105. Band Heft 1, März 2003 D 20577

Jahresbericht
der Deutschen Mathematiker-Vereinigung

1 – 2003

Herausgegeben von A. Krieg
unter Mitwirkung von
U. Gather, E. Heintze, B. Kawohl,
H. Lange, H. Triebel

Teubner

Jahresbericht

der Deutschen Mathematiker-Vereinigung

Der „Jahresbericht" ist das offizielle Veröffentlichungsorgan der Deutschen Mathematiker-Vereinigung, für dessen inhaltliche Gestaltung im Auftrag des Präsidiums der jeweilige Herausgeber zuständig ist. Im „Jahresbericht" sollen vornehmlich Überblicksartikel über Teilgebiete der reinen und angewandten Mathematik, Nachrufe sowie historische Artikel und Buchbesprechungen veröffentlicht werden.

Manuskripte:

Alle für die Schriftleitung des Jahresberichts bestimmten Briefe und Manuskripte sind an Prof. Dr. A. Krieg zu richten. Für Buchbesprechungen ist Prof. Dr. H. Lange zuständig. Bücher, von denen eine Besprechung erfolgen soll, werden bei den Verlagen angefordert. Autoren von Buchbesprechungen und Artikeln werden gebeten, die vorhandenen LATEX-style-files für den Jahresbericht zu verwenden. Somit kann der Aufwand für die Satzarbeiten erheblich reduziert werden. Sollten Illustrationen in die Arbeiten integriert werden, können diese auch in das Satzsystem übernommen werden. Dazu ist es erforderlich, dass die Daten der Abbildungen nochmals in separaten Dateien einzeln abgespeichert werden. Die LATEX-style-files sind neben weiteren Informationen im Internet verfügbar unter

http://www.mathA.rwth-aachen.de/dmv/index.html

Auf Anfrage können die style-files auch auf Diskette zugeschickt werden.
Grundsätzlich sollen nur solche Manuskripte eingereicht werden, die nicht gleichzeitig an anderer Stelle zur Veröffentlichung eingereicht oder bereits veröffentlicht worden sind. Mit der Annahme zur Veröffentlichung erwirbt der Verlag das Recht zur Vervielfältigung und Verbreitung sowie das Recht der Übersetzung in andere Sprachen.

Verlag:
GWV Fachverlage
B. G. Teubner GmbH Stuttgart · Leipzig · Wiesbaden
Postfach 1546, 65173 Wiesbaden
Abraham-Lincoln-Straße 46, 65189 Wiesbaden
http://www.teubner.de
http://www.gwv-fachverlage.de

Geschäftsführer: Dr. Hans-Dieter Haenel
Verlagsleitung: Dr. Heinz Weinheimer
Gesamtleitung Anzeigen: Thomas Werner
Gesamtleitung Produktion: Reinhard van den Hövel
Gesamtleitung Vertrieb: Gabriel Göttlinger

Abo-/Leserservice:
Tatjana Hellwig
Telefon: (06 11) 78 78-1 51
Fax: (06 11) 78 78-4 23
E-Mail: tatjana.hellwig@bertelsmann.de

Marketing/Sonderdrucke:
Stefanie Hoffmann
Telefon: (06 11) 78 78-3 79
Fax: (06 11) 78 78-4 39
E-Mail: stefanie.hoffmann@bertelsmann.de

Abonnentenverwaltung:
(Änderungen von Adressen und Bankverbindung, Rückfragen zu Rechnungen oder Mahnung) VVA-Zeitschriftenservice, Abt. D6F6 / Jahresbericht der Deutschen Mathematiker-Vereinigung,
Postfach 7777, 33310 Gütersloh
Ursula Müller
Telefon: (0 52 41) 80-19 65
Fax: (0 52 41) 80-96 20
E-Mail: ursula.mueller@bertelsmann.de

Bezugsbedingungen:
Die Zeitschrift erscheint 4mal jährlich zum Jahresabonnementpreis von € 98,– (176,– sFr) inkl. Versandkosten. Der Bezug von Einzelheften ist nicht möglich. Schriftliche Kündigung des Abonnements spätestens sechs Wochen vor Ablauf des Bezugsjahres.
Für persönliche Mitglieder der DMV, die den Jahresbericht zu beziehen wünschen, ist der zwischen DMV und Verlag vereinbarte Bezugspreis maßgebend, der im Rahmen des Mitgliedsbeitrags erhoben wird.

Satz: Fotosatz Behrens, D-68723 Oftersheim
Druck: Thomas Müntzer, Bad Langensalza

ISSN 0012-0456

Inhalt

Jahresbericht der Deutschen Mathematiker-Vereinigung, 105. Bd. 2003, Nr. 1

In den nächsten Heften erscheinende Arbeiten

W. Schwarz, B. Volkmann: Hans Rohrbach zum Gedächtnis

Anschriften der Herausgeber

Prof. Dr. Aloys Krieg, Lehrstuhl A für Mathematik, RWTH Aachen, 52056 Aachen
E-Mail: krieg@mathA.rwth-aachen.de

Prof. Dr. Ursula Gather, Lehrstuhl für Mathematische Statistik und industrielle Anwendungen, Universität Dortmund, 44221 Dortmund
E-Mail: gather@statistik.uni-dortmund.de

Prof. Dr. Ernst Heintze, Institut für Mathematik, Universität Augsburg, 86135 Augsburg
E-Mail: heintze@math.uni-augsburg.de

Prof. Dr. Bernhard Kawohl, Mathematisches Institut, Universität zu Köln, 50923 Köln
E-Mail: kawohl@mi.uni-koeln.de

Prof. Dr. Herbert Lange, Mathematisches Institut, Friedrich-Alexander-Universität Erlangen-Nürnberg, Bismarckstraße 1½, 91054 Erlangen
E-Mail: lange@mi.uni-erlangen.de

Prof. Dr. Hans Triebel, Mathematisches Institut, Friedrich-Schiller-Universität, Ernst-Abbe-Platz 1–4, 07740 Jena
E-Mail: triebel@minet.uni-jena.de

Bezugshinweis

Früher erschienene Bände (ab Band 68) des „Jahresberichts der Deutschen Mathematiker-Vereinigung" können durch den Buchhandel oder den Verlag bezogen werden.

Nachdruck der Bände 41 bis 67 liefert: Swets & Zeitlinger, Heereweg 347 b, POB 810, NL-2160 SZ Lisse/Holland

Jahresbericht der Deutschen Mathematiker-Vereinigung, 105. Bd. 2003, Nr. 1

Vorwort

In diesem Heft finden Sie neben den Buchbesprechungen die Ausarbeitung des Plenarvortrags auf der DMV-Jahrestagung in Halle von Frau Hefendehl-Hebeker. Damit kommen wir auch einem in der Leserumfrage vielfach geäußerten Wunsch nach, fachdidaktische Beiträge im Jahresbericht zu publizieren. Weiterhin finden Sie einen historischen Beitrag von Herrn Ullrich.

Bereits im letzten Jahr wurden einige vom DMV-Präsidium beschlossene konzeptionelle Änderungen angekündigt. Wir wollen in nächster Zeit auch verstärkt gerade Habilitierten die Möglichkeit bieten, ihr Arbeitsgebiet und ihre Ergebnisse im Jahresbericht einem breiten Publikum zu präsentieren. Dazu sind Ihre Vorschläge und Anregungen natürlich herzlich willkommen.

A. Krieg

Didaktik der Mathematik als Wissenschaft – Aufgaben, Chancen, Profile

Lisa Hefendehl-Hebeker

Abstract

- Keywords and Phrases: Mathematics education
- Mathematics Subject Classification: 00 A 35, 97 C 30, 97 C 70, 97 D 40

Over the past thirty years, mathematics education has grown into a scientific discipline incorporating a wealth of ideas, approaches, theoretical frameworks and links to neighboring disciplines that is steadily growing. In this paper we introduce selected examples of research and scholarship in mathematics education, concerning epistemology, cognitive development, classroom interaction and innovations in teaching practice. Thus we hope to submit informations and perspectives aiming at the reasoned development and appraisal of teaching designs.

Eingegangen: 13.01.2003

Lisa Hefendehl-Hebeker, Institut für Mathematik,
Universität Duisburg-Essen, Standort Duisburg, D- 47048 Duisburg.
E-Mail: hefendehl@math.uni-duisburg.de

DMV
JAHRESBERICHT DER DMV

1 Einleitung

Die Mathematikdidaktik ist – von profilierten Wegbereitern abgesehen – eine noch junge wissenschaftliche Disziplin. Ihr Ausbau durch die Einrichtung von Professuren und Graduierungsmöglichkeiten begann in Deutschland vor knapp 40 Jahren.

1978 veröffentlichte Hans Freudenthal sein impulsiv geschriebenes Buch „Vorrede zu einer Wissenschaft vom Mathematikunterricht". Dort bescheinigte er weiten Teilen der Mathematikdidaktik ein Stadium, das er mit dem der Medizin im 19. Jahrhundert verglich: an der Schwelle zu einer Wissenschaft, bis dahin aber geprägt von Traditionen erfahrener und sensibler Heilpraktiker, in unglücklichen Fällen auch von Scharlatanen missbraucht.

Die Medizin hat seitdem beeindruckende Fortschritte gemacht. Sie erforschte physiologische Prozesse und entwickelte Therapien, die auf diese Erkenntnisse abgestimmt sind. Die Mathematikdidaktik hat die Aufgabe, Prozesse des Lernens und Lehrens von Mathematik zu erforschen und Unterrichtskonzepte zu entwickeln, die dieses Wissen effizient nutzen. Auch hier gibt es Fortschritte, die unvermutete Perspektiven auf das Unterrichtsgeschehen öffnen. Davon soll im Folgenden exemplarisch die Rede sein.

Zuvor aber sei kurz die Frage erörtert, welche Kriterien der Wissenschaftlichkeit gegenüber der Mathematikdidaktik anzulegen sind. Die Mathematik selbst mit ihrer unausweichlichen Strenge, bedingt durch die Präzision ihrer Argumentationsweisen, die Exaktheit ihrer Begriffsdefinitionen und die logische Geschlossenheit ihrer Systeme, spielt im Kanon der Wissenschaften eine Sonderrolle, die durch die rein geistige Natur ihrer Objekte bedingt ist. Wissenschaft vom Mathematikunterricht aber erforscht Prozesse mathematischer Wissensbildung und entwickelt, erprobt und evaluiert hierauf abgestimmte Unterrichtsideen. Dabei hat sie es mit der Komplexität und dem evolutionären Charakter alles Lebendigen zu tun. Deshalb benötigt sie eine andere Methodologie als die Mathematik selbst.

Daher nennt Freudenthal (ebd.) allgemeinere Kriterien, denen wissenschaftliches Arbeiten genügen sollte:

- Es beginnt mit einer relevanten Frage, auf die es bislang keine zufriedenstellende Antwort gibt.
- Es untersucht diese Frage in einem einfallsreichen Forschungsdesign mit systematischen, reflektierten und ausgewiesenen Methoden.
- Es bildet konsistente Theorien.
- Es artikuliert sich in einer gehaltvollen und zugleich disziplinierten Sprache.

Scharfsinniges Beobachten, durchdringendes Deuten, prägnantes Beschreiben, stimmiges Argumentieren, einfallsreiches Gestalten und kritisches Prüfen gehören demnach zu den grundlegenden wissenschaftlichen Qualitätsmerkmalen, die auch die Mathematikdidaktik auszeichnen sollten.

2 Beispiele mathematikdidaktischer Forschungs- und Entwicklungsarbeit

Anhand von vier Beispielen sollen hier Ansätze und Ergebnisse mathematikdidaktischer Forschungs- und Entwicklungsarbeit dargestellt werden. Die Beispiele beleuchten exemplarisch vier Tätigkeitsfelder der Mathematikdidaktik: die erkenntnistheoretische Analyse mathematischer Inhalte, die kognitionspsychologische Grundlagenforschung, die interpretative Unterrichtsanalyse und die theoriebasierte Entwicklung von Unterrichtsvorschlägen.

Die Auswahl schöpft das Spektrum der Arbeitsrichtungen in der Mathematikdidaktik nicht aus. Sie ist im Umfang durch den gegebenen Rahmen begrenzt und im Inhalt durch Schwerpunktsetzungen der Autorin geprägt.

2.1 Der Einstieg in die Algebra als Forschungsfrage

Der Mittelstufenunterricht in elementarer Algebra ist ein didaktisch unbefriedigend gelöstes Problem – hat doch so manches „Mathe-Trauma“ hier seinen Ursprung genommen.

Für Eingeweihte ist die elementar-algebraische Formelsprache denkbar einfach: Man beschreibt Zahlen- und Größenbeziehungen unter Hinzunahme von Variablen und rechnet mit diesen wie mit Zahlen. Damit erhält man ein effizientes Werkzeug zum Darstellen, Explorieren und Beweisen von Zusammenhängen und zum Lösen von Problemen.

Wer Einblick in die Schulpraxis hat, weiß jedoch, dass Terme und Formeln so leicht nicht bewältigt werden. Für viele Schülerinnen und Schüler bleiben die verwendeten Buchstaben sinnleere Symbole und der zugehörige Stoff eine tote Last. Bei den Unterrichtsthemen der Oberstufe ist oftmals nicht das Problemverständnis, sondern die mangelnde Geschicklichkeit in der Formelmanipulation die eigentliche Schwierigkeit.

Was aus der Sicht der Fortgeschrittenen als einfache Erklärung erscheint, kann am Verständnishorizont der Lernenden völlig vorbei gehen. Das ist eine denkwürdige Grunderfahrung des Lehrens. Die Ursache für solche Verständigungsprobleme liegt oft in der Natur des betreffenden Wissens selbst, in seiner historischen wie individualpsychologischen Genese mit allen Anforderungen an Abstraktion, Formalisierung und Idealisierung, die zu seiner Erfassung notwendig sind.

Versuchen wir also, das „Wesen“ der elementaren Algebra und die Triebkräfte ihrer Entwicklung genauer zu verstehen. Die Entstehung der algebraischen Formelsprache war ein Meilenstein in der Geschichte der Mathematik. Sie beruht auf der Idee der Formalisierung, die für die neuzeitliche Wissenschaft kennzeichnend ist. S. Krämer (1988) hat die Idee der Formalisierung und ihre Entwicklungsgeschichte in einer eindrucksvollen historischen Rekonstruktion entfaltet.

Formalisierung bedeutet danach allgemein: Das Operieren mit Gegenständen, Begriffen und Gedanken wird ersetzt durch das regelgeleitete Operieren mit Zeichen, die an die Stelle dieser Gegenstände, Begriffe und Gedanken treten; dadurch wird der Verstand von den Mühen der Interpretation entlastet. Für die elementar-algebraische Formelsprache gilt dies in einer speziellen Weise: Durch die Verwendung von Buchstabensymbolen für „unbestimmte" Größen, mit denen nach den syntaktischen Grundgesetzen der Arithmetik operiert wird, gelingt es, das Rechnen als ein Umformen von Zeichenausdrücken durchsichtig zu machen und dabei auch Regeln für das Auflösen von Gleichungen allgemeingültig zu formulieren (vgl. Cohors-Fresenborg, 2001).

Für die Didaktik der Algebra ergeben sich daraus zwei grundsätzliche Fragen:

1. Kann man diese Sinngebung der elementar-algebraischen Formelsprache in Klasse 7 vermitteln und wenn ja, wie?
2. Wie kann man die dazu unerlässliche Ausbildung des Variablenverständnisses unterstützen?

Es ist aufschlussreich, zunächst noch weiter in die Geschichte zurück zu blicken. Lange bevor die Buchstabenalgebra erfunden wurde, hat es in der Mathematik einen Formalisierungsschritt gegeben, der ebenfalls ein Meilenstein war: die Entwicklung des dezimalen Stellenwertsystems zur Darstellung von Zahlen. Ziffernsysteme sind die geschichtlich frühen Formen einer formalen Sprache (Krämer, ebd.). Zwei Charakteristika sind hervorzuheben:

1. Das dezimale Stellenwertsystem gestattet, mit nur zehn Ziffern Zahlen beliebiger Höhe darzustellen. Dabei hat sich das Gesetz der Zahlbildung endgültig von der Handlung des Abzählens von Gegenständen gelöst. Es ist zu einer Vorschrift geworden, nach der schriftliche Zahlzeichen fortlaufend konstruiert werden. Die so bildbare unbegrenzte Menge der Zahlen wird auf eine Weise überschaubar und beherrschbar gemacht, für die das menschliche Gedächtnis nicht zur Grenze wird.
2. Das dezimale Stellenwertsystem erlaubt symbolische Rechenverfahren oder Kalküle. Beim schriftlichen Addieren, Subtrahieren, Multiplizieren und Dividieren braucht man sich nicht mehr vorzustellen, welche Mengen von Gegenständen zusammen gefügt, getrennt oder eingeteilt werden. Rechnen wird zum Formen und Umformen von schriftlichen Zeichen.

Es ist Aufgabe des Primarstufenunterrichts, Kindern diese Erkenntnisse nahe zu bringen. Die Mathematikdidaktik der Grundschule weiß seit langem, dass dies einer behutsamen Eingewöhnung bedarf. Entsprechend ausgefeilt sind die Vorschläge.

Am Anfang des Zahlenbuches für das erste Schuljahr (Wittmann, Müller u. a., 1994) findet sich folgende Tabelle (Abb. 1):

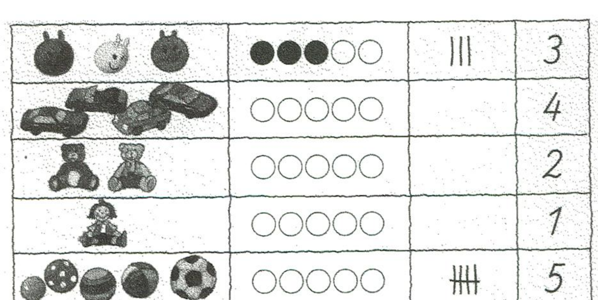


Abbildung 1

Dort sind in der ersten Spalte Mengen von zu zählenden Gegenständen (Luftballons, Autos usw.) abgebildet; in der zweiten soll für jeden Gegenstand ein rotes Plättchen gelegt oder gemalt werden, in der dritten Spalte wird die Anzahl der Plättchen durch eine Strichliste und in der vierten durch ein Zahlsymbol festgehalten. In dieser Lernumgebung ist im Zeitraffer eine Tausende von Jahren währende Geschichte des Zahlbegriffes nacherlebt. Das geschieht so, dass in den Spalten die wesentlichen Etappen der Formalisierung festgehalten sind (s. Krämer, ebd.):

1. In einem ursprünglichen Stadium waren Zahlen Eigenschaften abzählbarer Dinge. Oft waren in der Vorstellung der Menschen Zahlen so untrennbar mit den zu zählenden Gegenständen verbunden, dass es für verschiedene Arten von Gegenständen verschiedene Zahlwortreihen gab.
2. Ein wichtiger Schritt auf dem Wege der Entwicklung der Zahl zu einem eigenständigen Denkobjekt ist die Benutzung gegenständlicher Hilfsmengen zum Zählen wie Steine, Muscheln oder Stäbchen. Dadurch werden Zahl und gezählte Gegenstandsmenge getrennt. Dies geschieht durch den Vorgang einer analogen Übertragung. Die Gegenstände der Hilfsmenge verkörpern dabei in der Regel diskrete, homogene (also getrennte, aber gleichartige) Einheiten. Insofern abstrahieren sie von den speziellen Eigenschaften der zu zählenden Dinge und zentrieren die Aufmerksamkeit auf den Anzahlaspekt.
3. Der Übergang von der gegenständlichen zur symbolischen Zahldarstellung beginnt, wenn ein Zählvorgang mit Hilfe aneinandergereihter Zeichen festgehalten wird.
4. Werden schließlich Zeichengruppen gebildet und diese durch Individualzeichen ersetzt, so ist die Zählreihe mit Hilfe von Ziffern gebildet.

So, wie sich im Arithmetikunterricht die Zahlen und Zahloperationen allmählich vom Handeln mit Gegenständen lösen, müsste sich im Algebraunterricht das Rechnen von speziellen Zahlenwerten lösen und die Aufmerksamkeit auf die Erfassung von Mustern verlagern. Kann man nun aus der didaktischen Behutsamkeit des mathematischen Anfangsunterrichts etwas für die Didaktik der Algebra lernen? Die oben gestellten Grundfragen wären dazu wie folgt zu präzisieren:

1. Ein natürliches Motiv für den Einstieg ist das Entdecken von Mustern. Wo findet man geeignete Beispiele?
2. Welche Hilfen für die Loslösung von speziellen Zahlenwerten gibt es?

Das folgende Unterrichtsbeispiel (vgl. Hefendehl-H., 2001) versucht auf diese Fragen erste Antworten.

Die Zahlenmauer (Abb. 2) genügt einem einfachen rekursiven Rechenschema:

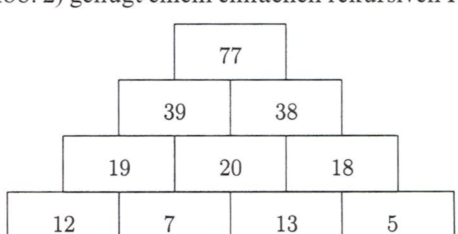


Abbildung 2

In die Felder der unteren Reihe wurden nach Belieben Zahlen eingetragen; in jedes höher gelegene Feld gehört dann die Summe der Zahlen aus den beiden darunter liegenden Feldern. Diese Zahlenmauern bieten schon für die Grundschule reichhaltige Übungsmöglichkeiten (Wittmann & Müller, 1990). Zur Anbahnung des algebraischen Denkens eignen sich Fragen wie die folgenden:

- Wie wirken sich Veränderungen in den Belegungen der Grundsteine auf die übrigen Feldbelegungen aus?
- Kann man aus den Startzahlen die Belegung des Schlusssteines direkt berechnen, ohne die Zwischenfelder auszufüllen?

Wer die algebraische Notation bereits beherrscht, gibt durch den Formelausdruck im Schlussstein die Rechenvorschrift an (Abb. 3).

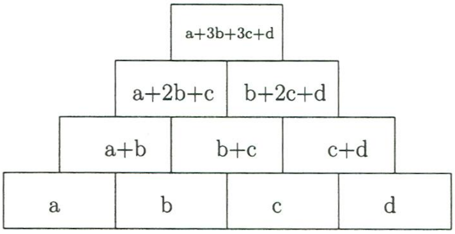


Abbildung 3

Wie aber kann man Kinder dazu bewegen, solche Rechenvorschriften zu finden und damit Betrachtungsweisen zu entwickeln, die über das nummerische Rechnen hinausgehen, die den detaillierten Bauplan (Vollrath, 1995) der Mauer erfassen und die Spur einer Zahl unabhängig von ihrem Wert verfolgen können?

M. Kopp (2001) verwendete Zahlenmauern in klinischen Interviews, die sich mit der Anbahnung des algebraischen Denkens beschäftigten. Dabei wurde u. a. folgende Frage untersucht: „Was passiert mit der Zahl im obersten Feld, wenn man die Zahl im ersten oder zweiten Feld der untersten Reihe um eins erhöht?“ In der Vorbereitung der Interviews kam der Gedanke, die Erhöhung um Eins durch einen Punkt zu visualisieren und die Spur des Punktes durch die Mauer zu verfolgen:

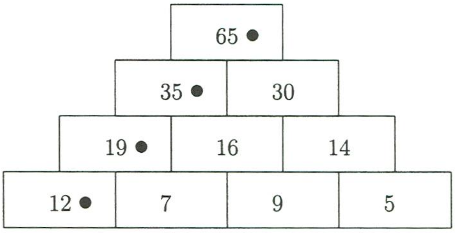


Abbildung 4

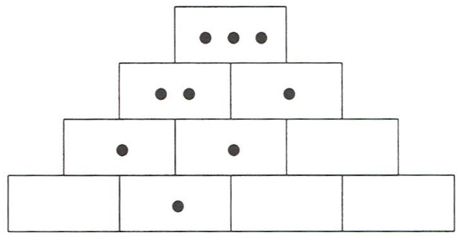


Abbildung 5

Es gab Schüler, die danach spontan den Punkt gleichsam als Variable interpretieren und die Beobachtungen auf beliebige Erhöhungen übertragen konnten: Wenn man eine der mittleren Zahlen in der unteren Reihe um einen bestimmten Betrag erhöht, erhöht sich die oberste Zahl um das Dreifache dieses Betrages. Ein Schüler gebrauchte dabei den Begriff „Einsatz" als vorstellungsbehaftete Wortvariable (vgl. Malle, 1993). Dieser Begriff erinnert an Geldbeträge; die Erfindung des Geldes aber war eine Abstraktionsleistung, die der Wirtschaft grundlegend neue Möglichkeiten eröffnete, konnte sie doch Ware und Warenwert voneinander trennen, ähnlich wie zu Urzeiten die homogenen Hilfsmengen die Anzahl von den gezählten Dingen zu trennen halfen (s. o.).

Die Münze als Träger eines variablen Geldwertes erwies sich in einer unterrichtlichen Erprobung des Themas „Zahlenmauern" als wirksames Hilfsmittel, um das Erkennen von Mustern zu unterstützen. Nachdem die Erhöhung von Basiswerten um 1 und deren Auswirkung auf den weiteren Aufbau der Mauer durch Pfennigmünzen visualisiert war, fiel es den Schülerinnen und Schülern nicht mehr schwer, sich unter diesen Münzen auch andere Wertmarken vorzustellen und ein allgemeines Gesetz zu formulieren. Schließlich konnte sogar die gesamte Mauerbelegung mit Münzen dargestellt und daraus eine Rechenvorschrift für den Schlussstein abgeleitet werden (Abb. 6).

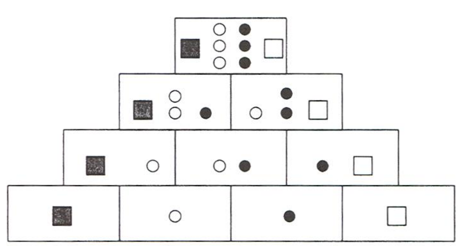


Abbildung 6

Mit diesem einen Beispiel ist die Einführung in die Buchstabenalgebra natürlich noch nicht bewältigt. Es müssen weitere hinzugefügt werden – insbesondere auch solche, die zeigen, dass man mit der Formelsprache nicht nur Zahlenmuster darstellen, sondern auch Zusammenhänge explorieren kann. Das Beispiel sollte aber deutlich machen, wie man in einem Wechselprozess von Analyse, Beobachtung und ggf. historischer Rekonstruktion zu theoretisch fundierten Unterrichtsansätzen gelangen kann.

Bei der weiteren Verfolgung der Plättchenkonfigurationen kann folgende Beobachtung wichtig werden: Manche Kinder orientieren sich an dem statischen Plättchenbild, das die schrittweise stattgefundenen Zuwächse festhält. Andere organisieren dagegen dynamisch Wege und haben die Fortpflanzung des Zuwachses durch die Mauer vor Augen. Abb. 7 liefert die Gegenüberstellung:

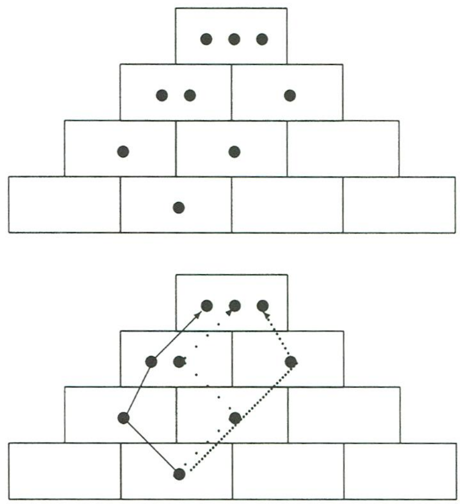


Abbildung 7

Hier artikulieren sich kognitive Unterschiede in der Wissensverarbeitung, und das soll das nächstes Thema sein.

2.2 Grundformen logischen Denkens

In eine Raute soll ein Quadrat so einbeschrieben werden, dass seine Ecken auf den Seiten der Raute liegen. Die folgenden beiden Lösungen beruhen auf verschiedenen Weisen der gedanklichen Verarbeitung. Gemeinsamer Ausgangspunkt ist eine Planfigur (Abb. 8). Sie zeigt, wie die Lösung aussehen könnte, und soll Konstruktionsideen anregen.

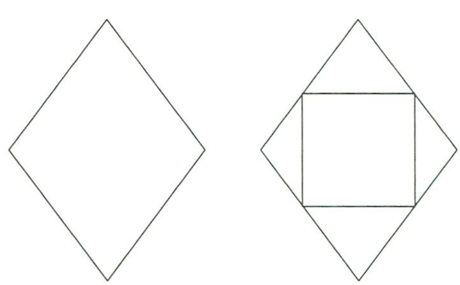


Abbildung 8

Lösung 1:
Die Aufmerksamkeit liegt auf den charakteristischen Eigenschaften der beteiligten Figuren und den Beziehungen zwischen diesen. Die Raute ist achsensymmetrisch zu jeder ihrer Diagonalen. Jede Parallele zu einer dieser Achsen, die durch das Innere der Raute verläuft, bestimmt ein einbeschriebenes Rechteck, das diese Achsen als Mittellinien hat (Abb. 9). Das Rechteck ist ein Quadrat, wenn es außerdem diagonalsymmetrisch ist. Man erhält also ein einbeschriebenes Quadrat, wenn man zu den Diagonalen der Raute die Winkelhalbierenden konstruiert.

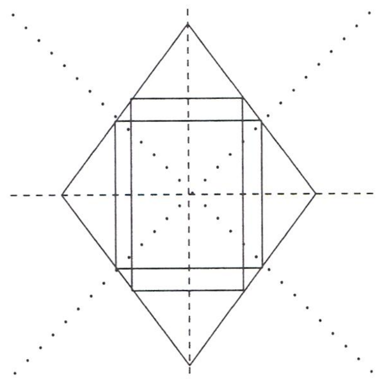


Abbildung 9

Lösung 2:
Die Raute wird in Gedanken bewegt, z. B. um ihr Symmetriezentrum gedreht. Eine 90°-Drehung erzeugt einen aus Ur- und Bildfigur bestehenden Stern, der bei Drehungen um Vielfache von 90° mit sich zur Deckung kommt (Abb. 10). Das gilt auch für das einbeschriebene Viereck, in dessen Eckpunkten sich die Seiten von Ur- und Bildraute schneiden. Daher ist dieses Viereck ein Quadrat.

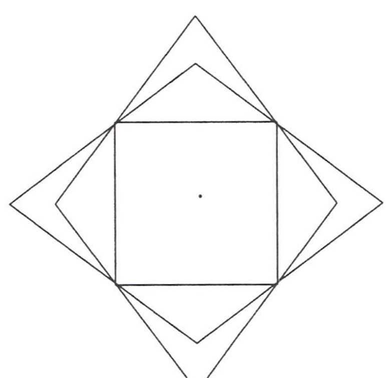


Abbildung 10

Das Rautenbeispiel gehört in den Geometrieunterricht der Jahrgangsstufe 7. In jedes mathematische Grundstudium gehört die Substitutionsregel der Integralrechnung:

Sei $f : I \to \mathbb{R}$ stetig und besitze die Stammfunktion $F : I \to \mathbb{R}$. Weiter sei $t : [a,b] \to \mathbb{R}$ stetig differenzierbar mit $t([a,b]) \subset I$. Dann ist $F \circ t$ eine Stammfunktion zu $(f \circ t) \cdot t'$, und es gilt:

$$\int_a^b f(t(x)) \cdot t'(x)\, dx = \int_{t(a)}^{t(b)} f(t)\, dt\,.$$

Man berechne nun mit Hilfe dieser Regel das bestimmte Integral

$$\int_1^3 sin(x^2) 2x\, dx\,.$$

Auch für diese Aufgabe gibt es verschiedene Lösungen, die unterschiedlichen Denkstilen entsprechen.

Lösung 1:
Man erkennt im Integranden die Struktur der linken Seite der Substitutionsformel und ordnet zu: $t(x) = x^2$, $f(t) = sin(t)$. Einsetzen in die rechte Seite ergibt:

$$\int_1^3 sin(x^2) 2x\, dx = \int_1^9 sin(t)\, dt\,.$$

Lösung 2:
Man stellt sich vor, dass eigentlich die äußere Funktion f, hier also die Sinusfunktion, zu integrieren ist, aber mit verzerrter Argumentachse; d. h. mit einer nicht linearen Skalierung (Abb. 11).

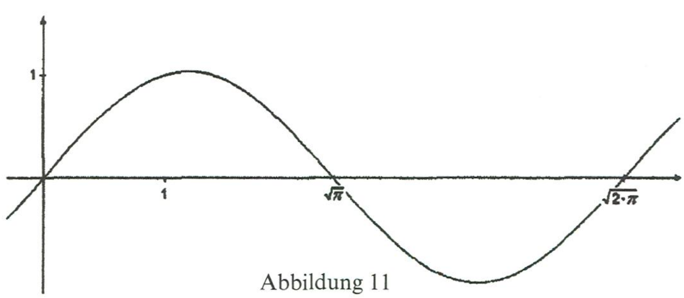


Abbildung 11

Dieser Graph entsteht durch Verzerrung des Graphen von $x \mapsto sin(x^2)$ in x-Richtung so, dass die Kurve zur gewöhnlichen Sinuskurve kongruent wird. Wenn man für den so verzerrten Graphen den „Flächeninhalt" unter der Kurve berechnen will, muss man die Rechtecksbreiten anders bewerten: die Breite ist nicht mehr dx sondern

$$(x + dx)^2 - x^2 \approx 2x\, dx\,,$$

wobei „$\approx$" das pragmatische Gleichheitszeichen bedeutet, bei dem Differentiale dx von höherer Ordnung wegfallen.[1]

1 Die Verfasserin dankt R. Stutzenstein, Osnabrück, für diese Erläuterung.

Diese Grundvorstellung kann nun ins Kalkülhafte moduliert werden, wobei nicht wie im ersten Lösungsweg $sin(x^2)2x$, sondern $2x\ dx$ als eine Einheit gesehen wird. Man setzt $t = x^2$, und dann ist $\frac{dt}{dx} = 2x$, also formal $2x\,dx = dt$. Die Substitution muss entsprechend auf die Intervallgrenzen übertragen werden.

Den beiden Beispielen ist gemeinsam, dass sie verschiedene Lösungen zulassen, die unterschiedlichen Denkstilen entsprechen. I. Schwank (1996) hat aus langjährigen Beobachtungen von Problemlöseprozessen die Hypothese abgeleitet, dass es individuelle Präferenzen für zwei grundlegend verschiedene Formen mathematischer Begriffsbildung gibt:

- *prädikatives* Denken ist auf die Analyse von Strukturen und Beziehungen ausgerichtet;
- *funktionales* Denken zielt auf die Organisation von Handlungsfolgen und die Analyse von Wirkungsweisen.

Die Hypothese besagt weiter, dass jede Person einem Grundtyp angehört, also tendenziell eher prädikativ oder eher funktional veranlagt ist, die je andere Disposition aber mehr oder weniger stark mit ausbilden kann.

Diese Hypothese wurde mit kognitionspsychologischen Untersuchungsmethoden international validiert und erfuhr in jüngster Zeit sogar eine Bestätigung durch Messungen der Hirnaktivität mittels EEG (Mölle, Schwank u. a., 2000). In den Untersuchungen wurden vorhandene Instrumente (z. B. die Tests von Raven) zielgerecht modifiziert und neue entwickelt (Schwank, 1999/2000).

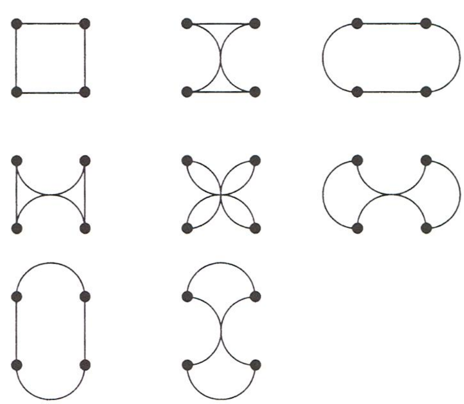


Abbildung 12

Die in Abb. 12 dargestellte Mustergänzungsaufgabe lässt sich sowohl prädikativ wie auch funktional lösen. Im Falle einer prädikativen Lösung werden die einzelnen Figuren auf charakterisierende Eigenschaften hin untersucht und diesbezüglich in Beziehung zueinander gesetzt. Zeilenweise betrachtet fällt auf, dass Boden und Deckel der Figuren in ihrer Form konstant bleiben:

- In der ersten Zeile sind Boden und Deckel jeweils eine gerade Linie.
- In der zweiten Zeile ist der Boden immer ein nach unten offener Halbkreis, der Deckel immer ein nach oben offener Halbkreis.

- In der dritten Zeile ist der Boden immer ein nach oben offener Halbkreis, der Deckel immer ein nach unten offener Halbkreis.

Spaltenweise gilt eine analoge Argumentation für die linke und rechte Seitenwand. Aus diesen Erkenntnissen lässt sich die fehlende Figur zusammen setzen. Sie besteht aus lauter nach außen gebogenen Halbkreisen.

Im Falle einer funktionalen Lösung wird auf Prozessabläufe hin analysiert. Zeilenweise betrachtet können die Figuren in eine Entstehungsgeschichte gebracht werden. Die Umrandungslinien werden als Gummibänder aufgefasst, an denen gezogen werden kann. In jeder Zeile wird das Gummiband an den Seiten zunächst nach innen gezogen, dann nach außen. Spaltenweise läuft der gleiche Verformungsprozess an Deckel und Boden ab.

Es gibt auch Aufgaben, die geeignet sind, die Dispositionen zu unterscheiden.

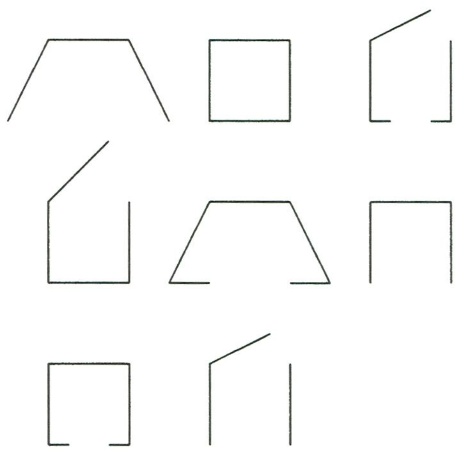


Abbildung 13

Die Aufgabe in Abb. 13 lässt sich prädikativ gut lösen (Eine gleichermaßen brauchbare funktionale Lösung ist nicht bekannt). In jeder Zeile und in jeder Spalte ist je ein Figurentyp vertreten: ein Quadrat, ein Trapez und ein „Haus“. Weiter unterscheiden sich die drei Elemente einer Zeile bzw. Spalte in ihrem Boden: der Boden ist vorhanden, teilweise vorhanden, nicht vorhanden. Das bedeutet für die gezeigte Figurenanordnung, dass in der letzten Zeile das Trapez mit geschlossenem Boden fehlt.

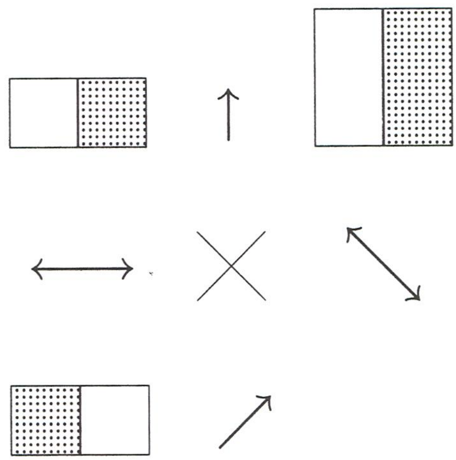


Abbildung 14

Die Aufgabe in Abb. 14 lässt sich funktional gut lösen (Eine gleichermaßen brauchbare prädikative Lösung ist bislang nicht bekannt). Im Falle einer funktionalen Lösung wird bekanntlich auf Prozessabläufe hin analysiert. In dem gegebenen Bild kann man in der mittleren Spalte bzw. Zeile Werkzeuge erkennen, die die auszuführenden Arbeiten angeben:

- In der ersten Zeile wird ein Vergrößerungsoperator angewendet.
- In der zweiten Zeile wird ein Drehoperator angewendet.
- In der dritten Zeile wird ein kombinierter Dreh- und Vergrößerungsoperator angewendet.

Spaltenweise führt ein ähnliches Vorgehen zum Ziel: in der ersten Spalte wird geflippt, in der zweiten Spalte gedreht und in der dritten Spalte eine kombinierte Flipp-Drehaktion durchgeführt.

So entstand eine Theorie, deren Erklärungswert die Verfasserin in ihrem Lehralltag zunehmend schätzen gelernt hat und deren Implikationen weit über die Grenzen des Faches hinaus gehen (Cohors-Fresenborg & Schwank, 1996). Funktional Denkende können mit einer prädikativ orientierten Erklärung häufig (zunächst oder prinzipiell) nichts anfangen und umgekehrt fallen prädikativ Denkenden die prozesshaften Vorstellungen (zunächst oder prinzipiell) schwer .

Solche Befunde erschüttern die Illusion, mathematische Zusammenhänge seien zweifelsfrei erklärbar. Wenn Lehrende meinen, sie hätten längst alles Wesentliche gesagt, kann das Gesagte für Lernende immer noch unsäglich schwer zu durchdringen sein.

2.3 Mathematikunterricht zwischen Instruktion und Konstruktion

Im ersten Abschnitt dieses Kapitels wurde exemplarisch beleuchtet, wie man mathematische Lernarrangements *inhaltlich* an den natürlichen erkenntnistheoretischen Prozessen der Erschaffung und Anwendung von Mathematik orientieren kann. Im zweiten wurde gezeigt, dass Lern- und Denkprozesse dennoch nicht gleich verlaufen müssen. Im Lehralltag erlebt man täglich, dass Lernende je eigene Wege beschreiten; kognitionspsychologische Theorien spüren den Ursachen hierfür nach.

Hier beginnt eine neue didaktische Herausforderung, die kundigen Forschern und sensiblen Praktikern lange vor TIMSS und PISA bewusst war.

Die klassische Lehramtsausbildung im Fach Mathematik, vor allem an deutschen Gymnasien, stand in der Tradition des fragend-entwickelnden Mathematikunterrichts mit der Fiktion der eindeutigen Vermittelbarkeit mathematischer Inhalte. Die Devise war: man zerlege das Unterrichtsthema in kleine und kleinste Lernschritte und führe die Lernenden in einer wohl geordneten Fragenkette hieran entlang.

Die folgende Unterrichtsepisode soll diesen Unterrichtsstil veranschaulichen und seine Problematik erläutern. Es handelt sich um einen fiktiven Unterrichtsdialog zu der Rautenaufgabe in 2.2, konzipiert aus der Erfahrung mit selbst gestalteter und beobachteter Unterrichtspraxis, geleitet durch die Erkenntnisse der interpretativen Unterrichtsanalyse. Das ist ein Forschungszweig der Mathematikdidaktik, dem wir markante Einsichten in die Eigengesetzlichkeiten des schulischen Alltags verdanken (Maier & Voigt, 1991; 1994).

Ein Lehrer (oder eine Lehrerin) tendiert zu der (statischen) Lösung mit den Symmetrieachsen, hat also die Figur aus Abb. 9 vor Augen. Die dynamische Lösung mit der gedrehten Raute (Abb. 10) ist ihm vielleicht gar nicht bewusst. Zum Einstieg in den Problemlösungsprozess entwickelt sich der folgende Unterrichtsdialog:

Lehrer: Was machen wir zuerst? – Nicole!
Nicole: Eine Planfigur.
Lehrer: Sehr schön! (*zeichnet eine Planfigur an die Tafel,*
die Schüler/innen zeichnen ab.)
Wer hat denn eine Idee? (*Stille*)
Was könnte man mit der Raute machen, um das
Quadrat zu finden? – – – Michael!
Michael: Die Raute anders herum auf das Quadrat setzen.
Lehrer: Jaa ...; aber bleiben wir doch mal bei dieser Figur.
Welche Hilfslinien könnten wir zum Beispiel einzeichnen?
Sandra!
Sandra: Symmetrieachsen.
Lehrer: Ja, die Symmetrieachsen. Die zeichnen wir jetzt mal ein.

Diese kurze Episode mag manchem Leser und mancher Leserin aus der Distanz betrachtet wie eine Karrikatur erscheinen. Sie offenbart jedoch tief liegende und oft unbewusst inszenierte Muster des Mathematikunterrichts (Voigt 1984), wobei auch hier Ausnahmen die Regel bestätigen.

Der Lehrer hat einen festen Ablauf des Lösungsprozesses vor Augen: Planfigur zeichnen – geeignete Hilfslinien eintragen – Lösungsidee finden – Lösungsverfahren ausführen und seine Richtigkeit begründen. An dieser Schrittfolge richtet er seine Fragetechnik aus. Schülerantworten, die seine Erwartung erfüllen (s. Sandra und Nicole), werden explizit gelobt (Z. 3) oder zustimmend bestätigt (Z. 13) und durch Ausführung des betreffenden Vorschlages belohnt. Wenn brauchbare Antworten ausbleiben, wird die Fragestellung Zug um Zug zugespitzt. So entsteht die Fragenkette „Wer hat denn eine Idee?" (Z. 5) – „Was könnte man mit der Raute machen?" (Z. 6f.) – „Welche Hilfslinien könnten wir ... einzeichnen?" (Z. 10). Sie beginnt mit einem offenen Horizont und engt den Blick schließlich auf die vorgesehenen Hilfslinien ein. Wenn Sandra nun mit dem Stichwort „Symmetrieachsen" ins Schwarze trifft, braucht sie nicht einmal aus Einsicht gehandelt zu haben; geschicktes Raten nach dem „Gesetz der zeitlichen Nähe" (Symmetrieachsen spielen in der laufenden Unterrichtseinheit eine wichtige Rolle) hat denselben Effekt: Der Lehrer ist seinem Unterrichtsziel ein beträchtliches Stück näher gekommen. Michaels alternative Idee (Z. 8) kann in diesem kanalisierten Ablauf keinen Raum gewinnen. Mit einer fein abgestimmten Bewertung „jaa – aber" signalisiert der Lehrer, dass er Michaels Vorschlag zwar nicht direkt zurückweisen, aber auch nicht weiter verfolgen will.

So entsteht ein mehr oder weniger kurztaktiges Frage- und Antwortspiel, das oft auf der Oberfläche der Sprechweisen und Bezeichnungen bleibt und keine großen Spannungsbögen aufkommen lässt. Es ist die strategische Anpassung an äußere Zugzwänge und vereinfachende Auffassungen vom Lernen.

Die Zugzwänge sind bedingt durch Zielvorgaben („Stoffdruck") auf der einen und Leistungsanforderungen auf der anderen Seite. Der Lehrer/die Lehrerin möchte das Stundenziel erreichen, die Schüler/innen möchten Leistungspunkte sammeln. Die vereinfachenden Auffassungen vom Lernen unterstellen, Wissen sei bei geeigneter Moderation des Lehr-Lernprozesses eindeutig vermittelbar – besonders dann, wenn es mit mathematikspezifischer Präzision darstellbar ist. Die erfolgversprechende Lehrmethode wird dann darin gesehen, die Lernenden Schritt für Schritt an dem linearisierten Gedankengang einer feingliedrig ausgearbeiteten Darstellung des mathematischen Zusammenhanges entlang zu führen.

Dieses Geflecht aus Systembedingungen und Sichtweisen führt in plausibler Weise zu einem kurztaktigen fragend-entwickelnden Mathematikunterricht, in dem die Lehrenden oft aus einer den Lernenden noch nicht zugänglichen Perspektive handeln und die Lernenden nicht mehr als tastende Antwortversuche leisten können. Dabei steht der Lernprozess ganz in der Verantwortung der Lehrkraft, die im Bedarfsfall wahrliche Dompteurleistungen mit entsprechender Kraftanstrengung vollbringen muss. Inhaltlich pendelt er sich vorzugsweise auf gut steuerbare Themen, vor allem auf schematisierte Verfahren, ein.

Ein solcher Unterrichtsstil kann sich halten und – in Grenzen – auch bewähren, so lange der gesellschaftliche Konsens ihn trägt und die Lerndispositionen der Schüler/innen sich darauf einstimmen können – so lange also die Lehrkräfte in Ausübung ihrer Verantwortung durch Bildungswillen, Respekt, Disziplin und Vertrauen unterstützt werden und die Schüler/innen so viel an homogenen Vorerfahrungen wie an Konzentrationsfähigkeit mitbringen, dass sie den gelenkten Gedankengängen folgen können und wollen.

Diese Voraussetzungen sind jedoch im Zuge gesellschaftlicher Veränderungen zunehmend weggebrochen. Hinzu kommen neue Sichtweisen vom Lernen, in denen sich praktische Erfahrungen, erkenntnistheoretische Einsichten und lernpsychologische Befunde verdichten. Danach gibt es keine unmittelbare Übernahmen des Wissens und Könnens anderer Personen. Vielmehr muss jedes Individuum sein Wissen aktiv aufbauen. Mathematische Inhalte sind auch nicht identisch mit ihren äußeren Darstellungsformen; Darstellungen sind Haltepunkte, hinter denen sich ein reicher Kosmos an Bedeutungen verbirgt.

Vermittlung ist jedoch auf Darstellungsformen angewiesen. So entsteht zwischen mathematischem Wissen und seinen Vermittlungsformen eine prinzipielle Kluft, die vom lernenden Individuum dadurch überbrückt werden muss, dass es Sinn und Bedeutung der Inhalte in Gedanken selbst konstruiert. Entscheidende Parameter sind dabei der Umfang und die Qualität des bereits vorhandenen Wissensnetzes, die Ergiebigkeit der Lehrmaterialien, die Intensität der Auseinandersetzung mit dem Gegenstand und die Reichhaltigkeit und Inhaltsbezogenheit der sozialen Interaktion. Diese Parameter gilt es durch didaktische Maßnahmen geschickt zu beeinflussen. Dabei sind individuelle affektive und kognitive Dispositionen zu berücksichtigen: Es muss ein Lerninteresse geweckt werden und eine Erfolgschance gegeben sein (vgl. Müller u. a., 1997; Hußmann, 2002).

Diese Sicht verweist den Mathematikunterricht an ein Spannungsfeld, das sich zwischen polaren Notwendigkeiten bewegt:

- Einerseits müssen Startpunkte für individuelle Lernwege angeboten und Freiräume für deren Ausgestaltung eröffnet werden: Die Schülerinnen sind nicht Objekte der Belehrung, sondern Subjekte ihres Lernprozesses.
- Andererseits muss der Anschluss an objektiv gültige Wissensnetze des Faches gewonnen werden; dazu sind die durch Lehrpläne und Kerncurricula passend zu definierenden Ziele einzulösen.

Eine geeignete Aufbereitung des Stoffes als Grundlage für den Lernprozess, die Verfügbarkeit neuer Medien als Unterstützung und begleitende Hinweise und Reflexionen auf inhaltlicher wie metakognitiver Ebene als Orientierung muss die Pole effektiv verbinden. So sind angeleitetes wie selbstgesteuertes Lernen, Instruktion wie Konstruktion gleichermaßen wichtige Arbeitsformen im Unterricht. Sie auszubalancieren gehört zur Entwicklung einer neuen Lernkultur (Weinert, 1998).

2.4 Ansätze zu einer neuen Lernkultur

Die Suche nach neuen Wegen, Instruktion und Konstruktion im Mathematikunterricht auf bestmögliche Weise zu verbinden, hat auf breiter Basis begonnen. Davon zeugt eine Vielzahl von didaktischen Publikationen wie auch Schulprojekten auf offizieller Ebene – etwa das BLK-Projekt „Steigerung der Effizienz des mathematisch-naturwissenschaftlichen Unterrichts" (BLK, 1997). Pionierrollen spielen – mit unterschiedlichen Schwerpunktsetzungen und auf verschiedene Schulstufen bezogen – das Grundschulprojekt „mathe 2000" der Universität Dortmund (Müller & Steinbring & Wittmann, 1997), das eine weite Verbreitung gefunden hat, die Schulversuche des Niedersächsischen Kultusministeriums in der gymnasialen Mittelstufe (1987–1995), die zum „Osnabrücker Curriculum" geführt haben (Cohors-Fresenborg & Kaune, 1993; Cohors-Fresenborg, 2001) und der in der Schweiz entwickelte schulstufen- und fächerübergreifende Ansatz des dialogischen Lernens in Sprache und Mathematik (Ruf & Gallin, 1998).

Als Beispiel für einen Mathematikunterricht, der an einem prozesshaften Mathematikbild und einer lerntheoretischen Perspektive orientiert ist, sei i. F. ein Schulversuch zur Einführung des Integrals geschildert (Hußmann, 2002). Dieser wurde in mehreren Grund- und Leistungskursen der gymnasialen Oberstufe durchgeführt und hat folgende Leitideen:

- *Aktives Lernen:* Die Schüler/innen arbeiten eigenständig an mathematischen Problemstellungen und erschaffen im Rahmen ihrer Möglichkeiten selbst ein Stück Mathematik. Sie übernehmen dabei die Verantwortung für ihren Lernprozess.
- *Inhaltliche Aspektfülle:* Der Lerninhalt wird nicht in kleinen Schritten als fest gefügtes System von abgeklärten Begriffen, Regeln und Verfahren mit schematisierbaren Problemformaten präsentiert, sondern steht von Anfang an in seiner gesamten Aspektfülle zur Disposition, so dass die Schüler/innen sich auf individuellen Lernwegen ein immer dichter und komplexer werdendes Wissensnetz knüpfen können.

Ausgangspunkt des Lernprozesses ist eine Sammlung von möglichst authentischen komplexen und offenen Problemstellungen, die dem Lehrziel angepasst sind, möglichst das ganze Gebiet von verschiedenen Seiten beleuchten und für die Lernenden Aufforderungscharakter haben.

Der in Rede stehenden Unterrichtseinheit lagen drei solche Problemstellungen zugrunde:

1. *Wasserverbrauch*
   Die folgende Tabelle (Abb. 15) gibt die stündlich gemessene Bilanz aus Abfluss und Zufluss in einem Wasserwerk wieder. Die Betreiber des Wasserwerks sind an einer optimalen Nutzung der Wasservorräte in ihrem Speicher interessiert.

Zeit (Std.)	Wasserverbrauch (m^3 in Std)
6.00	1800
7.00	1900
8.00	2100
9.00	1400
10.00	1800
11.00	1765
12.00	3236
13.00	4219
14.00	1989
15.00	2549
16.00	1888
17.00	2119
18.00	5129
19.00	5988
20.00	4322
21.00	430
22.00	-543
23.00	-3450
24.00	-4299
1.00	-3998
2.00	-3887
3.00	-3456
4.00	-2987
5.00	-327
6.00	23

Abbildung 15

2. *Der Fahrtenschreiber*
   Eine Fahrerin einer Spedition wird auf der Rückfahrt von München nach Bochum von der Autobahnpolizei kontrolliert. Bei der Überprüfung der Tachoscheibe (Abb. 16) entdecken die Polizisten einen relativ großen Zeitraum, in dem auf der Scheibe keine Geschwindigkeit eingetragen ist. Auf Nachfrage gibt die Fahrerin an, dass sie in dieser Zeit eine Pause an einer Raststätte gemacht habe. Zum Beweis ihrer Aussage verweist sie auf die gefahrenen Kilometer.

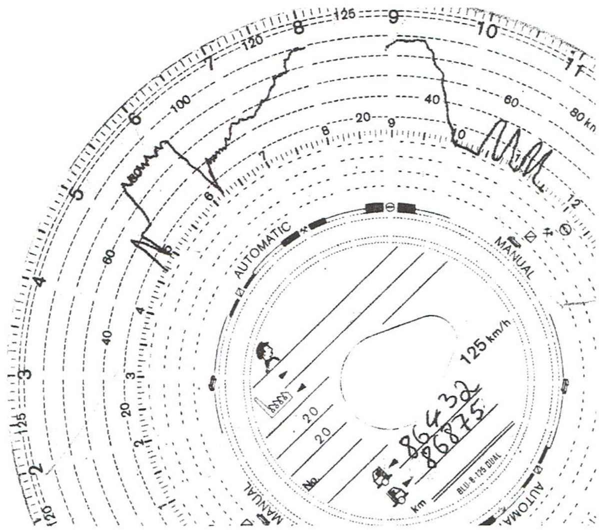


Abbildung 16

3. *Geschlechterdifferenz beim Wachstum*
   In Abb. 17 sind zwei Kurven zu sehen. Sie stellen die Wachstumsraten einer Gruppe von Jungen und einer Gruppe von Mädchen dar. Die Kurven approximieren Daten, die aus einer Längsschnittstudie bei einer für Mitteleuropa repräsentativen Auswahl von Menschen gewonnen wurden. Die den Kurven zu Grunde liegenden Daten sind Mittelwerte aus den gemessenen Wachstumsgrößen der jeweiligen Gruppe. Aus Gründen der besseren Lesbarkeit sind diese Datenpunkte nicht dargestellt.

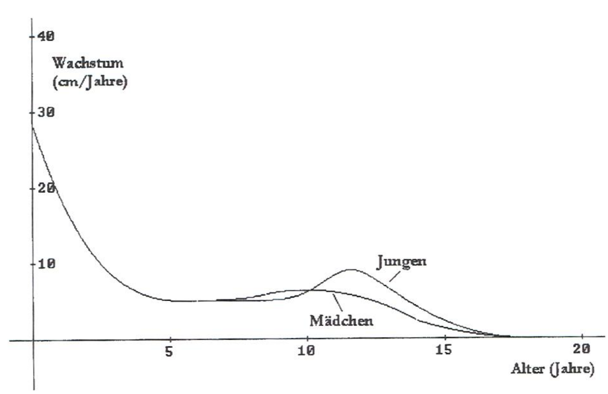


Abbildung 17

Die Funktionsgleichungen zu den Kurven lauten:

$$K_M(x) := \begin{cases} -0,0973 \cdot x^3 + 1,8312 \cdot x^2 - 11,407 \cdot x + 28,4909 & 0 < \mathrm{x} \leq 6 \\ 0,00017733 \cdot e^x + 4,92845 & 6 < \mathrm{x} \leq 8{,}5 \\ -0,243877 \cdot x^2 + 4,84906 \cdot x - 17,7548 & 8{,}5 < \mathrm{x} \leq 14 \\ \frac{23}{160} \cdot (x - 18)^2 & 14 < \mathrm{x} \leq 18 \end{cases}$$

$$K_J(x) := \begin{cases} -0,0973 \cdot x^3 + 1,8312 \cdot x^2 - 11,407 \cdot x + 28,4909 & 0 < \mathrm{x} \leq 6 \\ 4 \cdot e^{\frac{-(x-11,6)^2}{2}} + 5 & 6 < \mathrm{x} \leq 13 \\ -0,275762 \cdot x^2 + 9,84747 \cdot x - 87,9133 & 13 \end{cases}$$

Welche Informationen kann man den Kurven entnehmen? In welchen Abschnitten sind die Jungen größer als die Mädchen?

In allen drei Fällen handelt es sich um lebensnahe und noch unstrukturierte Problemstellungen, die die Schüler/innen zum Nachdenken motivieren und in den Kern des Themas führen sollten. In ihrer Gesamtheit erfassen sie wesentliche Aspekte des Integralbegriffs (vgl. Blum & Törner, 1983):

- den Aspekt der *Stammfunktion*: Integration als Umkehrung der Differentation;
- den Aspekt der *Kumulation*: Integration als Summation von kleinen (Größen-) Produkten, z. B. „Geschwindigkeit mal (kleine) Zeitspanne", die in allgemeiner Form als „Funktionswert mal (kleine) Argumentwertdifferenz" erscheinen. Diesen Summationsprozess denkt man sich idealisiert, d. h. für beliebig kleine Argumentwertdifferenzen und somit für eine beliebig große Summandenzahl durchgeführt. Dadurch sind zwei grundlegende Ideen der Analysis, nämlich *Approximation* und *Grenzwert* berührt.
- den Aspekt des *Flächeninhaltes*: Die unterschiedlichen inhaltlichen Konkretisierungen des Kumulationsaspektes treffen sich in einer gemeinsamen geometrischen Grundvorstellung: das Integral als Grenzwert einer Summe von Rechtecksflächeninhalten. Der Flächeninhaltsaspekt ist damit Spezialfall und zugleich Vorstellungsstütze für den Kumulationsaspekt.

Die Probleme sind auch offen für individuelle begriffliche Präzisierungen. Die Schüler/innen können verschiedene Integralbegriffe (Regel-Integral, Linkssummen-Integral, Riemann-Integral) entwickeln und diese gegeneinander abgrenzen.

Die Probleme waren in Kleingruppen in frei gewählter Reihenfolge zu bearbeiten. Als Hilfsmittel konnte ein Computeralgebrasystem eingesetzt werden. Der Lehrer war ständig als Berater zur Verfügung. Der Arbeitsprozess mit seinen Fortschritten und Zwischenergebnissen, aber auch Sackgassen und offenen Fragen war in individuell geführten „Forschungsheften" zu dokumentieren. In der Phase der Präsentation und der Reflexion wurden die Überlegungen und Lösungsvorschläge zusammen getragen und gemeinsam durchdacht; es wurden Begriffe ausgehandelt und die Arbeitsergebnisse mit den Darstellungsweisen verglichen, die sich im wissenschaftlichen Betrieb als die offiziell anerkannten entwickelt haben.

Die folgenden Auszüge aus den Forschungsheften sollen einen Eindruck davon vermitteln, wie ein Kurs, der an diesen Unterrichtsstil gewöhnt ist, mit solchen Lernimpulsen umgeht.

Bei der Bearbeitung der *Fahrtenschreiberaufgabe* wurde die Frage nach der Glaubwüdigkeit der Fahrerin häufig zum Auslöser für weitere Überlegungen. Die Bestimmung der tatsächlich zurückgelegten Strecke führte unmittelbar in den mathematischen Kern des Problems. Dabei versuchten die Schüler/innen unterschiedliche Approximationsverfahren unter Verwendung von Treppenfunktionen oder stückweise linearen Funktionen. Entscheidend war die Erkenntnis, dass die Strecke der Fläche unter der Kurve entspricht. Sie wurde für einige Schüler/innen zum Anstoß, nach exakten Bestimmungsverfahren für beliebige Kurven zu suchen. Dabei wurde ihnen klar, dass eine Grenzwertbetrachtung notwendig wird. So heißt es in einem Forschungsheft:

> *Ein Integral in dem Intervall $[a, b]$ bestimmt man mit Hilfe von sogenannten Höhenfunktionen. Man unterteilt die x-Achse in dem Bereich in Teilabschnitte. Für jeden Teilabschnitt legt man eine Höhenfunktion in den Graphen. Dann lässt man die Zahl der Teilabschnitte gegen unendlich laufen. Das Integral ist dann die Summe aller Produkte aus Länge der Höhenfunktion (Länge des Teilabschnittes) und Höhe der Höhenfunktion (Funktionswert).*

Der folgende Auszug aus einem Forschungsheft (Abb. 18) zeigt, wie das Problem heuristisch geschickt zunächst durch idealtypische Vereinfachung auf seinen Kern reduziert und dann auf einen exemplarischen Fall zugespitzt wird.

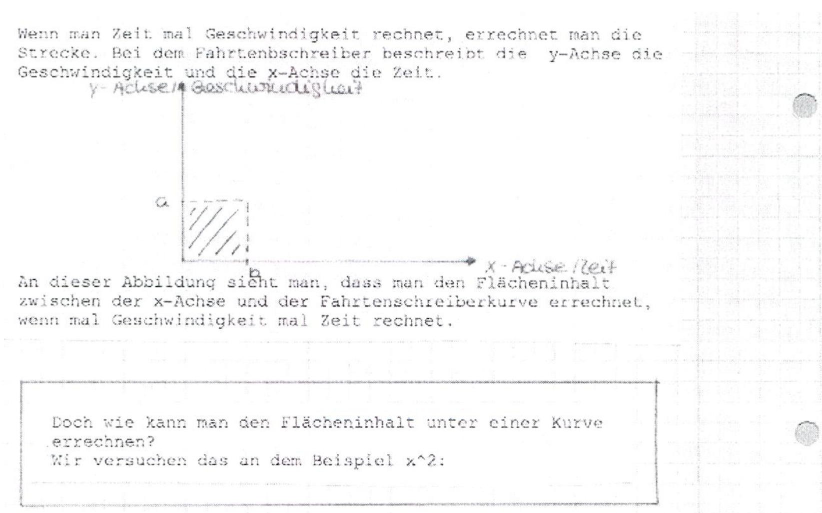


Abbildung 18

Zugleich wird die soziale Komponente des Unterrichtskonzeptes deutlich. Die Kleingruppen lernen voneinander und miteinander. Die Schülerinnen Janina und Rabea hatten die Idee entwickelt, den Graphen von unten und oben mit Rechtecksflächen zu approximieren (Abb. 19).

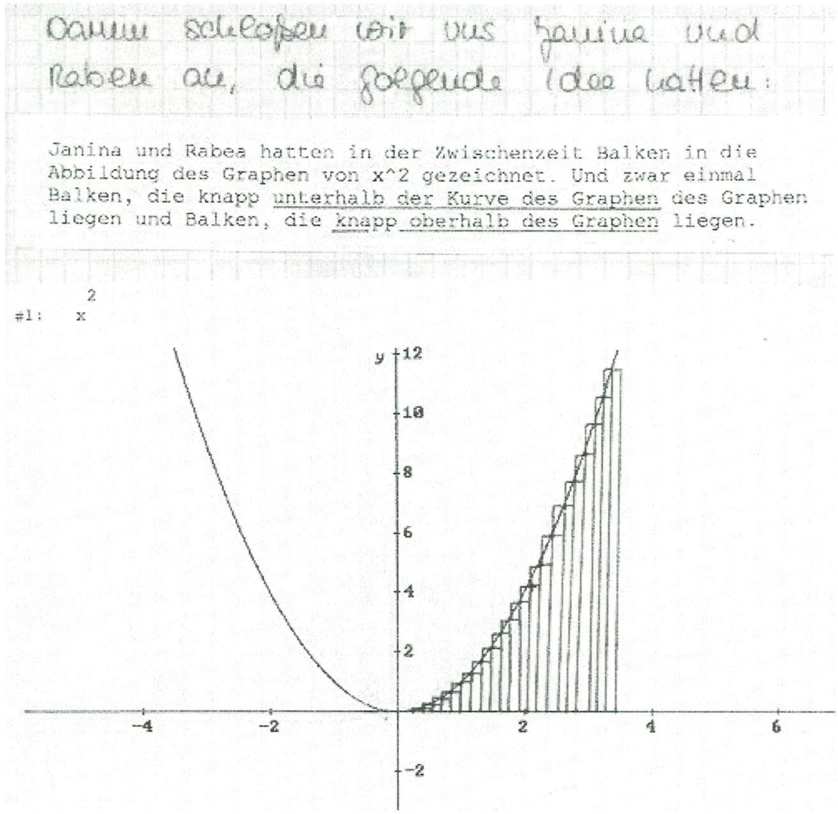


Abbildung 19

Dabei fanden sie auch eine situationsbezogene Deutung des entwickelten Näherungsverfahrens, indem sie meinten, die obere Approximationsfläche entspräche mehr der Interessenlage der Fahrerin, die untere Fläche mehr der Interessenlage der Polizei. Diesen Schülerinnen gelang es schließlich auch, beispielbezogen das Riemann-Integral herzuleiten (Abb. 20). Dabei wurde die Grenzwertoption des CAS gezielt als Hilfsmittel eingesetzt. Deshalb wechseln in den Forschungsheften handschriftliche Einträge und Computerausdrucke nach Bedarf ab.

Wie in der vorhergegangenen Rechnung gezeigt, wird der Faktor vor b/n bei jedem Rechteck um eins erhöht. Um dies darzustellen fügen wir die Variable z hinzu, die dies darstellen soll. Unsere Formel lautet also:

#1: $f(x) := x^2$

#2: $\frac{b}{n} \cdot f\left(z \cdot \frac{b}{n}\right)$

Der gesamte Flächninhalt ergibt sich aus der Summe aller Balken, deshalb:

#3: $\sum_{z=1}^{n} \frac{b}{n} \cdot f\left(z \cdot \frac{b}{n}\right)$

Um nun an den Flächeninhalt zu gelangen errechen wir nun von dieser Formel den Grenzwert und lassen n gegen unendlich streben, da je grösser die Anzahl der Balken ist desto größer ist die Genauigkeit des Flächeninhalts.

#4: $\lim_{n \to \infty} \sum_{z=1}^{n} \frac{b}{n} \cdot f\left(z \cdot \frac{b}{n}\right)$

Mit dieser Formel können wir nun alle unbestimmten Integrale errechnen und errechnen in unserem Fall das Integral von x^2:

#5: $f(x) := x^2$

#6: $\frac{b^3}{3}$

Der Flächeninhalt zwischen der Kurve des Graphen von x^2 und der x-Achse beträgt also b^3/3. ⇒ aber nur, wenn er mit dem Grenzwert oberhalb der Balken übereinstimmt

Abbildung 20

Bei der Arbeit an der *Wachstumsaufgabe* kamen viele Schüler/innen auf die Idee, dass hier so etwas wie eine Stammfunktion zu bestimmen sei, weil sie sich an eine Aufgabe aus der Differentialrechnung erinnerten. Eine Schülerin schrieb in ihrem Forschungsheft:

Erste Überlegungen:

– Vermutungen:

Wir vermuten, dass die 1. Ableitung der Höhe das Wachstum ist. Deshalb müssen wir nun die ganze Funktionsgleichung **zurückleiten (⇒ Definition)** *um an die* **Grundfunktion (⇒ Definition)** *zu gelangen, die die Größe der Jungen und Mädchen beschreibt. Wir kommen zu dieser Vermutung auf Grund der Sonnenblumenaufgabe, bei der die Höhe gegeben war und wir die 1. Ableitung berechnet haben, um das Wachstum der Sonnenblume zu errechnen.*

– Fragen:

Wie **leitet** *man eine Funktion* **zurück** *?*

Die Wege zur Bestimmung der Stammfunktion waren in den einzelnen Gruppen sehr unterschiedlich. Zunächst konzentrierten sich alle auf die erste ganzrationale Funktion bei den Mädchen und bestimmten die Stammfunktion durch Zerlegen in einfache Teilfunktionen und „Aufleiten“. Dann entdeckten einige Schüler/innen die Integraloption des CAS und bestimmten damit sehr schnell weitere benötigte Stammfunktionen. Diese wurden durch entsprechendes Differenzieren auf ihre Richtigkeit überprüft. Zu einer – kognitiv wie emotional erlebten – Hürde wurde die zweite Jungenfunktion, deren Stammfunktion nicht durch einen geschlossenen Ausdruck angegeben, immerhin aber noch mit Hilfe des CAS graphisch dargestellt werden konnte.

Eine weitere Herausforderung stellte sich, als die Stammfunktionen graphisch dargestellt waren (Abb. 21). Die Funktionsgraphen auf den Teilabschnitten ergänzten sich nicht zu einem zusammenhängenden Graphen, und außerdem wären die Babies nach dieser Darstellung zum Zeitpunkt ihrer Geburt 0 cm groß.

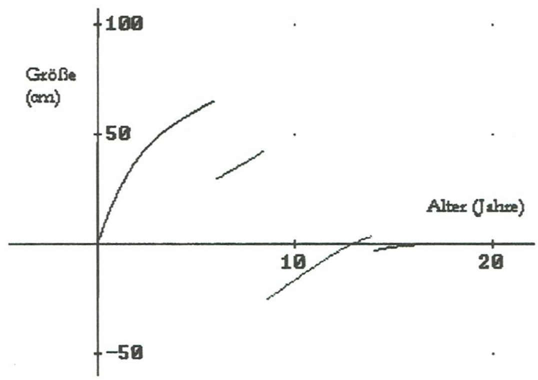


Abbildung 21

In dieser Phase zeigten die Schüler/innen viel Durchhaltevermögen. Zur Überwindung der Hindernisse ermittelte eine Gruppe über eine Internetrecherche die durchschnittliche Geburtsgröße von 50 cm. Dieser Wert wurde als Konstante an die erste Stammfunktion angefügt, und es stellte sich heraus, dass dies beim Differenzieren keine Auswirkung auf die Wachstumsfunktion zeigt. Die Möglichkeit der Hinzufügung einer Konstante konnte dann auch zur Anpassung der anderen Kurvenabschnitte verwendet werden (Abb. 22).

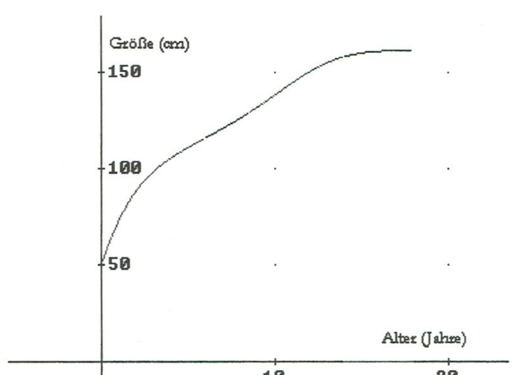


Abbildung 22

Nachdem dieser Erfolg große Freude erzeugt hatte, mussten die Schülerinnen und Schüler sich bald mit einem neuen Hindernis auseinandersetzen: Der Schnittpunkt der zweiten Jungen- und der dritten Mädchenfunktion konnte mit dem CAS nicht bestimmt werden, da die Stammfunktion der zweiten Jungenfunktion nicht explizit in Termdarstellung vorlag. An dieser Stelle wechselten die Gruppen zur Bearbeitung eines anderen Problems. Zuvor verallgemeinerten viele Schülerinnen und Schüler ihre Ergebnisse in Form von Definitionen und Sätzen, zum Beispiel so:

> *Grundfunktion*
> *Eine Funktion g heißt „Grundfunktion von f", wenn gilt:*
>
> $Gf'(x) = f(x)$.
>
> *Leitet man also eine Funktion f zurück, erhält man ihre Grundfunktion g. Dementsprechend ist die 1. Ableitung dieser Grundfunktion g die Funktion f. Ist diese Grundfunktion g aber nicht differenzierbar, so ist auch ihre Funktion f nicht integrierbar.*

Im Anschluss an die Bearbeitung des Fahrtenschreiberproblems eröffnete die Deutung des Integrals als Grenzwert von Linkssummen den Schülerinnen und Schülern eine neue Perspektive auf die Wachstumsaufgabe. Es wurde einsehbar, dass die Körpergröße ebenfalls als Kumulation aus dem Wachstum bestimmt werden konnte. Dadurch konnte der Größenzuwachs der problematischen zweiten Jungenfunktion approximativ bestimmt werden.

Auf diese Weise entwickelten die Schüler/innen eigenständig wesentliche Aspekte des Integralbegriffs und waren in der Lage, diese zueinander in Beziehung zu setzen. Dabei erlebten sie Mathematik als lebendige Wissenschaft und sich selbst als Mathematik Treibende und Forschende – allein und im Austausch mit anderen. Der Computer erwies sich als unerlässliches und sinnvoll einzusetzendes Werkzeug.

3 Nachwort

Mathematikdidaktik als Wissenschaft vom Lehren und Lernen von Mathematik hat es mit Prozessen der fachgebundenen Vermittlung zu tun. Wie jede erfahrungsbezogene Wissenschaft bewegt sie sich in der Spanne zwischen kreativem Entwerfen, kontrolliertem Beobachten und kritischem Prüfen.

Dabei muss die Didaktik zwischen zwei Polen vermitteln: dem streng organisierten System des (fertigen) mathematischen Wissens auf der einen und den verschiedenen individuellen Erkenntniswegen auf der anderen Seite.

Auf jeder Seite kann didaktische Forschung Erkenntnisgewinne erzielen, die für die Planung von Mathematikunterricht hilfreich sind: Sie kann durch die geeignete Auswahl von Problemen und Darstellungsmitteln anregende und sinnerschließende Lernanlässe schaffen und sie kann Invarianten mathematischer Denkentwicklung herauspräparieren. Solche Erkenntnisse entschärfen die Polarität der Vermittlungsaufgabe, lösen sie aber nicht auf.

Am Ende bleibt die Spannung zwischen einem aus Sicht der Fortgeschrittenen fest gefügten Lerninhalt und der Unvorhersehbarkeit individueller Lernwege. Sie kann bewältigt werden durch ein evolutionäres Paradigma des Lehrens und Lernens, das die Balance zwischen Steuerung und Offenheit, zwischen Instruktion und Konstruktion zu einer neuen Aufgabe macht.

Literatur

BLK – Bund-Länder-Kommision für Bildungsplanung und Forschungsförderung (Hrsg.) (1997): Gutachten zur Vorbereitung des Programms „Steigerung der Effizienz des mathematisch-naturwissenschaftlichen Unterrichts“ (= BLK-Materialien zur Bildungsplanung und Forschungsförderung, Heft 60). Bonn: BLK.

Blum, W. & Törner, G. (1983): Didaktik der Analysis. Göttingen: Vandenhoeck & Ruprecht.

Cohors-Fresenborg, E. & Kaune, C. (1993): Zur Konzeption eines gymnasialen mathematischen Anfangsunterrichts unter kognitionstheoretischem Aspekt. In: Der Mathematikunterricht 39, Heft 3, S. 4–11. S. auch die anderen Aufsätze in diesem Heft.

Cohors-Fresenborg, E. & Schwank, I. (1996): Kognitive Aspekte des Business Reengeneering. Gestalt Theory 18 (4), 233–256.

Cohors-Fresenborg, E. (2001): Mathematik als Werkzeug zur Wissensrepräsentation: das Osnabrücker Curriculum. In: Der Mathematikunterricht 47, Heft 1, 5–13. S. auch die anderen Beiträge in diesem Heft.

Freudenthal, H. (1978): Vorrede zu einer Wissenschaft vom Mathematikunterricht. München, Wien: Oldenbourg.

Hefendehl-Hebeker, L. (2001): Die Wissensform des Formelwissens. In: Weiser, W.; Wollring, B. (Hrsg.): Beiträge zur Didaktik der Mathematik für die Primarstufe. Festschrift für Siegbert Schmidt. Hamburg: Verlag Dr. Kovač, 83–98.

Hußmann, S. (2002): Konstruktivistisches Lernen an Intentionalen Problemen. Mathematik unterrichten in einer offenen Lernumgebung. Hildesheim; Berlin: Franzbecker.

Kopp, M. (2001): Algebra mit Zahlenmauern. In: mathematik lehren / Heft 105, 16–19.

Krämer, S. (1988): Symbolische Maschinen. Die Idee der Formalisierung in geschichtlichem Abriss. Darmstadt: Wiss. Buchges.

Maier, H.; Voigt, J. (Hrsg.) (1991): Interpretative Unterrichtsforschung. Heinrich Bauersfeld zum 65. Geburtstag. Köln: Aulis-Verl. Deubner.

Maier, H.; Voigt, J. (Hrsg.) (1994): Verstehen und Verständigung. Arbeiten zur interpretativen Unterrichtsforschung. Köln: Aulis-Verl. Deubner.

Malle, G. (1993): Didaktische Probleme der elementaren Algebra. Unter Mitarbeit von H. Bürger. Braunschweig; Wiesbaden: Vieweg.

Mölle, M.; Schwank, I.; Marshall, L.; Klöhn, A.; Born, J. (2000): Dimensional complexity and power spectral measures of the EEG during functional versus predicative problem solving. Brain and Cognition, Vol. 22, No. 3, 547–563.

Müller, G. N.; Steinbring, H.; Wittmann, E. Ch. (1997): 10 Jahre „mathe 2000“. Bilanz und Perspektiven. Düsseldorf: Klett.

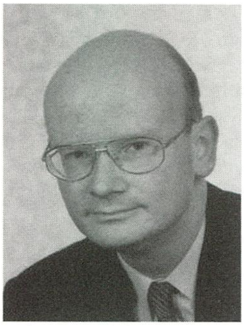
Ruf, U.; Gallin, P. (1998): Dialogisches Lernen in Sprache und Mathematik. Band 1: Austausch unter Ungleichen. Band 2: Spuren legen – Spuren lesen. Seelze-Velber: Kallmeyer.

Schwank, I. (1996): Zur Konzeption prädikativer versus kognitiver Strukturen und ihrer Anwendung. ZDM-Analysenheft „Deutsche psychologische Forschung in der Mathematikdidaktik“. Zentralblatt für Didaktik der Mathematik, Vol. 6, 168–183.

Schwank, I. (1999/2000): QuaDiPF – Qualitatives Diagnoseinstrument für prädikatives versus funktionales Denken. Set C. Osnabrück: Forschungsinstitut für Mathematikdidaktik.

Voigt, J. (1984): Die Kluft zwischen didaktischen Maximen und ihrer Verwirklichung im Mathematikunterricht – dargestellt an einer Szene aus dem alltäglichen Mathematikunterricht. Journal für Mathematikdidaktik 5, 265–283.

Vollrath, H.-J. (1995): Algebra in der Sekundarstufe. Heidelberg; Berlin: Spektrum Akad. Verlag.
Weinert, F. E. (1998): Neue Unterrichtskonzepte zwischen gesellschaftlichen Notwendigkeiten, pädagogischen Visionen und psychologischen Möglichkeiten. In: Bayerisches Staatsministerium für Unterricht, Kultus, Wissenschaft und Kunst (Hrsg.): Wissen und Werte für die Welt von morgen. Donauwörth: Auer, 101–125.
Wittmann, E. Ch.; Müller, G. N. et al. (1994): Das Zahlenbuch. Mathematik im ersten Schuljahr Nordrhein- Westfalen. Leipzig; Stuttgart; Düsseldorf: Ernst Klett Grundschulverlag.
Wittmann, E. Ch.; Müller, G. N. (1990): Handbuch produktiver Rechenübungen. Band I: Vom Einspluseins zum Einmaleins. Stuttgart; Düsseldorf: Klett.



Die Weierstraßschen „analytischen Gebilde“: Alternativen zu Riemanns „Flächen“ und Vorboten der komplexen Räume

Peter Ullrich*

Abstract

- Keywords and Phrases: analytic configuration, Karl Weierstraß, Abelian integral, Carl Gustav Jacob Jacobi, Bernhard Riemann, Riemann surface, Hermann Weyl, complex manifold, complex space
- Mathematics Subject Classification: 01 A 55, 30-03, 33-03; 01 A 60, 32-03

In order to develop his theory of Abelian integrals Karl Weierstraß introduced the concept of „analytisches Gebilde“ (analytic configuration), which is equivalent to Bernhard Riemann's notion of „Fläche“ (surface), at least as interpreted by Hermann Weyl. Furthermore, Weierstraß worked on generalizing his concept to several complex variables by which he came close to the idea of a complex manifold and even a complex space with singularities.

* Mein Dank gilt dem Institut Mittag-Leffler, Djursholm, und dem Akademiearchiv der Berlin-Brandenburgischen Akademie der Wissenschaften, Berlin, für die Genehmigungen, aus den jeweiligen Quellen zitieren zu dürfen.

Eingegangen: 13.02.2003

Universität Siegen, Fachbereich Mathematik, Walter-Flex-Straße 3, D-57068 Siegen, Germany. E-Mail: ullrich@math.uni-siegen.de

DMV
JAHRESBERICHT DER DMV

Resultate, die mit dem Namen von Karl Weierstraß (1815–1897) verbunden werden, sind in der Mathematik gang und gäbe: der Satz von Bolzano-Weierstraß, der Weierstraßsche Doppelreihensatz, – Approximationssatz, – Produktsatz, – Vorbereitungssatz, ... Für ihn selbst waren dies jedoch nur Hilfsmittel auf dem Weg zu seinem eigentlichen Ziel, die Abelschen Transzendenten „wirklich darzustellen und ihre Eigenschaften näher zu ergründen“ [46, S. 224]. Dies war auch seinen Zeitgenossen bewußt; so schrieb Emil Lampe (1840–1918) in seinem Nachruf auf Weierstraß [22, S. 34]:

> „In dem Centrum aller Arbeiten von Weierstraß stehen die Abel'schen Functionen; man könnte sogar sagen, daß alle allgemeinen functionentheoretischen Untersuchungen von ihm nur zu dem Zwecke unternommen sind, um das Problem in Vollständigkeit und Klarheit zu lösen, das durch die Forderung der Darstellung der Abel'schen Functionen jener Zeit gestellt war.“

Die von Weierstraß betrachteten „analytischen Gebilde“ sind ein weiteres Beispiel von solchen vorbereitenden „functionentheoretischen Untersuchungen“: Um seine Integrationstheorie für algebraische Funktionen zu entwickeln, mußte er algebraische Kurven

$$f(x,y) = 0$$

mit analytischen Methoden beschreiben. (Die Formelbuchstaben sind im folgenden wie in der Werksausgabe der „Vorlesungen über die Theorie der Abelschen Transcendenten“ [56] gewählt; insbesondere bezeichnen x und y *komplexe* Variable.) In den „regulären“ Punkten, wo die partiellen Ableitungen von f nicht beide verschwinden, liefert der Satz über implizite Funktionen direkt eine Parametrisierung

$$x = \varphi(t), \quad y = \psi(t)$$

der Kurve in einer Umgebung des Punktes durch ein Paar konvergenter Potenzreihen φ, ψ in einer komplexen Veränderlichen t. Um die verbleibenden „singulären“ Punkte zu behandeln, griff Weierstraß nun nicht auf das damals schon wohlbekannte Mittel der Puiseux-Entwicklung nach gebrochenen Potenzen zurück, sondern beschrieb die algebraische Kurve in der Umgebung eines singulären Punktes durch mehrere (allerdings stets endlich viele) Paare von Potenzreihen.

In den siebziger Jahren des 19. Jahrhunderts übertrug Weierstraß diese Methode, statt Funktionen mit Verzweigungspunkten lokal parametrisierte Kurven zu betrachten, von algebraischen auf analytische Funktionen, zunächst einer Veränderlichen. Er erweiterte dadurch sein Konzept einer (u. U. mehrdeutigen) analytischen Funktion – definiert durch lokale Potenzreihendarstellungen und (maximale) analytische Fortsetzung via Kreisketten – zu dem eines „analytischen Gebildes erster Stufe im Gebiete von zwei Veränderlichen“, d. h., einer lokal durch Paare konvergenter Potenzreihen einer Veränderlichen parametrisierten Untermenge im $\mathbb{C}^2$ (genauer: im $\mathbb{P}_1 \times \mathbb{P}_1$), also (vorbehaltlich der topologischen Probleme) einer eindimensionalen komplex-analytischen Kurve.

Diese „Gebilde“ sind auch deshalb interessant, weil Bernhard Riemann (1826–1866) zum gleichen Zweck der Behandlung der Abelschen Funktionen seine „Flächen“ verwendete [31, S. 103 bzw. 122]. Die beiden Konzepte gehen aber nicht nur von der gleichen Problemstellung aus: Bereits Weierstraß sah die Riemannschen „Flächen“ als „geometrisches Hülfsmittel“ [54, Bogen 6] bzw. „Versinnlichungsmittel“ [62, S. 144] für seine „Gebilde“ an.

Auch, daß heutzutage von „Riemannschen Flächen“ gesprochen wird, während der Begriff „analytisches Gebilde“ mehr oder minder in Vergessenheit geraten ist, erweist sich eher als eine Frage der Bezeichnung denn des Inhalts: Riemanns Definitionen seiner Flächen (z. B. [30, S. 39], [31, S. 103 bzw. 122], [25, S. 74]) waren – zumindest – interpretationsbedürftig. Das heutige Verständnis von „Riemannscher Fläche“ geht im wesentlichen auf Hermann Weyls (1885–1955) Buch „Die Idee der Riemannschen Fläche“ [64] zurück. Dieser aber wählte für seine Formalisierung der Riemannschen Idee die Weierstraßschen „analytischen Gebilde“ als Prototyp [64, §§ 1–7]. Insbesondere faßte er die Definition der „Riemannschen Fläche“ so, daß sich jedes analytische Gebilde (einer Veränderlichen) als eine Riemannsche Fläche auffassen läßt.

Umgekehrt war bereits Riemann klar, daß jede endlichblättrige seiner „Flächen“ eine algebraische Kurve ist [31, Art. 5] und damit ein „Gebilde“ im Weierstraßschen Sinne. Der nicht-kompakte Fall hingegen erwies sich als diffiziler: Paul Koebe (1882–1945) formulierte bereits 1909 den Satz, jede Riemannsche Fläche sei ein analytisches Gebilde, gab dafür aber nur eine Beweisskizze [21] und ließ seine Ideen ein Jahr später von Erwin Freundlich / Finlay (1885–1964) in dessen Dissertation [13] ausarbeiten. Eine die Probleme des Randes der Fläche in überzeugender Weise berücksichtigende Darstellung gab 1948 Herta Florack in ihrer Dissertation [12].

Bisher wurde nur von solchen „analytischen Gebilden“ gesprochen, die durch *Paare* von Potenzreihen *einer* komplexen Veränderlichen parametrisiert werden. Weierstraß verallgemeinerte dieses Konzept jedoch auch auf beliebige n-Tupel statt Paare und – interessanter – auf Potenzreihen in mehreren Veränderlichen. Mit seiner Definition konnte er allemal komplex-analytische Untermannigfaltigkeiten des $\mathbb{C}^n$ (genauer: des $(\mathbb{P}_1)^n$) beschreiben (so man die topologischen Fragen ignoriert). Er mühte sich jedoch auch damit ab, höherdimensionale Gebilde *mit Singularitäten* zu definieren [62], [57]. Damit begab er sich auf ein Gebiet, das noch nach seinem Tod 1897 lange Zeit für Probleme sorgte und erst ab 1930 ernsthafte Fortschritte hervorbrachte.

1 Das Ausgangsproblem: Die Theorie der Abelschen Funktionen

1.1 Der Stand der Theorie um 1850

Um die Problemstellungen, mit denen sich Weierstraß auseinandersetzte, besser verstehen zu können, sei kurz berichtet, wie sich die Theorie der Abelschen Funktionen um 1850 darbot:

Man betrachte für ein Polynom $P(t)$ mit reellen (oder auch gleich komplexen) Koeffizienten, normiert und ohne mehrfache Nullstellen, das Integral

$$u(x) := \int_{x_0}^{x} \frac{dt}{\sqrt{P(t)}}$$

als Funktion der oberen Integrationsgrenze. Zu Anfang des 18. Jahrhunderts war bereits bekannt, daß sich dieses im Falle, daß der Grad von P gleich 1 oder 2 ist, mittels elementarer Funktionen – der Umkehrfunktionen von Exponentialfunktion bzw. trigonometrischer Funktionen – ausdrücken läßt. Zur Situation höheren Grades trugen zwar

Leonhard Euler (1707–1783) und Adrien-Marie Legendre (1752–1833) Wesentliches bei; der „elliptische“ Fall, daß der Grad von P gleich 3 oder 4 ist, wurde jedoch erst Anfang des 19. Jahrhunderts von Carl Friedrich Gauß (1777–1855) (damals nicht veröffentlicht), Niels Henrik Abel (1802–1829) und Carl Gustav Jacob Jacobi (1804–1851) „verstanden“: Man muß komplexe Werte für x zulassen und die Umkehrabbildung $x = x(u)$ des gegebenen „elliptischen Integrals“ betrachten. Diese erweist sich als doppelt-periodische meromorphe Funktion einer komplexen Veränderlichen, also als „elliptische Funktion“ im heutigen Sinne, und Gauß und Jacobi stellten fest, daß sie sich als Quotient von Theta-Reihen schreiben läßt.

Um 1834 erkannte Jacobi allerdings [19], daß dieses im elliptischen Fall erfolgreiche Verfahren im „hyperelliptischen“ Fall, daß der Grad von P größergleich 5 ist, so nicht zum Ziel führen kann, da dann die Umkehrfunktion „zu viele“ Perioden – mindestens drei – haben müßte. Er ging dieses Problem an, indem er neben dem ursprünglich untersuchten Integral auch solche der Gestalt

$$\int_{x_0}^{x} \frac{t^\nu \, dt}{\sqrt{P(t)}}$$

betrachtete mit $0 \leq \nu \leq \varrho - 1$, wobei ϱ, das „Geschlecht“, so definiert sei, daß der Grad von P gleich $2\varrho + 1$ oder $2\varrho + 2$ ist. Die Umkehrabbildung der Funktion

$$x \mapsto \left(\int_{x_0}^{x} \frac{dt}{\sqrt{P(t)}}, \ldots, \int_{x_0}^{x} \frac{t^{\varrho-1} \, dt}{\sqrt{P(t)}} \right)$$

mußte dann aber eine Funktion von von *mehreren* komplexen Veränderlichen sein. Also, „aus dieser gleichsam verzweifelten Lage“ („in hac quasi desparatione“) [19, § 8], führte Jacobi derartige Funktionen ein und begründete damit die Funktionentheorie mehrerer Veränderlichen. Er schlug auch bereits vor, daß man diese Umkehrfunktionen – ähnlich wie im elliptischen Fall – durch Theta-Reihen

$$\sum_{m \in \mathbb{Z}^\varrho} e^{q(m) + 2\langle m, z \rangle}$$

ausdrücken sollte mit $z = (z_1, \ldots, z_\varrho)$ und q einer quadratischen Form in ϱ Variablen mit negativ definitem Realteil. Trotz dieser Erkenntnis gelang es ihm jedoch nicht, im hyperelliptischen Fall das „Jacobische Umkehrproblem“ zu lösen, d. h., diese Umkehrabbildung entsprechend wie im elliptischen Fall zu verstehen.

Im Jahr 1847 konnten zwar Adolph Goepel (1812–1847) [14] und Georg Rosenhain (1816–1887) [33], unabhängig voneinander, dieses Problem erfolgreich behandeln im „ultraelliptischen“ Fall, daß der Grad des Polynoms P gleich 5 oder 6 ist, indem sie die Jacobischen Ergebnisse über Thetafunktionen *einer* komplexen Veränderlichen auf die Situation zweier Veränderlichen verallgemeinerten. Es wurde jedoch bald klar, daß sich der Göpel-Rosenhainsche Ansatz nicht auf höhere Grade des Polynoms, also Geschlecht echt größer als 2 übertragen ließ. Somit waren grundsätzlich neue Ideen vonnöten, um den Allgemeinfall hyperelliptischer Integrale zu behandeln, ganz zu schweigen von den von Jacobi so genannten „Abelschen Integralen“

$$\int_{x_0}^{x} Q\big(t, y(t)\big)\,dt,$$

wo Q eine rationale Funktion in zwei Veränderlichen und $y(x)$ eine *algebraische* Funktion von x ist, d. h., es besteht eine Gleichung

$$f\big(x, y(x)\big) = 0$$

mit einem Polynom f in zwei Veränderlichen.

1.2 Weierstraß' Lebensweg bis 1857

Weierstraß[1] kam mit dem genannten Problemkreis in den Jahren 1834–38 in Bonn in engeren Kontakt, wo er zwar nicht, wie vom Vater gewünscht, ernsthaft Kameralistik studierte, sich dafür aber im Selbststudium mathematische Werke aneignete wie Jacobis opus magnum [18] über elliptische Funktionen. Um letzteres zu verstehen, mußte er eine Mitschrift einer Vorlesung von Christoph Gudermann (1798–1851) durcharbeiten über „Modularfunctionen", wie jener die elliptischen Funktionen nannte.

Das Wintersemester 1837/38 brachte die endgültige Entscheidung im Hinblick auf Weierstraß' weiteren Lebensweg: Er stieß auf einen Artikel von Abel [1] beziehungsweise einen Brief Abels an Legendre, der sich auf diesen Artikel bezieht [2, S. 76 bzw. 274]. Darin ging es um folgendes: Im elliptischen Fall hatte Abel bereits festgestellt, daß die Umkehrfunktion $\lambda(u)$ eines elliptischen Integrals

$$\int_{x_0}^{x} \frac{dt}{\sqrt{P(t)}},$$

also die meromorphe „elliptische" Funktion, sich als Quotient zweier auf der ganzen komplexen Zahlenebene $\mathbb{C}$ konvergenter Potenzreihen darstellen läßt.[2] Abel betrachtete nun nicht ein einzelnes Polynom $P(x)$, sondern die durch den „Modul" k parametrisierte Familie

$$P_k(x) := (1 - x^2)(1 - k^2x^2)$$

und studierte die Umkehrfunktion $\lambda_k(u)$ von

$$\int_{x_0}^{x} \frac{dt}{\sqrt{P_k(t)}}.$$

Weierstraß biß sich an der Bemerkung Abels fest, daß die Koeffizienten der Potenzreihen, deren Quotient $\lambda_k(u)$ ist, nicht auf irgendeine Weise vom Modul k abhängen, sondern *Polynome* in k sind. Abels Beweis hierfür basierte darauf, daß man schon weiß, daß $\lambda_k(u)$ Quotient zweier konvergenter Potenzreihen ist; Weierstraß versuchte hingegen, diese Darstellung direkt aus der von dieser Funktion erfüllten Differentialgleichung zu erhalten; er war dabei erfolgreich – und hatte dadurch sein Damaskus-Erlebnis:

In einem Brief vom 10. April 1882 an Sophus Lie [4, Lettres relatives a Abel, S. 108] schrieb er über den genannten Brief Abels an Legendre:

> „Für mich ist dieser Brief, als ich ihn während meiner Studienzeit aus dem Crelle'schen Journal kennen lernte, von der allergrössten Bedeutung gewesen. Die von Abel angegebene Darstellungsform der von ihm mit $\lambda(x)$ bezeichneten Function unmittelbar aus der diese Function definirenden Differentialgleichung herzuleiten, war die erste wichtigere mathematische Aufgabe, die ich mir stellte, und deren glückliche Lösung mich, der ich ursprünglich staatswissenschaftliche Studien trieb, in meinem siebenten Semester bestimmte, mich ganz der Mathematik zu widmen.“

Anfang des Jahres 1838 verließ Weierstraß die Universität zu Bonn, ohne eine Prüfung in Kameralistik abgelegt zu haben, und schrieb sich stattdessen am 18. Oktober des gleichen Jahres für ein Lehrerstudium an der „Akademische[n] Lehranstalt in Münster“ ein, wo der bereits genannte Gudermann Professor war. Bei ihm hörte Weierstraß im Winter 1838/39 und im Sommer 1839 jene vier Vorlesungen, aus denen seine ganze formale akademische Ausbildung in Mathematik bestehen sollte. Bereits 1840 schrieb er eine schriftliche Hausarbeit [41] für das Lehrerexamen, deren Themenstellung er sich selbst ausgesucht hatte und die Gudermann in seinem Gutachten in höchsten Tönen lobte. Allerdings gab es bei der mündlichen Staatsexamensprüfung einen Totalausfall in den obligatorisch mitzuprüfenden Naturwissenschaften, so daß Weierstraß sein Lehrerexamen nur aufgrund einer von der Kultusverwaltung in Berlin beschlossenen Sonderregelung bestand. Insbesondere sah sich Gudermann nicht veranlaßt, Weierstraß seine positive Einschätzung von dessen Hausarbeit mitzuteilen. (Zu Details der Vorgänge um Weierstraß' Staatsexamen siehe [37].)

Weierstraß' Lebensweg führte ihn in den nächsten Jahren auch nicht an eine Universität, sondern zunächst zum Probejahr, also Referendariat, vom Herbst 1841 bis Herbst 1842 in Münster am Gymnasium Paulinum und dann auf Lehrerstellen in der relativen Abgeschiedenheit von West- bzw. Ostpreußen: 1842 bis '48 in Deutsch-Krone und 1848 bis '53 in Braunsberg. Aber selbst dort arbeitete er weiter an der Theorie der hyperelliptischen und Abelschen Funktionen. Ab 1848 konnte er auch wieder die Literatur verfolgen, da es in Braunsberg eine Lehrerausbildungsakademie gab, deren Bibliothek er nutzen konnte. So erfuhr er auch von der 1847 erfolgten Lösung des Jacobischen Umkehrproblems für den „ultraelliptischen“ Fall durch Goepel und Rosenhain.

Die technischen Schwierigkeiten, die einer Übertragung dieses Resultats auf allgemeine hyperelliptische Integrale im Wege standen, schreckten Weierstraß nicht: Schlimmeres als Potenzreihen, davon war er wohl überzeugt (oder hatte sich sogar schon davon überzeugt, vgl. Abschnitte 3.1, 3.3), konnte nicht auftreten. Und ob man bei denen eine oder mehrere komplexe Veränderliche algebraisch manipuliert, macht keinen großen Unterschied. Damit war es kein Problem für ihn, ϱ Integrale über Differentialformen simultan zu betrachten. Dazu kamen noch seine grundsolide Kenntnis des elliptischen Falls und seine Passion für das Entwickeln in Potenz- oder auch Theta-Reihen.

Kurz und gut, am 17. Juli 1849 schloß er einen „Beitrag zur Theorie der Abel'schen Integrale“ ab, in dem er das Jacobische Umkehrproblem für den hyperelliptischen Fall löste. Dieses Manuskript wurde auch veröffentlicht, allerdings als „Beilage zum Jahresbericht über das Gymnasium zu Braunsberg in dem Schuljahre 1848–1849“ [44], so daß es in der „mathematischen Öffentlichkeit“ nicht zur Kenntnis genommen wurde.

Erst 1853 hatte Weierstraß genügend Selbstvertrauen, um seine Ergebnisse in dem von August Leopold Crelle (1780–1855) herausgegebenen „Journal für die reine und angewandte Mathematik" einzureichen. Dieser Artikel, der 1854 im Band 47 jenes Journals unter dem Titel „Zur Theorie der *Abel*schen Functionen" [45] erschien, brachte Weierstraß die Ehrendoktorwürde der Universität Königsberg, die Ernennung zum Oberlehrer und letztlich die akademischen Würden in Berlin ein: Am 14. Juni 1856 wurde er auf eine für ihn geschaffene Professur am damaligen Gewerbeinstitut in Berlin berufen, einer Vorläuferinstitution der heutigen Technischen Universität, am 11. Oktober zum Extraordinarius an der Friedrich-Wilhelms-Universität ernannt und am 19. November des gleichen Jahres in die Preußische Akademie der Wissenschaften aufgenommen.

Am 9. Juli 1857 hielt Weierstraß dann seine Antrittsrede als neues Mitglied der Berliner Akademie und beschrieb dabei unter Berufung auf Euler, Legendre, Abel, Jacobi und Gudermann sein großes, ihm vorschwebendes Ziel der Erforschung der Abelschen Transzendenten [46, S. 224]:

> „Diese Grössen einer ganz neuen Art, für welche die Analysis noch kein Beispiel hatte, wirklich darzustellen und ihre Eigenschaften näher zu ergründen, ward von nun an eine der Hauptaufgaben der Mathematik, an der auch ich mich zu versuchen entschlossen war, sobald ich den Sinn und die Bedeutung derselben klar erkannt hatte. Freilich wäre es thöricht gewesen, wenn ich an die Lösung eines solchen Problems auch nur hätte denken wollen, ohne mich durch ein gründliches Studium der vorhandenen Hülfsmittel und durch Beschäftigung mit minder schweren Aufgaben dazu vorbereitet zu haben."

1.3 Riemanns Artikel von 1857 und Weierstraß' Reaktion

Was jedoch danach in jenem Sommer hinsichtlich des Jacobischen Umkehrproblems für Abelsche Integrale geschah, schilderte Weierstraß 18 Jahre später in der Einleitung zu seiner „Vorlesung über die Theorie der Abelschen Transcendenten" wie folgt [56, S. 9–10]:

> „Eine directe Lösung dieses Problems habe ich bereits im Sommer 1857 in einer ausführlichen Abhandlung der Berliner Akademie vorgelegt. Das schon der Druckerei übergebene Manuscript wurde aber von mir wieder zurückgezogen, weil wenige Wochen später R i e m a n n eine Arbeit über dasselbe Problem veröffentlichte, welche auf ganz anderen Grundlagen als die meinige beruhte und nicht ohne Weiteres erkennen liess, dass sie in ihren Resultaten mit der meinigen vollständig übereinstimme. Der Nachweis hierfür erforderte einige Untersuchungen hauptsächlich algebraischer Natur, deren Durchführung mir nicht ganz leicht wurde und viel Zeit in Anspruch nahm. Nachdem aber diese Schwierigkeit beseitigt war, schien mir eine durchgreifende Umarbeitung meiner Abhandlung erforderlich. Andere Arbeiten, sowie Gründe, deren Besprechung gegenwärtig nicht mehr von Interesse ist, bewirkten dann, dass ich erst gegen Ende des Jahres 1869 der Lösung des allgemeinen Umkehrungsproblems diejenige Form geben konnte, in der ich sie von da an in meinen Vorlesungen vorgetragen habe."

Mit Riemanns „Arbeit über dasselbe Problem“ meinte Weierstraß dessen „Theorie der *Abel'* schen Funktionen“ [31], die 1857 bei dem von Carl Wilhelm Borchardt (1817–1880) nach Crelles Tod übernommenen „Journal“ eingereicht und auch veröffentlicht wurde. Auch für Riemann nahmen die Abelschen Transzendenten eine prominente Stellung ein: So bezeichnete Ernst Schering (1833–1897) in seinem Nachruf auf diesen „die Erforschung der Abelschen Functionen“ als „die [von Riemann] sich selbst gestellte... Hauptaufgabe“ [35, S. 379 bzw. 840], und ein Großteil des Ruhmes, den Riemann noch zu Lebzeiten erlangen konnte, basierte auf der genannten Arbeit; man vergleiche zum Beispiel den – von Weierstraß geschriebenen! – Vorschlag, Riemann zum korrespondierenden Mitglied der Preußischen Akademie der Wissenschaften zu wählen [7, S. 27–29].

Zu der langen Zeitspanne von 1857 bis 1869, die Weierstraß benötigte, um seine Theorie zu überarbeiten, sei angemerkt, daß er in seinen frühen Berliner Jahren aufgrund der beiden Stellen an Gewerbeinstitut und Universität eine Lehrbelastung von an die zwanzig Stunden die Woche hatte. So war es keine Überraschung, daß er am 16. Dezember 1861 einen totalen körperlichen Zusammenbruch erlitt, der es ihm erst zum Wintersemester 1862/63 gestattete, die Vorlesungtätigkeit wiederaufzunehmen.[3]

Die oben zitierte Darstellung der Ereignisse ist sozusagen die „offizielle“ Fassung, die Weierstraß und die Herausgeber des vierten Bandes seiner Werke, Georg Hettner (1854–1914) und Johannes Knoblauch (1855–1915), der Nachwelt überliefern wollten. Aufschlußreicher ist das, was Gösta Mittag-Leffler (1846–1927) mitgeschrieben hatte in der Vorlesung über Abelsche Funktionen im Wintersemester 1875/76, die auch der Werksausgabe zugrunde liegt [56, S. V]. Mittag-Lefflers Notizen hingegen geben Weierstraß' Äußerungen offenbar wörtlich wieder. Allerdings hatte Mittag-Leffler eine recht schwungvolle Handschrift, und zu jenem Zeitpunkt machten seine Kenntnisse der deutschen Sprache das Mitschreiben für ihn nicht gerade einfach. So ist der folgende Text leider nicht immer eindeutig zu interpretieren [50, Heft 3, S. 3–8]:

> „Ich in Anfang der 40ger Jahre löste auf die angedeutete Weg dass allgemeine Problem für die hyperelliptische Functionen, indem ich zeigte dass sie sich als Quot[ient] zweier Reihen darstellen lassen und dass der Zähler in Nenner übergehen durch Vergr[?] um gewisse Constanten und durch Multiplikation mit eine gewisse Exponential-Fact[?].
>
> Jetzt hat doch Abel ein viel allgemeinere Theorem gegeben. Er unterstellt eine Funkt[ion] $\psi(x)$ welche <u>algebraisch</u> ist.
>
> $$\sum_{\alpha=1}^{\varrho} f\left(x_\alpha[,]\psi(x_\alpha)\right) dx_\alpha = \sum_{\alpha=1}^{\varrho} f\left(x'_\alpha[,]\psi(x'_\alpha)\right) dx'_\alpha$$
>
> Jetzt wird festgesetzt dass für x_α ... die x'_α beliebige Werthe annehmen.
> Jetzt giebts es auch hier ein bestimmtes ϱ und ein bestimmtes Anzahl rat[ionaler] Funktionen. Jetzt nehmen wir denselben Ansats.
> Riemann und ich haben gleichzeitig die Lösung gefunden.
> Juni 57 habe ich in Akademie meine Lösung vorgelegt. R[iemann] publicirte gleich nachher seine Untersuchungen. Ich habe nicht publicirt weil das Problem nicht allgemein genug; alles nicht richtig gefasst. Es zeigte sich:

Ich hatte allerdings erwartet auf die allgemeine Θ-Reihen zu kommen. Ich konnte bei meine damals gegebene Methode nicht übersehen, welche Anzahl wesendlicher Konstanten in die ψs vorkommen. Riemann hatte dagegen gefunden[:] Es kommen nur $3\varrho+3$ [gemeint wohl: $3\varrho-3$] wesendliche Konstanten vor. Dies Anzahl stimmt mit der Anzahl wesendlicher Constanten in die Θ-Reihen bis $\varrho=4$ [überein], aber nicht weiter. Die Θ werden dann allgemeiner.
Wenn man zu die allgemeine Θ kommen wollte, musste man analyt[isches] Problem suchen welche zu die allgemeine Θ führt. Wenn man sich erlegt alle die eindeutigen Functionen zu finden welche ein Add[itions-]Th[eorem] haben so kommt man auf die Lösung. Dies ist jedoch nicht möglich vorzutragen.
Ich will die algebraischen Funkt[ionen] zuerst untersuchen, so[?] Integralen von algebr[aischen] Funct[ionen] untersuchen, so durchführen auf die hyperell[iptischen], so auf die Θ kommen, so diese als neue Transcendenten untersuchen und [?] dann die Untersuchungen für die allgemeine Theorie geben.
Jetzt werden wir scheinbar für mehrere Wochen unser Ziel erlassen. Aber nichts ist möglich ohne die algebraischen Funkt[ionen] zu kennen und ohne die Integrale von algebraischen Differentialen zu untersuchen.
Die Schwierigkeiten waren früher dass man die Integrale untersuchte ohne ihr letzte Elemente[?] oder die algebraischen Funktionen zu kennen."

Jedenfalls kann man dem Mittag-Lefflerschen Text entnehmen, was 1857 ein, wenn nicht *das* Problem für Weierstraß gewesen war: Die Thetafunktionen

$$\sum_{m\in\mathbb{Z}^\varrho} e^{q(m)+2\langle m,z\rangle}$$

von ϱ Variablen hängen von den $\frac{1}{2}\varrho(\varrho+1)$ Koeffizienten der quadratischen Form q ab, was für $\varrho\geq 4$ zu viele Parameter bedeutet, da die Abelschen Integrale vom Geschlecht ϱ nur von $3\varrho-3$ Parametern abhängen. (Auch Riemann hatte einen Großteil der „Zweiten Abtheilung" seiner Arbeit [31] der Konstruktion der „richtigen" Theta-Funktionen gewidmet.) Und man erkennt auch, daß Weierstraß dieses Problem durch eine grundlegende Behandlung der algebraischen Funktionen anging.

In der Einleitung von [56] wird der letztgenannte Aspekt ebenfalls angesprochen, direkt im Anschluß an das obige Zitat [56, S. 10]:

„Die Schwierigkeiten, denen man in der Theorie der Abelschen Transcendenten begegnet ist, rühren theilweise daher, dass man sofort auf die Theorie der Integrale einging, ohne zu bedenken, dass man die Eigenschaften der zu integrierenden algebraischen Functionen noch nicht genügend erforscht hatte. ... Es muss daher der Theorie der Abelschen Integrale eine ausführliche Untersuchung der algebraischen Funktionen vorangeschickt werden."

2 Ein Prototyp: Algebraische Gebilde

Für eine algebraische Gleichung

$$f(x,y)=0$$

definiert Weierstraß zu Beginn des ersten Kapitels seiner Vorlesungen über „Abelsche Transcendente“ [56] das zugehörige „algebraisches Gebilde“ als [56, S. 13]

„die Gesammtheit der die [Gleichung] befriedigenden Werthepaare $(x[,]y)$“

und nennt solch ein Wertepaar „Stelle“ oder auch „Punkt“ des Gebildes. Die Variablen x und y sind dabei komplex-wertig bzw. nehmen den Wert ∞ an.

Weierstraß bemerkt, daß er sich auf Polynome $f(x, y)$ beschränken und diese als irreduzibel voraussetzen kann, so daß das zugehörige „Gebilde ein m o n o g e n e s“ ist [56, S. 13], also nicht in mehrere Komponenten zerfällt. Zunächst untersucht er die Punkte der Kurve „im Endlichen“, also im $\mathbb{C}^2$.

Ist (a, b) ein „regulärer“ Punkt, hat also die Jacobi-Matrix von f in diesem Punkt den (maximal möglichen) Rang 1, so stellt sich kein großes Problem, das Gebilde in einer Umgebung von (a, b) zu parametrisieren. Bemerkenswert sind jedoch zwei Aspekte der Argumentation, die Weierstraß gibt: Zum einen verweist er auf seinen „Vorbereitungssatz“ [51, Art. 1], um daraus – im Spezialfall, daß die Potenzreihe ausgezeichnet von der Ordnung 1 ist – die Aussage des Satzes über implizite Funktionen zu erhalten [56, S. 15]. Dies ist natürlich korrekt, aber er scheint seinen Satz „unter Wert zu verkaufen“, insbesondere, da er hier nirgendwo erwähnt, daß die Lösung des lokalen Uniformisierungsproblems für algebraische Kurven aufgrund des Vorbereitungssatzes auch gleich das für *analytische* Kurven, also f eine Potenzreihe in zwei Veränderlichen, mit löst (vergleiche die Anmerkung am Schluß von Abschnitt 3.3).

Zum anderen behandelt Weierstraß nicht getrennt die Fälle, daß die partielle Ableitung von f nach x und die nach y im Punkt (a, b) von Null verschieden ist, sondern er führt eine komplexe Hilfsvariable

$$t = \alpha(x - a) + \beta(y - b)$$

mit geeignet gewählten α und β ein [56, S. 14], so daß er stets das Gebilde in einer Umgebung von (a, b) parametrisieren kann als

$$x = \varphi(t), \quad y = \psi(t),$$

wobei $\varphi(t)$ und $\psi(t)$ um 0 konvergente Potenzreihen in t sind mit $\varphi(0) = a$ und $\psi(0) = b$. Er ist also hier primär an der lokalen analytischen Darstellung der Kurve interessiert und nicht daran, y als algebraische Funktion in Abhängigkeit von x darzustellen, wenn er dies auch später als Folgerung diskutiert [56, S. 41–45].

Die linearen Terme der beiden Reihen $\varphi(t)$ und $\psi(t)$ stimmen bis auf von Null verschiedene Faktoren mit den ersten partiellen Ableitungen von f in (a, b) überein, sind also nicht beide gleich Null. Die Jacobi-Matrix der Abbildung

$$t \mapsto \begin{pmatrix} \varphi(t) \\ \psi(t) \end{pmatrix}$$

hat daher den Rang 1; insbesondere ist diese Abbildung injektiv [56, S. 15].

Aus der Eindeutigkeitsaussage des Satzes über implizite Funktionen folgt weiter, daß sich je zwei Parametrisierungen

$$x = \varphi(t), \quad y = \psi(t) \qquad \text{bzw.} \qquad x = \varphi_1(\tau), \quad y = \psi_1(\tau)$$

der Kurve $f(x, y) = 0$ in einer hinreichend kleinen Umgebung von (a, b) nur unterscheiden [56, S. 17]

„durch eine Substitution

$t = c_1\tau + c_2\tau^2 + \cdots$

..., wobei die Potenzreihe rechts für hinlänglich kleine Werthe von $|\tau|$ convergirt und der Coefficient c_1 nicht verschwindet",

d. h., durch eine um 0 lokal biholomorphe Parametertransformation; in diesem Falle nennt Weierstraß die Parametrisierungen „äquivalent" [56, S. 16]. (Weierstraß verweist hier zur Begründung wieder auf seinen Vorbereitungssatz [51, Art. 1]; allerdings bewies er den Satz über implizite Funktionen (im analytischen Fall) auch in seinen einleitenden Vorlesungen zur Funktionentheorie, etwa [59, S. 85–88], [60, S. 422 ff.], [61, S. 153–158].)

Nunmehr bleiben noch die „singulären Stellen" (a, b) zu untersuchen [56, S. 19], d. h., solche, wo die beiden ersten partiellen Ableitungen von $f(x, y)$ verschwinden. Weierstraß gibt dazu ein Verfahren an, um die algebraische Kurve $f(x, y) = 0$ lokal um (a, b) in Komponenten zu zerlegen:

Er schreibt $f(x, y) = f_0(\xi, \eta)$ mit $\xi = x - a$ und $\eta = y - b$ und entwickelt f_0 in seine homogenen Bestandteile. Der nichtverschwindende homogene Anteil niedrigsten Grades habe den Grad μ. Weierstraß bezeichnet ihn als $(\xi, \eta)_\mu$ und schreibt [56, S. 20]:

„In Linearfactoren zerlegt sei die homogene Function niedrigster Dimension

$(\xi, \eta)_\mu = C(g\eta - h\xi)^{\mu_0}(g'\eta - h'\xi)^{\mu_1} \cdots (g^{(\nu)}\eta - h^{(\nu)}\xi)^{\mu_\nu};$

hierbei ist

$\mu_0 + \mu_1 + \cdots + \mu_\nu = \mu,$

und $C, g, h, g', h', \ldots g^{(\nu)}, h^{(\nu)}$ bezeichnen constante Grössen, ..."

Er zeigt dann [56, S. 20–23], daß diese Zerlegung von $(\xi, \eta)_\mu$ eine lokale Zerlegung der Nullstellenmenge von $f(x, y)$ induziert, genauer: Es gibt $\nu + 1$ Polynome $f_1, f_1^{(1)}, \ldots f_1^{(\nu)}$, so daß die Vereinigung der Nullstellenmengen dieser Polynome in einer geeigneten Umgebung von (a, b) gerade der entsprechende Teil der Nullstellenmenge von $f(x, y)$ ist und für jedes κ die Funktion $f_1^{(\kappa)}$ höchstens die Ordnung μ_κ hat [56, S. 23].

Weierstraß erläutert, daß man das genannte Verfahren iterieren und auf die $f_1^{(\kappa)}$, usw. anwenden kann [56, S. 23–24]. Dabei berücksichtigt er durchaus die Situation, daß irreduzible Komponenten von höherer als erster Ordnung auftreten [56, S. 25–28]. Zu guter Letzt kann er die Nullstellenmenge von $f(x, y)$ in einer Umgebung von (a, b) durch endlich viele Parametrisierungen des Typs $x = \varphi(t)$, $y = \psi(t)$ beschreiben, mit $\varphi(t), \psi(t)$ konvergente Potenzreihen in t [56, S. 29–32].

Er faßt diese Ergebnisse wie folgt zusammen [56, S. 32]:

„Demnach sind wir zu folgendem Resultat gelangt: Im Allgemeinen lassen sich alle der Umgebung irgend einer Stelle angehörigen Werthepaare $(x[,]y)$ des durch die Gleichung $f(x, y) = 0$ definirten algebraischen Gebildes durch ein einziges Functionenpaar $x = \varphi(t), y = \psi(t)$ darstellen; nur für singuläre Stellen des Gebietes ... kann der Fall eintreten, dass mehrere, stets aber eine endliche Anzahl, Functionenpaare erforderlich sind, um alle Werthepaare $(x[,]y)$ ihrer Umgebung zu liefern."

Die erwähnten Funktionenpaare definieren dabei jeweils ein „Element“ des algebraischen Gebildes.

Bisher hat Weierstraß nur die Stellen des Gebildes im Endlichen behandelt.

> „Den im Endlichen gelegenen Stellen des algebraischen Gebildes müssen noch, damit es ein in sich abgeschlossenes werde, eine endliche Anzahl unendlich ferner Stellen, d. h. solcher Stellen $(x[,]y)$, für welche die Grössen x und y nicht beide endliche Werte haben, adjungiert werden.“

[56, S. 13], und dies führt er als nächstes durch. Dabei arbeitet er allerdings im $\mathbb{P}_1 \times \mathbb{P}_1$ mit $\mathbb{P}_1 = \mathbb{C} \cup \{\infty\}$, und nicht im komplex-zweidimensionalen projektiven Raum $\mathbb{P}_2$. – Daß man in der Komplexen Analysis letzteres tun sollte, fanden aber Heinrich Behnke (1898–1979) und Peter Thullen (1907–1996) noch im Jahre 1933 einer besonderen Betonung wert im Vorwort ihres Ergebnisseberichts über die Funktionentheorie mehrerer komplexer Veränderlichen [6, S. IV bzw. X]. –

Weierstraß hingegen behandelt in der Tat immer die beiden Variablen getrennt, so daß sich sein Hinzufügen der unendlich fernen Stellen des algebraischen Gebildes [56, S. 32–41] im wesentlichen darauf reduziert, daß er geeignet (und in Teilen durchaus technisch aufwendig) den Linearfaktor $x - a$ durch $1/x$ bzw. den Linearfaktor $y - b$ durch $1/y$ ersetzen muß.

Bereits oben wurde betont, daß Weierstraß die Menge der Nullstellen von $f(x, y) = 0$ lokal analytisch parametrisieren will und weniger die Auflösung dieser Gleichung nach y als einer algebraischen Funktion von x im Zentrum seines Interesses steht. Allerdings ist ihm auch klar, daß „es bisweilen zweckmäßig [ist], die eine Veränderliche, z. B. y, als Function der anderen zu betrachten“ [56, S. 41]. Und so leitet er aus den gewonnenen Ergebnissen über die analytische Parametrisierung der algebraischen Kurve $f(x, y) = 0$ die Darstellung von y als algebraische Funktion her [56, S. 41–45], wobei er auch die Puiseux-Entwicklung in den Verzweigungspunkten erhält [56, S. 43–44].

Dabei war ihm selbst die Parameterdarstellung $x = \varphi(t), y = \psi(t)$ offenbar lieber; so schrieb er am 3. Oktober 1875 an Hermann Amandus Schwarz (1843–1921) [49, S. 236]:

> „Zur Entwickelung von $[\varphi](t), [\psi](t)$ habe ich jetzt eine Methode, die viel einfacher ist, als das bekannte Verfahren zur Entwickelung von $y - b$ nach ganzen oder gebrochenen Potenzen von $x - a$.“

Daß die algebraischen „Gebilde“ für Weierstraß mehr sind als algebraische Funktionen, wird nochmals deutlich im zweiten Kapitel der Vorlesung [56], wenn er „Rationale Functionen des Paares $(x[,]y)$“ behandelt, vor allen Dingen aber, wenn er im elften Kapitel zur „Erklärung des Integrals einer rationalen Function des Paares $(x[,]y)$“ [56, S. IX] kommt [56, S. 249–251, vgl. auch S. 1–4]:

Das Integral

$$\int Q(x, y)\, dx$$

einer rationalen Funktion auf der Kurve $f(x, y) = 0$ definiert er zunächst nur auf einem Element des Gebildes, also einem in der Form

$$x = \varphi(t), \quad y = \psi(t)$$

parametrisierten Teil. Auf diesem schreibt sich der Integrand als

$$Q(\varphi(t), \psi(t)) \frac{d\varphi(t)}{dt} dt = g(t)\, dt$$

mit einer Laurent-Reihe $g(t)$ mit endlichem Hauptteil. Deren Integral ist durch formale Integration der Reihe zu erklären, wozu noch ein logarithmischer Term kommt, wenn in der Reihe ein Term mit t^{-1} auftritt [56, S. 250–251]. Diese lokale Integraldefinition setzt er nun nach dem Prinzip der analytischen Fortsetzung auf das ganze Gebilde fort [56, S. 251]: Stimmen zwei Elemente des Gebildes an einer regulären Stelle überein, so lassen sie sich aufgrund der Eindeutigkeitsaussage des Satzes über implizite Funktionen auf einer (offenen) Umgebung dieser Stelle durch eine (biholomorphe) Parametertransformation ineinander überführen; sie „congruiren“ dort, wie Weierstraß schreibt [56, S. 227]. Damit läßt sich der Integralbegriff in sinnvoller Weise auf endliche Ketten paarweise „congruirender“ Elemente ausdehnen [56, S. 251], wobei Weierstraß zuvor gezeigt hat, daß diese ausreichen, um je zwei gegebene Stellen des Gebildes zu verbinden [56, S. 235–241].

Ausgestattet mit diesem Integralbegriff für algebraische Differentiale behandelt Weierstraß dann in seinen Vorlesungen [56] die ihm so wichtige Theorie der Abelschen Integrale und Funktionen. Ohne hierzu im folgenden weiteres ausführen zu wollen, sei doch wenigstens erwähnt, wie er den „Rang“ ϱ eines algebraischen Gebildes definiert, der dem Riemannschen „Geschlecht“ entspricht, welches dieser ja rein topologisch erklärt hatte, und der von zentraler Bedeutung ist, etwa als Zahl der Variablen im Jacobischen Umkehrproblem. Weierstraß schreibt hierzu [56, S. 69]:

> „Die Zahl $\varrho + 1$ giebt ... die kleinste Anzahl beliebig zu wählender Stellen eines Gebildes $f(x, y) = 0$ an, welche angenommen werden muss, damit sich eine rationale Function des Paares $(x[,]y)$ bilden lasse, die nur an diesen Stellen von der ersten Ordnung unendlich gross wird.“

3 Analytische Funktionen einer Veränderlichen

3.1 Analytische Fortsetzung beim Lösen von Differentialgleichungen

Das eben erwähnte Prinzip der analytischen Fortsetzung war Weierstraß bereits sehr früh bekannt. In einem „Münster, im Frühjahr 1842“ [43, S. 84], also noch während seines Probejahrs, unterzeichneten Manuskript befaßte er sich schon mit der „Definition analytischer Functionen einer Veränderlichen vermittelst algebraischer Differentialgleichungen“ [43]. (Veröffentlicht wurde diese Arbeit allerdings erst 1894 im ersten Band seiner „Mathematischen Werke“ [58]).

Weierstraß zeigte hier mittels der heutzutage nach Augustin-Louis Cauchy (1789–1857) benannten Majorantenmethode[4], daß für $G_1, \ldots G_n$ Polynome in n Unbestimmten sich das Differentialgleichungssystem

$$\begin{aligned} \frac{dx_1}{dt} &= G_1(x_1, \ldots, x_n) \\ \vdots \quad & \quad \vdots \\ \frac{dx_n}{dt} &= G_n(x_1, \ldots, x_n) \end{aligned}$$

lokal stets mittels konvergenter Potenzreihen $\mathfrak{P}_1(t), \ldots, \mathfrak{P}_n(t)$ in der Variablen t lösen läßt, wobei diese (Potenzreihen-)Lösungen durch die Angabe der Werte an einer Stelle bereits eindeutig bestimmt sind [43, Art. 1–2].

Aufgrund der Eindeutigkeitsaussage stimmen je zwei Lösungen $(\mathfrak{P}_1, \ldots, \mathfrak{P}_n)$ und $(\mathfrak{Q}_1, \ldots, \mathfrak{Q}_n)$, die an einer einzigen Stelle denselben Wert haben, schon auf dem gesamten Durchschnitt ihrer Konvergenzkreise überein, so daß das n-Tupel der $\mathfrak{Q}_\nu$ eine Fortsetzung für das der $\mathfrak{P}_\nu$ definiert. Durch Wiederholung dieses Prozesses entlang von Kreisketten gelangt Weierstraß zu *globalen*, wenn auch möglicherweise mehrdeutigen Lösungen der Differentialgleichungen [43, Art. 3].

3.2 Analytische Funktionen einer Veränderlichen

Dieses Lösungsverfahren für algebraische Differentialgleichungen war für Weierstraß die Vorlage für seine Definition analytischer Funktionen: In seinen von 1861 bis 1884/85 gehaltenen Vorlesungen zur Einführung in die Theorie der analytischen Funktionen (siehe etwa [59, S. 72–73], [60, S. 361–397], [61, S. 93–97]) betrachtet er beliebige konvergente Potenzreihen

$$\mathfrak{P}(x|a) = \sum_{\nu=0}^{\infty} a_\nu (x-a)^\nu$$

und muß dann – ohne Rückgriff auf Eindeutigkeitsaussagen für Lösungen von Differentialgleichungssystemen! – zeigen, daß zwei Potenzreihen $\mathfrak{P}(x|a)$ und $\mathfrak{Q}(x|b) = \sum\limits_{\nu=0}^{\infty} b_\nu (x-b)^\nu$ mit verschiedenen Entwicklungspunkten a bzw. b, die in einem Punkt c des Durchschnitts der Konvergenzkreise die gleiche Umentwicklung in Potenzen von $x - c$ haben, auf dem gesamten Durchschnitt übereinstimmen. In diesem Fall nennt er die beiden Potenzreihen „Funktionenelemente“ und bezeichnet $\mathfrak{Q}(x)$ als eine „unmittelbare Fortsetzung“ (oder auch als „Ableitung“) von $\mathfrak{P}(x)$. Das Prinzip der analytischen Fortsetzung entlang Kreisketten funktioniert dann genau so wie in der oben beschriebenen Situation der Differentialgleichungen, und Weierstraß definiert eine „analytische Funktion“ zum Beispiel wie folgt [61, S. 95]:

> „Liegt ein Punkt x' innerhalb des Convergenzbezirks eines Funktionenelements, welches eine Fortsetzung des ursprünglich gegebenen Funktionenelements $[\mathfrak{P}](x|a)$ ist, so hat dieses einen bestimmten Werth für x', und diesen bestimmten Werth nennen wir einen Werth der durch das Ausgangsfunktionenelement bestimmten analytischen Funktion.“

(In einigen Texten werden derartige analytische Funktionen noch mit dem Attribut „monogen" belegt, da sie durch analytische Fortsetzung aus *einem einzigen* Funktionenelement hervorgehen.)

Betont sei, daß Weierstraß seine analytischen Funktionen a priori auf ihrem maximalen Existenzgebiet betrachtet, auch wenn dies zu mehrdeutigen Funktionen führt.[5]

Das Auftreten mehrdeutiger Funktionen bei diesem Prozeß führt gerade bei dem Ur-Beispiel der Lösung von Differentialgleichungen zu gewissen Schwierigkeiten. Weierstraß umgeht diese, indem er – zumeist unmittelbar hinter der Definition der analytischen Fortsetzung für einzelne Potenzreihen bzw. Funktionen [60, S. 369–370], [61, S. 117–119] – „Systeme analytischer Funktionen" betrachtet. Hierzu startet er mit n-Tupeln von Potenzeihen mit gleichem Entwicklungspunkt, die stets entlang ein- und derselben Wege fortgesetzt werden. (Modern gesprochen: Die Weierstraßschen analytischen Funktionen sind die Zusammenhangskomponenten des Raumes $\mathcal{O}$ der holomorphen Funktionskeime, seine „Systeme analytischer Funktionen" sind die Zusammenhangskomponenten der n-fachen direkten Summe von $\mathcal{O}$ mit sich selbst.) Diese „Systeme analytischer Funktionen" bewahren dann die Relation „ist Ableitung von", d. h., die Fortsetzung der Ableitung ist die Ableitung der Fortsetzung, und es gilt für sie ein Permanenzprinzip für Funktionalgleichungen.

3.3 Warum Potenzreihen?

Die Lösung algebraischer Differentialgleichungen war für Weierstraß nicht nur das Ausgangsbeispiel für seinen Begriff der analytischen Funktion, sondern auch eine Bestätigung dafür, daß seine Definition die richtige Wahl war.

Die Vorliebe, die Weierstraß für Potenzreihen hegte, ist hinreichend bekannt und auch bereits in der Literatur kommentiert worden. Als möglichen Grund für diese Präferenz kann man etwa nennen, daß es bei seiner „Ur-Erfahrung" mit mathematischer Forschung darum ging, die Umkehrfunktion des Integrals

$$\int_{x_0}^{x} \frac{dt}{\sqrt{(1-t^2)(1-k^2t^2)}}$$

als Quotient von zwei konvergenten Potenzreihen darzustellen (siehe Abschnitt 1.2).

Weiterhin war sein akademischer Lehrer Gudermann auch kaum geneigt, ihn davon abzubringen: Dieser stand durch Bernhard Friedrich Thibaut (1775–1832), bei dem er in Göttingen studiert hatte, unter dem indirekten Einfluß der von Karl Friedrich Hindenburg (1741–1808) begründeten Schule der „kombinatorischen Analysis" und deren Interesse für die Koeffizienten von Potenzreihen.

Was Weierstraß aber in seinen Vorlesungen und Vorträgen im Berliner Mathematischen Seminar zu seiner Beschränkung auf lokal durch Potenzreihen darstellbare Funktionen sagte, zeigt darüberhinaus, daß er durchaus über die Leistungsfähigkeit seines Funktionsbegriffs nachdachte und keinesfalls – naiv – von vorne herein annahm, alles ließe sich mit seinen Potenzreihenmethoden lösen. So liest man in einer Mitschrift seiner Vorträge über Differentialgleichungen im Mathematischen Seminar zu Berlin im Sommersemester 1875 [48, Bogen 1, S. 1–2]:

„Wenn man von der Ansicht über den Begriff der analytischen Funktion, den ich vertrete, ausgeht, so hat man bei jeder mathematischen Aufgabe, die vorliegt, zunächst die Verpflichtung, nachzuweisen, daß die Funktion, um deren Entwicklung oder Definition es sich handelt, wirklich dem aufgestellten Begriff der analytischen Funktion genügt. Wenn also z. B. eine algebraische Differentialgleichung gegeben ist, also eine Gleichung zwischen x, y und $\frac{dy}{dt}$, wo y eine Unbekannte, eine noch zu bestimmende Funktion von x ist, so hat man zunächst zu beweisen, daß dieser Differentialgleichung wirklich durch eine analytische Funktion genügt werden kann.“

und etwas später über algebraische Differentialgleichungssysteme der Form

$$G_\lambda\left(x_1, \frac{dx_1}{dt}, \ldots \frac{d^{(m-1)}x_1}{dt^{m-1}}; x_2, \frac{dx_2}{dt}, \ldots \frac{d^{(m-1)}x_2}{dt^{m-1}}; \ldots; x_n, \frac{dx_n}{dt}, \ldots \frac{d^{(m-1)}x_n}{dt^{m-1}}\right) = 0$$

mit Polynomen (oder, allgemeiner, ganzen Funktionen) $G_1, \ldots, G_n$ [48, Bogen 2, S. 2]:

„Die Sätze darüber, daß man solche Differentialgleichungen durch Potenzreihen entwickeln kann, sind hinlänglich bekannt. Weniger bekannt ist aber der Teil, worauf ich das meiste Gewicht lege, daß durch diese Differentialgleichungen nur analytische Funktionen definiert werden. Wäre das letztere z. B. nicht der Fall, so würde eine notwendige Folge davon sein, daß jene Definition der analytischen Funktion, die ich gegeben habe, ungenügend sei; denn sie muß so gegeben werden, daß allen Forderungen genügt werden kann, die die Analysis von selbst uns aufdrängt.“

In einer, leider undatierten, Ausarbeitung einer Weierstraßschen „Functionentheorie“ wird dieses Thema allgemeiner aufgegriffen [55, S. 202–203]:

„Die Definition der monogenen analytischen Funktion giebt zu zwei Aufgaben Veranlassung, die nicht allgemein, sondern nur von Fall zu Fall gelöst werden können.

1. Die leichtere der beiden Aufgaben besteht darin zu zeigen, dass jedes analytische Problem durch monogene analytische Funktionen gelöst werden kann.
Hat man z. B. eine algebraische Gleichung zwischen x und y, die in Bezug auf y vom n. Grade ist, sodass jedem x n Werte von y entsprechen, so kann man die Frage stellen, sind diese Werte von y sämmtlich Werte einer monogenen analytischen Funktion? – Zur Beantwortung dieser Frage nehme man … [Es folgt eine Kurzdarstellung über algebraische Gebilde; P.U.] – Die algebraischen Funktionen sind also alle monogene analytische Funktionen.
Ähnliches gilt, wenn die Gleichung $f(x[,]y) = 0$ nicht vom endlichen Grade in Bezug auf y, also transzendent ist.
Ebenso lässt sich zeigen, dass die gewöhnlichen Differentialgleichungen durch monogene analytische Funktionen befriedigt werden, und dass sie – und dies ist die zweite Aufgabe, auf die man durch die Definition der monogenen analytischen Funktion geführt wird –
2) nur durch monogene analytische Funktionen gelöst werden können. Diese Aufgabe ist im Allgemeinen schwieriger als die erste.
…
Bisher hat sich immer bestätigt, dass jede analytische Aufgabe durch monogene analytische Funktionen gelöst werden kann. Ein Ausnahmefall würde natürlich eine Erweiterung des Begriffes der analytischen Funktion nötig machen.“

Als Nachtrag zur Weierstraßschen Verwendung seines Vorbereitungssatzes sei betont, daß hier erwähnt wird, daß sich auch *analytische* Kurven $f(x,y)=0$ lokal uniformisieren lassen, wobei allerdings leider nicht klar wird, ob Weierstraß dieses Problem durch explizite Rechnung oder durch Rückführung auf die algebraische Situation mittels seines Vorbereitungssatzes behandelt hat.

3.4 Analytische Gebilde erster Stufe im Gebiete von zwei Veränderlichen

Um ein algebraisches Gebilde $f(x,y)=0$ vollständig analytisch zu beschreiben, hatte Weierstraß neben den Stellen, an denen sich y als analytische Funktion von x schreiben läßt, noch die Punkte „im Unendlichen" und die Verzweigungspunkte hinzunehmen müssen. Die Punkte „im Unendlichen" ließen sich technisch durch Ersetzung des Linearfaktors $x-a$ durch $1/x$ realisieren, entsprechend für y. Die Verzweigungspunkte hingegen behandelte Weierstraß, wie gesehen, zumindest seit 1875 nicht mehr primär mittels Puiseux-Entwicklungen, sondern mit Hilfe (mehrerer) Parametrisierungen durch Paare von Potenzreihen.

Dieses Vorgehen von den algebraischen auf die analytischen Funktionen fortzusetzen, also „analytische Gebilde" zu definieren, machte allerdings konzeptuelle Schwierigkeiten: Bei algebraischen Kurven ist klar, welche Stellen man hinzunehmen muß, nämlich die, die aus der Lösungsmenge von $f(x,y)=0$ noch fehlen (einschließlich der Punkte im Unendlichen); solch eine Gleichung hat man bei analytischen Funktionen natürlich nicht zur Verfügung. Im algebraischen Fall kann man die hinzuzunehmenden Stellen jedoch auch charakterisieren als die „Grenzstellen" des Graphen der algebraischen Funktion, also als die Stellen (in $\mathbb{P}_1\times\mathbb{P}_1$), „in deren jeder Nähe es noch Stellen gibt, die zu den [bereits] definierten gehören" [62, S. 125].

Bei analytischen Funktionen kann dieser Übergang zum topologischen Abschluß jedoch zu fatalen Konsequenzen führen: Ein hyperelliptisches Integral

$$u(x):=\int_{x_0}^{x}\frac{dt}{\sqrt{P(t)}},$$

also P mindestens vom Grad 5, definiert außerhalb der Nullpunkte des Nenners eine analytische Funktion im Weierstraßschen Sinne. Aufgrund des von Jacobi in [19] Gezeigten hat dieses Integral aber mindestens vier verschiedene Perioden, die im Allgemeinfall additiv eine Gruppe erzeugen, die dicht in $\mathbb{C}$ liegt. Hinzufügen aller Grenzstellen zu dem Graphen der Funktion $u(x)$ würde also ein Gebilde in $\mathbb{P}_1\times\mathbb{P}_1$ ergeben, bei dem die Faser über jeder Stelle x der ganze $\mathbb{P}_1$ ist.[6]

Weierstraß war sich dieses Problems völlig bewußt [55, S. 204–205], [57, S. 95–97], [62, S. 125–128] und traf so entsprechende Vorsichtsmaßnahmen beim Übergang von den analytischen Funktionen zu den analytischen *Gebilden*: In seiner in die Funktionentheorie einführenden Vorlesung im Sommersemester 1874 fügt er nur diejenigen Grenzstellen zu dem Graphen der analytischen Funktion $y=f(x)$ hinzu, in denen diese „den Charakter einer algebraischen Function" behält [60, S. 387], d. h., in deren Umgebung die Funktion durch eine algebraische Gleichung $G(x,y)=0$ charakterisiert wird, so daß er sich zumindest lokal in der von den algebraischen Gebilden her vertrauten Situation befand.

Vier Jahre später, im Sommer 1878, hatte er sich jedoch offenbar dazu durchgerungen, das schon bei den algebraischen Gebilden in seiner Vorlesung [56] aus dem Winter 1875/76 verfolgte Prinzip der lokalen analytischen Parametrisierung zum Ursprung der Definition eines „analytischen Gebildes“ zu machen, genauer: eines „analytischen Gebildes erster Stufe im Gebiete von zwei Veränderlichen“ [61, S. 159–161]. – Hierbei gibt die „Stufe“ die Anzahl der unabhängigen Variablen an, hier also eine, während sich die Angabe „im Gebiete von zwei Veränderlichen“ auf dem umgebenden Raum bezieht, hier also den $\mathbb{C}^2$ bzw. $\mathbb{P}_1 \times \mathbb{P}_1$. –

Lokal um eine Stelle (a, b) aus dem $\mathbb{P}_1 \times \mathbb{P}_1$ ist ein solches Gebilde gegeben als Bild einer injektiven Abbildung

$$t \mapsto \begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a + \varphi(t) \\ b + \psi(t) \end{pmatrix}$$

mit um 0 konvergenten Potenzreihen $\varphi(t)$ und $\psi(t)$ der komplexen Veränderlichen t ohne konstanten Term. (Im Falle $a = \infty$ ist dabei $x - a$ durch $1/x$ zu ersetzen, also $1/x(t) = \varphi(t)$ zu schreiben, entsprechend für $b = \infty$.)

Weierstraß verlangt dabei nicht, daß die Jacobi-Matrix der Abbildung den Rang 1 hat, sondern nur, daß sie (in einer geeigneten Umgebung von $t = 0$) injektiv ist: Die Neilsche Parabel $y^2 - x^3 = 0$ ist trotz ihrer nicht einmal normalen Singularität in $(0, 0)$ vermöge

$$t \mapsto \begin{pmatrix} t^2 \\ t^3 \end{pmatrix}$$

ein „analytisches Gebilde“ in diesem Sinne.

Hat ein weiteres analytisches Gebilde,

$$\begin{aligned} x(t) &= a_1 + \varphi_1(s) \\ y(t) &= b_1 + \psi_1(s) \end{aligned},$$

mit dem gegebenen eine Stelle (a', b') gemeinsam, zu der die Parameterwerte t_0 bzw. s_0 gehören mögen, so kann man die Parametrisierungen der Gebilde umschreiben zu

$$\left\{ \begin{aligned} x = a' + \varphi(t_0 + \tau) \\ y = b' + \psi(t_0 + \tau) \end{aligned} \right\} \quad \text{bzw.} \quad \left\{ \begin{aligned} x = a' + \varphi_1(s_0 + \sigma) \\ y = b' + \psi_1(s_0 + \sigma) \end{aligned} \right\}.$$

Weierstraß nennt nun das zweite analytische Gebilde eine „unmittelbare Fortsetzung“ des ersten, wenn es eine durch eine konvergente Potenzreihe mit nichtverschwindendem linearen Term gegebene Parametertransformation $\tau = \tau(\sigma)$ mit $\tau(0) = 0$ gibt, die lokal diese beiden Parametrisierungen ineinander überführt [61, S. 161].

Von hier ab läßt Weierstraß wieder die Maschinerie der analytischen Fortsetzung laufen [61, S. 161]:

> „Wir können nun in Bezug auf das analytische Gebilde dieselben Bemerkungen machen wie bei der Definition der analytischen Funktionen.
>
> Von einem Gleichungspaar
>
> $$\left\{ \begin{aligned} x - a &= \varphi(t) \\ y - b &= \psi(t) \end{aligned} \right\}$$

ausgehend erhält man durch Fortsetzung andere und andere Gleichungspaare, von denen wir jetzt jedes ein Element des analytischen Gebildes nennen, indem wir dieses selbst ... als aus der Gesammtheit der Stellen (x, y) bestehend ansehn wollen, die aus irgend einem der „Elemente“ (der Gleichungspaare) hervorgehen.“

Solch ein analytisches Gebilde ist also (vorbehaltlich etwaiger topologischer Probleme) eine Kurve in $\mathbb{P}_1 \times \mathbb{P}_1$, und so heißt es auch in der Vorlesungsausarbeitung „Man beachte die Analogie dieser Definition mit der analytisch-geometrischen Definition von Curven.“ [61, S. 162] Wie schon bei den analytischen Funktionen sei aber auch hier darauf hingewiesen, daß Weierstraß die analytische Fortsetzung so weit wie möglich treibt, also die maximale Ausdehnung dieser Kurve betrachtet.

Zu einer vorgegebenen analytischen Funktion definiert Weierstraß nun das zugehörige analytische Gebilde, das zum einen aus Elementen des Typs

$$x \mapsto \begin{pmatrix} x \\ \mathfrak{P}(x) \end{pmatrix}$$

besteht, wo $\mathfrak{P}$ eines der „Funktionenelemente“, also eine der Potenzreihen ist, die die Funktion definieren. Zum anderen muß er hierzu die „ausserwesentlich singuläre[n] Stellen“ hinzunehmen, d. h., solche, in denen sich keine Parametrisierung finden läßt, deren x-Koordinate sich analytisch invertieren läßt, also die „Verzweigungspunkte im Riemannschen Sinne der analytischen Funktion“, wie Adolf Hurwitz (1859–1919) in die Überarbeitung seiner Mitschrift notierte [61, S. 165]. Weierstraß zeigt dabei, daß die Funktion in diesen Punkten zwar keine Potenzreihenentwicklung, aber doch noch eine Puiseux-Entwicklung besitzt [61, S. 162–165], so daß er insgesamt eine völlige Analogie zur Situation der algebraischen Gebilde erhält.

4 Weierstraßsche „Gebilde“ versus Riemannsche „Flächen“

4.1 Jedes Gebilde ist eine Fläche

Weierstraß mühte sich ab, seine Funktionen und Gebilde exakt zu definieren und zahlte dafür den Preis einer gewissen Schwerfälligkeit. Riemann hingegen hielt die Definition seiner „Flächen“ sowohl in seiner Dissertation [30, S. 39] als auch in seiner Arbeit über Abelsche Funktionen [31, S. 103 bzw. 122], vorsichtig gesagt, recht vage. Auch in seinen Vorlesungen wurde er nicht wesentlich klarer; so liest man in [25, S. 74]:

„Allgemein können wir bei einer mehrwertigen Function die z-Ebene mit einer Fläche T bedecken, die für jeden Punkt der z-Ebene aus so vielen über einander liegenden Blättern besteht als die Function für diesen Punkt verschiedene Werte hat. Ein Punkt, um welchen sich ein Blatt in ein anderes fortsetzt, heißt ein Verzweigungswert der Function. In der Umgebung eines solchen Punktes kann die Fläche T als eine Schraubenfläche von unendlich kleiner Höhe des Schraubenganges betrachtet werden, deren Axe in jenem Punkte senkrecht zur z-Ebene steht. Wenn die Function nach mehreren Umläufen des z um den Verzweigungswert ihren ursprünglichen Wert wieder erhält, so setzt sich das oberste Blatt durch die übrigen hindurch in das unterste fort.“

Die Irrungen und Wirrungen, unter denen aus dieser Idee der heutige Begriff der „Riemannschen Fläche“ entstanden ist, findet man etwa beschrieben in [28, S. 204–216] und [29, S. 184–188]. Selbst Riemanns Exeget Weyl schreibt [64, S. VII]:

> „Es ist freilich zuzugeben, daß Riemann selbst d[a]s wahre Verhältnis der Funktionen zur Riemannschen Fläche durch die Form seiner Darstellung etwas verschleiert hat“.

In seinem 1913 erschienen Buch „Die Idee der Riemannschen Fläche“ [64] gibt Weyl bekanntlich im wesentlichen die heutige Definition der Riemannschen Fläche als abstrakte zusammenhängende topologische reell 2-dimensionale Mannigfaltigkeit mit komplexer Struktur. Die ersten 7 der insgesamt 21 Paragraphen seines Buches dienen dabei [64, S. VII]

> „eine[r] genaue[n] Auseinandersetzung des Verhältnisses der Weierstraßschen Begriffe *„analytische Funktion“* und *„analytisches Gebilde“* zu der Idee der Riemannschen Fläche“.

Weyl gibt zunächst eine Definition der Weierstraßschen Begriffe, für die selbst er als Meister der Darstellung fast 16 Druckseiten benötigt [64, §§ 1–3]. Nachdem er die Definition einer reell zweidimensionalen (triangulierbaren) Mannigfaltigkeit gegeben hat, untersucht er die analytischen Gebilde unter diesem Aspekt [64, § 6]. Zu Anfang des „§ 7. Begriff der Riemannschen Fläche“ verwendet er dann das Beispiel eines Elementes eines analytischen Gebildes, um die Begriffe „Ortsuniformisierende“ und „regulär-analytisch“ zu erklären [64, S. 34], die die essentiellen Bestandteile seiner Definition der Riemannschen Fläche ausmachen [64, S. 36].

Kurz gesagt: Weyl modelliert seine Definition der Riemannschen Fläche nach dem Prototyp des „analytischen Gebildes“. Damit läßt sich jedes solche Gebilde als eine Riemannsche Fläche auffassen, genauer gesagt, als eine, auf der zwei ausgezeichnete meromorphe Funktionen (z, u) gegeben sind [64, S. 37].

4.2 Jede Fläche ist ein Gebilde

> *„Daß zu jeder vorgegebenen Riemannschen Fläche wirklich ein Funktionenpaar (z, u), d. h. ein analytisches Gebilde gehört,* ist eine Grundtatsache der Riemannschen Funktionentheorie“,

fährt Weyl fort [64, S. 37], gibt in seinem Buch aber nur einen Beweis für den Fall einer *kompakten* Fläche [64, S. 136–138].

Diese Aussage war allerdings schon Riemann 1857 im wesentlichen bekannt, der in [31, Art. 5] – wenn auch unter Verwendung des Dirichletschen Prinzips – zeigte, daß jede endlichblättrige seiner „Flächen“ von einer algebraischen Kurve herkommt (und damit ein (algebraisches) „Gebilde“ im Weierstraßschen Sinne ist).

Der nicht-kompakte Fall hingegen benötigte etwas mehr Zeit: Zwar formulierte Paul Koebe bereits 1909 den Satz, daß *jede*, also auch nicht-kompakte abstrakte Riemannsche Fläche ein „analytisches Gebilde“ im Weierstraßschen Sinne ist; er gab dafür aber nur, wie für die „Comptes rendus“ üblich, eine Beweisskizze [21]. Die Ausarbeitung überließ er Erwin Freundlich (nach 1939: Finlay) für dessen Dissertation [13], mit der dieser 1910 in Göttingen promovierte.

Um nachzuweisen, daß jede nicht-kompakte Riemannsche Fläche in der Tat ein analytisches Gebilde im Weierstraßschen Sinne ist, muß man eine auf dieser Fläche definierte Funktion finden, die sich darüber hinaus nicht analytisch fortsetzen läßt (wobei die Weierstraßschen Definitionen nicht nur holomorphe, sondern auch meromorphe Fortsetzungen verbieten). Dazu mußte man zunächst viele analytische Funktionen auf der Riemannschen Fläche konstruieren (wozu Koebe mit „Elementarpotentialen" arbeitete). Dann war aus diesen Funktionen eine einzige zu konstruieren, die genügend viele Punkte der Fläche trennt und deren Nullstellen sich gegen jeden der – erst noch zu definierenden – Randpunkte der Fläche häufen.

Einen vollständigen, die technischen Probleme, insbesondere die Tücken der Topologie des Randes, berücksichtigenden Beweis gab Herta Florack in ihrer 1948 erschienenen Dissertation [12], wobei sie auf die Verallgemeinerungen der klassischen Sätze von Weierstraß und Mittag-Leffler auf nichtkompakten Riemanschen Flächen [5] zurückgriff (wegen technischer Details siehe auch [28, S. 220–222]).

4.3 Veranschaulichung analytischer Gebilde

Weierstraß hatte mit der Riemannschen Ideenwelt durchaus seine Schwierigkeiten.[7] Dennoch mußte ihm daran gelegen sein, die Beziehungen ihrer beider Theorien zu verstehen und klarzulegen, was seine oben in Abschnitt 1.3 geschilderte Reaktion auf Riemanns Arbeit [31] auch belegt.

Insbesondere hatte Weierstraß sich überlegt, daß jedes seiner arithmetisch-algebraisch definierten „Gebilde" Anlaß zu einer „Fläche" im Riemannschen Sinne gibt, die er allerdings nur als „geometrisches Hülfsmittel" betrachtete und der er auch eine Darstellung mit Hilfe von Minimalflächen vorzog, wie man seinem Brief vom 14. März 1885 an Schwarz entnehmen kann. Hierin geht es (unter anderem) um die Aussage des Satzes von Poincaré-Volterra in der Fassung, daß eine analytische Funktion $f(s)$ an einer festen Stelle s höchstens abzählbar unendlich viele Werte annimmt. Weierstraß schreibt zu seinen darüber angestellten Überlegungen [54, Bogen 6]:

> „In einer Minimalfläche, die durch die bekannten Formeln, in denen $s, f(s)$ figuriren, definirt werden, entspricht jedem Werthpaare $(s, f(s))$ <u>ein</u> Punkt, in der Art, daß in demselben die complexen Größen $s, f(s)$ eine bestimmte geometrische Bedeutung haben. Durch eine solche Minimalfläche mache ich die Gesammtheit der Werthepaare $(s, f(s))$, also, was ich ein monogenes Gebilde erster Stufe im Gebiete zweier complexer Variabeln nenne, meiner Vorstellung viel anschaulicher wie durch die Riemann'sche Fläche – und mit Hülfe dieser Anschauungsweise habe ich mir einen Beweis für die Bejahung der aufgeworfenen Frage zurecht gelegt. Gewiß wird es auch ohne ein solches geometrisches Hülfsmittel gehen."

(Bei den „bekannten Formeln, in denen $s, f(s)$ figuriren," handelt es sich um die „Weierstraß-Enneperschen Darstellungsformeln" für Minimalflächen, die Weierstraß seit 1861 bekannt waren [47].)

Etwas später in dem Brief erwähnt Weierstraß auch die 1883 von Henri Poincaré (1854–1912) veröffentlichte Fassung des Uniformisierungssatzes [27] und schreibt dazu [54, Bogen 6]:

> „Übrigens mache ich mir die Poincaré'sche Beweisführung durch die Minimalfläche, auf der die Stellen des betrachteten Gebildes aus einander treten, ebenfalls klarer als durch das Kugelabbild der Fläche, welches die zu der einen Variabeln gehörige Riemann'sche Fläche ist.“

Diese Zitate enthüllen insbesondere, daß Weierstraß überhaupt geometrische Überlegungen anstellte (ganz im Gegensatz zu dem Geometrie-feindlichen Bild, das Carl Runge (1856–1927) in seinen Erinnerungen an die Weierstraßschen Vorlesungen entwirft [34, S. 178]). Die Möglichkeit der Veranschaulichung hielt Weierstraß dabei keinesfalls als Geheimnis zwischen sich und seinem Lieblingsschüler Schwarz, sondern wies auf die von ihm bevorzugte Minimalflächendarstellung auch in seinen Vorträgen über die „Theorie der Minimalflächen und der Abbildung der Flächen“ im Mathematischen Seminar zu Berlin hin [53, S. 37], vgl. auch [40].

Allerdings waren geometrische Vorstellungen immer nur Mittel zur „Veranschaulichung“ analytischer Funktionen bzw. „Gebilde“, nicht zu deren Definition. Besonders deutlich wird dies in einer Ausarbeitung einer Vorlesung von Weierstraß aus dem Sommer 1886. Er erläutert dort etwa die Situation von Verzweigungspunkten einer analytischen Funktion und schreibt dann weiter [62, S. 144]:

> „Hieran knüpft sich die Vorstellung von der Riemannschen Fläche, die wir aber nicht unter die eigentlichen Grundlagen der Funktionentheorie aufnehmen wollen. Diese Vorstellung der <u>n–blättrigen</u> Fläche reicht allerdings aus, solange man es mit einer algebraischen Funktion einer Variablen zu tun hat; einigermaßen schwierig wird es schon, wenn man es mit unendlich vieldeutigen Funktionen zu tun hat, weil man nur ungern eine <u>unendlichblättrige</u> Fläche einführen wird. Wie man aber diese Versinnlichungsmittel auf Funktionen mehrerer Variablen übertragen will, ist schwer zu sagen. Selbst RIEMANN, der sich zuerst dieses Mittels bediente und dem – nach WEIERSTRASS' wörtlichem Ausspruch – eine <u>mathematische Phantasie</u> zu Gebote stand, wie er sie noch bei keinem anderen kennengelernt habe, hatte, wie er WEIERSTRASS persönlich mitteilte, Mühe, den Gebrauch dieses Hilfsmittels in allgemeinen Fällen durchzuführen; bei seiner Bemühung, es für die Untersuchung von mehrfachen [= mehrdimensionalen] Mannigfaltigkeiten nutzbar zu machen, stieß er auf ganz unüberwindliche Schwierigkeiten. Wir haben daher jene geometrische Vorstellung durch rein analytische Hilfsmittel ersetzt.“

Auch die Riemannsche Vorstellung von der mehrfach bedeckten Ebene wird in dieser Ausarbeitung erläutert und bezeichnet als „Anschauungsweise, die in vielen Fällen sehr brauchbar ist“ [62, S. 164–165]. Wiederum findet sich aber die Kritik, daß die geometrische Anschauung im Falle mehrerer komplexer Veränderlichen nicht mehr hilft [62, S. 165]:

> „Hier <u>reicht</u> nun schon die <u>geometrische Vorstellungskraft nicht mehr aus</u>“.

5 Analytische Gebilde höherer Stufe

Der Übergang von einer zur mehreren komplexen Veränderlichen war dabei keinesfalls eine Verallgemeinerung um ihrer selbst willen: Jacobis Feststellung, daß man im Falle hyperelliptischer Integrale nicht die Abbildung

$$x \mapsto \int_{x_0}^{x} \frac{dt}{\sqrt{P(t)}},$$

sondern die Abbildung

$$x \mapsto \Big(\int_{x_0}^{x} \frac{dt}{\sqrt{P(t)}}, \dots, \int_{x_0}^{x} \frac{t^{\varrho-1}\,dt}{\sqrt{P(t)}}\Big)$$

bzw. deren Umkehrabbildung betrachten solle (vgl. Abschnitt 1.1), markierte nicht nur die Geburtsstunde der Funktionentheorie mehrerer komplexer Veränderlichen, sondern zeigte auch deren Notwendigkeit für die Theorie der hyperelliptischen und dann auch Abelschen Integrale. (Wegen einer ausführlichen Darstellung dieser Entwicklung vergleiche [16].)

Die Funktionentheorie mehrerer Veränderlichen war zu Lebzeiten von Weierstraß fast ausschließliches Monopol der Potenzreihen-Theorie. Er rechnete bereits 1841 problemlos mit Potenzreihen in mehreren Veränderlichen [42]. Und in seinem Todesjahr, 1897, gab Adolf Hurwitz in einem Hauptvortrag auf dem ersten Internationalen Mathematiker-Kongress (in Zürich) einen Überblick „Über die Entwickelung der allgemeinen Theorie der analytischen Funktionen in neuerer Zeit“. Als Doktorand des Riemann-Verehrers Felix Klein (1849–1925) kann Hurwitz schwerlich in dem Verdacht stehen, ein blindwütiger Apologet der Weierstraßschen Schule zu sein. Seine Ausführungen über mehrere Variable beginnt er aber mit der Feststellung [17, S. 104]:

> „Die allgemeinen Grundlagen für die Theorie der analytischen Funktionen von mehreren Variabeln verdanken wir ebenfalls Weierstraß und Méray.“,

berichtet dann etwa eine Druckseite lang über die mittels Potenzreihen-Theorie gefundenen Resultate und schließt seine Ausführungen lapidar mit dem Absatz [17, S. 105]

> „Die Cauchy-Riemann'sche Richtung auf dem Gebiete der allgemeinen Theorie der Funktionen mehrerer Variabeln ist durch Arbeiten von Kronecker, Picard und Poincaré vertreten. Diese Arbeiten beschäftigen sich mit der Ausdehnung des Cauchy'schen Integralsatzes und seiner Folgerungen auf Funktionen mehrerer Variabeln.“

Ein Grund für dieses Zurückbleiben der Denkweise à la Riemann ist in den eben gegebenen Weierstraß-Zitaten angesprochen: Es fehlte die Anschauung, das geometrisch-topologische Konzept in höhere Dimensionen zu übertragen, so daß es noch bis in die dreißiger Jahre des 20. Jahrhunderts dauerte, bis sich Funktionentheoretiker ernsthaft an höherdimensionale Verallgemeinerungen der Riemannschen Flächen heranwagten; man vergleiche etwa den Vortrag von Constantin Carathéodory (1873–1950) vor dem Internationalen Mathematiker-Kongreß 1932 in Zürich [11].

Die von Weierstraß ohne jeglichen Bezug zur Geometrie definierten „analytischen Gebilde“ ließen hingegen problemlos eine Verallgemeinerung auf höhrere „Stufen“, also Dimensionen zu:

In seiner in die Funktionentheorie einführenden Vorlesung vom Sommersemester 1874 definerte Weierstraß ein „analytisches Gebilde n-ter Stufe im Gebiet von $n + r$ Veränderlichen“ an einer Stelle $(a_1, \ldots, a_n, a_{n+1}, a_{n+r})$ zunächst noch durch eine Parametrisierung der Gestalt

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \\ x_{n+1} = \mathfrak{P}_1(x_1, \ldots, x_n) \\ \vdots \\ x_{n+r} = \mathfrak{P}_r(x_1, \ldots, x_n) \end{pmatrix},$$

wo die $\mathfrak{P}_\nu$, $\nu = 1, \ldots, r$, konvergente Potenzreihen in n komplexen Veränderlichen sind mit $\mathfrak{P}_\nu(a_1, \ldots, a_n) = a_{n+\nu}$ [60, S. 485–486].

Die Darstellung als Graph der Abbildung

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} \mathfrak{P}_1(x_1, \ldots, x_n) \\ \vdots \\ \mathfrak{P}_r(x_1, \ldots, x_n) \end{pmatrix}$$

zeichnet die ersten n Veränderlichen in unnötiger Weise aus, was Weierstraß schon aus seinen Überlegungen über algebraische und dann auch analytische Funktionen einer Veränderlichen bewußt war, vgl. auch [55, S. 205–206]. So bemühte er sich bereits in seiner Vorlesung vom Sommer 1874 um eine allgemeinere Definition, zumindest aber um die Darstellung der Möglichkeit, abhängige und unabhängige Veränderliche auszutauschen. Der Text der Mitschrift [60, S. 486–489] ist in dieser Hinsicht jedoch etwas kryptisch, was auch daran liegen mag, daß Weierstraß in jenem Semester zum ersten Mal diese Definition vortrug, wie man seinem Brief an Schwarz vom 28. Januar 1875 entnehmen kann.

In den späteren Vorlesungen (etwa [61, S. 165–166], [62, S. 157–160, vgl. auch S. 84–87]) gibt Weierstraß von Anfang an eine Definition, die die Veränderlichen gleich behandelt: Ein „analytisches Gebilde n-ter Stufe im Gebiete von $n + r$ Veränderlichen“ wird dann lokal parametrisiert durch eine Abbildung

$$t = (t_1, \ldots, t_n) \mapsto \Phi(t) = \begin{pmatrix} x_1(t_1, \ldots, t_n) \\ x_2(t_1, \ldots, t_n) \\ \vdots \\ x_{n+r}(t_1, \ldots, t_n) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \varphi_1(t_1, \ldots, t_n) + a_1 \\ \varphi_2(t_1, \ldots, t_n) + a_2 \\ \vdots \\ \varphi_{n+r}(t_1, \ldots, t_n) + a_{n+r} \end{pmatrix}$$

mit konvergenten Potenzreihen $\varphi_1(t_1 \ldots, t_n), \ldots, \varphi_{n+r}(t_1 \ldots, t_n)$ der n komplexen Veränderlichen $t_1, \ldots, t_n$ ohne konstanten Term und $a_1, \ldots, a_{n+r}$ aus dem $\mathbb{P}_1 = \mathbb{C} \cup \{\infty\}$, wobei das Abbildungsverhalten noch einer Regularitätsbedingung unterworfen wird.

Diese lokale Defintion wird dann wieder vermittels analytischer Fortsetzung globalisiert. Analog wie im Fall der analytischen Gebilde erster Stufe nennt Weierstraß dabei zwei lokale Parametrisierungen $t \mapsto \Phi(t)$ und $s = (s_1, \ldots, s_n) \mapsto \Psi(s)$ „koinzident" (und betrachtet sie dann als unmittelbare Fortsetzungen von einander), wenn es eine analytisch invertierbare Transformation zwischen den Parametertupeln t und s gibt, die lokal um eine Stelle die beiden Abbildungen Φ und Ψ ineinander überführt [62, S. 159–160]. Modern gesprochen, verklebt er also die einzelnen Stücke des Gebildes mittels biholomorpher Kartenwechsel.

Bisher wurde noch nichts zu der Regularitätsbedingung gesagt, die Weierstraß an die lokalen Parametrisierungen $t \mapsto \Phi(t)$ stellt:

Auf jeden Fall sind solche Parametrisierungen zugelassen, für die die Jacobi-Matrix den (maximal möglichen) Rang n hat. Ignoriert man einmal die topologische Frage der lokalen Abgeschlossenheit, so hat Weierstraß mit seinen „Gebilden" also ein Konzept zur Verfügung, das (komplex) n-dimensionale Untermannigfaltigkeiten des $\mathbb{C}^{n+r}$ (bzw. des $(\mathbb{P}_1)^{n+r}$) umfaßt. Wie die Vorlesungsmitschrift [62] belegt, war dies spätestens 1886 der Fall, so daß Weierstraß durchaus nicht nur auf der Höhe der Zeit war, was die Entwicklung des Mannigfaltigkeitsbegriffs betrifft, sondern sogar schon zur Avantgarde der Entwicklung zu zählen ist, wenn er seine Objekte auch in das Prokrustesbett des umgebenden $\mathbb{C}^{n+r}$ zwängte, vgl. [28, Abschn. 3.3, 3.4], [36, insb. S. 31, 42], [38, Abschn. 5.1].

Und das war noch nicht alles: Unter anderem seine „Allgemeine Untersuchungen über $2n$-fach periodische Functionen von n Veränderlichen" [57] führten Weierstraß wie schon im Fall einer Veränderlichen zu dem Problem, auch singuläre Punkte des Gebildes betrachten zu müssen, also solche, in denen die Jacobi-Matrix der Parametrisierung nicht den maximalen Rang hat. In [57, S. 99–104] behandelt er dies, indem er – die Situation der algebraischen Gebilde verallgemeinernd – die Menge der Punkte dadurch kontrolliert, daß sie die Nullstellenmenge eines Polynoms

$$t_{m+1}^{\mu} + G^{(1)}(t_1, \ldots, t_m) \cdot t_{m+1}^{\mu-1} + \cdots + G^{(\mu)}(t_1, \ldots, t_m)$$

mit analytischen Koeffizienten bilden. (Osgood wird in [26] solch ein Polynom Jahrzehnte später „Pseudopolynom" nennen, vgl. unten.)

In der Vorlesung von 1886 [62] ließ Weierstrass dann neben den regulären auch solche Punkte zu, in denen die Jacobi-Matrix der Parametrisierung $t \mapsto \Phi(t)$ einen Minor der Größe $n \times n$ enthält, dessen Determinante nicht identisch verschwindet.[8]

Die Vorlesung [62] aus dem Sommer 1886 zählt zu den letzten, die Weierstraß gehalten hat [58, Band 3, S. 360]. Und so trug er selbst auch nicht mehr zur weiteren Entwicklung der Theorie seiner „Gebilde" bei.

Da dieser Begriff heutzutage auch im Wesentlichen in Vergessenheit geraten ist, gewinnt man so den Eindruck, es habe sich dabei um einen toten Seitenarm der Entwicklung in der Mathematik gehandelt: Statt Untermengen des $\mathbb{C}^N$, die durch analytische Parametrisierungen beschrieben werden, bei denen man vorsichtig gewisse singuläre Stellen zuläßt, werden jetzt komplexe Räume in dem von Behnke und Stein, Henri Cartan und Jean-Pierre Serre und, zuletzt, Hans Grauert und Reinhold Remmert eingeführten Sinne studiert. (Zu einer Darstellung dieser Entwicklung vergleiche [28, Abschn. 3, 4], [38, Teil II].)

Die Basis dieser hauptsächlich in den fünfziger Jahren stattgefundenen Entwicklung waren aber vor allen Dingen zwei Bücher, wie einer der damals Handelnden in [28, S. 222] anschaulich beschreibt: Neben dem bereits erwähnten Ergebnissebericht von

Behnke und Thullen [6] war dies das „Lehrbuch über Funktionentheorie“ von William Fogg Osgood (1864–1943), insbesondere dessen zweiter Band über mehrere Veränderliche [26].

Behnke und Thullen hatten – im Gegensatz zu Weierstraß – den $\mathbb{C}^n$ längst verlassen und betrachteten Bereiche *über* dem $\mathbb{C}^n$ [6, S. 6], aber auch sie definierten die Verzweigungspunkte ihrer Bereiche mittels analytischer Parametrisierungen, die außerhalb von niederdimensionalen Ausnahmemengen umkehrbar sind [6, S. 14].

Überzeugender noch, was den Weierstraßschen Einfluß betrifft, ist ein Blick in das Osgoodsche Buch: Ein Drittel von diesem macht das „Zweite Kapitel. Implizite Funktionen. Teilbarkeit“ aus. Hinter diesem Titel verbirgt sich nichts weiter als eine Theorie der „Gebilde“ von Weierstraß, dessen oben erwähnte Arbeit [57] Osgood auch ausgiebig als Quelle zitierte. Und so lauten die Überschriften der letzten drei Paragraphen des Kapitels auch „Über die Definition eines monogenen analytischen Gebildes m-ter Stufe im Raume von $n = m + r$ Veränderlichen“, „Über die Parametrisierung eines Elementes“ und „Fortsetzung. Von den Grenzstellen eines Gebildes“, so daß man den Eindruck gewinnen könnte, Osgood habe seine Studienjahre in Deutschland nicht in Göttingen bei Klein, sondern in Berlin bei Weierstraß verbracht.

Anmerkungen

1 Zur Vita von Weierstraß vergleiche man [8], [9] und [24].

2 Aufgrund des Weierstraßschen Produktsatzes für die Zahlenebene ist dies heute klar, aber historisch gesehen lief die Entwicklung genau umgekehrt: Abels Resultat war die Motivation für Weierstraß, seinen Satz zu formulieren und zu beweisen.

3 Von dieser Zeit an wurde er am Gewerbeinstitut von Siegfried Aronhold (1819–1884) vertreten, erhielt aber noch das Gehalt aus dieser Stelle. Ab dem 2. Juli 1864 erübrigte sich dies, da er an diesem Tag auf einen Lehrstuhl der Berliner Friedrich-Wilhelms-Universität berufen wurde.

4 Weierstraß behauptete später einmal, er wäre „erst 1842 mit Arbeiten von CAUCHY bekannt“ geworden [24, S. 35–36]. Unmöglich ist dies angesichts seines in der Tat eher rudimentären Ausbildungsweges keinesfalls, und auch in späteren Jahren zeigte er eine teilweise beachtliche Unkenntnis der französischen Literatur über Analysis, vgl. [23], auch [10, S. 24]. Allerdings hatte er schon in seiner Schul- und Studienzeit Crelles „Journal für die reine und angewandte Mathematik“ gelesen [15, S. 62] und war somit zumindest indirekt von dieser beeinflußt.

5 Bei Weierstraß finden sich aber durchaus Überlegungen, wie man durch Verkleinerung des Definitionsbereichs aus einer mehrdeutigen eine eindeutige Funktion machen kann, so in seiner Vorlesung zur „Einführung in die Theorie der analytischen Funktionen“ aus dem Sommer 1868 den Monodromiesatz für einfach-zusammenhängende Gebiete nebst Beweisskizze [59, S. 73–75] und in der entsprechenden Vorlesung aus dem Sommer 1878 einen vollständig ausgeführten Beweis des Monodromiesatzes für sternförmige Gebiete [61, S. 143 nebst S. 136–138].
Welche Bedeutung Weierstraß dem Monodromiesatz zuschrieb, wird auch aus einem Brief vom 20. Dezember 1874 an Schwarz klar, in dem er empfiehlt, den Cauchyschen Integralsatz für einfachzusammenhängende Gebiete nicht mittels reeller Integration zu beweisen, sondern auf den Monodromiesatz zurückzuführen.

6 So offensichtlich diese Bemerkung auch heute sein mag, Weierstraß mußte sich im März 1885 in zwei Briefen an Sofja Kowalewskaja (1850–1891) [63, S. 329–330] und Schwarz [54, Bogen 5–6] ziemlich aufregen über seinen Kollegen Lazarus Fuchs (1833–1902), der den Prozeß der topologischen Abschließung als selbstverständlich voraussetzte, also keinen Unterschied machte, ob eine Funktion an einer Stelle einen Wert wirklich annimmt oder ihm nur beliebig nahe kommt.

7 So berichtet Arnold Sommerfeld (1868–1951) [39, Kap. IV, § 19, S. 124]:
„Charakteristisch für die Aufnahme, die die RIEMANNsche Dissertation ursprünglich gefunden hat, ist folgendes Erlebnis ADOLF WÜLLNERs ...: WÜLLNER traf in den siebziger Jahren auf dem Rigi mit WEITERSTRASS ... zusammen. WEIERSTRASS hatte die RIEMANNsche Dissertation zum Ferienstudium mitgenommen und klagte, daß ihm, dem Funktionentheoretiker, die RIEMANNschen Methoden schwer verständlich seien.“

8 Im ersten Teil der Vorlesung, der die entsprechende Theorie für *reelle* Veränderliche entwickelt, erläutert Weierstraß, daß die Punkte des letzteren Typs nur eine niederdimensionale Menge im Parameterraum bilden [62, S. 96].
Er diskutiert dort die Situation auch für nicht-differenzierbare Funktionen und verlangt für diese als entsprechende Bedingung die Endlichkeit der Fasern bei der Parametrisierung [62, S. 87].

Literatur

[1] Niels Henrik Abel: Précis d'une théorie des fonctions elliptiques, *Journal für die reine und angewandte Mathematik* **4** (1829), 236–277 und 309–348; auch in [3, Band 1, S. 518–617].

[2] —: Fernere mathematische Bruchstücke aus Herrn N. H. Abel's Briefen, *Journal für die reine und angewandte Mathematik* **6** (1830), 73–80; auch in [3, Band 2, S. 271–279].

[3] —: *Œuvres complètes de Niels Henrik Abel. Nouvelle édition*, hrsg. v. Ludwig Sylow und Sophus Lie, 2 Bände. Grøndahl & Søn: Christiania 1881.

[4] —: *Mémorial publié à l'occasion du centenaire de sa naissance*. Jacob Dybwad: Kristiania 1902.

[5] Heinrich Behnke, Karl Stein: Entwicklung analytischer Funktionen auf Riemannschen Flächen, *Mathematische Annalen* **120** (1947–49), 430–461.

[6] Heinrich Behnke, Peter Thullen: *Theorie der Funktionen mehrerer komplexer Veränderlichen*, Ergebnisse der Mathematik und ihrer Grenzgebiete, Band **III**, Heft **3**. Julius Springer: Berlin 1934; zweite, erweiterte Auflage hrsg. v. Reinhold Remmert, Ergebnisse der Mathematik und ihrer Grenzgebiete **51**. Springer: Berlin et al. 1970.

[7] Kurt-Reinhard Biermann: *Vorschläge zur Wahl von Mathematikern in die Berliner Akademie. Ein Beitrag zur Gelehrten- und Mathematikgeschichte des 19. Jahrhunderts*, Abhandlungen der Deutschen Akademie der Wissenschaften zu Berlin, Klasse für Mathematik, Physik und Technik, Jahrgang 1960 Nr. 3. Akademie-Verlag: Berlin 1960.

[8] —: Karl Weierstraß, Ausgewählte Aspekte seiner Biographie, *Journal für die reine und angewandte Mathematik* **223** (1966), 191–220.

[9] Reinhard Bölling: Karl Weierstraß – Stationen eines Lebens, *Jahresbericht der Deutschen Mathematiker-Vereinigung* **96** (1994), 56–75.

[10] —: Kowalewskaja, Herr H-a, Herr X und andere, Gedanken zu einem unbekannten Foto, *Mitteilungen der Deutschen Mathematiker-Vereinigung* 1/1999, 21–25.

[11] Constantin Carathéodory: Über die analytischen Abbildungen von mehrdimensionalen Räumen, in: *Verhandlungen des Internationalen Mathematiker-Kongresses in Zürich 1932*, hrsg. v. Walter Saxer, 2 Bände. Orell Füssli: Zürich, Leipzig o. J., Band 1, S. 93-101.

[12] Herta Florack: *Reguläre und meromorphe Funktionen auf nicht geschlossenen Riemannschen Flächen*, Schriftenreihe des Mathematischen Instituts der Universität Münster **1** (1948).

[13] Ernst Freundlich: *Analytische Funktionen mit beliebig vorgeschriebenem unendlichblättrigen Existenzbereiche*. Dissertation Göttingen 1910.

[14] Adolph Goepel: Theoriae transcendentium Abelianarum primi ordinis adumbratio levis, *Journal für die reine und angewandte Mathematik* **35** (1847), 277–312; deutsche Übersetzung: *Entwurf einer Theorie der Abel'schen Transcendenten erster Ordnung*, hrsg. v. Heinrich Weber, übers. v. Alexander Witting, Ostwald's Klassiker der exakten Wissenschaften **67**. Wilhelm Engelmann: Leipzig 1895.

[15] Friedrich Gerhard Hohmann: Karl Weierstraß als Schüler des Theodorianischen Gymnasiums zu Paderborn, in: *Festschrift zur Gedächtnisfeier für Karl Weierstraß 1815–1965*, hrsg. v. Heinrich Behnke und Klaus Kopfermann, Wissenschaftliche Abhandlungen der Arbeits-

gemeinschaft für Forschung des Landes Nordrhein-Westfalen **33**. Westdeutscher Verlag: Köln, Opladen 1966, S. 57–66.

[16] Christian Houzel: D'une variable à plusieurs variables complexes: Les fonctions abéliennes, in: *Géométrie complexe*, hrsg. v. François Norguet, Salomon Ofman, Jean-Jaques Szczeciniarz, Actualités Scientifiques et Industrielles **1438**. Hermann: Paris 1996, S. 271–281.

[17] Adolf Hurwitz: Über die Entwickelung der allgemeinen Theorie der analytischen Funktionen in neuerer Zeit, in: *Verhandlungen des ersten internationalen Mathematiker-Kongresses in Zürich vom 9. bis 11. August 1897*, hrsg. v. Ferdinand Rudio. Teubner: Leipzig 1898, S. 91–112.

[18] Carl Gustav Jacob Jacobi: *Fundamenta nova theoriae functionum ellipticarum*. Gebrüder Bornträger: Königsberg 1829; auch in [20, Band 1, S. 49–239].

[19] —: De functionibus duarum variabilium quadrupliciter periodicis, quibus theoria transcendentium Abelianarum innititur, *Journal für die reine und angewandte Mathematik* **13** (1835), 55–78; auch in [20, Band 2, S. 23–50].

[20] —: *C. G. J. Jacobi's Gesammelte Werke*, hrsg. v. Carl Wilhelm Borchardt und Karl Weierstraß, 7 Bände. G. Reimer: Berlin 1881–1891.

[21] Paul Koebe: Fonction potentielle et fonction analytique ayant un domaine d'existence donné à un nombre quelconque (fini ou infini) de feuillets, *Comptes rendus hebdomadaires des séances de l'Académie des Sciences, Paris* **148** (1909), 1446–1448.

[22] Emil Lampe: Karl Weierstraß, *Jahresbericht der Deutschen Mathematiker-Vereinigung* **6** (1899), 27–44.

[23] Detlef Laugwitz: „Das letzte Ziel ist immer die Darstellung einer Funktion“: Grundlagen der Analysis bei Weierstrass 1886, historische Wurzeln und Parallelen, *Historia Mathematica* **19** (1992), 341–355.

[24] Gösta Mittag-Leffler: Die ersten 40 Jahre des Lebens von Weierstraß, *Acta mathematica* **39** (1923), 1–57.

[25] Erwin Neuenschwander: *Riemanns Einführung in die Funktionentheorie. Eine quellenkritische Edition seiner Vorlesungen mit einer Bibliographie zur Wirkungsgeschichte der Riemannschen Funktionentheorie*, Abhandlungen der Akademie der Wissenschaften in Göttingen, Mathematisch-Physikalische Klasse; Dritte Folge **44**. Vandenhoeck & Ruprecht: Göttingen 1996.

[26] William Fogg Osgood: *Lehrbuch der Funktionentheorie, Zweiter Band*. Leipzig, Berlin: Teubner, Erste Lieferung 1924, 1929, Zweite Lieferung 1932; Nachdruck Bronx, New York: Chelsea 1965.

[27] Henri Poincaré: Sur un théorème de la théorie générale des fonctions, *Bulletin de la Société Mathématique de France* **11** (1883), 112–125; auch in: *Œuvres de Henri Poincaré*, Band 4. Gauthier-Villars: Paris 1950, S. 57–69.

[28] Reinhold Remmert: From Riemann surfaces to complex spaces, in: *Matériaux pour l'histoire des mathématiques au XXème siècle. Actes du colloque à la mémoire de Jean Dieudonné, Nice, France, janvier 6-8, 1996*, Séminaires & Congrès **3**. Société Mathématique de France: Marseille 1998, S. 203–241.

[29] —, Michael Schneider: Analysis Situs und Flächentheorie, in [64, S. 183–195].

[30] Bernhard Riemann: *Grundlagen für eine allgemeine Theorie der Functionen einer veränderlichen complexen Grösse*, Inauguraldissertation Göttingen 1851; auch in [32, S. 35–77].

[31] —: Theorie der *Abel'* schen Functionen. *Journal für die reine und angewandte Mathematik* **54** (1857), 101–155; auch in [32, S. 120–174].

[32] —: *Gesammelte mathematische Werke, wissenschaftlicher Nachlaß und Nachträge, Collected Papers*, hrsg. v. Heinrich Weber, Richard Dedekind und Raghavan Narasimhan, 3. Ausgabe. Springer: Berlin und B. G. Teubner: Leipzig 1990.

[33] Georg Rosenhain: *Mémoire sur les fonctions de deux variables et à quatre périodes qui sont les inverses des intégrales ultra-elliptiques de la première classe*, ergereicht am 30. September 1846 bei der Académie des sciences à Paris, veröffentlicht in *Mémoires présentés par divers savants* **IX** (1851); deutsche Übersetzung: *Abhandlung über die Functionen zweier Variabler mit vier Perioden, welche die Inversen sind der ultra-elliptischen Integrale erster Klasse*, hrsg. v. Heinrich Weber, übers. v. Alexander Witting, Ostwald's Klassiker der exakten Wissenschaften **65**. Wilhelm Engelmann: Leipzig 1895.

[34] Carl Runge: Persönliche Erinnerungen an Karl Weierstraß, *Jahresbericht der Deutschen Mathematiker-Vereinigung* **35** (1926), 175–179.

[35] Ernst Schering: *Zum Gedächtnis an B. Riemann*, in: *Gesammelte Mathematische Werke von Ernst Schering*, hrsg. v. Robert Haussner und Karl Schering, 2 Bände. Mayer & Müller: Berlin 1909, Band 2, S. 367–383; auch in [32, S. 828–844].

[36] Erhard Scholz: The concept of manifold, in: *History of Topology*, hrsg. v. Ioan Mackenzie James. Elsevier: Amsterdam 1999, S. 25–64.

[37] Gert Schubring: Warum Karl WEIERSTRASS beinahe in der Lehrerprüfung gescheitert wäre, *Der Mathematikunterricht* **35**, Heft 1 (1989), 13–29.

[38] Georg Schumacher: Über die Entwicklung der Komplexen Analysis in Deutschland vom Ausgang des 19. Jahrhunderts bis zum Anfang der siebziger Jahre, *Jahresbericht der Deutschen Mathematiker-Vereinigung* **98** (1996), 41–133.

[39] Arnold Sommerfeld: *Vorlesungen über Theoretische Physik* **2**: *Mechanik der deformierbaren Medien*. Harri Deutsch: Thun, Frankfurt/M., Neudruck der 6. Ausgabe 1978.

[40] Peter Ullrich: Geometrical imagination in the mathematics of Karl Weierstraß, in: *Studies in History of Mathematics dedicated to A. P. Youschkevitch (Proceedings of the XXth International Congress of History of Science, Liège 1997, Vol. XIII)*, hrsg. v. Eberhard Knobloch, Jean Mawhin und Serguei S. Demidov. De Diversis Artibus **56** (N.S. **19**). Brepols Publishers: Turnhout 2002, S. 297–307.

[41] Karl Weierstraß: *Über die Entwicklung der Modular-Functionen*. Manuskript Westernkotten 1840, veröffentlicht 1894 in [58, Band 1, S. 1–49].

[42] —: *Zur Theorie der Potenzreihen*. Manuskript Münster 1841, veröffentlicht 1894 in [58, Band 1, S. 67–74].

[43] —: *Definition analytischer Functionen einer Veränderlichen vermittelst algebraischer Differentialgleichungen*. Manuskript Münster 1842, veröffentlicht 1894 in [58, Band 1, S. 75–84].

[44] —: Beitrag zur Theorie der Abel'schen Integrale, *Beilage zum Jahresbericht über das Gymnasium zu Braunsberg in dem Schuljahre 1848–1849*; auch in [58, Band 1, S. 111–131].

[45] —: Zur Theorie der *Abel*schen Functionen, *Journal für die reine und angewandte Mathematik* **47** (1854), 289–306; auch in [58, Band 1, S. 133–152].

[46] —: Akademische Antrittsrede, *Monatsbericht der Königlich Preußischen Akademie der Wissenschaften zu Berlin* 1857, 348–351; hier in [58, Band 1, S. 223–226].

[47] —: *Untersuchungen über die Flächen, deren mittlere Krümmung überall gleich Null ist*, gelesen am 25. Juni 1866 in der Akademie der Wissenschaften zu Berlin, auszugsweise veröffentlicht in *Monatsberichte der Königlich Preußischen Akademie der Wissenschaften zu Berlin* 1866, 612–625; hier zitiert nach der Umarbeitung in [58, Band 3, S. 39–52].

[48] —: *Einige Fundamentalsätze über Differentialgleichungen (Vorgetragen im math[ematischen] Seminar, Sommer Semester 1875)*, handschriftlich, 29 Bögen à 4 Seiten. Standort: Bibliothek des Instituts Mittag-Leffler, Djursholm.

[49] —: *Aus einem bisher noch nicht veröffentlichten Briefe an Herrn Professor Schwarz, vom 3. October 1875*. [58, Band 2, S. 235–244].

[50] —: *Abelsche Functionen, Wintersemester 1875 – 1876*, Mitschrift von Gösta Mittag-Leffler in 14 Heften. Standort: Bibliothek des Instituts Mittag-Leffler, Djursholm.

[51] —: *Einige auf die Theorie der analytischen Functionen mehrerer Veränderlichen sich beziehende Sätze*. Berlin: Autographischer Druck von H. S. Hermann o. J. (1879); auch in *Karl Weierstraß: Abhandlungen aus der Functionenlehre*. Julius Springer: Berlin 1886, S. 105–164 und [58, Band 2, S. 135–188].

[52] —: Untersuchungen über die $2r$-fach periodischen Functionen von r Veränderlichen, *Journal für die reine und angewandte Mathematik* **89** (1880), 1–8; auch in [58, Band 2, S. 125–133].

[53] —: *Theorie der Minimalflächen und der Abbildung der Flächen, Nach Vorträgen des Herrn Prof. Weierstrass im mathematischen Seminar. Berlin. S. S. 1883*, handschriftlich, 92 Seiten, in *Seminarvorträge II*. Standort: Bibliothek des Instituts Mittag-Leffler, Djursholm.

[54] —: *Brief an Hermann Amandus Schwarz vom 14. März 1885*. Archiv der Berlin-Brandenburgischen Akademie der Wissenschaften, Nachlaß Schwarz, Nr. 1175.

[55] —: *Functionentheorie*, handschriftlich, 206 Seiten. Standort: Bibliothek des Instituts Mittag-Leffler, Djursholm.

[56] —: *Vorlesungen über die Theorie der Abelschen Transcendenten*. Band 4 von [58], 1902.

[57] —: *Allgemeine Untersuchungen über 2n-fach periodische Functionen von n Veränderlichen*. Manuskript, veröffentlicht 1903 in [58, Band 3, S. 53–114].

[58] —: *Mathematische Werke*, 7 Bände. Mayer & Müller: Berlin 1894–1927; Reprint Georg Olms: Hildesheim und Johnson Reprint: New York o. J.

[59] —; *Einführung in die Theorie der analytischen Funktionen, nach einer Vorlesungsmitschrift von Wilhelm Killing aus dem Jahr 1868*, Schriftenreihe des Mathematischen Instituts der Universität Münster, 2. Serie **38** (1986).

[60] —: *Einleitung in die Theorieen der analytischen Functionen, Nach den Vorlesungen im S.S. 1874 ausgearbeitet von G. Hettner*. Fotomechanisch vervielfältigt von der Bibliothek des Mathematischen Instituts der Universität Göttingen 1988.

[61] —: *Einleitung in die Theorie der analytischen Funktionen, Vorlesung Berlin 1878, in einer Mitschrift von Adolf Hurwitz, bearbeitet von Peter Ullrich*, Dokumente zur Geschichte der Mathematik **4**. Deutsche Mathematiker-Vereinigung, Braunschweig, Wiesbaden: Friedrich Vieweg & Sohn 1988.

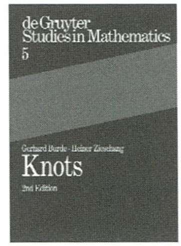
[62] —: *Ausgewählte Kapitel aus der Funktionenlehre. Vorlesung, gehalten in Berlin 1886. Mit der akademischen Antrittsrede, Berlin 1857, und drei weiteren Originalarbeiten von K. WEIERSTRASS aus den Jahren 1870 bis 1880/86. Herausgegeben, kommentiert und mit einem Anhang versehen von REINHARD SIEGMUND-SCHULTZE*, Teubner-Archiv zur Mathematik **9**. BSB B. G. Teubner: Leipzig 1988.

[63] —: *Briefwechsel zwischen Karl Weierstraß und Sofja Kowalewskaja. Herausgegeben, eingeleitet und kommentiert von Reinhard Bölling*. Akademie Verlag: Berlin 1993.

[64] Hermann Weyl: *Die Idee der Riemannschen Fläche*, B. G. Teubner: Leipzig, Stuttgart 1. Auflage 1913, 2. Auflage 1923, 3. Auflage 1955, hier: die annotierte Neuausgabe der 1. Auflage 1997.

de Gruyter *Mathematics*

New releases:



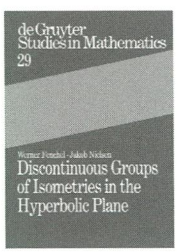
Gerhard Burde / Heiner Zieschang

■ Knots

2nd revised and extended edition

2003. xii, 559 pages. 184 plates. Hardcover.
€ 74,– [D] • ISBN 3-11-017005-1
(de Gruyter Studies in Mathematics 5)

This book is an introduction to classical knot theory. Topics covered include: different constructions of knots, knot diagrams, knot groups, fibred knots, characterisation of torus knots, prime decomposition of knots, cyclic coverings and Alexander polynomials and modules together with the free differential calculus, braids, branched coverings and knots, Montesinos links, representations of knot groups, surgery of 3-manifolds and knots.



Werner Fenchel / Jakob Nielsen

■ Discontinuous Groups of Isometries in the Hyperbolic Plane

Edited by Asmus L. Schmidt

2003. xxii, 364 pages, 112 figures, 2 plates. Hardcover.
€ 84,– [D] • ISBN 3-11-017526-6
(de Gruyter Studies in Mathematics 29)

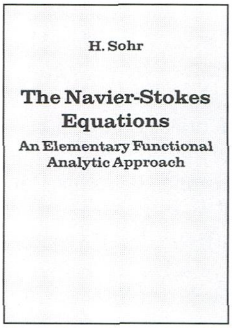
This is an introductory textbook on isometry groups of the hyperbolic plane. Interest in such groups dates back more than 120 years. Examples appear in number theory (modular groups and triangle groups), the theory of elliptic functions, and the theory of linear differential equations in the complex domain (giving rise to the alternative name Fuchsian groups).

W DE G de Gruyter
Berlin · New York

Please place your order with your local bookstore or order directly from us. Prices are subject to change.

www.deGruyter.de

WALTER DE GRUYTER GMBH & CO. KG · Genthiner Straße 13 · 10785 Berlin
Telefon +49-(0)30-2 60 05-0 · Fax +49-(0)30-2 60 05-251 · E-mail wdg-info@deGruyter.de



H. Sohr
The Navier-Stokes Equations
An Elementary Functional Analytic Approach
(Birkhäuser Advanced Texts)

Basel u. a.: Birkhäuser 2001, 367 S., EUR 104,–

Die Navier-Stokes-Gleichungen zur Beschreibung der Strömung viskoser, inkompressibler Fluide wie z. B. Wasser sind seit vielen Jahren ein zentrales Forschungsthema der angewandten Analysis, der Numerik und auch der Ingenieurwissenschaften. Neben ihrer großen Bedeutung für technische Anwendungen liefern sie dem Mathematiker seit der fundamentalen Arbeit von J. Leray (1934) ein berühmtes, offenes Problem in drei Raumdimensionen: sind schwache instationäre Lösungen eindeutig, existieren in der Zeit globale reguläre (starke, klassische) Lösungen oder werden reguläre Lösungen in endlicher Zeit singulär? Diese Fragen konnten trotz zahlreicher Versuche bisher – ohne Hinzunahme künstlicher Voraussetzungen – nicht beantwortet werden; vom Clay Mathematics Institute wurden sie als eines der sieben Millenniumsprobleme ausgewählt und mit einem Preisgeld von US $ 1.000.000 versehen.

Der Einstieg in die mathematische Analysis der Navier-Stokes-Gleichungen ist üblicherweise mit großen Schwierigkeiten verbunden und erfordert profunde Kenntnisse der Funktionalanalysis und der partiellen Differentialgleichungen. Die aktuelle Forschung benutzt darüber hinaus ein weites Spektrum an tieferliegenden Methoden wie Interpolationstheorie, Theorie der Funktionenräume (Hardy-, BMO-, Besovräume), Halbgruppentheorie in L^p-Räumen, reelle harmonische Analysis (singuläre Integrale, gewichtete Abschätzungen, maximale Regularität) sowie spezielle Techniken für partielle Differentialgleichungen (z. B. partielle Regularität). Mit diesen Methoden hat der Autor in den letzten Jahren fundamentale Beiträge zur Existenz-, Eindeutigkeits- und Regularitätstheorie der Stokes- und Navier-Stokes-Gleichungen geliefert.

Bei dem vorliegenden Buch handelt es sich nicht um eine Forschungsmonographie, die mit den o. g. Methoden den aktuellen Stand der Forschung erreichen möchte. Das Anliegen des Autors ist es vielmehr, einen – wie es der Untertitel des Buches ankündigt – elementaren funktionalanalytischen Zugang zu den Stokes- und Navier-Stokes-Gleichungen zu schaffen. Dieser Zugang beruht auf der konsequenten Analysis im Hilbertraum L^2 und dem selbstadjungierten Stokes-Operator $A = -\nu P\Delta$ in seiner Spektraldarstellung, wobei P den Helmholtz-Projektor auf den L^2-Vektorfeldern bezeichnet. Dadurch können *beliebige Gebiete* des $\mathbb{R}^2$ und des $\mathbb{R}^3$ betrachtet werden, während eine L^p-Halbgruppentheorie bisher nur in speziellen Gebieten wie beschränkte und Außenraumgebiete möglich ist.

Seit 1950 ist durch die Arbeit von E. Hopf mittels L^2-Theorie und Galerkin-Verfahren die Existenz globaler schwacher Lösungen der Navier-Stokes-Gleichungen in beliebigen Gebieten bekannt; auch in den Büchern von P. Constantin & C. Foias [1] (beschränkte Gebiete) und R. Temam [2] (periodische Randbedingungen) wurde die Selbstadjungiertheit von A in L^2 entscheidend für eine leichter zugängliche Darstellung genutzt. Insofern gehört der L^2-Zugang eigentlich zur mathematischen Folklore der Navier-Stokes-Gleichungen. Hiervon hebt sich das vorliegende Buch aber deutlich ab:

Es beinhaltet nicht nur die erste systematische Zusammenstellung von L^2-Methoden und -Ergebnissen in beliebigen Gebieten, sondern stellt auch viele neue Ideen und Resultate vor, die in der Forschungsliteratur bisher nicht verfügbar waren. So benutzt der Autor konsequent den auf L^2 stetigen Operator $A^{-1/2}P\mathrm{div}$ mit L^2-Norm $\leq \nu^{-1/2}$, mit dem die schwache Stokes-Gleichung mit rechter Seite $f = \mathrm{div}\, F$ auch in der Form $A^{1/2}u = A^{-1/2}P\mathrm{div}\, F$ geschrieben werden kann. Und bezeichnet $S(t) = e^{-tA}$ die von A erzeugte Kontraktionshalbgruppe, so ist eine schwache Lösung der instationären Navier-Stokes-Gleichung zum Anfangswert u_0 und zur äußeren Kraft f eine Lösung der Fixpunktgleichung

$$u(t) = S(t)u_0 + \int_0^t S(t-\tau)Pf(\tau)d\tau - A^{\frac{1}{2}}$$

$$\int_0^t S(t-\tau)(A^{-\frac{1}{2}}P\mathrm{div}\,)(u \otimes u)d\tau. \quad (1)$$

Diese Integraldarstellung kann größtenteils mit elementaren funktionalanalytischen Methoden untersucht werden und bildet den Ausgangspunkt für die nichtlineare Existenz- und Regularitätstheorie.

In der Einleitung des Buches zeichnet der Autor auf 15 Seiten einen prägnanten, sehr lesenswerten Abriss der funktionalanalytischen Methode und stellt klassische sowie eigene neue Ergebnisse zusammenfassend dar. Nach einer Einführung in die Theorie der Sobolevräume werden in Kapitel II die für die Stokes-Gleichung wichtigen Operatoren ∇ und div analysiert. Die Divergenzgleichung $\mathrm{div}\, v = g$ wird mit Hilfe des Satzes vom abgeschlossenen Bild und einer der Literatur entnommenen negativen Gradientenabschätzung bewiesen. Ferner werden der Spektralkalkül für selbstadjungierte Operatoren skizziert, gebrochene Potenzen eingeführt und die Ungleichung von Heinz (ohne Beweis) vorgestellt. Obwohl dieses Buch die Calderón-Zygmund-Abschätzungen nicht benutzt, erfordert der kurz angedeutete Beweis der Einbettungssätze $\mathcal{D}((-\Delta)^{\alpha/2}) \subset L^q$ einige Kenntnisse der harmonischen Analysis. Kapitel III ist der stationären Stokes- und Navier-Stokes-Gleichung gewidmet. Die Regularität schwacher Lösungen wird im linearen Fall mit der Differenzenquotientenmethode und im nichtlinearen Fall im L^2-Rahmen mit Hilfe der gebrochenen Potenzen A^α des Stokes-Operator bewiesen. Hierzu und für das Verständnis der folgenden Kapitel ist der Abschnitt III.2 über den Stokes-Operator, den Operator $A^{-1/2}P\mathrm{div}$ sowie über die Einbettungssätze für $\mathcal{D}(A^\alpha)$ von fundamentaler Bedeutung.

Das Kapitel IV behandelt die instationären Stokes-Gleichungen und dient der Vorbereitung für die nichtlineare Theorie. Die in der Darstellung (1) auftretenden (Integral-) Operatoren werden in verschiedenen L^2-Regularitätsklassen ausführlich analysiert. Besondere Beachtung schenkt der Autor der Existenz und Regularität der Druckfunktion. Um jedoch optimale Ergebnisse zu erzielen, verwendet er die maximale Regularität des Stokes-Operators. Dieses schwierige, in der Forschung hochaktuelle Problem wird durch den L^2-Zugang geschickt umgangen; die maximale Regularität von A auf beliebigen Gebieten beruht auf einem (zitierten) klassischen Satz von L. de Simon (1964) in Hilberträumen.

Das abschließende Kapitel V trennt die Existenz- und Regularitätsfragen instationärer Lösungen der Navier-Stokes-Gleichungen voneinander und beginnt mit einer Analyse schwacher Lösungen: wann genügt eine schwache Lösung der Energie-Gleichung, wann sind schwache Lösungen eindeutig oder regulär, welche globalen Integralabschätzungen (Abklingeigenschaften für $t \to \infty$) sind möglich? Die Eindeutigkeits- und Regularitätsfrage wird unter der Zusatzvoraussetzung $u \in L^s(0,T;L^q(\Omega)^n)$ mit $\frac{n}{q} + \frac{2}{s} \leq 1$ (Serrin-Bedingung) und $q > n$ beantwortet; für den ausgesparten Grenzfall $q = n$ haben H. Kozono und der Autor erst kürzlich neue Antworten gefunden. Zur Konstruktion schwacher Lösungen wird die Yosida-Approximation benutzt, in der der nichtlineare Term $u \cdot \nabla u$ durch $J_k u \cdot \nabla u, J_k u = (I + \frac{1}{k}\, A^{1/2})^{-1}$, regularisiert wird. Diese Methode, die der Autor zusammen mit weiteren Koautoren vor etwa 20 Jahren erstmalig bei den Navier-Stokes-Gleichungen eingesetzt hat, weist gegenüber dem Galerkin-Verfahren mehrere Vorteile auf. Beispielsweise erhält man sofort die generische Lösbarkeit, d. h., nach einer kleinen Störung der äußeren Kraft f besitzen die Navier-Stokes-Gleichungen eine globale reguläre Lösung! Der Grenzübergang $k \to \infty$ zur Konstruktion einer schwachen Lösung benötigt wie üblich ein Kompaktheitsargument, das entsprechend der L^2-Philosophie dieses Buches mittels Fourier-Transformation wie bei R. Temam [3] bewiesen wird. Das Kapitel schließt mit einer überraschenden Version des lokalen Existenzsatzes für reguläre Lösungen: die Länge des Existenzintervalls $(0, T)$ ist vom Gebiet $\Omega \subset \mathbb{R}^3$ unabhängig, falls geeignete Normen der Daten u_0 und f auf $(0, T) \times \Omega$ genügend klein sind; dabei darf – wie bei den meisten Resultaten dieses Buches – Ω ein unbeschränktes Gebiet mit beliebig irregulärem Rand sein. Nach 350 Seiten spannender Mathematik endet die Monographie mit einem Literaturverzeichnis mit über 120 Positionen und einem Stichwortverzeichnis.

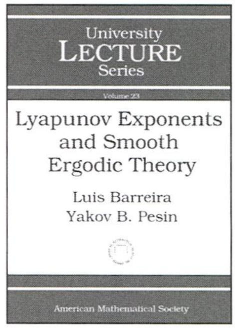
Das vorliegende Buch ist äußerst sorgfältig, klar strukturiert und mit großem didaktischen Geschick geschrieben. Man spürt, dass der Autor dem Leser das Verstehen der Grundideen und der Beweise so weit wie möglich erleichtern möchte. So werden zu Beginn eines neuen Kapitels oder Abschnitts die zu behandelnden Probleme motiviert oder skizziert und grundlegende Notationen wiederholt; auf zurückliegende Textstellen wird präzise verwiesen. Durch diese Redundanz wird das Verständnis einzelner Kapitel in sich ermöglicht. Es macht große Freude, dieses Buch mit seiner Fülle von klassischen und neuen Ideen zur Analysis der Navier-Stokes-Gleichungen zu lesen. Es ist für Seminare, zur Ausarbeitung von Spezialvorlesungen und auch für die weitergehende Forschung hervorragend geeignet.

[1] *P. Constantin, C. Foias:* Navier-Stokes Equations. The University of Chicago Press, Chicago 1988.

[2] *R. Temam:* Navier-Stokes Equations and Nonlinear Functional Analysis. CBMS-NSF Regional Conference Series in Applied Mathematics, SIAM Philadelphia 1983.

[3] *R. Temam:* Navier-Stokes Equations, Theory and Numerical Analysis. North Holland, Amsterdam 1984.

Darmstadt R. Farwig



L. Barreira, Ya. Pesin

Lyapunov Exponents and Smooth Ergodic Theory

AMS University Lecture Series 23

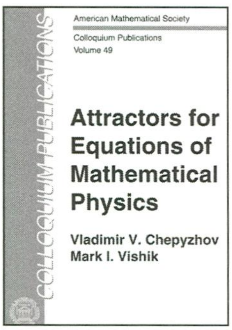
Providence, RI: 2002, 151 S., $ 29,–

Das vorliegende Buch ist eine Einführung in die Ergodentheorie glatter dynamischer Systeme, einem modernen und sich schnell entwickelten Zweig der Mathematik. Beide Autoren zählen zu den weltweit führenden Experten in diesem Bereich der Mathematik. Obwohl es eine sehr große Anzahl an Publikationen auf diesem Gebiet gibt, ist das Buch von Barreira und Pesin das erste umfassende Lehrbuch. Es ist sowohl für fortgeschrittene und interessierte Studenten als auch für Wissenschaftler, die sich mit dynamischen Systemen beschäftigen äußerst empfehlenswert.

Das Buch reicht von der Einführung der Lyapunovschen Stabilitätstheory gewöhnlicher Differentialgleichungen bis zur Theorie der nichtuniform hyperbolischen Systeme. Dabei werden die grundliegenden Begriffe und Resultate im Detail erklärt. Im einzelnen werden die Theorie der stabilen Mannigfaltigkeiten, die Theorie der invarianten Maße und andere wichtigen Bausteine dieses Gebietes erklärt und an Beispielen diskutiert. Bemerkenswert ist, daß einige der Beweise der wichtigsten Resultate, wie z. B. der Multiplikative Ergodensatz oder die absolute Stetigkeit invarianter Blätterungen, vereinfacht und dem heutigen Stand der Forschung angepaßt wurden.

Das Buch ist in sich geschlossen und kommt weitgehend ohne zusätzliche Literatur aus. Es hat einen klaren und wohlstrukturierten Aufbau und verzichtet auf unnötige Kompliziertheit der Notation.

Lund J. Schmeling



V. V. Chepyzhov
M. I. Vishik
Attractors for Equations of Mathematical Physics
AMS Coll. Publ. 49

Providence, American Math. Soc., 2002, 363 S., $ 69,–

Das Buch handelt davon, Attraktoren für nichtlineare partielle Differentialgleichungen zu definieren und zu charkterisieren. Grob gesagt, ist der Attraktor einer gewöhnlichen oder partiellen Differentialgleichung diejenige Menge, gegen die jede Lösung des betrachteten Systems für $t \to \infty$ strebt. Damit ist klar, dass die Komplexität der Dynamik eines Systems wesentlich durch die Dynamik im Attraktor und dessen Größe bestimmt wird. Es gibt eine ganze Reihe verschiedener exakter Definitionen, was unter einem Attraktor zu verstehen ist und für partielle Differentialgleichungen ist der Existenzbeweis nicht trivial.

Für zahlreiche partielle Differentialgleichungen, wie den 2-dimensionalen Navier-Stokes-Gleichungen, ist bekannt, dass der Attraktor endlichdimensional ist. Neben der Dimension werden noch zahlreiche weitere statistische Größen zur Charakterisierung seiner Komplexität verwendet. Eine wesentliche Schwierigkeit ist, dass zu seiner Definition natürlich die globale Existenz und Eindeutigkeit von Lösungen garantiert sein muss.

Im Fall autonomer semilinearer Gleichungen liegt mit dem Buch R. Temam: Infinite-dimensional dynamical systems in mechanics and physics, Springer 2. Aufl. 1997 bereits ein sehr ansprechendes Standardwerk vor. Vergleiche auch Babin, A. V.; Vishik, M. I. Attractors of evolution equations. North-Holland Publishing Co., Amsterdam, 1992. Nach einer kurzen Wiederholung im ersten Teil des Buches konzentriert sich das vorliegende Werk auf nichtautonome Gleichungen und Systeme, für die die Existenz und Eindeutigkeit nicht uneingeschränkt gilt, wie dem dreidimensionalen Navier-Stokes-Problem. Zu den Themen Attraktoren für nichtautonome Gleichungen (Teil 2) und Trajektorienattraktaren (Teil 3) findet sich auf über 200 Seiten nahezu alles, was zur Zeit bekannt ist. Die behandelten Beispiele, 2D und 3D Navier-Stokes, Reaktions-Diffusions-Systeme, dissipative Wellengleichungen und die Ginzburg-Landau-Gleichung gehen nicht über die in Temam (s. o.) behandelten Beispiele hinaus. Insofern ist der gewählte Titel des Buches etwas irreführend.

Insgesamt läßt sich sagen, dass dieses Buch für jede oder jeden über Attraktoren arbeitende Mathematikerin oder arbeitenden Mathematiker ein Muss ist.

Karlsruhe G. Schneider

Was Computer können und was nicht

Armin P. Barth

Algorithmik für Einsteiger

Für Studierende, Lehrer und Schüler
in den Fächern Mathematik und Informatik

2003. VIII, 200 S. Br. EUR 19,90
ISBN 3-528-03196-4

Inhalt: Was ist ungefähr ein Algorithmus - Beispiele von Algorithmen - Effizienz von Algorithmen - Turing-Maschinen: Was genau ist ein Algorithmus - Grenzen algorithmischer Berechenbarkeit - Anhang

Dieses Buch bietet eine Einführung in das mathematische Spezialgebiet der Algorithmik. Der Leser, die Leserin erfährt, was genau ein Algorithmus ist, und hat die Möglichkeit, aus zahlreichen historisch wichtigen oder aktuellen Beispielen von Algorithmen auszuwählen. Eine Untersuchung darüber, ob und wie Algorithmen noch beschleunigt werden können, mündet in eine kurze Einführung in die moderne mathematische Disziplin der „Komplexitätstheorie". Mit der Turing-Maschine wird ein einfaches und zugleich ungeheuer mächtiges theoretisches Computermodell vorgestellt, das Anlass zu interessanten Fragen über die Möglichkeiten und Grenzen der Computer gibt. Zum Schluss wird der Leser, die Leserin zu einem Ausflug eingeladen zu den Grenzen der Informatik, zu Problemen, die bewiesenermaßen algorithmisch unlösbar sind. Orakelmaschinen und widerspenstige Formeln runden das Buch ab.

Wahrscheinlichkeitstheorie + Statistik + Anwendungen

Gerd Christoph, Horst Hackel

Starthilfe Stochastik

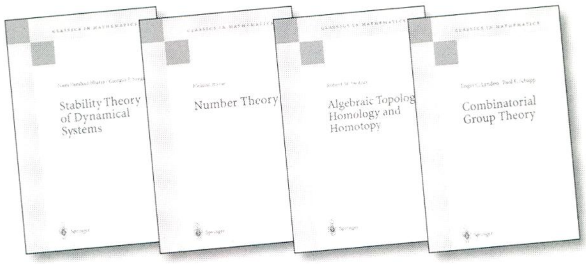
2002. 120 S. Br. EUR 15,90

ISBN 3-519-00341-4

Inhalt: Beschreibende Statistik - Ereignisse und Wahrscheinlichkeiten - Zufallsgrößen und deren Verteilungen - Normalverteilung - Gesetz der großen Zahlen und zentraler Grenzwertsatz - Statistische Schätzmethoden - Statistische Prüfverfahren - Beispiele - Aufgaben - Tabellen

Unter dem Begriff Stochastik werden die Wahrscheinlichkeitstheorie, die mathematische Statistik und deren Anwendungen zusammenfasst. Diese Teubner-Starthilfe vermittelt in kompakter Form grundlegende Begriffe, Methoden und Rechentechniken der Stochastik. Anhand von Beispielen werden vielfältige Anwendungsmöglichkeiten aufgezeigt. Der Leser erfährt, wie man Teststatistiken, Punkt- und Intervallschätzungen für unbekannte Parameter sowie statistische Testverfahren zum Prüfen von Hypothesen herleitet, zufallsabhängige Erscheinungen einordnet und Statistiken richtig interpretiert.

CIM · CLASSICS IN MATHEMATICS · CIM



a selection

H. Hasse
Number Theory
Reprint of the 1st ed. Berlin Heidelberg New York 1980. 2002. XVII, 638 pp. 49 figs. Softcover **€ 34,95**; sFr 60,00; £ 24,50 ISBN 3-540-42749-X

R. M. Switzer
Algebraic Topology
Homotopy and Homology

Reprint of the 1st ed. Berlin Heidelberg New York 1975. 2002. XIII, 526 pp. Softcover **€ 34,95**; sFr 60,00; £ 24,50 ISBN 3-540-42750-3

R. C. Lyndon, P. E. Schupp
Combinatorial Group Theory
Reprint of the 1st ed. Berlin Heidelberg New York 1977. 2001. XIV, 339 pp. 18 figs. Softcover **€ 34,95**; sFr 60,00; £ 24,50 ISBN 3-540-41158-5

D. Gilbarg, N. S. Trudinger
Elliptic Partial Differential Equations of Second Order
Reprint of the 2nd ed., rev. 3rd printing Berlin Heidelberg New York 1998 2001. XIII, 517 pp. Softcover **€ 34,95**; sFr 60,00; £ 24,50 ISBN 3-540-41160-7

J. L. Doob
Classical Potential Theory and Its Probabilistic Counterpart
Reprint of the 1st ed. Berlin Heidelberg New York Tokyo 1984 2001. XXV, 846 pp. Softcover **€ 34,95**; sFr 60,00; £ 24,50 ISBN 3-540-41206-9

R. Courant; F. John
Introduction to Calculus and Analysis Vol. I
Reprint of the 1st ed. Berlin, Heidelberg, New York 1989 1999. XXIII, 661 pp. Softcover **€ 34,95**; sFr 60,00; £ 24,50 ISBN 3-540-65058-X

Introduction to Calculus and Analysis Vol. II/1
Chapters 1 - 4

Reprint of the 1st ed. New York 1989. 2000. XXV, 556 pp., 120 figs. Softcover **€ 34,95**; sFr 60,00; £ 24,50 ISBN 3-540-66569-2

Introduction to Calculus and Analysis Vol. II/2
Chapters 5 - 8

From the reviews: "...one of the best textbooks introducing several generations of mathematicians to higher mathematics. ... This excellent book is highly recommended both to instructors and students."

Acta Scientiarum Mathematicarum, 1991

Reprint of the 1st ed. New York 1989. 2000. XXV, 412 pp., 120 figs. Softcover **€ 34,95**; sFr 60,00; £ 24,50 ISBN 3-540-66570-6

N.P. Bhatia, G.P. Szegö
Stability Theory of Dynamical Systems
Reprint of the 1st ed. Berlin Heidelberg New York 1970. 2002. XI, 225 pp. Softcover **€ 34,95**; sFr 60,00; £ 24,50 ISBN 3-540-42748-1

S. Flügge
Practical Quantum Mechanics
Reprint of the 1st ed. 1971. 2nd printing Berlin,Heidelberg, 1994. 1999. XVIII, 624 pp. 78 figs., Softcover **€ 34,95**; sFr 60,00; £ 24,50 ISBN 3-540-65035-0

G. Polya; G. Szegö
Problems and Theorems in Analysis I
Series. Integral Calculus. Theory of Functions.

From the reviews: "The work is one of the real classics of this century; it has had much influence on teaching, on research in several branches of hard analysis, particularly complex function theory..."

Bulletin of the American Mathematical Society

Reprint of the 1st ed. Berlin, Heidelberg New York 1972. Corr. printing 1978 1998. XXI, 389 pp. Softcover **€ 34,95**; sFr 60,00; £ 24,50 ISBN 3-540-63640-4

Problems and Theorems in Analysis II
Theory of Functions. Zeros. Polynomials. Determinants. Number Theory. Geometry

Reprint of the 1st ed. Berlin, Heidelberg, New York 1976. 1998. XIII, 392 pp. Softcover **€ 34,95**; sFr 60,00; £ 24,50 ISBN 3-540-63686-2

J.W.S. Cassels
An Introduction to the Geometry of Numbers
Reprint of the 1st ed. 1959. Corr. 2nd printing, Berlin, Heidelberg, New York 1971. 1997. VIII, 344 pp. Softcover **€ 34,95**; sFr 60,00; £ 25,00 ISBN 3-540-61788-4

K. Ito, H. P. J. McKean
Diffusion Processes and their Sample Paths
Reprint of the 1st ed. Berlin, Heidelberg, New York, 1974. 1996. XV, 321 pp. Softcover **€ 34,95**; sFr 60,00; £ 25,00 ISBN 3-540-60629-7

T. Kato
Perturbation Theory for Linear Operators
Reprint of the Corr. 2nd ed. Berlin, Heidelberg, New York 1980. 1995. XXI, 624 pp. Softcover **€ 34,95**; sFr 60,00; £ 25,00 ISBN 3-540-58661-X

For the complete series:
www.springer.de/math/series/cim/

Please order from
Springer · Customer Service · Haberstr. 7 · 69126 Heidelberg, Germany
Tel.: +49 (0) 6221 - 345 - 0 · Fax: +49 (0) 6221 - 345 - 4229 · e-mail: orders@springer.de

Springer

All Euro and GBP prices are net-prices subject to local VAT, e.g. in Germany 7% VAT for books and 16% VAT for electronic products. Prices and other details are subject to change without notice. d&p · 009423x

ISSN 0012-0456