)$  ist, was die Schreibweise (4.5) rechtfertigt. Wir verweisen auf

$$(4.9) \quad \varrho_1 \geq \varrho_2 \geq \varrho_3 \geq \dots, \quad \varrho_k \rightarrow 0 \quad \text{für } k \rightarrow \infty,$$

und  $u_k$  die zugehörigen Eigenfunktionen, also

$$(4.10) \quad Bu_k = \varrho_k u_k, \quad k \in \mathbb{N}.$$

Der größte Eigenwert  $\varrho_1$  ( $> 0$ ) ist einfach und die zugehörigen Eigenfunktionen  $u_1(x)$  haben keine Nullstellen in  $\Omega$ , also

$$(4.11) \quad u_1(x) = c u(x) \quad \text{mit } c \in \mathbb{C} \text{ und } u(x) > 0 \text{ in } \Omega$$

(Courantsche Eigenschaft). Es gilt

$$(4.12) \quad \varrho_k \sim k^{-1} \quad \text{mit } k \in \mathbb{N}$$

(Weylsche Eigenschaft). Die Eigenfunktionen  $u_k$  sind in  $\omega = \Omega \setminus \Gamma$  klassische harmonische Funktionen,

$$(4.13) \quad \Delta u_k(x) = 0 \quad \text{für } x \in \omega.$$

Ferner ist

$$(4.14) \quad u_k \in C^s(\Omega) \quad \text{genau dann, wenn } s \leq d,$$

gilt.

**Bemerkung 8.** Dieser Satz ist ein Spezialfall von Theorem 19.7 in [42], S. 264/265, einschließlich seines Beweises. Wir hatten in 2.2 die klassische Theorie in den dortigen Punkten (a), (b), (c) geschildert. Das Weylsche Verhalten (2.11) vom klassischen Fall überträgt sich gemäß (4.12) auf  $d$ -Membrane. Gleichermäßen bemerkenswert ist, daß sich die klassischen Aussagen aus 2.2(b) auf  $d$ -Membrane übertragen: Der größte Eigenwert  $\varrho_1$  ist einfach und die zugehörige Eigenfunktion  $u(x)$  ist (abgesehen von einer multiplikativen Konstanten) in  $\Omega$  positiv. Die globalen Glattheitseigenschaften der Eigenfunktionen  $u_k$  aus (2.13) haben jetzt im Fall von  $d$ -Membranen ihr Gegenstück in der scharfen Aussage  $u_k \in C^d(\Omega)$  und in (4.13).

**Bemerkung 9.** Es ist bemerkenswert, daß zumindest für die Funktion  $u$  aus (4.11) die best mögliche Glattheitsaussage (4.14) auch lokal gilt: Es sei  $B(\gamma, r)$  ein Kreis mit Mittelpunkt  $\gamma \in \Gamma$ , Radius  $r > 0$ , und  $B(\gamma, r) \subset \Omega$ . Dann gilt

$$(4.15) \quad u \in C^s(B(\gamma, r)) \quad \text{genau dann, wenn } s \leq d$$

gilt. Die maximale lokale Glattheit von  $u$ , also  $s = d$ , ist somit ein getreues Spiegelbild der Fraktalität von  $\Gamma$ . Diese bemerkenswerte Eigenschaft haben wir beim Abfassen von 19.7–19.10 in [42], S. 264–272, übersehen, obwohl sie unmittelbar aus dem Beweis von Theorem 19.7 folgt. Wir kommen auf diesen Punkt in 4.6 zurück.

#### 4.4 Weylsche Maße

Satz 3 aus 4.3 wirft die Frage auf, ob die Weylsche Eigenschaft (4.12) auch für andere Maße  $\mu$  als  $\mathcal{H}^d|_{\Gamma}$  mit  $0 < d < 2$  gilt. Die abschließende Klärung dieses Problems scheint

kompliziert zu sein und ein (notwendiges und hinreichendes) Kriterium ist nicht in Sicht. Wie in 2.1 setzen wir voraus, daß  $\Omega$  ein beschränktes  $C^\infty$  Gebiet in der Ebene  $\mathbb{R}^2$  und  $\mu$  ein Radonsches Maß mit

$$(4.16) \quad \text{supp } \mu = \Gamma \subset \Omega, \quad |\Gamma| = 0, \quad 0 < \mu(\Gamma) < \infty,$$

sind. Damit die rechte Seite von (4.8), nunmehr für ein allgemeines Radonsches Maß mit (4.16), eine stetige Bilinearform in  $\mathring{H}^1(\Omega)$  ist, muß

$$(4.17) \quad tr_\mu : \mathring{H}^1(\Omega) \hookrightarrow L_2(\Gamma, \mu)$$

ein linearer und stetiger Spuroperator gemäß 2.3 und Proposition 3(b) sein. Ist dies der Fall, dann ergibt sich auch für die obigen Maße, daß

$$(4.18) \quad B = (-\Delta)^{-1} \circ id^\mu : \mathring{H}^1(\Omega) \hookrightarrow \mathring{H}^1(\Omega)$$

gilt und daß  $B$  ein nicht-negativer selbstadjungierter Operator ist. Mit anderen Worten, auch im obigen allgemeinen Fall gelten (4.6), (4.7), (4.8).

**Definition 1.** Es sei  $\mu$  ein endliches Radonsches Maß in  $\mathbb{R}^2$  mit kompaktem Träger  $\Gamma$ . Dann heißt  $\mu$  Weylsches Maß, falls für jedes beschränkte  $C^\infty$  Gebiet  $\Omega$  mit (4.16) der Spuroperator  $tr_\mu$  aus (4.17) existiert, der Operator  $B$  aus (4.18) kompakt ist und für seine positiven Eigenwerte  $\varrho_k$ , geordnet gemäß (4.9), einschließlich Vielfachheiten,

$$\varrho_k \sim k^{-1}, \quad k \in \mathbb{N},$$

gilt.

**Bemerkung 10.** Nach Satz 3 aus 4.3 ist  $\mu = \mathcal{H}^d|_\Gamma$  für jede kompakte  $d$ -Menge  $\Gamma$  mit  $0 < d < 2$ , ein Weylsches Maß. Es sei

$$\mu = \sum_{j=1}^N \mu_j, \quad \mu_j = \mathcal{H}^{d_j}|_{\Gamma_j}, \quad j = 1, \dots, N,$$

wobei  $\Gamma_j$  kompakte  $d_j$ -Mengen mit  $0 < d_j < 2$  sind. Dann ist  $\mu$  ein Weylsches Maß. Diese Aussage findet man in [42], 19.12, S. 274, unter der Voraussetzung, daß die Mengen  $\Gamma_j$  paarweise punktfremd sind. Diese Zusatzvoraussetzung ist aber nicht nötig, wie in [46], Corollary 2, gezeigt wurde.

**Bemerkung 11.** Ist  $\mu$  ein isotropes Maß mit (4.16), so erhält man durch Satz 1 aus 3.2 ein abschließendes Kriterium wann  $tr_\mu$  existiert. Ist  $\mu$  ein allgemeines (nicht notwendig isotropes) Maß mit (4.16), so gibt es ebenfalls notwendige und hinreichende Bedingungen für die Existenz von  $tr_\mu$ . Wir verweisen auf [42], Theorem 9.3, S. 125/126. Sie sind aber etwas implizit. Aus ihnen kann man als Spezialfall folgende Aussage herleiten. Es sei  $Q_{jm}$  das Quadrat in  $\mathbb{R}^2$  mit Mittelpunkt  $2^{-j}m$  und Kantenlänge  $2^{-j+1}$ . Hierbei ist  $j \in \mathbb{N}_0$  und  $m \in \mathbb{Z}^2$ , wobei  $\mathbb{Z}^2$  das Gitter der Punkte in  $\mathbb{R}^2$  mit ganzzahligen Koordinaten ist. Ferner sei  $\mu$  ein endliches Radonsches Maß in  $\mathbb{R}^2$  mit (4.16). Es sei

$$\mu_j = \sup_{m \in \mathbb{Z}^2} \mu(Q_{jm}), \quad j \in \mathbb{N}_0.$$

$$(4.19) \quad \sum_{j \in \mathbb{N}_0} \sum_{m \in \mathbb{Z}^2} \mu(Q_{jm})^2 < \infty$$

(notwendige Bedingung). Ist umgekehrt

$$(4.20) \quad \sum_{j \in \mathbb{N}_0} \mu_j < \infty,$$

so existiert  $\mu$  (hinreichende Bedingung). Wir verweisen auf [47], Lemma 2.1, das sei

**Problem 2.** Nach Bemerkung 12 ist  $\mu = \mathcal{H}^d|_{\Gamma}$  mit  $0 < d < 2$  streng diffus. Somit ist die Weylsche Eigenschaft (4.12) für  $d$ -Membrane eine unmittelbare Folgerung aus Satz 4. Andererseits ist (4.23) eine, wenn auch abgeschwächte, Isotropie-Bedingung. Bekanntlich kann man in der Ebene herrliche Farne, Gräser usw. durch IFS (Iterated Function Systems), basierend auf affinen kontrahierenden Abbildungen, in  $\mathbb{R}^2$  erzeugen. Das findet man in vielen Büchern über fraktale Geometrie. Eine kurze Darstellung einschließlich entsprechender Literaturhinweise wurde in [41], Section 4, gegeben. Die zugehörigen (anisotropen oder nicht-isotropen) Radonschen Maße erfüllen i.a. nicht die Bedingung (4.23). Es ist (zumindest für den Autor) vollkommen unklar, ob die zugehörigen (anisotropen oder nicht-isotropen) Radonsche Maße auch Weylsche Maße sind. Daraus ergeben sich folgende Probleme:

*Wie klingt die Musik der Farne?*  
 und, allgemeiner,  
*wann ist ein Radonsches Maß in  $\mathbb{R}^2$  ein Weylsches Maß?*

#### 4.5 $h$ -Membrane

In 4.3 haben wir  $d$ -Membrane betrachtet, wobei  $d$  eine Zahl mit  $0 < d < 2$  ist. Im Unterschied hierzu ist  $h(\cdot)$  eine ein isotropes Maß erzeugende Funktion,

$$(4.25) \quad \mu(B(\gamma, r)) \sim h(r), \quad \gamma \in \Gamma, \quad 0 < r \leq 1,$$

wobei wir auf 3.1 verweisen. Nach Satz 1 und insbesondere Satz 2(b) aus 3.2 ist

$$(4.26) \quad B = (-\Delta)^{-1} \circ id^\mu : \mathring{H}^1(\Omega) \hookrightarrow \mathring{H}^1(\Omega)$$

kompakt, sofern

$$(4.27) \quad \sum_{j=0}^{\infty} h(2^{-j}) < \infty$$

gilt. Ansonsten ist dies ein Spezialfall von (4.16)–(4.18). Somit ist  $B$  ein kompakter, nicht-negativer selbstadjungierter Operator in  $\mathring{H}^1(\Omega)$  mit (4.6)–(4.11) und (4.13).

**Satz 5.** *Es sei  $\Omega$  ein beschränktes  $C^\infty$  Gebiet in der Ebene  $\mathbb{R}^2$  und es sei  $\mu$  ein isotropes Radonsches Maß mit (4.16), (4.25). Gelten sowohl*

$$(4.28) \quad \sum_{j=J}^{\infty} h(2^{-j}) \sim h(2^{-J}), \quad J \in \mathbb{N}_0,$$

als auch

$$(4.29) \quad \sum_{j=0}^J h^{-1}(2^{-j}) \sim h^{-1}(2^{-J}), \quad J \in \mathbb{N}_0,$$

so ist  $\mu$  ein Weylsches Maß gemäß Definition 1 aus 4.4.

**Bemerkung 14.** Für  $J = 0$  ist (4.27) in (4.28) enthalten. Entsprechend der früheren Vereinbarung bedeutet  $\sim$  in (4.28) und (4.29), daß die beiden Seiten gegeneinander zu Lasten positiver von  $J$  unabhängiger Konstanten abschätzbar sind (jeweils eine Richtung ist trivial). Im Anschluß an [41] und [42] haben wir Weylsche Maße in [46] und [47] untersucht. Das obige Resultat wird hier erstmals publiziert und folgt aus entsprechenden Ergebnissen in [47]. Während (4.27) notwendig und hinreichend für die Beschränktheit von  $B$  aus (4.26) ist, ist nicht klar, ob die hinreichenden Bedingungen (4.28), (4.29) auch notwendig dafür sind, daß  $\mu$  ein Weylsches Maß ist.

## 4.6 Courant Indikatoren

Wie in Bemerkung 9 in 4.3 angedeutet, gilt zumindest für die Eigenfunktion  $u(x)$  aus (4.11), daß die globale Glattheitseigenschaft (4.14) für alle Eigenfunktionen  $u_k$  auch lokal gemäß (4.15) gilt. Hierbei ist  $\Gamma$  eine  $d$ -Menge mit  $0 < d < 2$  und  $\mu = \mathcal{H}^d \llcorner \Gamma$ . Die Eigenfunktion  $u(x)$  ist also in jedem Punkt  $\gamma \in \Gamma$  ein getreues Spiegelbild der lokalen Fraktalität (zumindest was die Zahl  $d$  anbelangt). Anscheinend kann man diese zum größten Eigenwert  $\varrho_1$  gehörige in  $\Omega$  positive Eigenfunktion  $u(x)$  auch in allgemeineren Fällen benutzen, um Informationen darüber zu bekommen wie fraktal  $\Gamma$  in jedem Punkt  $\gamma \in \Gamma$  ist. Es ist eines der zentralen Anliegen der fraktalen Geometrie, globale, lokale und punktale Aussagen über fraktale Mengen und Maße zu machen. Wir verweisen auf die in der Einleitung genannten Bücher, insbesondere [17], [18], [29], [19]. Fraktale Charakteristika vom Standpunkt der Funktionenräume findet man in [44], einschließlich weiterer Literaturangaben. Wie angedeutet kann man das Verhalten der Eigenfunktion  $u(x)$  nutzen, um weitere fraktale Charakteristika einzuführen. Wir hoffen auf diesen Gegenstand später genauer und systematischer zurück zu kommen, [48]. Im Moment skizzieren wir einige erste Resultate, die im direkten Zusammenhang mit den obigen Be-

trachtungen stehen.

Es sei wiederum  $\Omega$  ein beschränktes  $C^\infty$  Gebiet in der Ebene  $\mathbb{R}^2$  und  $\mu$  sei ein Radonsches Maß mit

$$(4.30) \quad \text{supp } \mu = \Gamma \subset \Omega, \quad |\Gamma| = 0, \quad 0 < \mu(\Gamma) < \infty.$$

Wir nehmen an, daß es Zahlen  $c > 0$  und  $\varepsilon > 0$  mit

$$(4.31) \quad \mu(B(\gamma, r)) \leq cr^\varepsilon, \quad \gamma \in \Gamma, \quad 0 < r \leq 1,$$

gibt. Dann folgt aus (4.20) und (4.16)–(4.18), daß

$$B = (-\Delta)^{-1} \circ id^\mu : \quad \mathring{H}^1(\Omega) \hookrightarrow \mathring{H}^1(\Omega)$$

ein nicht-negativer selbstadjungierter Operator ist. Aus dem Beweis des obigen Satzes 3 in [42], 19.7, und (4.31) folgt ferner, daß  $B$  kompakt ist. Die positiven Eigenwerte  $\varrho_k$  können gemäß (4.9) geordnet werden, der größte Eigenwert  $\varrho_1$  ist einfach und es gelten (4.11) und (4.13). Ferner ist in Analogie zu (4.14)

$$(4.32) \quad u_k \in C^\varepsilon(\Omega), \quad k \in \mathbb{N}.$$

Das gilt insbesondere für die in  $\Omega$  positive Eigenfunktion  $u$ .

**Definition 3.** (Courant-Indikator) *Unter den obigen Voraussetzungen sei für  $\gamma \in \Gamma$ ,*  
 (4.33)  $\text{Ind}_\infty(\gamma) = \sup \{s : u \in C^s(B(\gamma, r)) \text{ mit } 0 < r \leq 1\}.$

**Bemerkung 15.** Der Courant-Indikator mißt in jedem Punkt  $\gamma \in \Gamma$  die bestmögliche lokale Glattheit der positiven Eigenfunktion  $u(x)$  zum größten Eigenwert  $\varrho_1$  von  $B$ . Nach (4.32) gilt zumindest

$$\text{Ind}_\infty(\gamma) \geq \varepsilon \quad \text{für } \gamma \in \Gamma.$$

**Proposition 5.** (*d*-Membrane) *Es sei  $\Omega$  ein beschränktes  $C^\infty$  Gebiet in der Ebene  $\mathbb{R}^2$  und es sei  $\Gamma$  eine kompakte  $d$ -Menge mit  $\Gamma \subset \Omega$  und  $0 < d < 2$ . Ferner sei  $\mu$  ein zugehöriges Radonsches Maß,*

$$\Gamma = \text{supp } \mu, \quad \mu(B(\gamma, r)) \sim r^d, \quad \gamma \in \Gamma, \quad 0 < r \leq 1.$$

*Dann ist*

$$\text{Ind}_\infty(\gamma) = d \quad \text{für } \gamma \in \Gamma.$$

$$(4.34) \quad \dim_H(\gamma) = \lim_{j \rightarrow \infty} \dim_H(\Gamma \cap B(\gamma, 2^{-j})), \quad \gamma \in \Gamma,$$

wobei  $\dim_H(M)$  die Hausdorff-Dimension einer Menge  $M$  ist. Ferner sei

$$\mu(B(\gamma', r)) \leq c_j r^{d_j(\gamma)} \quad \text{für } \gamma \in \Gamma, |\gamma - \gamma'| \leq 2^{-j} \quad \text{und} \quad 0 < r \leq 2^{-j}$$

und

$$(4.35) \quad d(\gamma) = \lim_{j \rightarrow \infty} d_j(\gamma), \quad \gamma \in \Gamma.$$

Die Folge auf der rechten Seite von (4.34) ist monoton fallend (d. h. nicht wachsend), die Folge auf der rechten Seite von (4.35) ist monoton wachsend (d. h. nicht fallend) und es gilt

$$(4.36) \quad d(\gamma) \leq \dim_H(\gamma), \quad \gamma \in \Gamma.$$

Im Falle einer  $d$ -Menge sind beide Zahlen in (4.36) gleich  $d$ .

**Satz 6.** *Es sei  $\Omega$  ein beschränktes  $C^\infty$  Gebiet in  $\mathbb{R}^2$  und es sei  $\mu$  ein Radonsches Maß mit (4.30), (4.31). Dann ist*

$$(4.37) \quad d(\gamma) \leq \text{Ind}_\infty(\gamma) \leq \dim_H(\gamma), \quad \gamma \in \Gamma.$$

**Bemerkung 17.** Einen Beweis publizieren wir zu einem späteren Zeitpunkt im Rahmen einer umfassenderen Theorie, [48]. Proposition 5 ist ein Spezialfall von (4.37).

**Problem 4.** Im Zusammenhang mit der Einführung von  $\text{Ind}_\infty$  in Definition 3, der oben angedeuteten Verallgemeinerung  $\text{Ind}_p$  und Satz 6 entsteht das folgende Problem. Bisher haben wir stillschweigend angenommen, daß  $\mu$  (also auch  $\Gamma$ ) und  $\Omega$  gemäß (4.30) gegeben sind. Es erhebt sich aber die Frage wie weit  $\text{Ind}_p$  bei gegebenem  $\mu$  von  $\Omega$  abhängt. Es ist somit angebracht, diese mögliche Abhängigkeit zu kennzeichnen, also

$$\text{Ind}_p(\gamma) \implies \text{Ind}_p^\Omega(\gamma) \implies \text{Ind}_p^{\mu, \Omega}(\gamma), \quad \gamma \in \Gamma = \text{supp } \mu,$$

zu schreiben. Anschließend kann man fragen, ob  $\text{Ind}_p^{\mu, \Omega}$  von  $\Omega$  unabhängig ist. Nach Proposition 5 und Problem 3 gilt dies, wenn  $\Gamma$  eine  $d$ -Menge ist. Möglicherweise ist das auch für allgemeine isotrope Radonsche Maße richtig, sofern etwa die in Problem 3 genannten Konditionen erfüllt sind. Ist  $\mu$  nicht isotrop, so ist die Unabhängigkeit von  $\Omega$  zumindest fraglich.

*Ist  $\text{Ind}_p^{\mu, \Omega}$  zu gegebenem  $\mu$  und gegebenem  $p$  von  $\Omega$  genau dann unabhängig, wenn  $\mu$  isotrop ist?*

Und was möchte uns dann zu gegebenem (nicht isotropen) Maß  $\mu$  die Gesamtheit der Indikatoren  $\text{Ind}_p^{\mu, \Omega}$  über  $\mu$  und  $\Gamma = \text{supp } \mu$  mitteilen und in welcher Sprache?



## 5 $n$ -dimensionale Weylsche Maße

### 5.1 Einleitung und Definitionen

Es ist fast selbstverständlich, daß die im Abschnitt 4 skizzierte Theorie für den Operator  $B$  in der Ebene  $\mathbb{R}^2$  ein  $n$ -dimensionales Gegenstück hat. So findet man in [42], Theorem 19.7, S. 264/265, die  $n$ -dimensionale Verallgemeinerung des obigen Satzes 3 aus 4.3. In die entsprechenden Voraussetzungen und Resultate geht nunmehr die Zahl  $n$  ein. So lautet etwa das Gegenstück von (4.12),

$$(5.1) \quad \varrho_k \sim k^{-1 + \frac{n-2}{d}}, \quad k \in \mathbb{N}, \quad n-2 < d < n,$$

(mit  $0 < d < 1$  für  $n = 1$ ). Es ist aber nicht unsere Absicht, möglichst allgemeine Aussagen zu formulieren. Vielmehr möchten wir uns im Sinne von Bemerkung 6 und Satz 2 aus 3.2 auf die besonders interessanten Limesfälle

$$(5.2) \quad B_{\frac{n}{2}} = (id - \Delta)^{-\frac{n}{2}} \circ id^\mu : H^{\frac{n}{2}}(\mathbb{R}^n) \hookrightarrow H^{\frac{n}{2}}(\mathbb{R}^n),$$

konzentrieren. Ist  $n = 2$ , so bedeutet das, daß der Operator  $B$  aus (4.18) durch den Operator  $B_1$  aus (5.2) ersetzt wird. Das Gebiet  $\Omega$  tritt dann nicht mehr in Erscheinung und die physikalische Interpretation als fraktale Trommel (oder Trommel mit fraktaler Membran) geht verloren. Andererseits übertragen sich nach den notwendigen technischen Modifikationen viele Aussagen für den Operator  $B$  aus dem Abschnitt 4 auf den Operator  $B_1$  (in  $\mathbb{R}^2$ ).

Im  $n$ -dimensionalen Fall hatten wir in den Abschnitten 2 und 3 bereits die notwendigen vorbereitenden Aussagen für  $B_{\frac{n}{2}}$  und, allgemeiner, für

$$B_s = (id - \Delta)^{-s} \circ id^\mu : H^s(\mathbb{R}^n) \hookrightarrow H^s(\mathbb{R}^n),$$

$s > 0$ , parallel zum Operator  $B$  aus Abschnitt 4 getroffen. Wir verweisen auf Proposition 3(a) aus 2.3 und auf die Sätze 1 und 2(a) aus 3.2. In Analogie zu (4.1) führen wir in  $H^{\frac{n}{2}}(\mathbb{R}^n)$  das modifizierte Skalarprodukt

$$(5.3) \quad (f, g)_{H^{\frac{n}{2}}(\mathbb{R}^n)} = \int_{\mathbb{R}^n} (id - \Delta)^{\frac{n}{4}} f(x) \cdot (id - \Delta)^{\frac{n}{4}} \bar{g}(x) dx$$

ein. Dann ist  $B_{\frac{n}{2}}$  mit (5.2), in Analogie zum Operator  $B$  aus Abschnitt 4, ein nicht-negativer kompakter selbstadjungierter Operator in  $H^{\frac{n}{2}}(\mathbb{R}^n)$ . Seine positiven Eigenwerte  $\varrho_k$ , gezählt gemäß ihren Vielfachheiten, können der Größe nach geordnet werden,

$$(5.4) \quad \varrho_1 \geq \varrho_2 \geq \varrho_3 \geq \dots, \quad \varrho_k \rightarrow 0 \quad \text{für } k \rightarrow \infty.$$

Wir zeigen nun, daß (5.3) gemäß (3.24) und Proposition 3(a) aus 2.3 äquivalent da-

existiert. In Analogie zu Definition 1 aus 4.4 können wir jetzt im  $\mathbb{R}^n$  Weylsche Maße wie folgt einführen.

**Definition 4.** Es sei  $\mu$  ein endliches Radonsches Maß im  $\mathbb{R}^n$  mit kompaktem Träger  $\Gamma$ . Dann heißt  $\mu$  ein Weylsche Maß, falls der Spuroperator  $\text{tr}_\mu$  aus (5.5) existiert, der Operator  $B_{\frac{n}{2}}$  aus (5.2) kompakt ist und für seine positiven Eigenwerte  $\varrho_k$ , geordnet gemäß (5.4), einschließlich Vielfachheiten,

$$\varrho_k \sim k^{-1}, \quad k \in \mathbb{N},$$

gilt.

**Bemerkung 18.** Es ist leicht zu sehen, daß  $\mu$  genau dann ein Weylsches Maß in der Ebene  $\mathbb{R}^2$  gemäß Definition 1 ist, wenn es ein Weylsches Maß nach Definition 4 ist.

## 5.2 Isotrope Weylsche Maße

Es zeigt sich, daß man Satz 5 aus 4.5 fast wörtlich übertragen kann. Aus Vollständig-

## 6 Methoden

### 6.1 Einleitung

Die Techniken, die letztendlich zu Resultaten der oben beschriebenen Art führten, haben ihren Anfang in [16] genommen. Kernpunkt in [16] sind quantitative Aussagen über kompakte Einbettungsoperatoren zwischen Funktionenräumen etwa der Form

$$(6.1) \quad id : B_{p_1}^{s_1}(\Omega) \hookrightarrow B_{p_2}^{s_2}(\Omega), \quad s_1 - \frac{n}{p_1} > s_2 - \frac{n}{p_2},$$

$0 < p_1 \leq p_2 \leq \infty$ , beschrieben durch Entropie-Zahlen und Approximations-Zahlen. Hierbei ist  $\Omega$  ein beschränktes Gebiet im  $\mathbf{R}^n$ . Die in dieser Arbeit auftretenden Räume  $H^s = B_2^s$  und  $C^s = B_\infty^s$  sind Spezialfälle. Die genaue Kenntnis der Entropie-Zahlen und Approximations-Zahlen führte dann in [16] zu einer Spektraltheorie (entarteter) elliptischer (Pseudo-) Differentialoperatoren. Aussagen über Einbettungsoperatoren  $id$  der Form (6.1) basierten in [16] auf den Fourier-analytischen Definitionen der Räume  $B_p^s(\mathbf{R}^n)$  und ihrer Einschränkungen auf Gebiete  $\Omega$  in  $\mathbf{R}^n$ . Der Schritt von Gebieten  $\Omega$  und (entarteten) elliptischen Operatoren zu Fraktalen und entsprechenden fraktalen elliptischen Operatoren wurde in [41] vollzogen. Er besteht in einer Charakterisierung von Funktionenräumen durch subatomare Zerlegungen (quarkonial decompositions). Die hohe Flexibilität dieser Technik erlaubt nicht nur eine Diskretisierung von Räumen der Form  $B_p^s(\Omega)$ , sondern auch entsprechende Räume auf fraktalen Mengen einzuführen. Ist etwa  $\Gamma$  eine kompakte  $d$ -Menge im  $\mathbf{R}^n$  mit  $0 < d \leq n$ , so kann man Räume  $B_p^s(\Gamma)$  subatomar einführen und quantitative Aussagen über Entropie-Zahlen und Approximations-Zahlen für kompakte Einbettungen der Form

$$id : B_{p_1}^{s_1}(\Gamma) \hookrightarrow B_{p_2}^{s_2}(\Gamma), \quad s_1 - \frac{d}{p_1} > s_2 - \frac{d}{p_2},$$

$0 < p_1 \leq p_2 \leq \infty$ , machen. Das führt dann zu einer Spektraltheorie fraktaler elliptischer Operatoren, die das Kernstück der obigen Betrachtungen ist. Diese Untersuchungen haben wir in [42] und danach in den im Literaturverzeichnis genannten Arbeiten fortgesetzt. In dieser Arbeit ist die genaue Beschreibung dieser Techniken und ihrer

Nullpunktes von  $A$  aus höchstens abzählbar vielen Eigenwerten  $\varrho_k$  endlicher algebraischer Vielfachheit, die einschließlich ihrer algebraischen Vielfachheiten durch

$$(6.2) \quad |\varrho_1| \geq |\varrho_2| \geq |\varrho_3| \geq \cdots, \quad \varrho_k \rightarrow 0 \quad \text{für } k \rightarrow \infty,$$

geordnet werden können (wobei die letzte Aussage entfällt, falls es nur endlich viele oder keine Eigenwerte gibt).

**Proposition 6.** (Ungleichung von Carl) *Unter den obigen Voraussetzungen gilt die Unschärferrelation*

$$\sqrt{2} |\varrho_k|^{-1} e_k(T) \geq 1, \quad k \in \mathbb{N}.$$

**Bemerkung 20.** Bei Kenntnis der geometrischen Größen  $e_k(T)$  kann man die Eigenwerte betragsmäßig nach oben abschätzen. Diese Ungleichung geht auf [11], [9] zurück. Beweise und weitere Ausführungen findet man in [10] und [16].

Neben Entropie-Zahlen benötigt man Approximations-Zahlen. Es sei  $T$  wiederum ein kompakter Operator im komplexen Banachraum  $A$ . Mit  $k \in \mathbb{N}$  ist

$$a_k(T) = \inf\{\|T - L\| : L \in L(A), \text{rank } L < k\},$$

die  $k$ te Approximations-Zahl, wobei  $L(A)$  die Gesamtheit der linearen und stetigen Operatoren in  $A$  ist, und  $\text{rank } L$  die Dimension des Bildes von  $L$  ist.

**Proposition 7.** *Es sei  $T$  ein kompakter nicht-negativer selbstadjungierter Operator im Hilbertraum  $H$  und es seien  $\varrho_k$  seine positiven Eigenwerte geordnet gemäß (6.2). Dann ist*

$$a_k(T) = \varrho_k, \quad k \in \mathbb{N}.$$

**Bemerkung 21.** Das ist ein Spezialfall einer wohlbekannten klassischen Aussage. Wir verweisen auf [15], S. 91.

### 6.3 Subatomare Zerlegungen

Als entscheidendes Instrument im Kontext der in dieser Arbeit beschriebenen Resultate erweisen sich subatomare Zerlegungen (quarkonial decompositions) von Funktionenräumen. Sie wurden eigens zu diesem Zweck entwickelt und erstmals in [41] dargestellt. In der Folgezeit zeigte sich, daß diese Techniken auch auf andere Probleme angewandt werden können. Sie führten schließlich in [42] zu einem neuen konstruktiven oder *Weierstraßschen Zugang* zur Theorie der Funktionenräume, einschließlich *Taylorentwicklungen von Distributionen*. Die Grundidee etwa für Funktionenräume im  $\mathbb{R}^n$  besteht darin, daß man die wohlbekannte wavelet-Philosophie mit der Philosophie der Taylor-Entwicklungen verknüpft, also

$$(6.3) \quad \psi(x) \implies \psi(2^j x - m) \quad \text{mit} \quad \psi(x) \implies x^\beta \psi(x), \quad x \in \mathbb{R}^n,$$

wobei  $j \in \mathbb{N}_0$ ,  $m \in \mathbb{Z}^n$ ,  $\beta \in \mathbb{N}_0^n$  und  $x^\beta = x_1^{\beta_1} \cdots x_n^{\beta_n}$  ist. Hierbei ist wiederum  $\mathbb{N}_0$  die Gesamtheit der nicht-negativen ganzen Zahlen,  $\mathbb{Z}^n$  das Gitter im  $\mathbb{R}^n$  bestehend aus den Punkten  $x = (x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n$  mit ganzzahligen Komponenten, und  $\mathbb{N}_0^n$  die Gesamtheit der Multi-indizes  $\beta = (\beta_1, \dots, \beta_n) \in \mathbb{R}^n$  mit  $\beta_j \in \mathbb{N}$ . Gesucht sind Elementarbausteine  $\psi$ , so daß man mit Hilfe von (6.3) Frames in den entsprechenden Funktionenräumen erhält, wobei die Frame-Koeffizienten (komplexe Zahlen) in abschließender Weise Auskunft darüber geben zu welchen Funktionenräumen die so konstruktiv entwickelte Distribution gehört. Diese Techniken sind überaus flexibel und erlauben konstruktive Zugänge nicht nur für alle Funktionenräume vom Typ  $B_{pq}^s$  und  $F_{pq}^s$  für alle zugelassenen Parameter  $s, p, q$  im  $\mathbb{R}^n$ , sondern auch für diesbezügliche Räume in Gebieten  $\Omega$  im  $\mathbb{R}^n$ , auf Mannigfaltigkeiten und insbesondere auf Fraktalen. Um einen Eindruck zu vermitteln, beschreiben wir einen relativ einfachen, aber typischen Fall.

Es seien

$$(6.4) \quad B_p^s(\mathbb{R}^n) = B_{pp}^s(\mathbb{R}^n) \quad \text{mit} \quad s > 0 \quad \text{und} \quad 1 \leq p \leq \infty,$$

die wohlbekanntesten speziellen Besov-Räume. Wir verzichten auf eine explizite Definition und erinnern daran, daß

$$H^s(\mathbb{R}^n) = B_2^s(\mathbb{R}^n) \quad \text{und} \quad C^s(\mathbb{R}^n) = B_\infty^s(\mathbb{R}^n), \quad s > 0,$$

die in dieser Arbeit benutzten Sobolev-Räume (fractional Sobolev spaces) und Hölder-Zygmund-Räume sind. Bezüglich der Grundlagen der Theorie der Funktionenräume verweisen wir ansonsten auf [39], [40]. Es sei  $\psi$  eine nicht-negative  $C^\infty$  Funktion im  $\mathbb{R}^n$  mit

$$\text{supp } \psi \subset \{y : |y| < 2^J\}$$

und

$$\sum_{m \in \mathbb{Z}^n} \psi(x - m) = 1, \quad x \in \mathbb{R}^n,$$

für eine geeignete Zahl  $J \in \mathbb{N}$  (Zerlegung der Einheit im  $\mathbb{R}^n$ ). Es seien

$$\psi^\beta(x) = (2^{-J}x)^\beta \psi(x), \quad x \in \mathbb{R}^n, \quad \beta \in \mathbb{N}_0^n.$$

Zu vorgegebenen  $s$  und  $p$  werden gemäß (6.3) die Elementarbausteine,  $\beta$ -quarks,

$$(6.5) \quad (\beta\text{-qu})_{jm}(x) = 2^{-j(s-\frac{n}{p})} \psi^\beta(2^j x - m), \quad j \in \mathbb{N}_0, \quad m \in \mathbb{Z}^n, \quad \beta \in \mathbb{N}_0^n,$$

eingeführt. Die Normierung erklärt sich aus

$$(6.6) \quad \|(\beta\text{-qu})_{jm} | B_p^s(\mathbb{R}^n) \| \sim 1,$$

wobei die Äquivalenzkonstanten in (6.6) von  $\beta \in \mathbb{N}_0^n$ , nicht aber von  $j \in \mathbb{N}_0, m \in \mathbb{Z}^n$ , abhängen können. Eine Funktion  $f \in L_p(\mathbb{R}^n)$  gehört dann und nur dann zu  $B_p^s(\mathbb{R}^n)$ , falls sie darstellbar ist als

$$(6.7) \quad f(x) = \sum_{\beta \in \mathbb{N}_0^n} \sum_{j \in \mathbb{N}_0} \sum_{m \in \mathbb{Z}^n} \lambda_{jm}^\beta (\beta\text{-qu})_{jm}(x),$$

mit  $(\beta\text{-qu})_{jm}$  aus (6.5) und

$$(6.8) \quad \|\lambda|_{\ell_p}\| = \left( \sum_{\beta, j, m} |\lambda_{jm}^\beta|^p \right)^{\frac{1}{p}} < \infty$$

(mit der üblichen Modifikation für  $p = \infty$ ). Hierbei konvergiert (6.7) mit (6.8) :

$$(6.10) \quad id : H^{\frac{d}{2}}(\Gamma, \mu) \hookrightarrow L_2(\Gamma, \mu)$$

ist kompakt. In naheliegender Verallgemeinerung des Beginns von 6.2 kann man Entropie-Zahlen für kompakte Operatoren zwischen Banachräumen einführen. Für  $id$  aus (6.10) ergibt sich

$$(6.11) \quad e_k(id) \sim k^{-\frac{1}{2}}, \quad k \in \mathbb{N}.$$

Der Beweis von (6.11) beruht auf subatomaren Zerlegungen in  $H^{\frac{d}{2}}(\Gamma, \mu)$  und der dadurch gegebenen Möglichkeit, Probleme der Art (6.11) auf Entropie-Zahlen zwischen gewichteten  $\ell_2$ -Räumen zurückzuführen. Diese kann man dann berechnen. Andererseits zeigt sich, daß sich die positiven Eigenwerte von  $\sqrt{B}$ , also  $\varrho_k^{\frac{1}{2}}$ , unter Verwendung von Proposition 6 aus 6.2 durch  $e_k(id)$  nach oben abschätzen lassen, also

$$\varrho_k^{\frac{1}{2}} \leq c e_k(id) \sim k^{-\frac{1}{2}}.$$

Ferner kann man in ähnlicher Weise die entsprechenden Approximations-Zahlen  $a_k(id)$  nach unten abschätzen. Unter Verwendung von Proposition 7 aus 6.2 führt das letztendlich zu

$$\varrho_k \sim k^{-1}, \quad k \in \mathbb{N},$$

also (4.12). Details findet man in der angegebenen Literatur. Die obigen Andeutungen sollen lediglich einen ersten Eindruck vom Zusammenspiel der in 6.2 und 6.3 skizzierten Aussagen vermitteln.

## 7 Epilog

Nach den Zitaten aus der Einleitung befinden sich fraktale Geometrie und fraktale Analysis auf der Suche nach Wegen durch die fraktale Wildnis. Gestützt auf die obigen Darlegungen hoffen wir, daß die heutige Theorie der Funktionenräume einen neuen Pfad erschließt: Abseits vom geschäftigen Treiben im Selbstähnlichen und IFS (iterated function systems), vorzugsweise im Isotropen wandelnd und scheue Blicke in den umgebenden nicht-isotropen Dschungel werfend. Kernstück sind subatomare Zerlegungen der Form (6.7) im  $\mathbb{R}^n$  und auf fraktalen Mengen  $\Gamma$  im  $\mathbb{R}^n$ , die letztendlich zu Räumen vom Typ

$$B_p^s(\Gamma), \quad s \in \mathbb{R}, \quad 1 < p \leq \infty,$$

und zu einer  $C^\infty$ -Theorie oder, besser,  $(D(\Gamma), D'(\Gamma))$ -Theorie auf  $\Gamma$  führen. Wie in [49], 3.3, angedeutet (aber bislang nicht weiter ausgeführt) kann man eine solche Theorie mittels *euklidischer Karten* (in Analogie zu Atlanten lokaler Karten Riemannscher Mannigfaltigkeiten) und *snowflaked transforms* auf gewisse abstrakte quasi-metrische Räume übertragen und als Grundstrukturen einer diesbezüglichen Analysis verwenden. Ein solcher Weg ist gekennzeichnet durch das symbiotische Wechselspiel

- (i) *des Glatten mit dem Nicht-Glatten,*
- (ii) *der Dimensionalität mit der Fraktalität,*
- (iii) *der fraktalen Geometrie mit der fraktalen Analysis.*

Hierbei profitieren die linken Seiten von (i)–(iii) von den rechten Seiten und umgekehrt. Einer der spektakulärsten Beweise des letzten Jahrhunderts von einem der berühmtesten Probleme der Mathematik ist mit verdrehten, twisted (*spiralling*, [34]) oder, in heutiger Sprechweise, *fraktalen* Einbettungen abstrakter Strukturen in den euklidischen Raum verbunden. J. Nash bewies in [34], [35], daß jede  $n$ -dimensionale Riemannsche  $C^\infty$  Mannigfaltigkeit isometrisch in einen euklidischen Raum  $\mathbb{R}^N$  mit  $2N = n(n+1)(3n+11)$  eingebettet werden kann. Für Details verweisen wir auf [3], S. 123. Dieses Ziel wurde in [35] erreicht aufbauend auf der vorhergehenden Arbeit [34]. Es sind die dort behandelten  $C^1$ -Isometrien, die zu fraktalen Einbettungen in Beziehung stehen. Wir zitieren aus [33], S. 158:

*He (Nash) showed that you could fold the manifold like a silk handkerchief, without distorting it. Nobody would have expected Nash's theorem to be true. In fact, everyone would have expected it to be false. M. Gromov (Interview, 1997): Psychologically the barrier he broke is absolutely fantastic . . . There has been some tendency in recent decades to move from harmonic to chaos. Nash says chaos is just around the corner. J. Conway (Interview, 1994) called Nash's result one of the most important pieces of mathematical analysis of this century.*

## Literatur

- [1] D.R. Adams, L.I. Hedberg. Function spaces and potential theory. Springer, Berlin, 1996
- [2] S. Albeverio, P. Kurasov. Singular perturbations of differential operators. Cambridge Univ. Press, 2000
- [3] T. Aubin. Some nonlinear problems in Riemannian geometry. Springer, Berlin, 1998
- [4] N. Bourbaki. Éléments de Mathématiques. XXI, Livre VI, Ch. 5, Intégration des mesures. Hermann, Paris, 1956
- [5] M. Bricchi. Tailored function spaces and related  $h$ -sets. PhD Thesis, Jena, 2001
- [6] M. Bricchi. Existence and properties of  $h$ -sets. Georgian Math. Journ. **9** (2002), 13–32
- [7] M. Bricchi. Tailored Besov spaces and  $h$ -sets. Math. Nachr. (to appear)
- [8] M. Bricchi. Generalized Besov spaces and results on  $h$ -sets. *Journal of Functional Analysis*, 2003



- [20] P. Hajlasz, P. Koskela. Sobolev met Poincaré. *Memoirs Amer. Math. Soc.* **145**, 688. Amer. Math. Soc., Providence, 2000
- [21] Y.S. Han, E.T. Sawyer. Littlewood-Paley theory on spaces of homogeneous type and the classical function spaces. *Memoirs Amer. Math. Soc.* **110**, 530. Amer. Math. Soc., Providence, 1994
- [22] Y. Han, D. Yang. New characterizations and applications of inhomogeneous Besov and Tri-



The page contains a dense, repetitive pattern of horizontal lines, suggesting a corrupted scan or a document with extremely faint, illegible text. The lines are closely spaced and cover the entire page area below the header box.

D. Eisenbud, D. R. Grayson  
M. Stillman, B. Sturmfels

**Computations in  
Algebraic Geometry  
with Macaulay 2**

Algorithms and  
Computation in Mathematics 8

D. Eisenbud, D. R. Grayson, M. Stillman, B. Sturmfels

**Computations in  
Algebraic Geometry  
with Macaulay 2**

Algorithms and  
Computation in Mathematics 8

New York u. a.: Springer-Verlag 2002,  
329 S., EUR 39,95

In der Geschichte der Algebraischen Geometrie hat es immer Verfahren gegeben, die im Prinzip algorithmisch waren, wie z. B. im Beweis des Noetherschen Normalisierungssatzes. Durch Buchbergers Entdeckung der Gröbnerbasen ist aber klargeworden, dass man mit Polynomidealen sehr viel weitgehender und effektiv algorithmisch rechnen kann. Parallel zur Entwicklung der Leistungsfähigkeit von Computern entstanden ab den 80er Jahren spezialisierte Computeralgebrasysteme wie Macaulay, Singular und Cocoa. Bereits um 1990 hatte Macaulay, entwickelt von Bayer und Stillman, eine solche Rechenstärke entwickelt, dass viele Algebraische Geometer es benutzen, um experimentell die Richtigkeit von Vermutungen

gibt bereits ein Buch über Cocoa [2] und demnächst erscheint im Springer Verlag ein Band über Singular mit etwa dem gleichen Ziel [1]. Man beachte den Unterschied zu Programmen wie Mathematica oder Maple, die nicht in diesem spezialisierten Umfeld mithalten können und außerdem nicht frei für alle Plattformen verfügbar sind.

Hier einige Kostproben aus dem Inhalt: alle Beiträge in Teil I sind zur Einführung in Macaulay 2 gedacht. Schon in der Einleitung wird erklärt, wie man einen Modul als Co-kern definiert und dann eine projektive Auflösung berechnet. Im ersten Artikel von Sturmfels werden Beispiele betrachtet: Raumkurven und deren Schnittpunkte der Kurven mit Flächen sowie – zur Unterhaltung – ein lustiges Anwendungsproblem mit Münzen. Der zweite Beitrag von Eisenbud behandelt komplexere Beispiele innerhalb der Algebraischen Geometrie: zuerst „twisted cubics“, dann das Tangentialbündel des  $\mathbb{P}^3$  und allgemeiner die Cotangentialgarbe beliebiger Varietäten. Dabei lernt der Anfänger, mit dem Programm umzugehen und eine Betti-Tabelle zu lesen, also die notwendige Information auch aus dem Output abzulesen. Eisenbud behandelt auch Schnitttheorie mit der Serreschen Tor-Formel und untersucht ein Beispiel. Schließlich wird die „Mystery Variety“ studiert und ein Einblick in die Mathematik gegeben, die dahinter steckt. Der nächste Beitrag von den Entwicklern

Themen Stanley-Reisner Ideale,  $f$ -Vektoren, Primärzerlegung, Graphentheorie, Komplexitätstheorie, torische Ideale und generische Initialideale. Als besonders gelungene Anwendung wird ein Zusammenhangssatz über Hilbertschemata bewiesen. Der zweite Beitrag von Sottile betrachtet enumerative projektive Geometrie (Schubert Kalkül) vom einem reellen Standpunkt aus, d. h. durch das Auffinden reeller Lösungen eines Gleichungssystems von Polynomen. Als Höhepunkt löst Sottile das Problem, ob 12 Geraden in einem enumerativen Problem von Aluffi und Fulton auch reell gewählt werden können. Der Beitrag von Avramov und Grayson behandelt Ringe vom Typ  $B = k[x_1, \dots, x_n]/J$ , wobei  $J$  durch eine homogene reguläre Folge erzeugt wird. Es wird eine Routine in Macaulay beschrieben, die die Ext-Gruppen  $Ext_B^i(M, N)$  für je zwei e.e.  $B$ -Moduln  $M$  und  $N$  berechnet. Die Darstellung benutzt homologische Algebra und kohomologische Operationen (eine Neuerung in algorithmischer Algebra). Es wird der entsprechende Source Code erklärt und schließlich mehrere konkrete Anwendungen dieser Routine gegeben. Das torische Hilbertschema ist ein geometrisches Objekt, das Algebren mit gewisser festgelegter graduierter Struktur parametrisiert. In dem Abschnitt von Stillman, Sturmfels und Thomas werden die Definitionen und Eigenschaften solcher Hilbertschemata erklärt. Es gibt vielfältige Beziehungen zur Geometrie, Kombinatorik und mathematischer Physik. Im Beitrag von Decker und Eisenbud wird globale Garben- und Vektorbündeltheorie auf dem Niveau der derivierten Kategorie auf einer projektiven Varietät behandelt (eine globale Variante des Artikels von Avramov und Grayson). Es wird die Bernstein-Gelfand-Gelfand Korrespondenz erklärt und die Theorie bis zu neuen Arbeiten von Eisenbud-Floystad-Schreyer weitergeführt. Zentraler Begriff ist die „Beilinson Monade“: wie bekommt man eine Garbe, wenn man nur ihre Kohomologie kennt? Die explizite Konstruktion von Komplexen, die diese Garben als einzige Homologie haben, liefern eine erfolgreiche Stra-

ategie, um Garben zu konstruieren, wenn man zum Beispiel nur ihre Kohomologie erraten kann. Der Artikel von Schreyer und Tonoli beschäftigt sich mit der Lösung von drei konkreten Problemen, die mit einer Methode von Schreyer angegangen werden, die darin besteht, zuerst nach zufälligen Lösungen über endlichen Körpern zu suchen. Hier werden erst Kurven vom Geschlecht  $\leq 14$  über  $F_q$  zufällig erzeugt. Dann werden diese Kurven benutzt, um die Greensche Vermutung zu testen. Ähnliche Methoden werden dann benutzt, um mit der Pfaffschen Methode Calabi-Yau 3-Faltigkeiten in  $\mathbf{P}^6$  zu erzeugen und die Komponenten des Hilbertschemas zu studieren. Dieser Artikel beweist einmal mehr die Stärke der Computermethoden, um wirklich schwierige Geometrie zu betreiben. Zu guter Letzt findet sich im Buch ein Artikel von Walther über D-Moduln. Neben Polynomringen besitzen auch Ideale in der Weyl-Algebra  $k[x_1, \dots, x_n, \frac{\partial}{\partial x_1}, \dots, \frac{\partial}{\partial x_n}]$  eine Gröbnerbasis bzgl. einer Termordnung. Dies kann benutzt werden, um D-Moduln zu studieren. Walther erklärt Gröbnerbasen über der Weyl-Algebra und berechnet damit lokale Kohomologie von holonomen D-Moduln. Dann wird auf die Bernstein-Sato Polynome eingegangen und Algorithmen zu ihrer Berechnung erläutert. Der Artikel schließt mit Beispielen und offenen Fragen.

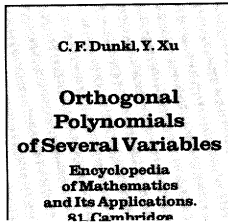
Fazit: das Buch ist kein Lehrbuch im traditionellen Sinn. Sicherlich ist Teil I eine gelungene Einführung, wenn man schon die elementaren Grundlagen der Algebraischen oder Analytischen Geometrie kennt. In Teil II ist das Buch aber eher wie ein Tagungsband, in dem einzelne Spezialisten ihre Themen vorstellen. Hier kann man sich etwas aussuchen, denn die Artikel sind unabhängig voneinander. Darin unterscheidet sich das Buch wesentlich von [1] und [2]. Ich habe beim Lesen viele interessante Stellen gefunden, die man beim flüchtigen Durchblättern übersehen kann. Man muss sich Zeit nehmen, dann wird der Band wirklich zum Gewinn für alle, die Interesse an Algebraischer Geometrie haben.

## References

- [1] Gerd-Martin Greuel und Gerhard Pfister: *A Singular Introduction to commutative algebra*, erscheint im Springer Verlag 2002.
- [2] Martin Kreuzer und Lorenzo Robbiano: *Computational commutative algebra I*, Springer Verlag 2000.

Essen

S. Müller-Stach



C. F. Dunkl, Y. Xu  
**Orthogonal Poly-  
 nomials of Several  
 Variables**  
 Encyclopedia

kurz und verständlich zu umreißen. Einmal durch eine hilfreiche Einführung in die einzelnen Kapitel, dann durch *Notes* mit denen die Kapitel abschließen, wobei auf maßgebliche Arbeiten und ihre Bedeutung hingewiesen wird. Somit liegt eine vernünftige Behandlung des Stoffes vor: es werden die wesentlichen Ideen vollständig entwickelt, auf relevante sowie weiterführende Literatur wird verwiesen. Die vielen Details zu konkreten Beispielen mehrdimensionaler orthogonaler Systeme sind eine Fundgrube für den Anwender. Aus diesen Gründen werden die Bedürfnisse von Spezialisten und Nichtspezialisten gleichermaßen angesprochen.

Das erste Kapitel beschäftigt sich mit den Dingen aus der eindimensionalen Theorie, die später benötigt werden. So Gamma- und Beta-Funktionen, hypergeometrische Rei-



## New releases

V. Gromak / Ilpo Laine / S. Shimomura

### ■ Painlevé Differential Equations in the Complex Plane

2002. VIII, 303 pages. Hardcover.

€ 88,- / sFr. 141,- / for USA, Mexico and Canada US\$ 89,95

ISBN 3-11-017379-4

(de Gruyter Studies in Mathematics 28)

This book is the first comprehensive treatment of Painlevé differential equations in the complex plane. Starting with a rigorous presentation for the meromorphic nature of their solutions, the Nevanlinna theory will be applied to offer a detailed exposition of growth aspects and value distribution of Painlevé transcendents.

### ■ Algebraic Geometry

#### A Volume in Memory of Paulo Francia

Edited by M. C. Beltrametti, F. Catanese, C. Ciliberto, A. Lanteri, C. Pedrini

2002. X, 356 pages. Hardcover.

€ 148,- / sFr. 227,- / for USA, Mexico and Canada US\$ 148,95

