

109. Band Heft 1, März 2007

D 20577



Jahresbericht

der Deutschen Mathematiker-Vereinigung

1 – 2007

Herausgegeben von K. Hulek
unter Mitwirkung von
U. Gather, H.-Ch. Grunau, H. Lange,
J. Rambau, A. Schied, Th. Sonar



Jahresbericht

der Deutschen Mathematiker-Vereinigung

Der „Jahresbericht“ ist das offizielle Veröffentlichungsorgan der Deutschen Mathematiker-Vereinigung, für dessen inhaltliche Gestaltung im Auftrag des Präsidiums der jeweilige Herausgeber zuständig ist. Im „Jahresbericht“ sollen vornehmlich Überblicksartikel über Teilgebiete der reinen und angewandten Mathematik, Nachrufe sowie historische Artikel, Berichte aus der Forschung und Buchbesprechungen veröffentlicht werden.

Manuskripte:

Alle für die Schriftleitung des Jahresberichts bestimmten Briefe und Manuskripte sind an *Prof. Dr. K. Hulek* zu richten. Für Buchbesprechungen ist *Prof. Dr. H. Lange* zuständig. Bücher, von denen eine Besprechung erfolgen soll, werden bei den Verlagen angefordert.

Die Autoren werden gebeten, für Manuskripte und Buchbesprechungen die **Standard-LATEX-Klasse article mit 10pt (default), \textwidth139mm, \textheight205mm** zu benutzen. Sollen Illustrationen in die Arbeiten integriert werden, können diese auch in das Satzsystem übernommen werden. Dazu ist es erforderlich, dass die Bilddaten der Abbildungen nochmals in separaten Dateien einzeln abgespeichert werden. Ein Foto des Autors sollte als Bilddatei in einem der gängigen Grafikformate (am unproblematischsten: TIF-Format; Graustufenbild mit einer Auflösung von mindestens 300 dpi) oder als normaler Papier-Fotoabzug zum Einscannen mitgeschickt werden. Als Datenträger sind ZIP-Disketten, CD-ROM bzw. Syquest (88 oder 200 MB) möglich.

Grundsätzlich sollen nur solche Manuskripte eingereicht werden, die nicht gleichzeitig an anderer Stelle zur Veröffentlichung eingereicht oder bereits veröffentlicht worden sind. Mit der Annahme zur Veröffentlichung erwirbt der Verlag das Verlagsrecht zur Vervielfältigung und Verbreitung sowie das Recht der Übersetzung in andere Sprachen.

Weitere Informationen zum „Jahresbericht“ finden Sie unter
<http://www.dmv.mathematik.de/publikationen/jahresbericht>

Verlag:

B. G. Teubner Verlag | GWV Fachverlage GmbH
Abraham-Lincoln-Straße 46
65189 Wiesbaden
<http://www.teubner.de>
<http://www.gwv-fachverlage.de>

Geschäftsführer: Andreas Kösters,
Dr. Ralf Birkelbach,
Albrecht F. Schirmacher
Gesamtleitung Anzeigen: Thomas Werner
Gesamtleitung Produktion: Ingo Eichel
Gesamtleitung Vertrieb: Gabriel Göttlinger

Marketing/Sonderdrucke:

Eva Brechtel-Wahl
Telefon: (06 11) 78 78-3 79, Fax: (06 11) 78 78-4 39, E-Mail: eva.brechtel-wahl@gwv-fachverlage.de

Abonnenenverwaltung:

(Änderungen von Adressen und Bankverbindung, Rückfragen zu Rechnungen oder Mahnung)
VVA-Zeitschriftenservice, Abt. D6F6 / Jahresbericht der Deutschen Mathematiker-Vereinigung,
Postfach 7777, 33310 Gütersloh
Ursula Müller
Telefon: (0 52 41) 80-19 65, Fax: (0 52 41) 80-96 20, E-Mail: ursula.mueller@bertelsmann.de

Anzeigenleitung

Christian Kannenberg
Telefon: (06 11) 78 78-3 69, Fax: (06 11) 78 78-4 30, E-Mail: christian.kannenberg@gwv-fachverlage.de
www.gwv-anzeigen.de

Es gilt die Preisliste vom 01.01.2007.

Bezugsbedingungen:

Die Zeitschrift erscheint 4mal jährlich zum Jahresabonnementspreis von € 118,- inkl. Versandkosten. Der Bezug von Einzelheften ist nicht möglich. Schriftliche Kündigung des Abonnements spätestens sechs Wochen vor Ablauf des Bezugsjahres.

Für persönliche Mitglieder der DMV, die den Jahresbericht zu beziehen wünschen, ist der zwischen DMV und Verlag vereinbarte Bezugspreis maßgebend, der im Rahmen des Mitgliedsbeitrags erhoben wird.

Copyright ©

B. G. Teubner Verlag | GWV Fachverlage GmbH, Wiesbaden 2007. Printed in Germany. Der Verlag B. G. Teubner ist ein Unternehmen von Springer Science+Business Media. Alle Rechte vorbehalten. Kein Teil dieser Zeitschrift darf ohne schriftliche Genehmigung des Verlages vervielfältigt oder verbreitet werden. Unter dieses Verbot fällt insbesondere die gewerbliche Vervielfältigung per Kopie, die Aufnahme in elektronischen Datenbanken und die Vervielfältigung auf CD-ROM und allen anderen elektronischen Datenträgern.

Satz: Fotosatz Behrens, D-68723 Oftersheim
Druck: Wilhelm & Adam, Heusenstamm

ISSN 0012-0456

Vorwort 1

Übersichtsartikel	Historische Beiträge	Berichte aus der Forschung	Buchbesprechungen
-------------------	----------------------	----------------------------	-------------------

**Mathematik im Klima des globalen Wandels
(Gauß-Vorlesung, TU-Braunschweig, 10. Juni 2005)**
Rupert Klein. 3

Imaging and Inverse Problems of Partial Differential Equations
F. Natterer 31

Übersichtsartikel	Historische Beiträge	Berichte aus der Forschung	Buchbesprechungen
-------------------	----------------------	----------------------------	-------------------

W. P. Petersen, P. Arbenz: Introduction to Parallel Computing
T. von Oertzen 1

D. Hankerson, A. Menezes, S. Vanstone: Guide to Elliptic Curve Cryptography
R. Gerkmann 2

D. Mumford: Selected Papers, On the Classification of Varieties and Moduli Spaces
E. Sernesi 3

**M. Adler, P. van Moerbeke, P. Vanhaecke: Algebraic Integrability,
Painlevé Geometry and Lie Algebras**
J. Hilgert 4

V.I. Arnold: Lectures on Partial Differential Equations
A. Knauf 6

K. Wehrheim: Uhlenbeck Compactness
K. Cieliebak 8

H. Kielhöfer: Bifurcation Theory, An Introduction with Applications to PDE's
R. Lauterbach 9

K. Ecker: Regularity Theory for Mean Curvature Flow
K. Deckelnick 12

**E. B. Dynkin: Superdiffusion and Positive Solutions of Nonlinear Partial
Differential Equations**
J.-F. Delmas 14

R. H. Bisseling: Parallel Scientific Computation
T. von Oertzen 16

In den nächsten Heften erscheinende Arbeiten

W. Oberschelp: Nachruf auf Hans Hermes

L. Rüschendorf: Monge-Kantorovich Transportation Problem
and Optimal Couplings

W. Willems: Mathematische Aspekte der Codierungstheorie

E. Zeidler: Die Faszination der Wechselwirkungen zwischen Mathematik
und Naturwissenschaften

Anschriften der Herausgeber

Prof. Dr. K. Hulek, Institut für Algebraische Geometrie,
Gottfried Wilhelm Leibniz Universität Hannover,
Welfengarten 1, 30167 Hannover
E-Mail: hulek@math.uni-hannover.de

Prof. Dr. Ursula Gather, Lehrstuhl für Mathematische Statistik und industrielle
Anwendungen, Universität Dortmund, 44221 Dortmund
E-Mail: gather@statistik.uni-dortmund.de

Prof. Dr. H.-Ch. Grunau, Institut für Analysis und Numerik, Otto-von-Guericke-
Universität Magdeburg, Postfach 4120, 39016 Magdeburg
E-Mail: hans-christoph.grunau@mathematik.uni-magdeburg.de

Prof. Dr. Herbert Lange, Mathematisches Institut, Friedrich-Alexander-Universität
Erlangen-Nürnberg, Bismarckstraße 1a, 91054 Erlangen
E-Mail: lange@mi.uni-erlangen.de

Prof. Dr. J. Rambau, Fakultät für Mathematik, Physik und Informatik,
Universität Bayreuth, 95440 Bayreuth
E-Mail: Joerg.Rambau@uni-bayreuth.de

Prof. Dr. A. Schied, Institut für Mathematik, Technische Universität Berlin,
Straße des 17. Juni 136, 10623 Berlin
E-Mail: schied@math.tu-berlin.de

Prof. Dr. Th. Sonar, Institut für Analysis, Technische Universität Braunschweig,
Pockelsstraße 14, 38106 Braunschweig
E-Mail: t.sonar@tu-bs.de

Bezugshinweis

Früher erschienene Bände (ab Band 68) des „Jahresberichts der Deutschen Mathematiker-
Vereinigung“ können durch den Buchhandel oder den Verlag bezogen werden.

Nachdruck der Bände 41 bis 67 liefert: Swets & Zeitlinger, Heereweg 347 b, POB 810,
NL-2160 SZ Lisse/Holland

Vorwort

Dieses Heft steht ganz im Zeichen der Angewandten Mathematik. Herr Klein beschäftigt sich in seinem Artikel mit mathematischen Modellen, die in der Klimaforschung eine Rolle spielen. Das Klimasystem ist zu komplex, um Untersuchungen im Labormaßstab zu erlauben. Deswegen benötigt man mathematische Methoden, um Modellierungen zu entwerfen und Computersimulationen durchführen zu können. Neben der Komplexität des Systems sind dabei die verschiedenen Skalen des Geschehens und ihre Wechselwirkung von entscheidender Bedeutung. Der Autor gibt einen Überblick über neue Ansätze und Forschungsergebnisse. Bei diesem Artikel handelt es sich um eine Ausarbeitung der Gauß-Vorlesung des Verfassers an der TU Braunschweig.

Herr Natterer behandelt in seinem Artikel mathematische Methoden in der Bildverarbeitung. Dabei geht es ihm insbesondere um die Rekonstruktion von Bildern. Die diskutierten Verfahren umfassen verschiedene Methoden der Tomographie, von denen die klassische Röntgen-Computertomographie nur ein Beispiel darstellt. Mathematisch geht es hierbei um Umkehrprobleme partieller Differentialgleichungen. Der Autor gibt in seinem Beitrag nicht nur einen Überblick über diverse Verfahren, sondern diskutiert auch, inwieweit hierfür eine einheitliche Theorie entwickelt werden kann.

Mein besonderer Dank gilt dem Verlag, der es ermöglicht hat, in diesem Heft zahlreiche Abbildungen farbig zu drucken.

Auch in dieser Ausgabe des Jahresberichts findet sich eine Reihe aktueller Buchbesprechungen.

K. Hulek



Mathematik im Klima des globalen Wandels

(Gauß-Vorlesung, TU-Braunschweig, 10. Juni 2005)

Rupert Klein

Abstract

- Mathematics Subject Classification: 86A 10
- Keywords and Phrases: Klimaforschung, Klimafolgenforschung, multiple Skalen

Die Klima- und Klimafolgenforschung sind damit konfrontiert, dass sich ihr Studienobjekt – also das Erdsystem bzw. wesentliche Teile dessen – nicht im Labormaßstab nachbilden und im Detail studieren lässt. Es ist einfach zu groß und zu komplex. Beobachtung und Messung am Original sowie Modellierung und Computersimulation kommen deshalb in diesem Forschungsfeld besondere Bedeutung zu. In diesem Artikel erläutere ich zunächst zwei wesentliche Quellen der Systemkomplexität, nämlich die Vielzahl verschiedenartiger am Systemgeschehen beteiligter Prozesse und die Wechselwirkung einer Vielzahl sehr unterschiedlicher Raum- und Zeitskalen. Zur Bewältigung beider Arten von Herausforderung kann die Mathematik Beträchtliches beitragen. Ich beschränke mich im Folgenden aber auf die Skalenproblematik und zeige auf, welche konkreten Fragen die besagten Skalenwechselwirkungen aufwerfen und welcherlei Antworten die Angewandte Mathematik parat hält.

Eingegangen: 27.09.2006

R. Klein, Konrad-Zuse-Zentrum für Informationstechnik Berlin (ZIB),
Division Scientific Computing, Numerical Analysis and Modelling,
Takustraße 7, D-14195 Berlin-Dahlem, rupert.klein@zib.de

DMV

**JAHRESBERICHT
DER DMV**

© B. G. Teubner 2007

Vom Hockeyschläger und dem Schiff im Eismeer

Immer wieder wird die berechtigte Frage gestellt, ob die stürmischen Wetterepisoden, die wir in den vergangenen Jahren weltweit beobachten konnten oder erlebt haben, denn nun etwas mit einem globalen Wandel des Weltklimas zu tun hätten oder nicht, und ob ggfs. die Menschheit bei der Erzeugung dieses Wandels eine Rolle spiele. Die vieldiskutierte sogenannte Hockeyschlägerkurve von Michael Mann und Mitarbeitern, die in Abbildung 1 wiedergegeben ist, soll hier als Beispiel dienen. Die aus vier verschie-

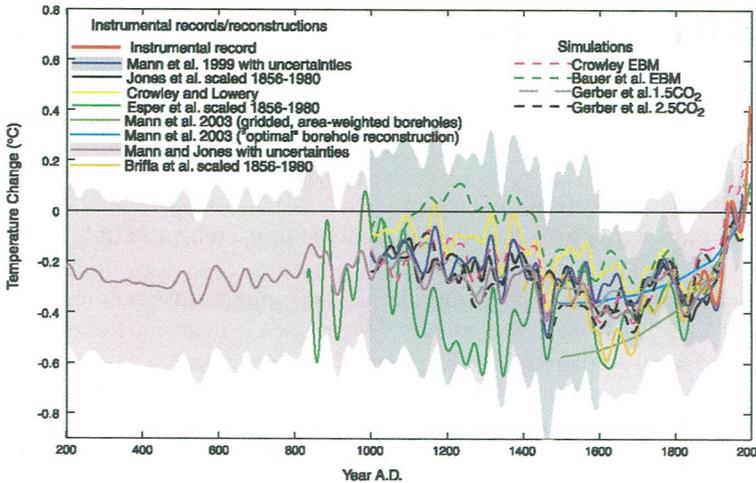


Abbildung 1: Rekonstruktionen der über 40 gleitende Jahre und die Nordhalbkugel gemittelten Bodentemperatur nach [Mann et al. (2003)]

denen Klimasimulationen gebildeten Zeitverläufe der über gleitende 40 Jahre und die Nordhalbkugel gemittelten bodennahen Temperaturen in der Atmosphäre verglichen Mann et al. mit Vergleichdaten, die aus einer Vielzahl verschiedenartiger indirekter Indikatoren rekonstruiert wurden. Zu diesen Indikatoren gehören etwa bestimmte Eigenschaften von Baumringen, Korallen, Eisbohrkernen und Sedimenten in Seen sowie Berichte aus historischen Dokumenten. Simulationen und Rekonstruktionen zeigen, dass die besagte gemittelte Temperatur während der letzten 1800 Jahre um bis zu ca. 0,6 °C unterhalb der heute beobachteten Mitteltemperatur gelegen haben dürfte. Im Verlauf der vergangenen etwa 150 Jahre wurden mehr und mehr Beobachtungsstationen errichtet, und Mann et al. ergänzen in ihrem Diagramm die rekonstruierten Temperaturverläufe der Vergangenheit durch aktuelle Beobachtungsdaten. Die sich ergebende Kurve weist gegen das Jahr 2000 einen starken Aufwärtstrend auf, der mit einem Temperatureauschlag jenseits aller Werte verbunden ist, die für die letzten 1800 Jahre rekonstruiert wurden. Die Form der Kurve legt nicht nur den Gedanken an einen quer liegenden Hockeyschläger nahe sondern auch denjenigen an einen drastischen Temperaturanstieg auf der Nordhalbkugel während der letzten 150 Jahre.

Die Mann'sche Studie wurde vielfach angefochten und verteidigt, wobei sich die Diskussionen um die korrekte Interpretation der Rekonstruktionen, um die Vorgehens-

weise bei den notwendigen statistischen Auswertungen und ähnliche Aspekte drehte. Ich möchte mich hier mit einer Stellungnahme zurückhalten, und den Blick stattdessen auf einen anderen Aspekt der gesamten Problematik lenken, der mir zur Motivation sozialer Grundlagenforschung wichtiger erscheint.

Sehr viel weniger umstritten als die Hypothese, dass wir es auf der Erde mit einer sich deutlich ankündigenden „hausgemachten“ globalen Erwärmung zu tun haben, ist die Aussage, dass die Verbrennung fossiler Brennstoffe in der Zeit seit der Industrialisierung den CO_2 -Gehalt der Atmosphäre um einen Betrag verändert hat, der vergleichbar mit ihrem gesamten CO_2 -Gehalt vor der Industrialisierung ist. Dies wird am Diagramm in Abbildung 2 deutlich, welches Rekonstruktionen des CO_2 -Gehalts der Atmosphäre und der globalen Mitteltemperatur über einen sehr langen Zeitraum in der Vergangenheit zeigt. Ähnlich wie im Diagramm von Mann et al. sind in Abbildung 2 aktuelle Messdaten für die CO_2 -Kurve zusätzlich zu den aus arktischen Eisbohrkernen gewonnenen Rekonstruktionen eingetragen. Das in der Wissenschaft kaum umstrittene Ergebnis ist, dass der CO_2 -Gehalt der Atmosphäre in der jüngeren Vergangenheit seit der Industrialisierung sich um ca. 30% vergrößert hat. Wir wissen zudem, dass die dementsprechende Gesamtmenge an CO_2 um ca. 50% kleiner ist, als die von der Menschheit insgesamt via Verbrennung bisher in die Atmosphäre entlassene Menge an fossilem Kohlenstoff. Die andere Hälfte haben die Ozeane mittlerweile absorbiert. Fazit ist, dass der

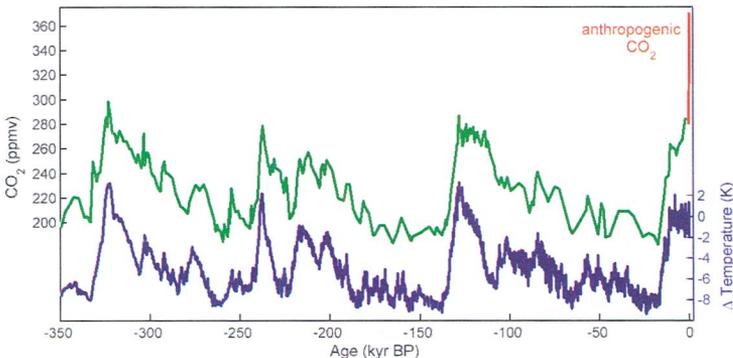


Abbildung 2: Temperatur und CO_2 -Gehalt der Atmosphäre während der letzten 350 000 Jahre. Abbildung reproduziert aus [Rahmstorf et al. (2004)]; Originaldaten aus [Petit et al. (1999)], [Lorius et al. (1990)], [Houghton et al. (2001)].

Mensch wohl unumstritten eine der wichtigsten klimarelevanten Eigenschaften der Atmosphäre durch seine industriellen und privaten Aktivitäten beträchtlich verändert hat. In ähnlicher Weise sind wir dabei, die Konzentrationen anderer Treibhausgase sowie Art und Zusammensetzung der in der Atmosphäre schwebenden Aerosole zu beeinflussen. Durch aktive Landnutzung verändern wir zudem die Eigenschaften der Erdoberfläche bezüglich Strahlungsabsorption und -reflektion sowie bezüglich des für das Klima ganz zentralen Wasserhaushaltes. Die Liste der Beispiele ließe sich fortsetzen. All diese Veränderungen wirken sich in der einen oder anderen Weise auf die globale Klimaentwicklung aus, wobei wir beim derzeitigen Stand des Wissens noch nicht behaupten kön-

nen, dass wir verstehen, welche Effekte all diese Veränderungen in ihrer Kombination denn nun genau hervorrufen bzw. hervorrufen werden.

Das Weltklima hat sich bis zum heutigen Zeitpunkt allerdings keineswegs so gewandelt, dass dies für jeden von uns offensichtlich wäre. Zwar mehren sich die statistischen Indikatoren, dass sich durchaus Ungewöhnliches tut. Die Evidenz ist aber bisher nicht, wie man so schön sagt, überwältigend, weshalb auch die teils hitzigen Kontroversen um dieses Thema nicht abreißen.

Hier kommt der mir an dieser Stelle wichtige Aspekt des Themas: Die oben beispielhaft angeführten Entwicklungen sind zum überwiegenden Teil das Resultat der industriellen Tätigkeit nur eines Bruchteils der Menschheit. Bevölkerungsstarke Schwellen- und Entwicklungsländer beanspruchen aber nun auch, und natürlich mit Recht, ihren Platz in der industrialisierten Welt, so dass das bisherige globale exponentielle Wirtschaftswachstum von etas mehr als 2% pro Jahr [Maddison (2001)] auf absehbare Zeit weiterbestehen wird. Da weder die etablierten Industrienationen noch die nachziehenden Länder schlagartig auf neue, die Umwelt wenig beeinflussende Technologien umsteigen werden, ist klar, dass wir den Planeten, auf dem wir leben, massiv verändern werden. Aufgrund von Demographie und Wirtschaftswachstum führt daran gar kein Weg vorbei, egal, ob wir derzeit bereits die Auswirkungen unseres Agierens in Form eines Klimawandels zu spüren bekommen oder nicht. In der Ingenieursausbildung zur Thermodynamik, die ich ja auch geniessen durfte, trat das Umfeld der betrachteten technischen Systeme im Allgemeinen in der Form eines „unendlich ausgedehnten Wärmebades“ o.ä. in Erscheinung. Diese Zeiten sind vorbei! Wir müssen uns als Menschheit klarmachen, dass wir unsere globale Umwelt drastisch verändern können und dass wir dies mit ziemlicher Sicherheit auch tun werden.

In diesem Zusammenhang gefällt mir das Bild von der Arche im Eismeer. Stellen wir uns eine Arche vor, die mit ihrer Besatzung im kalten, nebligen Eismeer herumdümpelt. Es ist lausig kalt und ungemütlich und es wäre ganz nett, von dort mit Schiff und Maus zu verschwinden. Man macht sich also daran, für die Arche einen Antrieb zu bauen. Das gelingt auch recht gut, und bald wird klar, dass die Maschine nicht nur groß genug sein wird, das Schiff zu bewegen, sondern dass sie es sogar auf große Geschwindigkeit beschleunigen können. Klar, dass sich unsere Archisten jetzt Gedanken darüber machen, wie man, einmal in Fahrt, das Schiff lenken und die Leistungsabgabe des Antriebs kontrollieren kann – allerdings ohne diesen abzuwürgen, denn das Anwerfen ist jedesmal ein schwieriges Unterfangen. Gleichzeitig überlegen sich unsere Freunde, was sich wohl alles im dichten Nebel um das Schiff herum verstecken könnte, denn ein paar gefährlich große Eisberge hat man unterwegs ja schon in nächster Nähe gesehen. Man wird also beginnen, die nähere Umgebung sorgfältig zu erkunden und Techniken zu entwickeln, mit deren Hilfe man sie auch während der Fahrt im Auge behalten können wird. Man wird vernünftigerweise langsam und vorsichtig losfahren, ein paar Manöver durchführen, um festzustellen, wie sich das große Schiff so steuern lässt, und erst richtig Gas geben, wenn das Fahrtziel festgelegt und der Weg dorthin einigermaßen klar ist.

Arche und Eismeer entsprechen in diesem Bild unserem Planeten und seinem „Zustandsraum“ (wer weiss, ob der Begriff hier wirklich angebracht ist?), die Eisberge entsprechen Klima- und anderen Zuständen, unter denen es richtig ungemütlich würde, und die Maschine entspricht der globalen Ökonomie.

Komplexitäten

Klima- und Klimafolgenforschung haben sich mit mindestens zwei sehr unterschiedlichen Arten von Komplexität auseinanderzusetzen. Die erste Art der Komplexität besteht im Wechselspiel einer geradezu unüberschaubaren Vielzahl verschiedener Einzelprozesse. Das „Intergovernmental Panel for Climate Change“ fasst diese Komplexität in einer Graphik zusammen, die hier in Abbildung 3 wiedergegeben ist, [Houghton et al. (2001)]. Die Bewältigung dieser Art von Komplexität auf wissenschaftlicher Basis

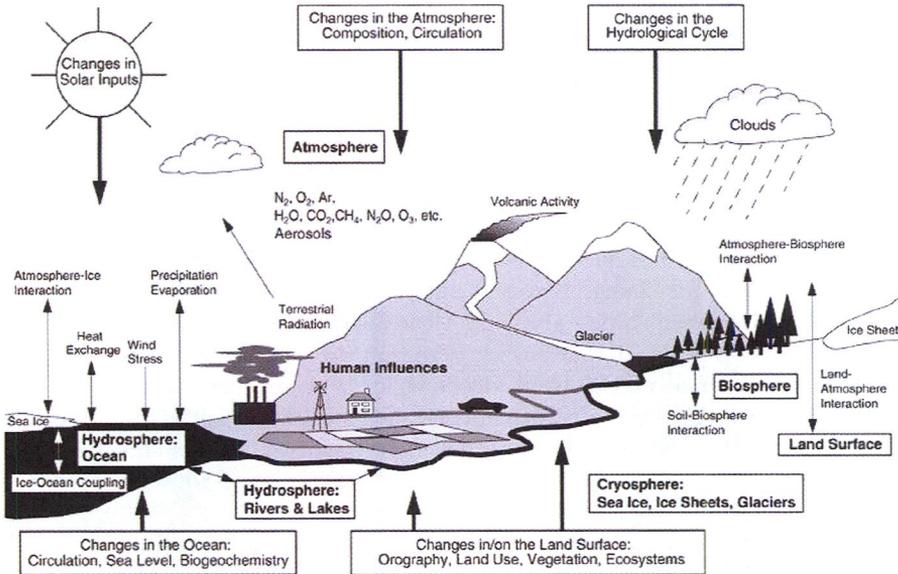


Abbildung 3: Die Vielfalt der am Klimasystem beteiligten Prozesse ist schier unüberschaubar, wie das „Intergovernmental Panel for Climate Change“ in seinem dritten „Assessment Report“ mit dieser Graphik veranschaulicht. [Houghton et al. (2001)].

erfordert interdisziplinäre Forschung auf höchstem Niveau. Die Mathematik als Querschnitts- und Strukturwissenschaft, als Methodenlieferantin und als gemeinsame, präzise Sprache sollte meines Erachtens nach unabdingbarer und zentraler Bestandteil eines entsprechenden Forschungsprogramms sein. Um dies ein wenig zu untermauern, werde ich im Folgenden auf die zweite allgegenwärtige Quelle von Komplexität im Klimasystem eingehen, nämlich auf das Phänomen der Wechselwirkungen zwischen multiplen Skalen. Dabei werde ich versuchen, einen kleinen Einblick in entsprechende mathematische Forschungsbeiträge zu geben. Der Begriff der „Skala“ ist ein schillernder. Bevor ich ihn im nächsten Abschnitt anhand eines einfachen abstrakten Beispiels und für eine bestimmte Klasse mathematischer Probleme präzisiere, möchte ich hier noch aufzeigen, in welch äußerst unterschiedlichen Zusammenhängen er uns in der Klima- und Klimafolgenforschung begegnet.

Wie wir schon gesehen haben, spielt die globale Ökonomie als Antriebsaggregat für unsere Reise durch das Eismeer des Erdsystemzustandsraums eine zentrale Rolle. Die Marktwirtschaft beruht u.a. auf dem Wettbewerb zwischen oft einigen wenigen Anbietern vergleichbarer Produkte und einer riesigen Zahl von (potentiellen) Käufern, die sich zwischen den Anbietern entscheiden können. Jede einzelne Kaufentscheidung macht im großen Schema des betrachteten Marktes kaum etwas aus. Eine in der Statistik am Quartalsende sichtbare Verschiebung des Marktanteils eines Wettbewerbers um nur ein Prozent, hinter der dann tausende und abertausende einzelner Kaufentscheidungen stehen, kann einen Markt aber schon ganz beträchtlich in Unruhe bringen. Hier wechselwirkt die kleine „Skala“ der einzelnen Käufer mit der großen Skala des gesamten Marktes für das betrachtete Produkt. Die Unterschiedlichkeit der beteiligten Skalen lässt sich dabei durch die Kleinheit einer dimensionslosen Zahl, nämlich durch das Verhältnis der Anzahl der Anbieter eines Produkttyps, dividiert durch die Anzahl der potentiellen Käufer, charakterisieren. Im betrachteten Beispiel zeigt diese Zahl z.B. an, wie klein der Einfluss einer einzelnen Kaufentscheidung auf den gesamten Markt ist, und ihr Kehrwert ist ein Maß dafür, wieviele Käufer sich quasi „zusammenrotten“ müssen, um am Markt etwas zu bewirken.

Die Problematik multipler Skalen begegnet uns in vielfältiger Weise auch im Kernbereich der Klimaforschung, in dem es um die gemeinsame zeitliche Entwicklung von Atmosphäre, Ozeanen sowie Land- und Meereisschichten geht. Betrachten wir ein globales Klimamodell, das darauf ausgelegt ist, nur die groben, planetaren Verteilungen von Temperatur, Feuchte, Wolkenbedeckung, etc. zu berechnen. In einem solchen Modell wird man Teilmodelle einbinden müssen, die beschreiben, inwiefern die in Äquatornähe eingestrahlte überschüssige Sonnenenergie in der Atmosphäre umverteilt wird. Im Fachjargon heißt dies, dass die mittleren meridionalen (in Nord-Südrichtung weisenden) Wärmeflüsse zu bestimmen sind.

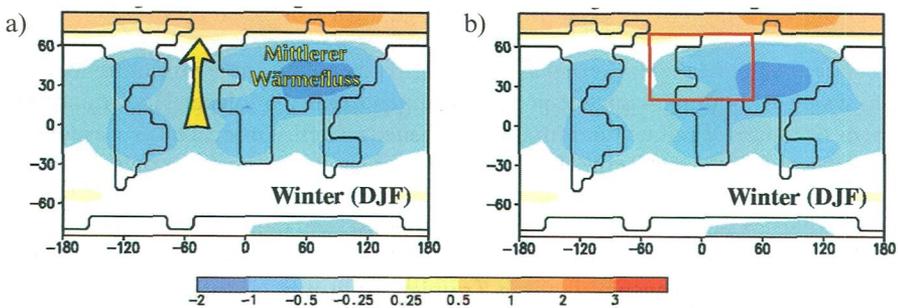


Abbildung 4: Änderung der über die Wintermonate der Nordhalbkugel (Dezember, Januar, Februar) und über großräumige Teilgebiete von ca. 3000 km Ausdehnung gemittelten bodennahen Temperaturen zwischen 8000 Jahren vor heute und 200 Jahren vor heute. Die Abbildungen sind angepasst aus [Brovkin et al. (2002)], Abb. 7. Die Annotationen (gelb in a), rot in b)) wurden vom Autor zur Illustration hinzugefügt. Die Ergebnisse beruhen auf Modellrechnungen auf der Basis des CLIMBER-2-Modells, [Petoukhov et al.(2000)].

Abbildung 4 a) zeigt ein typisches Simulationsergebnis, das mit einem solchen sogenannten Klimamodell mittlerer Komplexität erzielt wurde, [Petoukhov et al.(2000)]. Es

sind die Änderungen der langfristig und großräumig gemittelten Temperaturen in der Atmosphäre über einen Zeitraum von 8 000 Jahre vor heute bis 200 Jahre vor heute dargestellt. Wie in der Abbildung mit den gelben, vom Autor hinzugefügten Annotationen angedeutet, benötigt man für eine realistische Berechnung solcher Effekte eine gute Abschätzung der polwärts gerichteten Wärmeflüsse. Diese kommen wie folgt zustande:

Wie wir wissen, ist die Atmosphäre in ständiger, teils heftiger Bewegung. Um einen Eindruck zu gewinnen, was das bedeutet, schauen wir uns einen Ausschnitt des globalen Geschehens in den mittleren Breitengraden einmal näher an, wie er in Abbildung 4 b) angedeutet ist. Dabei sehen wir von der sehr großräumigen und langfristigen Mittelung ab, die den Ergebnissen in Abbildung 4 zugrundeliegt. Wir finden, was auch nicht verwunderlich ist, ein Muster, das das wohlbekannte ständige Wechselspiel von Hoch- und Tiefdruckgebieten in den mittleren Breitengraden widerspiegelt. Wie in Abbildung 5 a) skizziert, induzieren die Hoch- und Tiefdruckgebiete zirkulierende Winde, die sich wiederum überlagern können und einen Nettotransport von Energie und Impuls in Nord-Süd-Richtung induzieren.

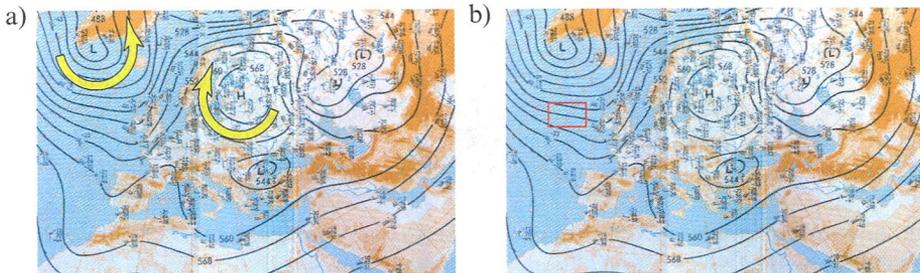


Abbildung 5: Auszug aus einer Wetterkarte mit Modifikationen des Autors; Wetterkarte zur Verfügung gestellt von Dr. Peter Něvir, Meteorologie, Freie Universität Berlin

Schon über etwa ein Jahr hinweg, und umso mehr über Zeiträume von tausenden von Jahren, wie in Abbildung 4 angedeutet, schwimmen hunderte solcher Hochs und Tiefs an einem beliebigen Punkt in den mittleren Breitengraden vorbei. Dabei werden teils eher nordwärts gerichtete Winde, teils südwärts gerichtete beobachtet, und der Nettotransport von Energie, Impuls, etc. kann nur über eine geeignete Mittelwertbildung errechnet werden. Welche Größe dabei wie zu mitteln ist, will man wirklich die großskalige, langfristige Entwicklung des betrachteten Systems modellieren, wird manchem meteorologisch und strömungsphysikalisch Trainierten intuitiv einleuchten. Im nächsten Abschnitt werde ich aber anhand eines einfachen Beispiels erläutern, dass die Mathematik hier Richtlinien anbietet, anhand derer sich die eigene Intuition sozusagen „eichen“ lässt.

Bevor wir dazu übergehen, machen wir uns aber noch klar, dass die Mehrskaligkeit mit dem Verhältnis von globaler Klimaentwicklung und diesen sogenannten „synoptischen Fluktuationen“ (also den wandernden Hoch- und Tiefdruckgebieten) noch längst kein Ende hat. Zunächst impliziert eine Wetterkarte wie in Abbildung 5 b) selbst wiederum eine raum-zeitliche Mittelung, diesmal allerdings nur über Zeiträume von einigen Stunden bis zu einem halben Tag und über Distanzen von 500 bis 1 500 Kilometern. Be-

trachten wir daher einen noch kleineren Ausschnitt (s. Abbildung 5 b)) und reduzieren die raum-zeitlichen Spannen der Mittelung auf ca. 10-30 min und 1 km, so bewegen wir uns in der Welt der einzelnen Wolken und Wolkensysteme. Abbildung 6 veranschaulicht dies eindrucksvoll anhand der Photographie einer marinen Wolkenformation, die mir dankenswerterweise von Peter T. Taylor zur Verfügung gestellt wurde.



Abbildung 6: Ausbildung einer marinen Cumulus-Wolke. Aufnahme von P.T. Taylor, Oceanography Centre, Southampton, UK.

Wie sich schon die synoptischen Fluktuationen (Hochs und Tiefs) kumulativ auf das globale Klima auswirken, so haben die vielen einzelnen Wetterereignisse ihrerseits einen wichtigen Netto-Einfluss auf die Entwicklung der synoptischen Muster. Und auch hier hört die Hierarchie der wechselwirkenden Skalen nicht auf, geht sie doch genaugenommen über die Dynamik der Wolken- und Regentropfen bis hinunter zu molekularen Prozessen, etwa bei der Entstehung eines Tropfens an einem festen Staubteilchen. Umgekehrt, und nicht zu vergessen, bietet das globale Klima erst die Umgebung, in der sich die synoptischen Fluktuationen entwickeln und miteinander wechselwirken können, und die Hoch- und Tiefdruckgebiete sind die „Dampfkessel“, in denen sich Wolken und andere kleinskalige Phänomene zusammenbrauen. Es gibt also ein zweiseitiges Wechselspiel von kleinen zu großen Skalen und zurück.

Im nächsten Abschnitt erläutere ich anhand eines einfachen Beispiels, wie sich solche mehrskaligen Prozesse mit mathematischen Methoden systematisch untersuchen lassen.

„Textaufgaben“

Das Anliegen dieses Abschnitts ist zweifach. Zum einen erläutere ich eine Methode, die es in einer großen Klasse von Problemen erlaubt, systematisch mit multiplen Skalen umzugehen. Zum anderen möchte ich aufzeigen, dass wir es in der Wissenschaft immer wieder mit einer Art kniffliger Textaufgaben zu tun haben, bei der wir erst losrechnen können, nachdem wir die zunächst nur umgangssprachlich formulierte wissenschaftliche Fragestellung sauber in eine mathematische Aufgabenstellung übersetzt haben.

Wir betrachten hier zur Illustration ein äußerst einfaches System, nämlich das eines von außen angetriebenen Oszillators mit kleiner Masse und kleiner Dämpfung (s. Abbildung 7). Wollte uns der Physiklehrer ein wenig an der Nase herumführen, so könnte er zu diesem System die folgende „Textaufgabe“ formulieren:

In einem Versuch ist eine Kugel vermittels Feder und Dämpfer am Boden befestigt. Ein Dämon übt eine andauernde, oszillierende Kraft auf sie aus. Was passiert?

Wir gehen natürlich auf die Barrikaden und beschweren uns, dass diese Aufgabe ja wohl schlecht gestellt sei, da wir über jegliche Details des Versuchsaufbaus und der dämonischen Intentionen im Dunkeln gelassen werden. Im Gegenzug fragt uns der Physiklehrer, welche Informationen genau wir denn bräuchten, um das Problem zu lösen. Und hier haben wir eine Parallele zur Klima- und Klimafolgenforschung: Wir sind mit einem komplexen System konfrontiert, über das wir zunächst nur sehr wenig wissen. Zwar gibt es eine Menge Beobachtungen. Jedoch bleibt es uns überlassen, uns zu überlegen, welche Aspekte unserer Umwelt für einen globalen Wandel eine wesentliche Rolle spielen können, und welche wir zunächst nicht betrachten müssen, da sie nur kleine Nebeneffekte erzeugen. Und natürlich müssen wir uns auch überlegen, wie die dann noch in Frage kommenden Teile des Systems eigentlich zusammenspielen, und wie man ihr Zusammenspiel quantitativ beschreiben kann.

Die Mathematik kann bei der Suche eines Weges durch diesen Aufgabendschungel eine sehr hilfreiche Rolle spielen, indem sie uns hilft, unsere physikalische Intuition präzise zu fassen. Schauen wir uns das einmal am Beispiel der vom Dämon in Bewegung gesetzten Kugel an der Wand an:

Zunächst benötigen wir Informationen über den Aufbau des Systems. Im vorliegenden Fall also über folgende

Systembausteine	Masse der Kugel	:	ε
	Dämpfungskonstante	:	δ
	Federkonstante	:	C

Sodann müssen wir uns klarmachen, welche quantitativen Angaben wir machen können, um den momentanen Zustand des Systems zu beschreiben. Im vorliegenden Fall sind das die

Zustandsgrößen	Auslenkung der Kugel	:	y
	Geschwindigkeit der Kugel	:	\dot{y}
	Beschleunigung der Kugel	:	\ddot{y}
	etc.		

Wie wir noch sehen werden, sind diese Variablen nicht unbedingt alle voneinander unabhängig. Sind sie es nicht, genügt eine geringere Anzahl von Angaben, um den Systemzustand festzulegen.

Als nächstes notieren wir äußere Einflüsse, denen das System ausgesetzt ist. Im Beispiel also

Äußere Einflüsse

Kraftwirkung durch den Dämon : $F(t)$

Letztlich überlegen wir uns die Gesetzmäßigkeiten, nach denen das System funktioniert, was im vorliegenden Fall natürlich das Newtonsche Bewegungsgesetz sein wird, nach dem „Masse mal Beschleunigung gleich der Summe der angreifenden Kräfte“ ist. Das lässt sich in mathematischer Notation wie folgt:

Gesetzmäßigkeiten

$$\varepsilon \ddot{y} = F - \delta \dot{y} - Cy. \quad (1)$$

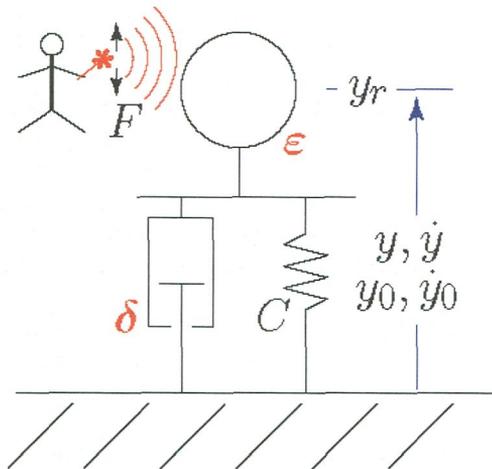


Abbildung 7: Eine Kugel ist mittels Feder und Dämpfer an einer Wand befestigt. Ein Dämon übt eine andauernde, oszillierende Kraft auf sie aus. Was passiert?

Bekanntlich kann die Bewegung der Masse in Richtung senkrecht zur Wand nun dargestellt werden als die Lösung des folgenden (mathematischen) Anfangswertproblems:

Gegeben ε, δ, C und der zeitliche Verlauf $F(t)$ der Dämonenkraft, finde einen zeitlichen Verlauf der Auslenkung $y(t)$, der die

Anfangsbedingungen

$$y(0) = y_0 \quad \text{und} \quad \dot{y}(0) = \dot{y}_0 \quad (2)$$

sowie die Differentialgleichung (1) erfüllt.

In diesem einfachen Beispiel war die Bestimmung all der Zutaten, derer es bedarf, um eine vernünftig gestellte „Schulaufgabe“ zu konstruieren, mehr oder weniger trivial. Systembausteine, Zustandsgrößen, äußere Einflüsse und Gesetzmäßigkeit sind uns

beim Masse-Feder-Dämpfer-System ja hinlänglich bekannt. Jeder dieser Aspekte bedarf aber sorgfältigen Nachdenkens und manchmal eines langen Ringens, wenn man konkrete Fragen im Zusammenhang mit dem Klima- oder Erdsystem beantworten möchte. So ist z.B. durchaus noch nicht völlig geklärt, welche Einfluss- und Zustandsgrößen, welche äußeren Einflüsse und welche Gesetzmäßigkeiten man sich anschauen sollte, will man etwa herausbekommen, ob wir bei einer mittleren, globalen Klimaerwärmung denn nun mit heftigeren Stürmen und Niederschlägen oder eher mit ausgedehnten Trockenperioden in unseren Breiten- und Längengraden zu rechnen haben. Im Gegenteil ist bereits die Bestimmung dieser Modellierungsvoraussetzungen ein wichtiger Teilschritt zur Lösung dieser Forschungsaufgabe.

Wenden wir uns aber nun den Lösungen zu.

Multiple Skalen

Im vorliegenden Beispiel des Anfangswertproblems für den (linearen) Oszillator (1), (2) sind wir in der glücklichen Lage, die exakten Lösungen zu kennen und wollen sie uns auch gleich näher anschauen. Auf Methoden zur näherungsweise Lösung solcher Probleme, die heranzuziehen sind, wenn die exakten Lösungen nicht bekannt sind, gehe ich später noch ein.

In Abbildung 8 sind einige Verläufe der Lösung für festgehaltene Anfangsdaten $y_0 = 1.3$, $\dot{y}_0 = 0$ und festgehaltene Federkonstante $C = 1$, aber variierende Werte von Masse und Dämpfung gezeigt. Die Graphen tragen die Zeit auf der horizontalen und die Auslenkung der Masse auf der vertikalen Achse. Von Abbildung 8 a) über b) nach c) nehmen Masse ε und Dämpfung δ jeweils um einen Faktor 10 ab. Betrachtet man die Bilder in dieser Reihenfolge, so fällt eine Tendenz ins Auge. Offenbar gibt es eine langsame Schwingung sozusagen im Hintergrund, die durch die rote, gestrichelte Linie repräsentiert wird, und um die herum die exakten Lösungen der Anfangswertprobleme oszillieren. Mit kleiner werdender Masse und Dämpfung werden diese Oszillationen zudem immer schneller. Etwas subtiler, aber ebenfalls deutlich erkennbar ist, dass die Abweichungen von der roten Hintergrundskurve im Verlaufe der langsamen Schwankungen systematisch kleiner werden – man sagt, dass es sich bei den schnellen Oszillationen um gedämpfte Schwingungen handelt.

Auf der Basis von Abbildung 8 a) allein käme man wahrscheinlich gar nicht auf die Idee, dass die Lösung eine Überlagerung eines schnellen, langsam abklingenden und eines zweiten langsamen Prozesses sein könnte. Zu der Überzeugung gelangen wir erst, wenn wir die Sequenz der drei Abbildungen zusammen sehen und – zunächst nur mit dem Auge – den Trend zur Separation der beiden Prozesse bei kleiner werdenden Parametern ε und δ wahrnehmen.

Dies wird noch deutlicher in Abbildung 9, in der für drei voneinander unabhängige Zeitabschnitte einmal die exakte Lösung bereinigt um die langsame Hintergrundvariation (rote Linie im oberen Graphen) aufgezeichnet ist. Bis auf eine Stauchung der Amplitude sehen die drei Schwingungsverläufe tatsächlich sehr ähnlich aus, was uns in der Vermutung bestärkt, dass sie sich „mit ein und derselben Mathematik“ beschreiben lassen werden.

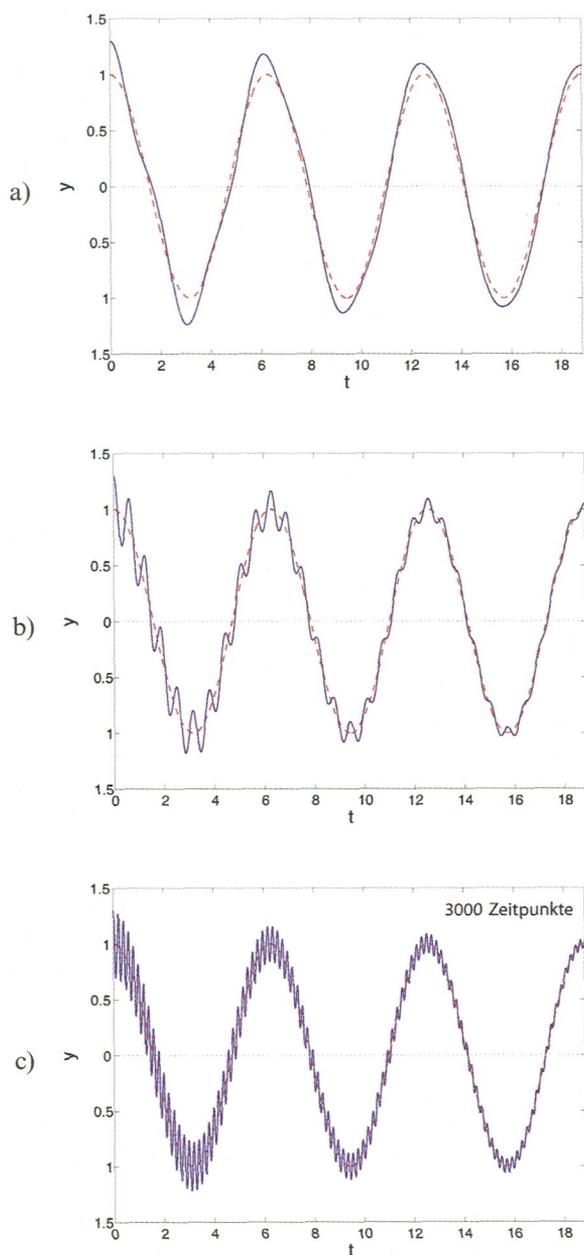


Abbildung 8: Exakte Lösungen des Anfangswertproblems aus (1), (2) für a): $\varepsilon = 0.1$, $\delta = 0.02$; b): $\varepsilon = 0.01$, $\delta = 0.002$; c): $\varepsilon = 0.001$, $\delta = 0.0002$.

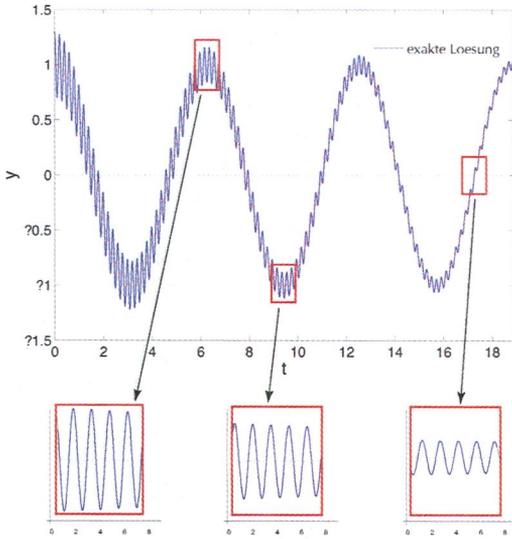


Abbildung 9: Bei näherem Hinsehen verstärkt sich der Eindruck, dass sich die exakte Lösung des Oszillatorproblems als zusammengesetzt aus zwei Prozessen mit sehr unterschiedlicher Oszillationsfrequenz auffassen lässt.

Näherungslösungen und fehlende Gitterpunkte

Die „Lösungen“ in den Abbildungen 8 habe ich natürlich nicht mit der Hand gezeichnet. Vielmehr habe ich die exakte Lösungsformel

$$y(t) = e^{-\frac{\delta}{2\varepsilon}t} \left(a \cos\left(\frac{\omega}{\sqrt{\varepsilon}} t\right) + b \sin\left(\frac{\omega}{\sqrt{\varepsilon}} t\right) \right) + A \sin(t) + B \cos(t) \quad (3)$$

mit

$$\begin{aligned} A &= \frac{\delta}{1 - \varepsilon} B \\ B &= \frac{1 - \varepsilon}{\delta^2 + (1 - \varepsilon)^2} \\ a &= y_0 - B \\ b &= \frac{\sqrt{\varepsilon}}{\omega} \left(\dot{y}_0 + \frac{a\delta}{2\varepsilon} - A \right) \\ \omega &= \sqrt{1 - \frac{\delta^2}{4\varepsilon}}, \end{aligned} \quad (4)$$

für eine lange Reihe von Zeitpunkten im Intervall $0 \leq t \leq 6\pi$ ausgewertet und ein Zeichenprogramm genutzt, um eine glatte (Näherungs-)Kurve durch die Wertepaare $(t_i, y(t_i))$ ziehen zu lassen. Das klingt zunächst einmal wie eine Trivialität – ist es aber nicht ganz, denn es bringt uns auf einen äußerst wichtigen Punkt:

Schon zur Auswertung solch relativ einfacher Formeln wie den obigen ziehen wir ganz selbstverständlich den Computer als Hilfsmittel heran. Kennen wir, wie beim Klimaproblem, die exakte Lösung des uns interessierenden mathematischen Problems nicht, so muss der Computer uns nicht nur bei der graphischen Darstellung der Lösung unter die Arme greifen, sondern bereits bei deren näherungsweise Bestimmung selbst.

An dieser Stelle laufen wir aber in ein massives Problem, denn unser Computer hat einen zwar nach unseren Vorstellungen riesigen, aber eben doch nur endlich großen Speicher und er rechnet zwar rasend schnell, aber eben doch mit endlicher Geschwindigkeit. Konsequenz ist, dass, wie auch beim Zeichnen der Kurven in Abbildung 8, approximierte (angenäherte) Werte der Lösung an nur endlich vielen ausgewählten Punkten, den Knotenpunkten eines Rechengitters, ausgerechnet werden können und als Surrogat für die wirkliche Lösung herhalten müssen. Rechenvorschriften auf die Beine zu stellen, die für ein gegebenes mathematisches Problem mit kontinuierlicher Lösung eine gute diskrete Näherung auf einem solchen Rechengitter liefern, ist Kerngeschäft der numerischen Mathematik. Wir gehen hier davon aus, dass solche Algorithmen zur Verfügung stehen, wenn wir sie brauchen (bzw. dass die KollegInnen vom Mathe-Fachbereich diese bei Bedarf entwickeln können), und wenden uns einer anderen Problematik zu, die im gleichen Zusammenhang aufkommt.

Betrachten wir die beiden Erdkugeln in Abbildung 10. Die rechte Abbildung zeigt ein Rechengitter, wie es Klimamodelle der nächsten Generation aufweisen könnten. Es handelt sich um ein sogenanntes adaptives Gitter, bei dem die Dichte der Gitterpunkte in einem gegebenen Teilgebiet nach vorgebbaren Kriterien gesteuert werden kann. Ein solches Gitter erlaubt es also, die Rechenleistung da zu konzentrieren, wo sozusagen die Musik spielt. Modelle, die etwa die Alpen nicht in hinreichendem Detail darstellen, können deren wichtige Rolle als Wetterscheide sowie die in der Umgebung der Alpen immer wieder auftretenden heftigen Witterungsereignisse nicht korrekt wiedergeben, s. auch [Imboden et al. (1998)].

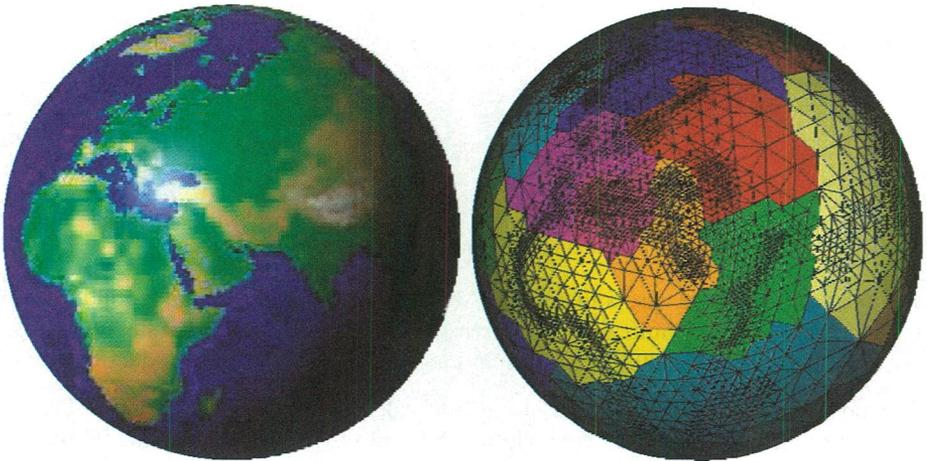


Abbildung 10: Erdkugel und kontinentfokussiertes Rechengitter.

Das abgebildete Gitter wird man genau so zwar in einer Klimarechnung nicht finden. Die gezeigte Gitterauflösung, also der typische Abstand zwischen Gitterpunkten, ist aber durchaus realistisch für heutige Klimasimulationen. Viel feinere Gitter sind selbst auf den größten heute verfügbaren Rechenmaschinen nicht realisierbar, denn die verwendeten Rechengitter sind dreidimensional und nicht, wie in der Abbildung, nur zweidimensional, und es muss eine sehr große Zahl von Prozessen und Variablen dargestellt werden.

Damit wird das Problem deutlich, auf das ich hinaus will: Globale Verteilungen, etwa der Temperatur, wie in Abbildung 4 dargestellt, oder die Druckfelder der Hoch- und Tiefdruckgebiete aus Abbildung 5 werden auf einem solchen Gitter gut repräsentiert, Wolkenmuster mit typischen Abmessungen von einigen Kilometern, wie in Abbildung 6, oder noch kleinskaligere Phänomene aber sicherlich nicht. Wenn solche wichtige Teilprozesse, wie Wolkenbildung und der assoziierte Niederschlag, aber gar nicht im Detail berechnet werden, wie kann man da hoffen, aus solchen gitterbasierten Berechnungen eine gute Wettervorhersage oder Klimasimulation zu erhalten? Soll das gelingen, muss offenbar Detailinformation nachgeschoben werden.

Abbildung 11 macht die Konsequenzen einer zu wenig dichten Gitterpunktsverteilung anhand des einfachen Oszillatorproblems noch einmal deutlich. Es ist ein und dieselbe exakte Lösung einmal auf einem 3000 Punkte zählenden, einmal auf einem nur 150 Punkte zählenden Gitter dargestellt. Wäre uns die Gleichmäßigkeit der Oszillationen in der exakten Lösung nicht schon bekannt, und wäre die Grobgitterdarstellung ein wenig vom Graphikprogramm geglättet, so würden wir diese 150-Punkte-Darstellung möglicherweise für eine gute Näherung halten.

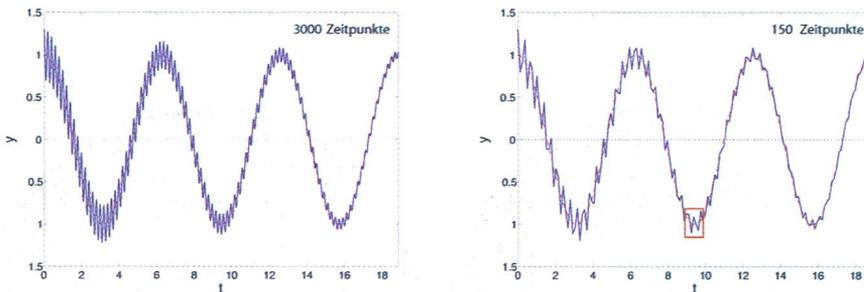


Abbildung 11: Darstellung der exakten Lösung des Oszillatorproblems auf einem Gitter mit 3000 Punkten (links) und auf einem Gitter mit nur 150 Punkten (rechts).

Was uns dabei entginge wird anhand von Abbildung 12 klar, die den in Abbildung 11 in rot angedeuteten Ausschnitt vergrößert wiedergibt. Die Grobgitterdarstellung gaukelt uns mehr oder weniger willkürliche Verbindungen einzelner Punkte auf der exakten Lösungskurve als „die Wahrheit“ vor, wobei sie uns offenbar nicht nur etwa jede zweite Oszillation verschweigt, sondern auch noch die Tatsache, dass die schnellen Oszillationen ein sehr gleichmäßiges Muster aufweisen.

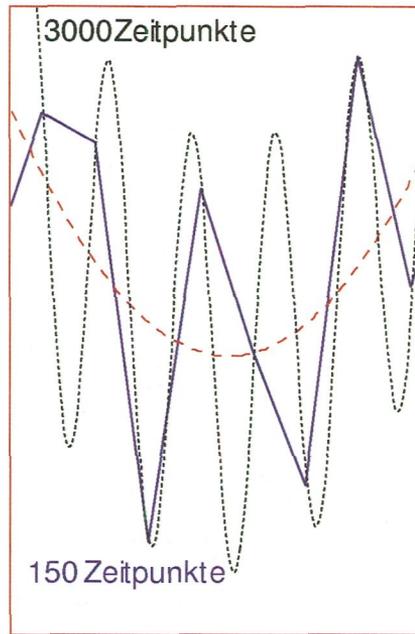


Abbildung 12: Vergrößerung des in Abbildung 11 in rot angedeuteten Ausschnitts mit Lösungsdarstellung auf dem groben und dem feinen Gitter.

Dabei ist die Situation hier noch harmlos, weil wir ja in diesem Fall die exakte Lösung kennen und daher wissen, dass zumindest diejenigen Punkte, die die Knoten im grobgitterigen Kurvenverlauf darstellen, korrekt sind. Richtig haarig wird es erst, wenn die bis zu einem bestimmten Zeitpunkt vorliegenden Grobgitterdaten neben dem Bewegungsgesetz für die Kugel die einzige Information darstellen, die wir in der Hand haben, um den nächsten Lösungspunkt zum nächstfolgenden Zeitschritt zu berechnen. Dann braucht es ausgefeilte mathematische Techniken, will man die zwischen den Zeitpunkten ablaufenden Prozesse und ihren Einfluss auf den Lösungsverlauf korrekt berücksichtigen.

Im nächsten Abschnitt schauen wir uns eine solche Technik näher an, die geeignet ist, die aufgeworfene Frage für Mehrskalenprobleme im Sinne der Abbildungen 8 und 9 zu beantworten. Wir werden sehen, wie wir systematisch zwei Sätze vereinfachter Gleichungen herleiten können, welche einerseits die schnellen Oszillationen der Kugel innerhalb begrenzter Zeitfenster beschreiben (Ausschnittbilder in Abbildung 9) und andererseits die langsame Veränderung dieser Oszillationen zwischen zeitlich weit auseinanderliegenden solchen Zeitfenstern charakterisieren.

Mehrskalenasymptotik für den Oszillator mit kleiner Masse und Dämpfung

Abbildung 13 zeigt nochmals die exakte Lösung unseres Oszillatorproblems mit den drei vergrößerten Ausschnitten wie in Abbildung 9. Stellen wir uns für einen Moment vor, die langsame Hintergrundbewegung entspräche dem Jahresgang einer geeignet gemittelten, für Europa typischen Temperatur. Die Mittelung könnte z.B. räumlich über Europa zeitlich über ein gleitendes Zeitfenster von 3 Monaten erfolgen. Unserer Gewohnheit gemäß würden wir den zeitlichen Ablauf in Monaten messen. Dieses relativ grobe Zeitmaß ist in der Abbildung durch die Standuhr symbolisiert. Die zugehörige Zeitkoordinate t ist eine reelle Zahl, die den Zeitfortschritt in Einheiten von einem Monat misst.

Die schnelle Oszillation sei nun aber der Tagesgang der bodennahen Temperatur, sagen wir auf dem Brocken im Harz. Ein Zeitmaß, mit dem man diese Schwankungen, wie man sagt, „auflösen“ kann, ist ca. eine Stunde. Die Zeitvariable τ soll nun die Zeit gemessen in Einheiten von einer Stunde sein.

Die asymptotische Methode der mehrfachen Variablen, s. z.B. [Schneider (1979)], borgt sich diese Idee des Messens mit verschiedenen Zeitmaßen. Für das Oszillatorproblem wird man zunächst eine Zeitkoordinate t einführen, die die durch den Dämonen angeregte Hintergrundbewegung adäquat darstellt. Der Zeitverlauf der Dämonenkraft ist direkt als Funktion der Zeitvariablen t darstellbar, z.B.,

$$F(t) = \cos(t). \quad (5)$$

Zusätzlich brauchen wir eine „schnelle Zeitvariable“ für die überlagerten hochfrequenten Oszillationen. Diese Koordinate misst die Zeit in systematisch kleineren Einheiten, die in geeigneter Weise von den kleinen Parametern ε und δ abhängen. Wir beschränken uns hier der Einfachheit halber auf den Fall, dass ε und δ zusammen und proportional zueinander klein werden, dass also

$$\delta = \kappa\varepsilon \quad \text{mit} \quad \kappa = O(1) \quad \text{für} \quad \varepsilon \rightarrow 0. \quad (6)$$

Man liest dies wie folgt: δ ist gleich einer Größe κ multipliziert mit ε , wobei dieses κ einer von Null verschiedenen festen Zahl zustrebt, wenn ε verschwindet (gesprochen: κ ist „groß Oh von Eins für ε gegen Null“). Im wesentlichen können wir also von „ δ gleich κ mal ε “ ausgehen. Bei den drei Lösungen in Abbildung 8 habe ich bereits diesen sogenannten „gekoppelten Grenzübergang“ mit $\kappa = 0.2$ zugrundegelegt.

Die Wahl

$$\tau = \frac{t}{\sqrt{\varepsilon}} \quad (7)$$

ist besonders interessant, wie wir gleich sehen werden.

Nach der Methode der mehrfachen Variablen suchen wir nun eine Näherungslösung des Oszillatorproblems in der Form

$$y(t; \varepsilon) = y^{(0)}(\tau, t) + \sqrt{\varepsilon}y^{(1)}(\tau, t) + \varepsilon y^{(2)}(\tau, t) + \dots \quad (8)$$

Wir starten also mit einer groben Approximation $y^{(0)}(\tau, t)$, die für den Fall $\varepsilon = \delta = 0$ gelten soll, und konstruieren uns nach Bedarf schrittweise Verbesserungen $y^{(i)}(\tau, t)$, die

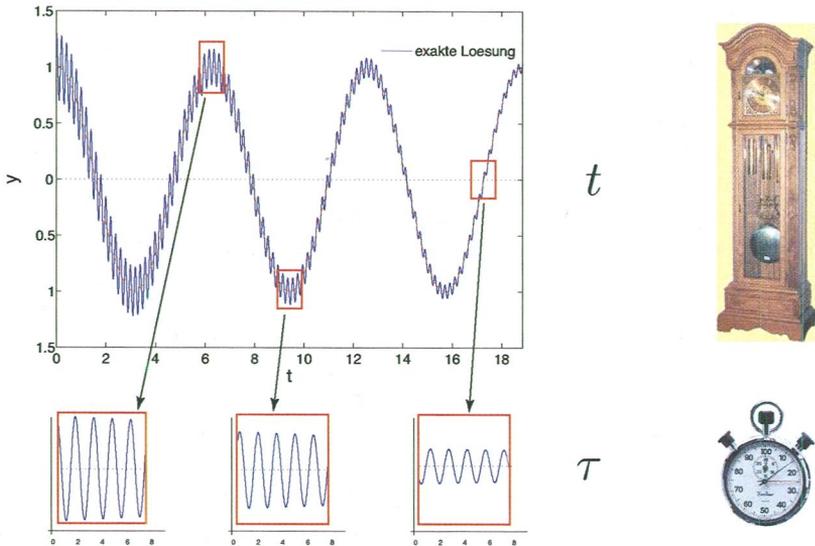


Abbildung 13: Mit der Anzeige der „Stoppuhr“ beschreiben wir den zeitlichen Verlauf der schnellen Oszillationen, mit derjenigen der Standuhr den Fortschritte der durch den Dämon angeregten langsamen Hintergrundbewegung.

subtilere Korrekturen berücksichtigen, wenn ε und δ zwar klein, aber noch von Null verschieden sind.

Schauen wir uns jetzt einmal an, wie die in (1) auftretenden ersten und zweiten Ableitungen \dot{y}, \ddot{y} – also die mathematischen Ausdrücke für Geschwindigkeit und Beschleunigung – auf der Basis des obigen Lösungsansatzes (und unter Berücksichtigung der Kettenregel bei Differentiation nach τ) aussehen müssen:

$$\begin{aligned}
 \dot{y}(t; \varepsilon) &= \left(\frac{1}{\sqrt{\varepsilon}} \partial_\tau + \partial_t \right) \left(y^{(0)}(\tau, t) + \sqrt{\varepsilon} y^{(1)}(\tau, t) + \varepsilon y^{(2)}(\tau, t) + \dots \right) \\
 &= \frac{1}{\sqrt{\varepsilon}} y_\tau^{(0)} + \left(y_\tau^{(1)} + y_t^{(0)} \right) + \dots \\
 \ddot{y}(t; \varepsilon) &= \left(\frac{1}{\sqrt{\varepsilon}} \partial_\tau + \partial_t \right)^2 \left(y^{(0)}(\tau, t) + \sqrt{\varepsilon} y^{(1)}(\tau, t) + \varepsilon y^{(2)}(\tau, t) + \dots \right) \\
 &= \frac{1}{\varepsilon} y_{\tau\tau}^{(0)} + \frac{1}{\sqrt{\varepsilon}} \left(y_{\tau\tau}^{(1)} + y_{\tau t}^{(0)} \right) + \dots
 \end{aligned} \tag{9}$$

Wir setzen diese Entwicklungen in die Differentialgleichung (1) ein und sortieren die auftretenden Terme nach Potenzen von ε . Gelingt es uns nun, jeden Vorfaktor vor $\varepsilon^0, \varepsilon^{1/2}, \varepsilon, \varepsilon^{3/2}$, etc. getrennt verschwinden zu lassen, so haben wir die Ausgangsgleichung formal bis auf einen Fehler gelöst, der – wenn alles gut geht – systematisch kleiner ist als der letzte Term, also kleiner als die höchste Potenz von ε , deren Vorfaktor wir noch annullieren konnten. Achtung: Es ist ein höchst nichttriviales Geschäft, mathema-

tisch rigoros nachzuweisen, dass dieses Vorgehen wirklich einen in diesem Sinne kleinen Restfehler ergibt. Dies näher zu erläutern würde hier aber zu weit führen.

Die zu ε^0 und $\varepsilon^{1/2}$ gehörenden Gleichungen lauten dann

$$\begin{aligned} y_{\tau\tau}^{(0)} + y^{(0)} &= \cos(t), \\ y_{\tau\tau}^{(1)} + y^{(1)} &= -2y_{t\tau}^{(0)} - \kappa y_{\tau}^{(0)}. \end{aligned} \tag{10}$$

Berücksichtigen wir, dass t, τ für die Funktionen $y^{(i)}$ als unabhängige Variable fungieren, so können wir die explizite Lösung für $y^{(0)}$ unmittelbar angeben. Sie lautet

$$y^{(0)}(\tau, t) = A(t) \cos(\tau) + B(t) \sin(\tau) + \cos(t) \tag{11}$$

mit noch zu bestimmenden Amplitudenfaktoren $A(t), B(t)$.

Die rechte Seite der Gleichung für $y^{(1)}$ kann dann genauer spezifiziert werden, so dass

$$y_{\tau\tau}^{(1)} + y^{(1)} = -(-2\dot{A}(t) + \kappa A(t)) \sin(\tau) + (2\dot{B}(t) + \kappa B(t)) \cos(\tau). \tag{12}$$

Hier lautet die exakte Lösung

$$y^{(1)}(\tau, t) = a(t) \cos(\tau) + b(t) \sin(\tau) - \tau [(2\dot{A} + \kappa A)(t) \cos(\tau) + (2\dot{B} + \kappa B)(t) \sin(\tau)]. \tag{13}$$

Wie wir sehen, schließt diese allgemeine Lösung für $y^{(1)}$ einen Term ein, der proportional zu τ anwächst. Wenn nun $t = 1$ oder vergleichbar groß wird, also $\tau = 1/\sqrt{\varepsilon}$ oder vergleichbar, wird dieser Term dazu führen, dass $\sqrt{\varepsilon}y^{(1)}$ in unserem Ansatz (8) nicht mehr nur eine kleine Korrektur zum führenden Term $y^{(0)}$ darstellt, sondern mit diesem vergleichbar groß wird. Spätestens dann ist unser Sortieren der einzelnen Terme in der asymptotisch entwickelten Gleichung (1) nach Potenzen von ε nicht mehr gerechtfertigt, und wir müssen aufgeben, bevor wir noch eine einigermaßen nützliche Näherung in die Hand bekommen haben ... es sei denn, wir passen die Amplitudenfunktionen $A(t), B(t)$ in der Lösung führender Ordnung (11) für $y^{(0)}$ so an, dass

$$2\dot{A} + \kappa A = 2\dot{B} + \kappa B = 0. \tag{14}$$

Für diese Gleichungen kennt man die allgemeine Lösung,

$$A(t) = A(0) \exp\left(-\frac{\kappa}{2} t\right) \quad \text{und} \quad B(t) = B(0) \exp\left(-\frac{\kappa}{2} t\right). \tag{15}$$

Damit gelingt es uns, den linear in τ anwachsenden Term in der Lösung für $y^{(1)}$ zu unterdrücken, und wir können erwarten, dass $\sqrt{\varepsilon}y^{(1)}(\tau, t)$ auch für Zeiten $t \geq 1$ eine kleine Korrektur relativ zum führenden Term $y^{(0)}(\tau, t)$ bleibt.

Die Bedingung, dass ein Störterm höherer Ordnung nicht linear in der schnellen Variablen ansteigen darf, wird auch Säkularbedingung oder – im Englischen – „sublinear growth condition“ genannt, s. [Schneider (1979)]. Wie wir im Nachhinein feststellen, hat diese Bedingung unser Unwissen um die Beschaffenheit der Lösung führender Ordnung $y^{(0)}$ beträchtlich reduziert. Waren zunächst die Amplitudenfunktionen $A(t)$ und $B(t)$ noch gänzlich unbekannt, sind sie jetzt vollständig festgelegt, sobald wir nur ihre Anfangswerte $A(0), B(0)$ kennen. Diese wiederum lassen sich aus den Anfangswerten y_0 und \dot{y}_0 aus der ursprünglichen Aufgabenstellung direkt ableiten. Einsetzen unseres Lö-

sungsansatzes in die Anfangbedingungen (2), Sortieren nach Potenzen von $\sqrt{\varepsilon}$ und Auswerten der jeweils größten Terme liefert

$$A(0) + 1 = y_0 \quad \text{und} \quad B(0) = 0. \quad (16)$$

Damit ist unsere Lösung $y^{(0)}(\tau, t)$ vollständig festgelegt.

$$y^{(0)}(\tau, t) = (y_0 - 1) \exp\left(-\frac{\kappa}{2} t\right) \cos(\tau) + \cos(t) \quad \text{mit} \quad \tau = \frac{1}{\sqrt{\varepsilon}} t. \quad (17)$$

Für das Problem des linearen Oszillators, das wir hier als Beispiel herangezogen haben, steht uns mit (3) die exakte Lösung zur Verfügung. In Abbildung 14 verschaffen wir uns einen Eindruck über die Qualität der Approximation führender Ordnung, $y^{(0)}$.

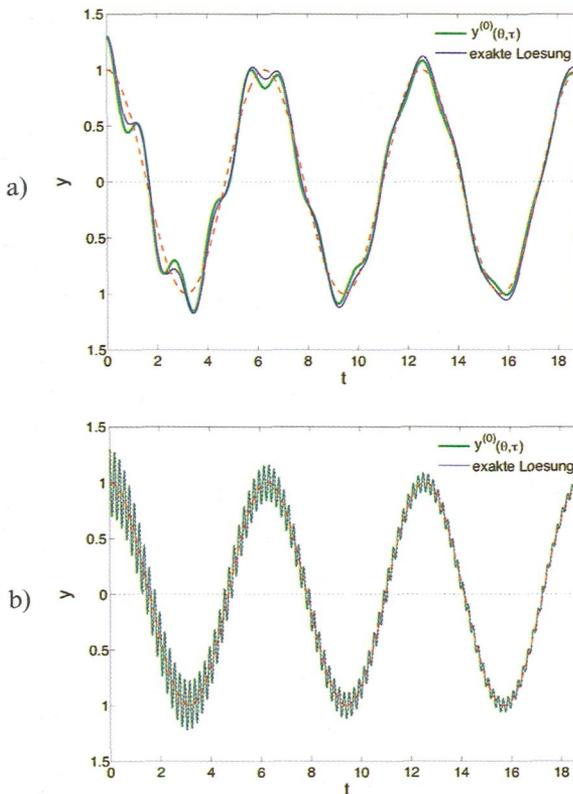


Abbildung 14: Vergleich der exakten Lösung aus Gleichung (3) mit der Näherungslösung aus (17) für a) $\varepsilon = 0.05, \delta = 0.01$ und b) $\varepsilon = 0.001, \delta = 0.0002$.

Offenbar sind exakte und Näherungslösung für die kleineren Werte $\varepsilon = 0.001$ und $\delta = \kappa\varepsilon = 0.0002$ im Rahmen der Zeichengenauigkeit nicht zu unterscheiden. Aber auch für die Werte $\varepsilon = 0.05$ und $\delta = 0.01$, bei denen der asymptotische Entwicklungsparameter doch mit $\sqrt{\varepsilon} \approx 0.223$ für eine asymptotische Aussage ziemlich groß ist, spiegelt die Näherungslösung die qualitativen Eigenschaften der exakten Lösung recht gut wieder.

Dass die Abweichungen sogar nur im Bereich weniger Prozente und damit deutlich besser liegen, als es die formale Vernachlässigung von Lösungskorrekturen der Größenordnung $O(\sqrt{\varepsilon})$ erwarten lässt, ist allerdings nicht verallgemeinerbar. Wie wir an den Berechnungen in (16) sehen, spielt die Anfangsbedingung für die Geschwindigkeit, $\dot{y}(0) = \dot{y}_0$, für die Lösung führender Ordnung gar keine Rolle. Der hier gewählte Wert $\dot{y}_0 = 0$ entspricht den sogenannten balancierten Anfangswerten für das Oszillatorproblem. Bei dieser Wahl der Anfangsdaten verschwindet die Korrektur erster Ordnung $y^{(1)}$ identisch. Es sei den Leserinnen und Lesern überlassen, das einmal nachzurechnen. Verschwindet aber die Korrektur erster Ordnung, so wartet die Lösung führender Ordnung naturgemäß mit einem Fehler auf, der lediglich der Vernachlässigung des Terms $\varepsilon y^{(2)}$ entspricht, also um eine Ordnung in $\sqrt{\varepsilon}$ genauer ist, als es der formalen Entwicklung entspricht.

Schauen wir uns die vorangegangenen Herleitungen noch einmal unter dem Aspekt an, was sie uns eigentlich konzeptionell gebracht haben. Denn natürlich lohnt es sich für das Problem des linearen Oszillators eigentlich nicht, den Aufwand einer Mehrskalenasymptotik zu treiben. Es ist ja nicht so viel schwieriger, die exakte Lösung (3) zu berechnen, als die Teillösungen (11) und (15) der Mehrskalenasymptotik.

Also: Die Beobachtungen anhand der exakten Lösungen in Abbildung 8 legten die Vermutung nahe, dass die Bewegung unserer Kugel im wesentlichen durch die Auswirkungen dreier gut unterscheidbarer Prozesse festgelegt ist. Erstens bewirkt die äußere Kraft des Dämonen eine Auslenkung der Kugel. Vernachlässigt man zunächst die Massenträgheit und die Kraftwirkung des Dämpfers, so erzeugt der Dämon eine langsame Schwankung gemäß der rot gestrichelten Kurve in Abbildung 8, wobei die Federkraft immer gerade der Dämonenkraft das Gleichgewicht hält. Dieses näherungsweise Gleichgewicht in Abwesenheit von Oszillationen können wir aus der asymptotischen Lösung in (11) sofort ablesen, wenn die Amplituden $A(t)$, $B(t)$ identisch Null sind.

Zweitens sieht man während begrenzter, aber deutlich voneinander separierter Zeitabschnitte schnelle Oszillationen. Deren Amplitude scheint innerhalb eines solchen Zeitintervalls nahezu konstant zu sein. Oszillationen konstanter Amplitude sind bei einem Oszillator durch das direkte Gleichgewicht zwischen Federkraft und Massenträgheit charakterisiert. Diese schnellen Oszillationen werden in der asymptotischen Lösung führender Ordnung (11) durch die Terme $A \cos(\tau) + B \sin(\tau)$ repräsentiert. Dabei sind $\sin(\cdot)$ und $\cos(\cdot)$ Lösungen der Oszillatorgleichung $y_{\tau\tau}^{(0)} + y^{(0)} = 0$, die ja den homogenen Anteil der Gleichung führender Ordnung in $(10)_1$ darstellt.

Vergleichen wir allerdings diese lokalen Oszillationen in verschiedenen Zeitfenstern, so sehen wir, dass deren Amplitude offenbar doch langsam abnimmt. Dieses Abklingen wird durch die Wirkung der schwachen Dämpfungskräfte des Oszillators verursacht. Diese stehen zwar in direktem Wettbewerb lediglich mit den Feder- und Trägheitskräften erster Ordnung, also mit $y_{\tau\tau}^{(1)} + y^{(1)}$ in $(10)_2$. Sie akkumulieren sich aber über viele Zyklen der Oszillation zu einem Beitrag, der sich in der Lösung führender Ordnung bemerkbar macht. Dieses Akkumulieren schwacher Beiträge zu großen Effekten wird durch die Säkularbedingungen (oder „sublinear growth conditions“) in (14) mathematisch erfasst.

Die Mehrskalenasymptotik hilft also offenbar nicht nur, klein- und großskalige Lösungsanteile zu identifizieren, sondern auch, die für die Struktur dieser Lösungsanteile

verantwortlichen Teilprozesse und Mechanismen herauszukristallisieren. Wie die Ergebnisse solcher Analysen systematisch eingesetzt werden können, um das notorische Problem der knappen numerischen Auflösung nach Abbildung 12 bei komplexen Problemen in den Griff zu bekommen, ist Gegenstand intensiver aktueller Forschungsanstrengungen, s. z.B. [Knio und Klein (2000), Klein et al. (2001), E und Engquist (2003), Munz et al. (2003), Schmidt und Klein (2003), Majda (2006)] sowie auch [Ting et al. (2006)].

Ein Mehrskalensmodell für die Tropen

Anhand von Abbildung 4 hatten wir uns klargemacht, dass man zur Berechnung der großskaligen Klimaentwicklung auf unserem Planeten eine Abschätzung der durch die synoptischen Fluktuationen (s. Abbildung 5) hervorgerufenen effektiven Flüsse benötigt. Diese effektiven Flüsse kommen, ähnlich wie im Oszillatorbeispiel der Dämpfungseffekt, durch die kumulative Überlagerung eigentlich relativ schwacher und nur relativ kurzfristig anhaltender Strömungen zustande. Da liegt der Versuch nahe, den Nettoeffekt der synoptischen Schwankungen auf das globale Klima mit Hilfe einer Mehrskalenasymptotik zu beschreiben.

Zieht man die etablierte Literatur der theoretischen Meteorologie heran, so stellt sich heraus, dass dieses Unterfangen eine gute theoretische Grundlage besitzt, [Pedlosky (1987), Zeytounian (1991)]. Allerdings ist es doch ein weiter Weg, das ganze Programm gleich für die Strömungen in den mittleren Breitengraden „durchzuziehen“. Ein ähnlich geartetes, für die meteorologische Praxis mindestens ebenso relevantes, aber von der Mathematik her noch ein wenig einfacher gelagertes Problem ist das der synoptisch-planetaren Wechselwirkungen in den Tropen, das ich zusammen mit A.J. Majda in [Majda und Klein (2003)] studiert habe. Für „insider“ und weitergehend Interessierte fasse ich hier nur kurz das wichtigste Ergebnis dieser Arbeit zusammen.

Ein wahrscheinlich universell geeigneter kleiner Parameter „ ε “ für asymptotische Entwicklungen in der Meteorologie ist

$$\varepsilon = \left(\frac{\Omega^2 a}{g} \right)^{1/3}. \quad (18)$$

Dabei sind $a \sim 6000$ km der Erdradius, $\Omega \sim 10^{-4} \text{ s}^{-1}$ die Umlauffrequenz der Erde und $g \sim 9.81 \text{ m/s}^2$ die Schwerebeschleunigung. Damit ist $\Omega^2 a/g$ das Verhältnis aus der Zentripetalbeschleunigung eines erdfesten Beobachters am Äquator und der Schwerebeschleunigung. Ausgewertet mit den angegebenen Zahlen ist $\varepsilon \sim 1/8 \dots 1/5$.

In [Majda und Klein (2003)] haben wir die Bewegungsgleichungen eines kompressiblen Mediums (Luft) auf einer rotierenden Kugel für den äquatornahen Bereich analysiert. Im Sinn der Mehrskalenasymptotik lautete dabei einer unserer Lösungsansätze

$$\mathbf{U}(X, Y, z, T; \varepsilon) = \sum_i \varepsilon^i \mathbf{U}^{(i)}(\varepsilon^{5/2} X, \varepsilon^{7/2} X, \varepsilon^{5/2} Y, z, \varepsilon^{5/2} T), \quad (19)$$

wobei \mathbf{U} den Satz der unbekanntenen Größen, also Luftdruck, Temperatur, Windgeschwindigkeiten, etc. bezeichnet. X, Y, z und T sind die zonale (Ost-West), meridio-

nale (Nord-Süd) und vertikale Ortskoordinate und die Zeit. Sie messen in Einheiten von 10 km und 1000 s.

Wir sehen, dass es sich bei (19) um einen Mehrskalensansatz in der zonalen Ortskoordinate X handelt, also nicht wie beim Oszillator um einen Ansatz mit mehrfachen Zeitvariablen. Die Grundidee und die mathematischen Techniken zu Auswertung der resultierenden Gleichungen bleiben aber grundsätzlich die gleichen.

Als Ergebnis der Analyse, dessen Herleitung in [Majda und Klein (2003)] erläutert ist, erhalten wir ein gekoppeltes System von Gleichungen für die Bewegungen auf der synoptischen und der planetaren Skala, das sogenannte „IPESD“-System (für „intra-seasonal planetary equatorial synoptic dynamics“).

Im Folgenden bezeichnen wir mit u, v, w, θ, π die für die kleinere Raumskala relevanten zonalen, meridionalen und vertikalen Geschwindigkeitskomponenten, Störungen der potentiellen Temperatur (was das ist, wird in Kürze erläutert) sowie Störungen des Drucks. Diese Größen erfüllen die folgende Mittelungsbedingung bezüglich der synoptischen (also der kleineren) zonalen Koordinate $x = \varepsilon^{5/2} X$:

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \frac{\varepsilon}{\Xi} \int_{-\Xi/\varepsilon}^{\Xi/\varepsilon} \phi(x, \xi, y, z, t) dx = 0 \quad \text{für} \quad \phi \in \{u, v, w, \theta, \pi\}. \quad (20)$$

Des Weiteren sind $\rho(z), \Theta_2(z)$ die nur vertikal variierenden Hintergrundverteilungen von Dichte und potentieller Temperatur. Letztere ist diejenige Temperatur, die ein in beliebiger Höhe befindliches Luftmassenelement annähme, würde man es bis auf einen Druckausgleich von seiner Umgebung isolieren und dann auf den Standarddruck auf Meeressniveau komprimieren oder expandieren. Für uns ist hier hauptsächlich von Interesse, dass einerseits die vertikale Variation von Θ_2 die Stabilität der Luftschichtung bestimmt: Nimmt die potentielle Temperatur mit der Höhe zu, so ist die Luft stabil geschichtet. Andererseits erzeugen Störungen der potentiellen Temperatur eines begrenzten Luftvolumens Auftriebskräfte, die es relativ zu seiner Umgebung je nach Vorzeichen auf- oder abwärts treiben.

Weiterhin ist β ein Parameter, der anzeigt, wie stark sich in Nord-Süd-Richtung der Einfluss der Erdrotation auf die Luftströmung verändert. Dieser Einfluss, der sogenannte Coriolis-Effekt, verschwindet am Äquator und ist an den Polen maximal. Dazwischen variiert er wie der Sinus des Breitengrades, und β ist daher proportional zum Cosinus desselben.

Auf der synoptischen Skala, beschrieben durch die Variablen x, y, z, t finden wir ein lineares, quasi-stationäres Gleichungssystem für die Unbekannten u, v, w, θ, π bei gegebenen $\rho(z), \Theta_2(z), \beta$ und Temperaturquellterm S_θ

$$\begin{aligned} -\beta y v + \pi_x &= 0 \\ \beta y u + \pi_y &= 0 \\ u_x + v_y + \frac{1}{(\rho w)_z} &= 0 \\ \pi_z &= \theta \\ w \frac{d\Theta_2}{dz} &= S_\theta \end{aligned} \quad (21)$$

Das Gleichungssystem wird als „quasi-stationär“ bezeichnet, weil es Gleichgewichte in den betrachteten Bilanzen anzeigt, die zu jedem Zeitpunkt gelten, und in denen die zeitliche Veränderung der Lösung, sprich die Zeitableitungen der Unbekannten, nicht eingreifen.

Die Gleichungen (21)_{1,2} beschreiben in diesem Sinne ein Gleichgewicht der horizontalen Druckkräfte, repräsentiert durch den Druckgradienten (π_x, π_y) , mit den schon erwähnten Coriolis-Kräften. Gleichung (21)₃ ist eine Konsequenz der Massenerhaltung. Berücksichtigt man, dass die Dichte $\rho(z)$ überall mit der Höhe abnimmt, so folgert man aus dieser Gleichung, dass aufwärts strebende Massenelemente sich ausdehnen, absinkende Massenelemente aber komprimiert werden müssen. Man sieht dies etwas deutlicher, wenn man den dritten Term ausdifferenziert: $u_x + v_y + w_z = \text{div}(\vec{v}) = -w \frac{1}{\rho} \frac{d\rho}{dz}$. Gleichung (21)₄ beschreibt ein Gleichgewicht von Auftriebskräften und resultierenden Kräften der Druckstörungen in der Vertikalen. Gleichung (21)₄ besagt, dass sich Massenelemente, deren potentielle Temperatur sich aufgrund von Wärmequellen ändert, langsam immer gerade so auf- oder abwärts bewegen, dass ihr Auftrieb klein bleibt und konsistent als kleine Abweichung $\varepsilon^3\theta$ von der Hintergrundverteilung $1 + \varepsilon^2\Theta_2(z)$ dargestellt werden kann.

Geradezu fabelhaft ist nun die Tatsache, dass dieses Gleichungssystem für gegebenen Quellterm S_θ analytisch exakt lösbar ist, dass also unter dieser Voraussetzung der kleinskalige Lösungsanteil vollständig bestimmt ist und zur Verfügung steht, wenn man als nächstes die Gleichungen für die planetare Skala angeht, [Majda und Klein (2003), Biello und Majda (2005)].

Seien nun U, Θ, Π die über die synoptische x -Koordinate gemittelte zonale Windgeschwindigkeit, potentielle Temperatur- und Druckstörung. Diese Mittelwerte waren ja in (21) wegen der Mittelungsbedingung (20) noch nicht berücksichtigt. Seien weiter v', w' die, ebenfalls x -gemittelten, Korrekturen nächster Ordnung der meridionalen und vertikalen Windgeschwindigkeiten. Bezeichnen wir dann die planetar skalierte zonale Koordinate $\varepsilon^{7/2}X$ mit ξ , so erhalten wir folgendes Gleichungssystem für die planetare Dynamik

$$\begin{aligned}
 U_t - \beta y v' + \Pi_\xi &= S'_u - (\overline{uv})_y + \frac{1}{\rho} (\rho \overline{uw})_z \\
 \beta y U + \Pi_y &= \overline{S}_v \\
 \Theta_t + w' \frac{d\Theta}{dz} &= S'_\theta - (\overline{\theta v})_y + \frac{1}{\rho} (\rho \overline{\theta w})_z \\
 \Pi_z &= \Theta \\
 U_\xi + v'_y + \frac{1}{\rho} (\rho w')_z &= 0.
 \end{aligned} \tag{22}$$

Im Detail beschreiben hier (22)₁ das Newtonsche Bewegungsgesetz in zentraler Richtung, (22)₂ ein Gleichgewicht in meridionaler Richtung von Druck-, Coriolis- und Reibungskräften, (22)₃ die durch Schwankungen der potentiellen Temperatur erzeugten Fluktuationen der potentiellen Energie der Luft, (22)₄ das Gleichgewicht von Druck- und Gewichtskräften in der Vertikalen und schließlich (22)₅ wieder die Massenbilanz.

Vernachlässigt man für einen Moment die Quell- und Reibungsterme $S'_u, \overline{S'_v}, S'_\theta$ sowie die ominösen Terme mit Klammern und Querstrichen auf der rechten Seite, so reduziert sich dieses Gleichungssystem auf ein wohlbekanntes Modell für planetare Äquatorialwellen. Es repräsentiert ein ganzes Spektrum von Wellenphänomenen, von Kelvin- über Rossby- bis zu Yanai-Wellen, s. z.B. [Pedlosky (1987)]. Insofern ist also bisher nichts Neues zu vermelden.

Spannend wird es, wenn man die soeben vernachlässigten Terme mit Klammern und Querstrichen nun einmal näher anschaut. Der Querstrich symbolisiert Mittelwerte im Sinne der Mittelungsoperation in (20). Gemittelt wird hier über Produkte der nach Lösung des synoptischen Gleichungssystems (21) nunmehr bekannten Größen (u, v, w, θ) . Die fraglichen Terme repräsentieren den effektiven, akkumulierten Transport von zonalem Impuls (Terme in $(22)_1$) und von potentieller Temperatur (Terme in $(22)_3$) aufgrund der Strömungsbewegungen auf der kleineren, synoptischen Skala. Da wir diese synoptische Strömungsbewegung, über die schon erwähnten exakten Lösungen des Systems in (21), sozusagen in der Hand haben, ist es möglich die Mittelwerte in $(22)_{1,3}$ explizit auszuwerten und ihren Anteil an der planetaren Wellendynamik auszuwerten.

Diese Möglichkeit, effektive Flüsse aufgrund kleinskaliger Fluktuationen direkt berechnen zu können, kann in seiner Bedeutung für die Theorie kaum überschätzt werden. Denn in den weitaus meisten Strömungs-, Wetter- und Klimamodellen werden solche Terme mit vielerlei physikalisch motivierten, aber mathematisch selten sauber herleitbaren Schließungsansätzen näherungsweise ersetzt. Im vorliegenden Fall ist eine mathematisch konsistente Schließung der Gleichungen mit Hilfe der Mehrskalentheorie gelungen. Nun will ich nicht behaupten, das dieser Zugang ein Allheilmittel für die Modellierung nichtlinearer Effekte in Systemen mit multiplen Skalen darstellt. Dennoch scheint mir das Potential dieser systematischen Zugangsweise im Bereich der geophysikalischen Strömungsbeschreibung bei weitem noch nicht ausgeschöpft.

Biello und Majda haben die oben skizzierte Theorie weiterverfolgt. Ihr Ziel ist es, eine neue Multiskalentheorie für die sogenannte „Madden-Julian-Oszillation“ zu erarbeiten. Diese Oszillation ist durch ein langsam entlang des Äquators wanderndes Niederschlags- und Sturmgebiet gekennzeichnet, das sich mit einer Geschwindigkeit bewegt, die mit keiner der bekannten planetaren Wellengeschwindigkeiten übereinstimmt. Von [Biello und Majda (2005)] wird nun die Hypothese untermauert, dass die durch (21), (22) beschriebenen synoptisch-planetaren Wechselwirkungen einen wesentlichen physikalischen Baustein bei der Entstehung der Madden-Julian-Oszillation darstellen. In weiteren Arbeiten zum gleichen Thema wird die Natur der Wärmequellterme S_θ, S'_θ und deren Verbindung zu Feuchteprozessen in der Atmosphäre untersucht, s. z.B. [Khouider und Majda (2006), Klein und Majda (2006)].

Abschließendes

In diesem Artikel habe ich versucht, aufzuzeigen, wie zwei Arbeitsgebiete der Angewandten Mathematik zur Klima- und Klimafolgenforschung beitragen. Numerische Mathematik und asymptotische Analyse gehen zunehmend Hand in Hand, um die

Wechselwirkungen zwischen multiplen Skalen im Erdsystem besser zu verstehen und die Konstruktion zuverlässigerer Rechenmodelle zu unterstützen. Neben der Meteorologie, die ich hier einfach aufgrund meines eigenen Hintergrundes als Strömungsmechaniker in den Vordergrund gestellt habe, sind aber auch Biologie, Geologie, Geographie und Geophysik, Hydrologie, Ozeanographie, Ökonomie, Politologie, Soziologie und andere Wissenschaftsdisziplinen an der aktuellen Nachhaltigkeitsforschung beteiligt. Geht man die wissenschaftlichen Stoßrichtungen all dieser Disziplinen durch, so finden sich vielfältige Herausforderungen für Asymptotik, Kontrolltheorie, Numerik, Optimierung, qualitative, gewöhnliche und partielle Differentialgleichungen, Statistik und Stochastik und andere mathematische Teildisziplinen.

Das große Potential der Mathematik, die Klima-, Klimafolgen- und Nachhaltigkeitsforschung voranzubringen, ist allerdings aus meiner Sicht heute bei weitem noch nicht ausgeschöpft. Ein wichtiger Grund hierfür ist m.E. darin zu suchen, dass die Schwierigkeiten bei der Übersetzung anwendungswissenschaftlicher Problemstellungen, über geeignete formale Abstraktionen, in konkrete, mathematisch gut gestellte Aufgaben meist beträchtlich unterschätzt werden. Dieser Artikel ist der Versuch eines Beitrags zu dieser großen Übersetzungsaufgabe für ein Publikum, das nicht selbst in diesen Forschungsaktivitäten involviert ist. Ich hoffe, dass dies ein wenig gelungen ist.

In diesem Zusammenhang möchte ich allen Interessierten noch einen Text von Carlo Jaeger ans Herz legen, mit dem ich viele der Gedanken, die den Kern des vorliegenden Artikels bilden, in inspirierenden Diskussionen geteilt habe, [Jaeger (2003)].

Thomas Sonar, seines Zeichens Mathematikprofessor an der TU-Braunschweig, danke ich ganz herzlich dafür, mich als Sprecher für den Gauß-Vortrag der Deutschen Mathematiker-Vereinigung im Braunschweiger Gauß-Jahr vorgeschlagen zu haben. Es war mir ein große Ehre und ein ebensolches Vergnügen! Der Deutschen Mathematiker-Vereinigung bin ich zu großem Dank verpflichtet, dass mir die Ehre, für die Thomas Sonar mich vorschlug, dann auch zuteil wurde. Herrn Prof. Gernot Stroth danke ich für die exzellente und geduldige Betreuung bei meinen Vorbereitungen zur Gauß-Vorlesung 2005.

References

- [Biello und Majda (2005)] Biello, J.A., Majda A.J. (2005), *J. Atmos. Sci.*, **62**, 1694–1721
- [Brovkin et al. (2002)] Brovkin V., Bendtsen J., Claussen M., Ganopolski A., Kubatzki C., Petoukhov V., Andreev A. (2002), *Global Biogeochemical Cycles*, **16**, 1139–1162
- [E und Engquist (2003)] E W., Engquist B., (2003), *Comm. Math. Sci.*, **1**, 87–132
- [Houghton et al. (2001)] Houghton et al. (2001), *Climate Change 2001 – The Scientific Basis*, Cambridge University Press
- [Imboden et al. (1998)] Imboden D.M., Jaeger C.C., Cebon P., Davies H.C., Dahinden U. (1998), *Views from the Alps: Regional Perspectives on Climate Change*, MIT Press
- [Jaeger (2003)] Jaeger C.C. (2003), *A Note on Domains of Discourse – Logical Know-How for Integrated Environmental Modelling*, PIK-Report No.86, siehe http://www.pik-potsdam.de/publications/pik_reports
- [Khouider und Majda (2006)] Khouider B., Majda A.J. (2006), *Multicloud convective parameterizations with crude vertical closure*, in: Special issue on „Theoretical Developments in Tropical Meteorology“, R. Klein (Ed.), *Theor. & Comp. Fluid Dyn.*, **20**, 351–376

- [Klein (1995)] Klein R. (1995), *J. Comput. Phys.*, **121**, 213–237
- [Klein et al. (2001)] Klein R., Botta N., Hofmann L., Meister A., Munz C.D., Roller S., Sonar T. (2001), *J. Eng. Math.*, **39**, 261–343
- [Klein (2004)] Klein R. (2004), in: *SIAM Proceedings in Applied Mathematics*, **116**, (2004)
- [Knio und Klein (2000)] Knio O.M., Klein R. (2000), *J. Comput. Phys.*, **162**, 1–15
- [Klein und Majda (2006)] Klein R., Majda A.J. (2006), *Systematic Multiscale Models for Deep Convection on Mesoscales*, in: Special issue on „Theoretical Developments in Tropical Meteorology“, R. Klein (Ed.), *Theor. & Comp. Fluid Dyn.*, **20**, 525–552
- [Lorius et al. (1990)] Lorius C., Jouzel J., Raynaud D., Hansen J., Le Treut H. (1990), *Nature*, **347**, 139–145
- [Maddison (2001)] Maddison A. (2001), *The World Economy: A Millennial Perspective*, OECD
- [Majda und Klein (2003)] Majda A.J., Klein R. (2003), *J. Atmos. Sci.*, **60**, 393–408
- [Majda (2006)] Majda A.J. (2006), *Multiscale Models with Moisture and Systematic Strategies for Superparameterization*, *J. Atmos. Sci.*, submitted
- [Mann et al. (2003)] Mann et al. (2003), *Eos (C)*, **84**, 256–258
- [Munz et al. (2003)] Munz C.D., Roller S., Klein R., Geratz K.J. (2003), *Computers & Fluids*, **32**, 173–196
- [Pedlosky (1987)] Pedlosky J. (1987), *Geophysical Fluid Dynamics*, Springer Verlag, 2nd edition
- [Petit et al. (1999)] Petit, J. R., et al. (1999), *Nature*, **399**, 429–436
- [Petoukhov et al.(2000)] Petoukhov V., Ganopolski A., Brovkin V., Claussen M., Eliseev A., Kutzbach C., Rahmstorf S. (2000), *Climate Dynamics*, **16**, 1–17
- [Rahmstorf et al. (2004)] Rahmstorf et al. (2004), *Eos*, **86**, 38–41
- [Schmidt und Klein (2003)] Schmidt H., Klein R. (2003), *Comb. Theor. & Modelling*, **7**, 243–267
- [Schneider (1979)] Schneider W. (1979), *Mathematische Methoden in der Strömungsmechanik*, Vieweg
- [Ting et al. (2006)] Ting L., Klein R., Knio O.M. (2006), *Vortex Dominated Flows: Analysis and Computation for Multiple Scale Phenomena*, to appear, *Applied Mathematical Sciences*, Springer Verlag
- [Zeytounian (1991)] Zeytounian R. K. (1991), *Meteorological Fluid Dynamics Lecture Notes in Physics*, **m5**, Springer Verlag



Imaging and Inverse Problems of Partial Differential Equations

F. Natterer

- Mathematics Subject Classification: 65N21, 65R32, 78A46, 45Q05, 44A12, 92C50, 35R30

Eingegangen: 30. 11. 2006

Institut für Numerische und Angewandte Mathematik,
Westf. Wilhelms-Universität Münster, Einsteinstraße 62,
D-48149 Münster, Germany, nattere@math.uni-muenster.de

DMV
JAHRESBERICHT
DER DMV
© B. G. Teubner 2007

1 Introduction

“Mathematical Imaging” is a notion that was unknown in the mathematical world of the 70-ties of the last century. By now it has become a lively mathematical discipline. Mathematical Imaging comprises image processing (often considered as part of engineering), image understanding (part of artificial intelligence) and image reconstruction (generating images from data produced by specifically designed devices). This paper deals with this last kind of imaging, i.e. with techniques such as X-ray computed tomography, emission tomography, near infrared imaging, electrical impedance tomography, seismic imaging, radar, and ultrasound tomography. This list is necessarily incomplete. New imaging modalities come up every fortnight.

Many image reconstruction problems can be formulated as inverse problems of partial differential equations. It is this point of view that we adopt in this note. It turns out that a large class of reconstruction algorithms can be formulated independently of the type of the underlying differential equation and were known in the respective fields of applications previously under various names. Likewise the structure of exact and approximate inversion formulas (if available) is surprisingly similar. On the other hand the quality of the reconstructed image can often be predicted simply from the type of the underlying differential equation.

The plan of the paper is as follows: We start with three techniques (X-ray tomography (CT), single particle emission tomography (SPECT) and positron emission tomography (PET)) that are based on the transport equation. We demonstrate the advantage of the differential equations point of view over the traditional integral geometric approach by accurate modelling (scatter) and new inversion formulas (Novikov). As a further example for the transport equation we discuss near infrared imaging (NIR), where we will make the transitions to elliptic equations by the diffusion approximation. Another example for imaging with elliptic equations is electrical impedance tomography (EIT). We conclude the paper with seismic imaging, synthetic aperture radar (SAR) and ultrasound tomography which are governed by the wave equation. Throughout the paper we concentrate on the constructive aspects. For theoretical aspects we refer to [18].

2 X-ray tomography (CT)

Even though elementary mathematical methods were used in imaging well before the 70-ties (e.g. in seismics and radar), the advent of CT in 1973 was the beginning of the new mathematical discipline of imaging. It led to a mathematical sophistication that was unheard of in imaging before.

The principle of CT is nowadays well known; see Figure 1. A thin X-ray beam scans a cross section of the human body, and a computer produces an image. A modern CT scanner is shown in Figure 2. In Figure 3 we see the data measured in the scanning process and the reconstructed image.

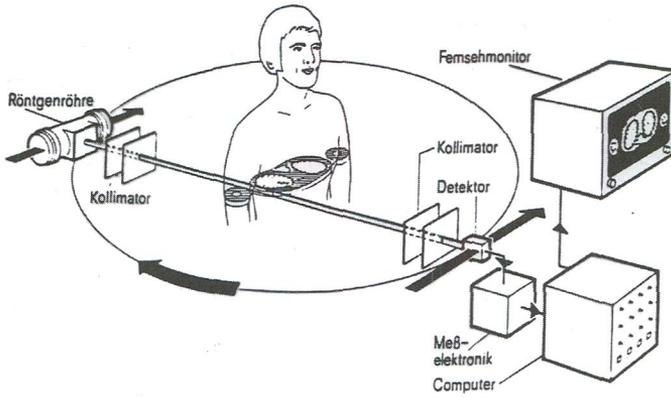


Figure 1: Principle of Computerized Tomography (CT).

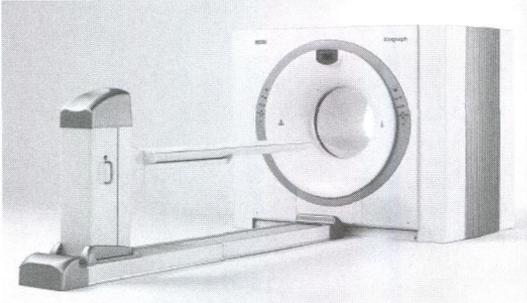


Figure 2: Modern CT scanner.

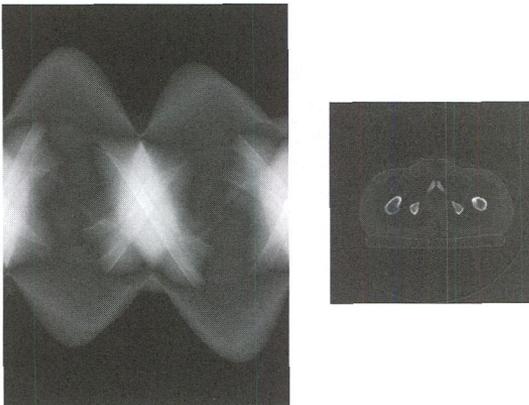


Figure 3: Data set (left) for an abdominal cross section (right). Note that the discontinuities in the cross section can clearly be seen in the data set.

The simplest mathematical model of CT assumes that the scanner measures the line integrals of the absorption coefficient $f(x)$. This gives rise to the Radon transform in \mathbb{R}^2

$$(Rf)(\theta, s) = \int_{x \cdot \theta = s} f(x) dx, \quad \theta \in S^1, s \in \mathbb{R}^1.$$

R maps functions in \mathbb{R}^2 to functions on the straight lines in \mathbb{R}^2 that are parametrized by the unit vector θ on the unit circle S^1 and the real number s . The mathematical problem is to invert R . In principle this was solved by Radon's 1917 inversion formula

$$f = R^*Kg, \quad g = Rf \tag{2.1}$$

where R^* is the backprojection (the adjoint of R),

$$(R^*g)(x) = \int_{S^1} g(\theta, x \cdot \theta) d\theta$$

and K the composition of the derivative and the Hilbert transform:

$$(Kg)(s) = \frac{1}{4\pi^2} \int \frac{g'(t)}{s-t} dt.$$

The early history of CT has still to be written. For a preliminary account see [30]. The works [14], [17], [20], [24], [27], [38] can serve as an introduction into the mathematical and technical aspects of CT.

The most important reconstruction algorithm, the filtered backprojection algorithm, can be viewed as a computer implementation of Radon's inversion formula. In the first commercially available CT scanner an iterative method was used which is based on Kaczmarz's 1937 method for solving linear systems of equations. Its update is

$$f \leftarrow f - \alpha R_\theta^* C_\theta^{-1} (R_\theta f - g_\theta) \tag{2.2}$$

where

$$g_\theta = g(\theta, \cdot), \quad R_\theta f = (Rf)(\theta, \cdot).$$

C_θ is a positive definite operator and α is a relaxation parameter. All of the iterative reconstruction methods in this paper are patterned after (2.2).

Research in the mathematics of CT is still going on. As an example I mention truly 3-D-cone-beam CT, with the X-ray source on a helix and 2D detector arrays. Katsevich's algorithm [31] is among the most competitive ones, see Figure 4. The computational bottleneck is the backprojection which still needs a speed up.

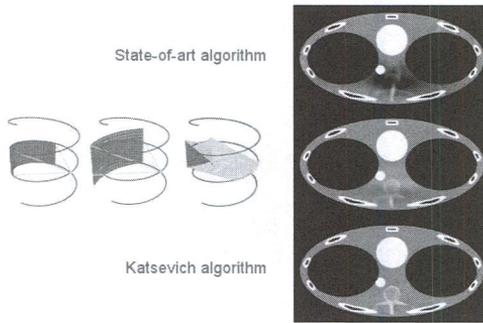


Figure 4: Scanning geometry (left) and reconstructions (right) with different reconstruction algorithms for helical scanning.

3 CT as an inverse problem of the transport equation

After these introductory remarks we come to the main topic of this paper. We formulate CT as an inverse problem for the transport equation in the reconstruction domain Ω . Introducing the density $u(x, \theta)$ of the particles at $x \in \Omega$ travelling in direction $\theta \in S^1$ we have in $\Omega \times S^1$

$$\theta \cdot \nabla u(x, \theta) + f(x)u(x, \theta) = \delta(x - x_0)\delta(\theta - \theta_0) \tag{3.1}$$

and, in the absence of exterior radiation,

$$u(x, \theta) = 0, \quad x \in \partial\Omega, \quad \theta \cdot \nu_x \leq 0 \tag{3.2}$$

with ν_x the exterior normal at $x \in \partial\Omega$. (3.1), (3.2) is a reasonable problem that admits a unique solution under natural conditions. δ is the Dirac measure. The inverse problem of CT consists in finding f from

$$u(x, \theta), \quad x, x_0 \in \partial\Omega, \quad \theta = (x - x_0)/|x - x_0|.$$

The inverse problem reduces immediately to the Radon transform since

$$u(x, \theta) = H((x - x_0) \cdot \theta)\delta((x - x_0)\theta^\perp)\delta(\theta - \theta_0)e^{\int_{x_0}^x f ds}$$

where H is the Heaviside function and θ^\perp is a unit vector perpendicular to θ .

This (trivial) example has already the main ingredients of imaging and partial differential equations: The underlying physical process is described by the partial differential equation, and the measurements give rise to boundary values of the solution. From this overposedness the model parameters (in this case the X-ray absorption f) have to be determined. Integral geometry comes in only because integral geometric transforms (in this case the Radon transform) are exact (or approximate) solution operators.

4 Single particle emission computed tomography (SPECT)

Now we consider the transport equation

$$\theta \cdot \nabla u(x, \theta) + a(x)u(x, \theta) = f(x) \quad \text{in } \Omega \times S^1 \quad (4.1)$$

$$u(x, \theta) = 0, \quad x \in \partial\Omega, \quad \theta \cdot \nu_x \leq 0. \quad (4.2)$$

(4.1), (4.2) describes SPECT: A radiopharmaceutical is injected and the radiation is measured outside the body in a tomographic fashion, see Figure 5. One seeks the distribution f of the radiopharmaceutical. We pose two inverse problems:

Inverse problem 1: Assume a to be known. Find f from $u(x, \theta)$, $x \in \partial\Omega$, $\theta \in S^1$.

Inverse problem 2: Find a and f from $u(x, \theta)$, $x \in \partial\Omega$, $\theta \in S^1$.

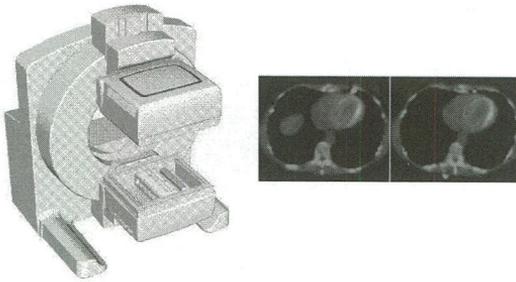


Figure 5: Novel SPECT scanner (Solstice of Philips Medical Systems) (left) and state-of-the-art reconstructions (right) of thorax.

Inverse problem 1 (a so-called inverse source problem) is linear. It corresponds to the case in which the attenuation a of the body is known. Inverse problem 1 reduces to the attenuated Radon transform

$$(R_a f)(\theta, s) = \int_{x \cdot \theta = s} f(x) e^{-\int_0^\infty a(x+s'\theta^\perp) ds'} dx \quad (4.3)$$

since the solution of (4.1), (4.2) is

$$u(x, \theta) = \int_{-\infty}^0 f(x + s\theta) e^{\int_0^\infty a(x+s'\theta^\perp) ds'} ds$$

which is just a reparameterization of (4.3). R_a admits an explicit inversion formula very similar to Radon's inversion formula: If $g = R_a f$, then

$$f = \frac{1}{4\pi} \operatorname{Re} \operatorname{div} R_{-a}^* (\theta e^{-h} H e^h g) \quad (4.4)$$

where H is the Hilbert transform, $h = 1/2(I + iH)Ra$ and R_a^* is the (weighted) backprojection

$$\begin{aligned} (R_a^*g)(x) &= \int_{S^1} e^{-(Da)(x,\theta^\perp)} g(\theta, x \cdot \theta) d\theta \\ (Da)(x, \theta) &= \int_0^\infty a(x + s\theta) ds. \end{aligned}$$

This formula was obtained by Novikov [37] in 2000. In our context it is interesting to note that Novikov obtained his result by working directly on (4.1), (4.2) (by the $\bar{\partial}$ -method), rather than dealing with the integral geometric counterpart R_a . Later simpler derivations of (4.4) (most notably in [38]) were found. However it is very unlikely that (4.4) would have been found without the differential equation viewpoint.

Inverse problem 2 is nonlinear. It is not uniquely solvable. However if a is modelled by a few parameters, these parameters can be determined in favourable circumstances. This is possible since consistency conditions in the range of R_a are known; see [46].

5 Positron emission tomography (PET)

In PET we also determine the density f of a radiopharmaceutical inside the body. The underlying physics is different from SPECT in that the sources eject the particles pairwise in opposite directions, and the detectors work in coincidence mode, i.e. particles are counted only if they arrive at the same time. Often the particles are scattered before they arrive at the detector. For accurate modelling of the scatter the simple transport equations of the previous sections have to be complemented by a scattering integral:

$$\theta \cdot \nabla u(x, \theta) + (\mu_a(x) + \mu_s(x))u(x, \theta) = \mu_s(x) \int_{S^2} k(x, \theta, \theta')u(x, \theta')d\theta' + f(x)$$

where $k(x, \theta, \theta')$ is the probability that a particle arriving at x with direction θ' continues its trip in direction θ and μ_s, μ_a are the scattering and attenuation coefficient, respectively. For simplicity we ignore the change of energy in the scattering process. Assuming μ_a, μ_s, k known we again want to find f from measurements of $u(x, \theta)$ at the boundary of the reconstruction region Ω . For a probabilistic derivation of the measurement operator see [32].

6 Near infrared imaging (NIR)

So far we discussed established imaging techniques that are available in major hospitals. Now we come to techniques that are still under development. Human tissue is opaque for visible light, but becomes transparent in the NIR regime. The differential equation is again a transport equation:

$$\theta \cdot \nabla u(x, \theta) + (\mu_s(x) + \mu_a(x))u(x, \theta) = \mu_s(x) \int_{S^2} k(x, \theta, \theta')u(x, \theta')d\theta' + \delta(x - y)$$

Here $y \in \partial\Omega$ is the position of a laser source (700–1000 nm), k a known scattering kernel, and μ_s, μ_a the scattering and attenuation coefficients, respectively. Again the problem is to recover μ_s, μ_a from measurements of $u(x, \theta)$ for $x, y \in \partial\Omega$.

In NIR, the scattering phenomena by far exceed the effects of transport: The mean free path is smaller than 0.01 mm. Thus the transport equation can be replaced by the diffusion approximation: Putting

$$u(x) = \int u(x, \theta) d\theta$$

and using time harmonic illumination with frequency ω we obtain to good accuracy

$$-\nabla \cdot (D(x)\nabla u(x)) + (\mu_a(x) + i\frac{\omega}{c})u(x) = 0, \quad D = \frac{1}{3(\mu_a + \mu'_s)} \quad (6.1)$$

where c is the speed of light and μ'_s the reduced scattering coefficient. The boundary conditions become

$$u(x) + 2D(x)\frac{\partial u}{\partial \nu}(x) = g^-(x) \quad (\text{source}) \quad (6.2)$$

$$\frac{\partial u}{\partial \nu}(x) = g(x) \quad (\text{measurement}) \quad (6.3)$$

The inverse problem consists in finding μ_a and D from the measurements at the boundary.

Numerically the inverse problem is of the following form: Suppose we have p sources $g_j^-, j = 1, \dots, p$. Let u_j be the corresponding solution of (6.1), (6.2), and put

$$R_j(f) = \frac{\partial u_j}{\partial \nu}, \quad f = \begin{pmatrix} D \\ \mu_a \end{pmatrix}.$$

Then we have to solve the nonlinear system

$$R_j(f) = g_j, \quad j = 1, \dots, p. \quad (6.4)$$

An approximate solution of (6.4) can be found by an immediate extension of (2.2):

$$f \leftarrow f - \alpha(R'_j(f))^* C_j^{-1}(R_j(f) - g_j) \quad (6.5)$$

where R'_j is the Fréchet derivative of R_j and C_j is a positive definite operator. The operator $(R'_j(f))^*$ can be computed by adjoint differentiation:

$$(R'_j(f))^* r = \begin{pmatrix} -\nabla u_j \cdot \nabla \bar{z} \\ -u_j \bar{z} \end{pmatrix} \quad (6.6)$$

where z is the solution of

$$-\nabla \cdot (D\nabla z) + (\mu_a + i\frac{\omega}{c})z = 0 \quad \text{in } \Omega, \quad z = \bar{r} \quad \text{on } \partial\Omega. \quad (6.7)$$

The reconstruction process (6.5)–(6.7) reveals the following scheme: Phase conjugate and backpropagate the residual $r = R_j(f) - g_j$, phase conjugate the backpropagated field z and correlate it with the true field u_j to produce the update for f . The phase conjugations are nothing but time reversal in frequency domain.

NIR has been explored thoroughly by Arridge and collaborators [1]. The image quality achieved by NIR is not comparable to the one of CT. The reason is that the underlying differential equation is elliptic. Since elliptic equations are strongly smoothing, the forward map R_j is a strongly smoothing operator. Thus the reconstruction procedure is necessarily unstable, resulting in a poor quality of the reconstructed images. This circle of problems was investigated extensively in the framework of regularization; see [13] for a modern exposition.

7 Electrical impedance tomography (EIT)

Another example of an imaging technique that is based on an elliptic equation is EIT. Here the differential equation is

$$\nabla \cdot (\sigma \nabla u) = 0 \quad \text{in } \Omega \quad (7.1)$$

with $\sigma = \sigma(x)$ the conductivity. On the boundary $\partial\Omega$ we have

$$\frac{\partial u}{\partial \nu} = f, \quad u = g. \quad (7.2)$$

One of these quantities is prescribed, the other one is measured. The inverse problem calls for determining σ from many pairs f, g .

EIT has found much interest in mathematical circles. Calderon [7] proved uniqueness for the linearized problem, introducing the by now famous method of exponentially growing solutions. This method was extended by Nachmann [26], Sylvester-Uhlmann [42] to various cases of the fully nonlinear problem using the $\bar{\partial}$ -method. The exact inversion methods arising from these works led recently to numerical methods [25].

Being based on an elliptic equation, EIT suffers from the same shortcomings as NIR imaging. For what can be achieved see [8].

8 Seismic imaging

In the rest of the paper we deal with imaging techniques that are based on the wave equation. We start with seismics; see Fig. 6. In a common source gather the acoustic pressure $u(x, t)$ is measured at each point x on the surface $x_3 = 0$ for each source s on the surface. u satisfies

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} &= c^2(x)(\Delta u + q(t)\delta(x-s)) \quad \text{in } x_3 > 0, \\ u &= 0 \quad \text{for } t < 0. \end{aligned} \quad (8.1)$$

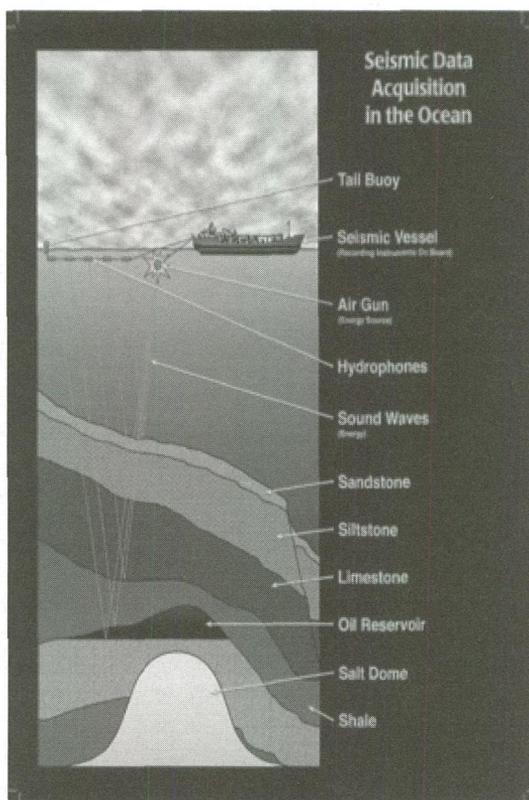


Figure 6: Seismic imaging, from [43]

Here, $c(x)$ is the speed of sound in the subsurface $x_3 > 0$ and q the source wavelet. The inverse problem consists in computing c from the seismograms $u(x, t)$, $x_3 = 0$, $t \geq 0$.

Most imaging in seismics is done as high frequency imaging. By this we mean that c is decomposed as $c = c_0 + c_1$ where c_0 is a smooth, i.e. slowly varying background that is known, and c_1 is a small highly oscillating function, representing the sought - for fine structure of the subsurface.

High frequency imaging is based on linearization: We approximately have

$$R_s(c) \approx R_s(c_0) + R'_s(c_0)c_1.$$

Using the data $g_s = R_s(c)$, applying the adjoint of the derivative $R'_s(c_0)$ and integrating over the sources we obtain

$$\int (R'_s(c_0))^*(g_s - R_s(c_0))ds = Fc_1, \quad F = \int (R'_s(c_0))^* R'_s(c_0)ds. \quad (8.2)$$

The important fact is that F is an elliptic pseudo differential operator [3]. Such operators preserve the singular support of a function. Thus the left hand side of (8.2) which

can be computed from the data (if c_0 is known) has precisely the same discontinuities as c_1 . Hence it provides a true picture of the fine structure of the subsurface.

High frequency imaging as described above works well in practice - provided a good estimate for c_0 is available. Finding good estimates for c_0 is known as the velocity estimation problem in seismic imaging.

For the evaluation of (8.2) we have to compute $(R'_s(c_0))^*r$ for r a seismogram. One can show that

$$(R'_s(c_0))^*r = \frac{2}{c_0} \int_0^T \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} z dt \tag{8.3}$$

where u is the pressure field for c_0 (i.e. the solution of (8.1) for $c = c_0$) and z is the solution of

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 z}{\partial t^2} &= c_0^2 \Delta z \quad \text{in } x_3 > 0, \\ z &= 0, \quad \frac{\partial z}{\partial x_3} = -\frac{r}{c_0^2} \quad \text{on } x_3 = 0, \\ z &= 0 \quad \text{for } t > T. \end{aligned} \tag{8.4}$$

Note that (8.4) is a final value problem. In the light of (8.3), (8.4), the reconstruction formula (8.2) can be viewed as time reversal [15]: Backpropagate the residual $r = g_s - R_s(c_0)$ through the medium and correlate it with the pressure field.

The left hand side of (8.2) is clearly reminiscent of the update in the iterative methods (2.2) and (6.5). It is tempting to use an iterative approach also for the seismic problem, iterating according to

$$c \leftarrow c - \alpha (R'_s(c))^* (R_s(c) - g_s); \tag{8.5}$$

the positive definite operator in (2.2) being ignored. Such methods have been widely used [44], [6], with very limited success. In order to understand what's going on we employ Fourier analysis, under the simplifying assumptions

- (i) $c^2(x) = c_0^2 / (1 + f(x))$, f small, c_0 constant.
- (ii) The sources s are fired simultaneously (so as to produce a plane wave travelling in the x_3 direction).

Then one can show [28] that the data determine the function

$$\hat{q}(\omega) \hat{f}(\xi', -k - \sqrt{k^2 - |\xi'|^2}), \quad k = \frac{\omega}{c_0} \tag{8.6}$$

where \hat{q}, \hat{f} are the 1D and 3D Fouriertransforms of q, f , respectively. Now assume that the source wavelet q has frequencies in $[\omega_0, \omega_1]$, i.e. $\hat{q}(\omega)$ in $[\omega_0, \omega_1]$ and put $k_0 = \omega_0/c_0$, $k_1 = \omega_1/c_0$. Then the domain where \hat{f} is determined is sketched in Fig.7.

The range (k_0, k_1) of available wave numbers depends entirely on the source wavelet q . For $q = \delta$, the Dirac δ -function, $k_0 = 0$ and $k_1 = \infty$. In this case we conclude from Fig. 7 that a layered medium with dip angle $< \pi/4$ can be well reconstructed by a single downgoing plane wave, and that an arbitrary medium can be reconstructed from two

plane waves making an angle of $\pi/2$. In view of [41] this is not surprising. Unfortunately such a wavelet is not supported by the earth. For wavelets that are used in practice such as the Ricker wavelet, the range of usable wave numbers is restricted to a finite interval $[k_0, k_1]$. Typically, $k_0 = k_1/10$. In that case the part $|\xi| < k_0$ of $\hat{f}(\xi)$ can not be recovered, not even from plane waves of arbitrary directions.

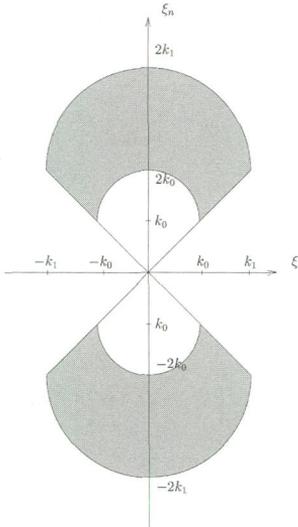


Figure 7: Region in Fourier domain where \hat{f} is determined by the data generated by a plane wave falling in from top.

Thus we see that the low frequency parts of f (and hence of c) are not determined by the data. A method such as (8.5) which by its very nature tries to determine these low frequency parts is bound to fail. This failure is entirely due to the missing low frequencies in the source wavelet q .

Estimating the low frequency part of the velocity can be viewed as the most important problem in seismic imaging. A promising technique is to exploit the overposedness of seismic data [43].

Imaging with the wave equation has recently found an extension to random media [40]. Even though the theoretical background is quite different from the deterministic setting above, backpropagation and time reversal still play an important role.

9 Synthetic aperture radar (SAR)

SAR is another instance of imaging with the wave equation where high frequency methods play a dominant role. The geometry of SAR is explained in Figure 8: A plane is flying over a terrain that is described by the ground reflectivity function $f(x_1, x_2)$. An antenna on the plane sends out a radar signal and measures the returned impulse. From these measurements along the flight track f has to be reconstructed.

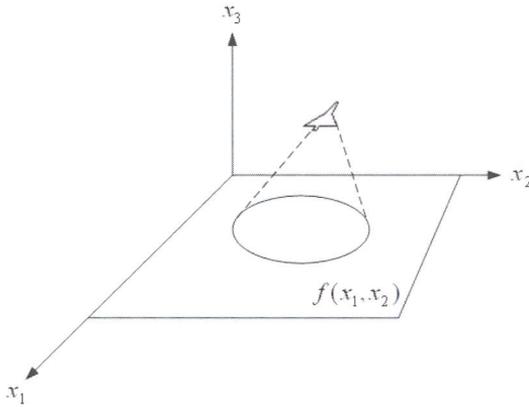


Figure 8: SAR geometry from [9]. Data are collected along the flight path.

In the most simple case f is reconstructed from its averages over circles whose mid-points are on the flight track [2], [22]. In a more refined model the propagation of the signal is described by the wave equation

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = c^2(\Delta u + q(t)\delta(x - y))$$

where y is a point on the flight track, $q(t) = e^{i\omega t}$ the time harmonic excitation of the antenna, and

$$\frac{1}{c^2} = \frac{1}{c_0^2} + f(x_1, x_2)\delta(x_3)$$

with c_0 the speed of light. The inverse problem consists in finding f from $u(y, t)$ for y on the flight track and $t > 0$.

By linearising around $f = 0$ (Born approximation) and the far field approximation (y is far away from the support of f) one can show that approximately [9]

$$u(y, t) = u_0(y, t) + \frac{\omega^2 e^{i(\omega t + 2k|y|)}}{16\pi^2 |y|^2} \int f(x) e^{-2ik \frac{y}{|y|} \cdot x} dx$$

where $k = \omega/c_0$ is the wave number and u_0 is the (known) field for $f = 0$. k is restricted to an interval $[k_1, k_2]$ much shorter than the central wave number $(k_1 + k_2)/2$.

Thus the problem amounts to determining f from its Fourier transform $\hat{f}(2ky/|y|)$. Since k is very large and $y/|y|$ is restricted to a small angular range (typically a few degrees) we only obtain \hat{f} in a small truncated sector far away from the origin.

It is clear that from so little information f can not be reconstructed uniquely. However, microlocal analysis [35] shows that essential features of f such as corners can be recovered. Another difficulty is computational: In order to find f from \hat{f} one has to perform a fast Fourier transform (FFT). The usual FFT algorithms require \hat{f} to be known on a cartesian grid, what is clearly not the case here. Thus non-equidistant FFT's [16] or gridding techniques [5] have to be used.

10 Ultrasound transmission tomography

In the two preceding sections we have seen that wave equation imaging using only reflected signals suffers from a serious drawback: It is difficult to recover low frequency features. Thus most of the work in seismic and radar imaging is high frequency. Present day's medical ultrasound is also based on reflections.

The situation changes completely if transmitted signals are available. This is the case in novel medical ultrasound scanners; see Figure 9. We analyze the impact of transmission measurements again in Fourier domain; see Figure 10. To fix ideas we take $n = 2$. The combined reflection and transmission signals determine \hat{f} in the disc around $(0, k_1)$ of radius k_1 , minus the disc around $(0, k_0)$ with radius k_0 . This is the picture for one downgoing plane wave.

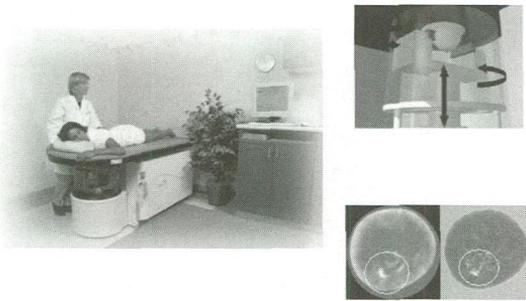


Figure 9: Ultrasound scanner developed by TechniScan, Salt Lake City (left), scanning geometry (top right) and reconstruction of speed of sound and attenuation (bottom right).

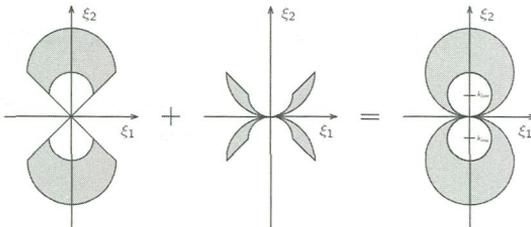


Figure 10: Regions in Fourier domain where \hat{f} is determined by reflection (left) and transmission (middle) from a single plane wave. Combined region is also shown (right).

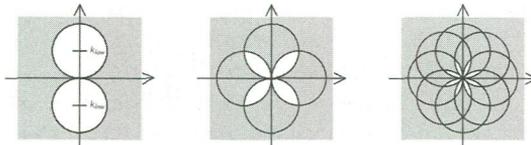


Figure 11: Regions in Fourier domain in which \hat{f} is determined by one (left), two (middle) and four (right) plane waves.

Now let $k_1 \rightarrow \infty$ and use two plane waves making an angle of 90° and four plane waves making angles of 45° . Then we get the pictures in Figure 11. We see that for a modest number of plane waves we get on almost complete coverage in Fourier space. Of course this is a classical result [4]. As in the previous sections this rigourously holds only in the Born approximation, i.e. if the scatter is weak. However practical experience suggests that it is also true for fairly strong scatter.

As image reconstruction algorithm for ultrasound transmission tomography one can use the algorithm (8.5). Since the number of sources is large a preprocessing step (plane wave stacking [28]) is necessary to keep the computation time low.

Alternatively one can work in frequency domain. This leads to the following inverse problem for the Helmholtz equation: Let u be the solution of

$$\begin{aligned} \Delta u + k^2(1 + f(x))u &= 0 \quad \text{in } \mathbf{R}^2, \\ u &= e^{ikx \cdot \theta} + u_s \end{aligned} \tag{10.1}$$

where $\theta \in S^1$ and u_s satisfies the Sommerfeld radiation condition. f is the complex valued function

$$f = \frac{c_0^2}{c^2} - 1 - \frac{i}{k} \frac{2\alpha c_0}{c} \tag{10.2}$$

where $c(x)$ is the local speed of sound, c_0 the speed of sound in the ambient medium, and α is the attenuation coefficient. f is supported in $|x| \leq r$. Find f from the values of $u_s(x)$ for $|x| = r$, k fixed, and $\theta \in S^1$. Here we assume that phase and amplitude of the field u can be measured. If only the amplitude is available we speak of phase contrast tomography [19].

Again the problem is easily solved in the Born approximation, and there even exists an explicit error estimate [29]. In the Born approximation \hat{f} is stably determined by the data in a circle of radius $2k$. According to the Shannon sampling theorem this means that f can be stably determined with spatial resolution π/k . As has been shown recently [39] this is true also for the fully nonlinear problem.

Unfortunately the Born approximation is not applicable to medical imaging, since f is far too big. Even though explicit methods based on the $\bar{\partial}$ technique exist [36] the methods of choice seem to be iterative, patterned after (2.2), (6.5), (8.5). These methods require the repeated solution of the boundary value problem (10.1) and its time-reversed analogue. Since k is large this is a challenge in itself, quite independently of the inversion process.

A way out is the reformulation of the boundary value problem (10.1) as an initial value problem. This sounds like heresy, since initial value problems for elliptic equations are notoriously unstable. However a closer analysis shows that this instability is a pure high frequency phenomenon that concerns only spatial frequencies beyond k . These are irrelevant if we restrict the spatial resolution of the reconstructed image to π/k , i. e. one half of the wavelength of the irradiating plane wave. For the stability of the initial value problem for the Helmholtz equation see [33], [23]. Highly efficient marching schemes for the initial value problem for the Helmholtz equation are described in [34].

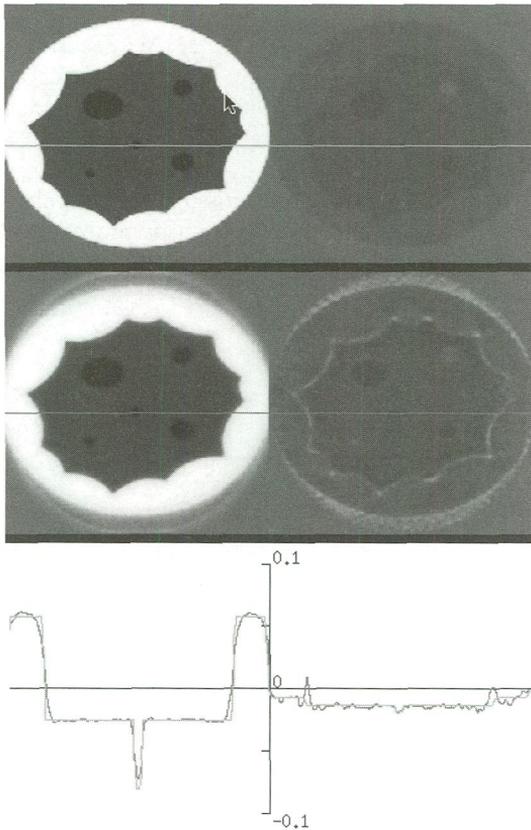


Figure 12: Top: Real (left) and imaginary (right) part of breast phantom. Middle: Reconstructions. Bottom: Cross section through phantom and reconstruction along the horizontal line displayed above.

What can be achieved by these techniques is shown in Figure 12. The computations are done on a 256×256 grid and require about 1 minute on a 3 GHz double processor PC. The computations are based on artificial data.

In principle exact inversion methods based on the $\bar{\partial}$ -method can be used, too. Encouraging results can be found in [36]. For k small, the numerical difficulties disappear, but the resolution is poor. Still, algorithms patterned according to (6.5) can be used even for microwave imaging which is governed by Maxwell's equations [12], [45].

In this paper we did not consider the large field of inverse obstacle scattering, in which the unknown functions are characteristic functions of objects whose shape has to be determined. Various highly efficient methods, such as linear sampling, have been developed for this purpose; see [10], [21].

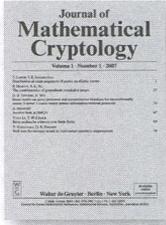
11 Conclusion

We have shown that various imaging techniques can be formulated as inverse problems of partial differential equations. It is hoped that this point of view leads to a unified theory of imaging. For iterative reconstruction techniques this theory is already visible: The principle of time reversal seems to be universal. It is conceivable that a unified treatment of exact inversion methods is possible, too, with theories such as \bar{D} -theory as starting point. Likewise, mathematical tools such as microlocal analysis, pseudo differential operators and Fourier integral operators come into play naturally if imaging is considered from the point of view of partial differential equations.

References

- [1] Arridge, S.R.: Optical tomography in medical imaging, *Inverse Problems* **15**, R41–R93 (1999).
- [2] Anderssen, L.E.: The determination of a function from spherical averages, *SIAM J. Math. Anal.* **19**, 214–232 (1988).
- [3] Beylkin, G.: Imaging of discontinuities in the inverse scattering problem by inversion of a causal generalized Radon transform, *J. Math. Phys.* **26**, 99–108 (1985).
- [4] Born, M. and Wolf, E.: *Principle of Optics*. Pergamon Press, London 1980.
- [5] Brouw, W. N.: Aperture synthesis, *Methods Comput. Physics*. **B14**, 131–175 (1975).
- [6] Bunks, C., Saleck, F. M., Zaleski, S. and Chavent, G.: Multiscale waveform inversion, *Geophysics* **60**, 1457–1473 (1995).
- [7] Calderon, A. B.: On an inverse boundary value problem, in: *Seminar on Numerical Analysis and its Application to Continuum Physics*, 65–73, Soc. Brasileira de Matematica, Rio de Janeiro (1980).
- [8] Cheney, M., Isaacson, D. and Newell, I. C.: Electrical impedance tomography, *SIAM Rev.* **41**, 85–101 (1999).
- [9] Cheney, M.: A mathematical tutorial on Synthetic Aperture Radar, *SIAM Rev.* **43**, 301–312 (2001).
- [10] Colton, D. and Kress, R.: *Inverse Acoustic and Electromagnetic Scattering Theory*. Springer, 1992.
- [11] Deans, S. R.: *The Radar Transform and some of its Application*. Wiley 1983.
- [12] Dorn, O., Bertete-Aguire, H., Berryman, I. G., and Papanicolaou, G. C.: A nonlinear inversion method for 3D electromagnetic imaging using adjoint fields, *Inverse Problems* **15**, 1523–1558 (1999).
- [13] Engl, H. W., Hanke, M., and Neubauer, A.: *Regularization of Inverse Problems*, Kluwer Academic Publisher, Dordrecht 1996.
- [14] Epstein, C. L.: *Introduction to the Mathematics of Medical Imaging*. Prentice Hall 2003.
- [15] Fink, M.: Time-reversal of ultrasonic fields – Part 1: Basic principles, *IEEE Trans. Ultrasonic Ferroelectr. Freq. Control* **39**, 555–567 (1992).
- [16] Fourmont, K.: Non-equispaced fast Fourier transform with applications to tomography, *J. Fourier Anal. Appl.* **9**, 431–450 (2003).
- [17] Herman, G. T.: *Image Reconstruction from Projections: The Fundamentals of Computerized Tomography*. Academic Press, New York 1980.
- [18] Isakov, V.: *Inverse Problems for Partial Differential Equations*. Springer 2006.
- [19] Jonas, P. and Louis, A. K.: Phase contrast tomography using holographic measurements. *Inverse Problems* **20**, 75–102 (2004).
- [20] Kak, A. C. and Slaney, M.: *Principles of Computerized Tomography Imaging*. IEEE Press, New York (1987). Reprinted as *SIAM Classics in Applied Mathematics*, Philadelphia 2001.

- [21] Kirsch, A.: The factorization method for a class of inverse elliptic problems, *Math. Nachr.* **278**, 258–277 (2005).
- [22] Klein, J.: Mathematical problems in synthetic aperture radar, Dissertation, Fachbereich Mathematik und Informatik, Universität Münster, Münster 2004.
- [23] Klyubina, O.: Asymptotic Methods in Ultrasound Tomography. Dissertation, Fachbereich Mathematik und Informatik, Münster 2005.
- [24] Morneburg, H. (ed.): Bildgebende Verfahren für die Medizinische Diagnostik. Publis MCD Verlag, Erlangen 1995.
- [25] Mueller, I. L., Siltanen, S. and Isaacson, D.: A direct reconstruction algorithm for electrical impedance tomography, *IEEE Trans. Med. Imag.* **21**, 555–559 (2002).
- [26] Nachman, A. I.: Global uniqueness for a two-dimensional inverse boundary value problem, *Ann. of Math.* **143**, 71–96 (1996).
- [27] Natterer, F.: The Mathematics of Computerized Tomography. Wiley – Teubner, New York – Leipzig 1986. Reprinted as SIAM Classics in Applied Mathematics, Philadelphia 2001.
- [28] Natterer, F.: Ultrasonic image reconstruction via plane wave stacking, Preprint, Institut für Numerische und Angewandte Mathematik, Münster 2005.
- [29] Natterer, F.: Error estimates for the Born approximation, *Inverse Problems* **20**, 447–452 (2004).
- [30] Natterer, F. and Ritman, E. L.: Past and Future Directions in X-Ray Computed Tomography (CT), *International Journal of Imaging Systems and Technologie* **12**, 175–187 (2002).
- [31] Natterer, F. and Wübbeling, F.: Mathematical Methods in Image Reconstruction. SIAM, Philadelphia 2001.
- [32] Natterer, F. and Wübbeling, F.: Scatter correction in PET based on transport models, Technical Report 14/04-N, Angewandte Mathematik und Informatik, Münster 2004.
- [33] Natterer, F. and Wübbeling, F.: Marching schemes for inverse acoustic scattering problems, *Numerische Mathematik* **100**, 697–710 (2005).
- [34] Natterer, F. and Wübbeling, F.: A propagation-backpropagation method in ultrasound tomography, *Inverse Problems* **11**, 1225–1232 (1995).
- [35] Nolan, C. I. and Cheney, M.: Synthetic aperture inversion, *Inverse Problems* **18**, 221–236 (2002).
- [36] Novikov, R. G.: Formulae and equations for finding scattering data from the Dirichlet-to-Neumann map with nonzero background potential, *Inverse Problems* **21**, 257–270 (2005).
- [37] Novikov, R. G.: An inversion formula for the attenuated X-ray transform, *Ark. Mat* **40**, 145–167 (2002).
- [38] Palamodov, V.: *Reconstructive Integral Geometry*. Birkhäuser Verlag, Basel 2004.
- [39] Palamodov, V. P.: Stability in diffraction tomography and a nonlinear “basic theorem”, *J. Anal. Math.* **91**, 247–268 (2003).
- [40] Papanicolaou, G.: Mathematical problems in geophysical wave propagation, in: *Documenta Mathematica, Extra Volume ICM 98*, 241–265 (1998).
- [41] Rose, I. H., Cheney, M. and DeFazio, B.: The connection between time-frequency-domain three-dimensional inverse scattering methods, *Math. Phys.* **25**, 2995–3000 (1984).
- [42] Sylvester, I. and Uhlmann, G.: A global uniqueness theorem for an inverse boundary value problem, *Ann. of Math.* **125**, 153–169 (1987).
- [43] Symes, W. W. and Carazzone, I. I.: Velocity inversion by differential semblance optimisation, *Geophysics* **56**, 654–663 (1991).
- [44] Tarantola, A.: Inversion of travel times and seismic waveforms, in: Nolet (ed.): *Seismic Tomography*. D. Reidel, Boston 1987.
- [45] Vögeler, M.: Reconstruction of the three-dimensional refractive index in electromagnetic scattering using a propagation-backpropagation method, *Inverse Problems* **19**, 739–754 (2003).
- [46] Welch, A., Clack, R., Natterer, F. and Gullberg, G. T.: Towards accurate attenuation correction in SPECT without transmission scan, *IEEE Trans. Med. Imag.* **16**, 532–541 (1997).



New Journal

Journal of Mathematical Cryptology

Managing Editors

Spyros Magliveras (Florida Atlantic University, USA)

Rainer Steinwandt (Florida Atlantic University, USA)

Tran van Trung (Universität Duisburg-Essen, GER)

ISSN 1862-2976

Editorial Board

S. Blackburn (Royal Holloway, University of London, UK)

E. Brickell (Intel Corporation, USA)

M. Burmester (Florida State University, USA)

R. Cramer (Leiden University/CWI, NL)

E. Dawson (Queensland Univ. of Technology, Brisbane, AUS)

G. Frey (Universität Duisburg-Essen, GER)

R. Gilman (Stevens Inst. of Technology, USA)

O. Grosek (Slovak Technical University, SK)

H. Imai (University of Tokyo, JAP)

K. Kim (ICU, KOR)

N. Kobitz (University of Washington, USA)

K. Kurosawa (Ibaraki University, JAP)

S. Magliveras (Florida Atlantic University, USA)

A. Menezes (University of Waterloo, CAN)

R. Mullin (University of Waterloo, CAN / Florida Atlantic University, USA)

P. Nguyen (École normale supérieure, FRA)

B. Pfitzmann (IBM Research Zurich, CH)

J. Pieprzyk (Macquarie University, AUS)

R. Safavi-Naini (University of Wollongong, AUS)

I. Shparlinski (Macquarie University, AUS)

R. Steinwandt (Florida Atlantic University, USA)

D. Stinson (University of Waterloo, CAN)

T. van Trung (Universität Duisburg-Essen, GER)

W. Wei (Florida Atlantic University, USA)

H. Williams (University of Calgary, CA)

M. Yung (Columbia University, USA)

Aims and Scopes

The Journal of Mathematical Cryptology (JMC) is a forum for original research articles in the area of mathematical cryptology. Works in the theory of cryptology and articles linking mathematics with cryptology are welcome. Submissions from all areas of mathematics significant for cryptology are invited, including but not limited to, algebra, algebraic geometry, coding theory, combinatorics, number theory, probability and stochastic processes. The scope includes mathematical results of algorithmic or computational nature that are of interest to cryptology. While JMC does not cover information security as a whole, the submission of manuscripts on information security with a strong mathematical emphasis is explicitly encouraged.

Subscription Information

JMC has four issues per year, with approximately 100 pages per issue.

Approximate subscription rates for 2007:

Print only: approx. € 288.00 / *US\$ 348.00

Online only: approx. € 288.00 / *US\$ 348.00

Print + Online: approx. € 312.00 / *US\$ 378.00

Call for papers

A manuscript can be submitted to any one of the Managing Editors

Spyros S. Magliveras

(Email: spyros@fau.edu),

Rainer Steinwandt

(Email: RSteinwa@fau.edu),

or **Tran van Trung**

(Email: trung@iem.uni-due.de)



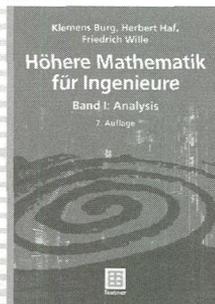
de Gruyter
Berlin · New York

** for orders placed in North America.*

Prices subject to change.

Recommended retail prices; VAT included, shipping costs will be added.

Mathematik in Beispiel, Theorie und Anwendung



Klemens Burg/Herbert Haf/
Friedrich Wille

Höhere Mathematik für Ingenieure Band I

Analysis

7., überarb. u. erw. Aufl. 2006.
XVIII, 604 S. mit 230 Abb. Br.
EUR 39,90

ISBN 978-3-8351-0045-9

Inhalt

Grundlagen: Reelle Zahlen; Elementare Kombinatorik; Funktionen; Unendliche Folgen reeller Zahlen; Unendliche Reihen reeller Zahlen; Stetige Funktionen - Elementare Funktionen - Differentialrechnung einer reellen Variablen - Integralrechnung einer reellen Variablen - Folgen und Reihen von Funktionen - Differentialrechnung mehrerer reeller Variabler - Integralrechnung mehrerer reeller Variabler

Burg/Haf/Wille Höhere Mathematik für Ingenieure Band II

Lineare Algebra

5., überarb. u. erw. Aufl. 2007.
XVIII, 415 S. Br. EUR 39,90
ISBN 978-3-8351-0111-1

Inhalt

Vektoren in der Ebene - Vektoren im dreidimensionalen Raum - Vektorräume - Lineare Gleichungssysteme, Gaußscher Algorithmus - Algebraische Strukturen: Gruppen und Körper - Vektorräume über beliebigen Körpern - Matrizenmultiplikation - Reguläre und inverse Matrizen - Determinanten - Spezielle Matrizen - Lineare Gleichungssysteme und Matrizen - Eigenwerte und Eigenvektoren - Die Jordansche Normalform - Matrix-Funktionen - Drehungen, Spiegelungen, Koordinatentransformationen - Lineare Ausgleichsprobleme - Technische Strukturen - Roboter-Bewegungen

Burg/Haf/Wille Höhere Mathematik für Ingenieure Band III

Gewöhnliche Differentialgleichungen, Distributionen, Integraltransformationen
4., durchges. u. erw. Aufl.

2002. XIV, 437 S. Br. EUR 39,90
ISBN 978-3-519-32957-2

Inhalt

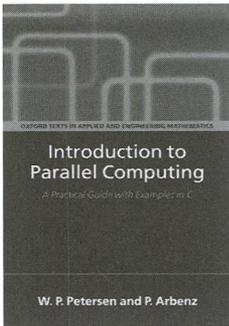
Gewöhnliche Differentialgleichungen: Differentialgleichungen n-ter und Systeme 1. Ordnung - Ebene autonome Systeme - Lineare Differentialgleichungen - Lineare Differentialgleichungen mit konstanten Koeffizienten - Potenzreihenansätze und Anwendungen - Rand- und Eigenwertprobleme - Distribution: Verallgemeinerung des klassischen Funktionsbegriffs - Rechnen mit Distributionen - Anwendungen - Integraltransformationen: Fouriertransformation - Hilberttransformation - Diskrete und Schnelle Fouriertransformation - Laplacetransformation

Teubner Lehrbücher:
einfach clever



Abraham-Lincoln-Str. 46
65189 Wiesbaden
Fax 0611.7878-420
www.teubner.de





W. P. Petersen,
P. Arbenz
**Introduction to
Parallel Computing**

Oxford University Press, 2004, 278 S., £ 35,-

Das vorliegende Buch von W. P. Petersen und P. Arbenz stellt eine Einführung in paralleles Rechnen vor, die sich aus mehreren Kursen der Autoren an der ETH Zürich zusammensetzt. Es versucht, anhand von einfachen Beispielen die Probleme der Parallelverarbeitung und verschiedene Werkzeuge zu deren Lösung vorzustellen.

In ihrem Vorwort zitieren die Autoren zwei Kritikpunkte ihrer Studenten, Informationsüberladung und schwer durchschaubare Zusammenhänge, denen die Autoren in ihrem Buch begegnen wollen. Leider gelingt dies nicht völlig, so dass im Buch ein roter Faden nur schwer zu erkennen ist.

Das Buch gliedert sich in fünf Kapitel und sieben Anhänge. Den Kern stellt dabei das zweite Kapitel mit gut einem Drittel des Buchumfanges (ohne Anhänge) dar. In diesem werden einige Anwendungen eingeführt, die dann in den folgenden 3 Kapiteln jeweils in unterschiedlichen Modellen parallelen Rechnens wiederholt und erweitert werden. Zu jedem Kapitel formulieren die Autoren eine oder mehrere teilweise sehr umfangreiche Aufgaben. Sie verweisen dabei gelegentlich auf Ressourcen, die nur übers Internet bezogen werden können. Anhänge A bis E beschreiben einige verwendete Befehlsätze, Anhänge F und G geben ein hilfreiches Stichwortverzeichnis und eine Tabelle mit Notationen.

Nachdem im ersten Kapitel auf einige Speichersysteme und Prozessorkommunikation

eingegangen wurde, stellt das zweite Kapitel Beispielanwendungen vor. Diese beinhalten Skalar-Vektor-Multiplikation, Matrix-Vektor-Multiplikation, Gaußverfahren und iterative Lösungsverfahren für lineare Gleichungssysteme. Anschließend wird die schnelle Fouriertransformation eingeführt. Der letzte Abschnitt schließlich beschäftigt sich mit Monte Carlo Verfahren; hier behandeln die Autoren zunächst Zufallsgeneratoren und allgemeine Eigenschaften von Monte Carlo Simulationen, um abschließend einige interessante Beispiele aus der Physik anzuführen.

Das dritte Kapitel behandelt das klassische Parallelverarbeitungsmodell, in dem ein Programmcode parallel auf mehreren Maschinen mit jeweils eigenem Speicher ausgeführt wird. (SIMD, single instruction multiple data). Beispiele aus Kapitel eins und zwei werden in diesem Modell konkretisiert, insbesondere Grundoperationen auf Matrizen, Auswertung von Polynomen und FFT.

Kapitel vier behandelt paralleles Rechnen mit einem einzigen, gemeinsamen Speicher. Die Autoren stellen ein paar Systeme, die dieses Modell verwenden, vor, und lösen einige der vorherigen Beispiele mit Hilfe der OpenMP-Bibliothek erneut.

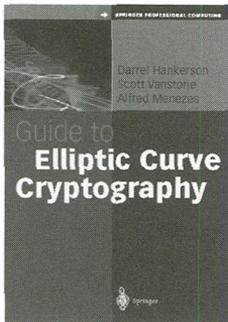
Das letzte Kapitel beschäftigt sich mit einem dritten Modell (MIMD, multiple instruction, multiple data), in dem mehrere Programme gleichberechtigt nebeneinander laufen über das Message Parsing Interface (MPI) miteinander kommunizieren. Die Autoren betrachten hier verschiedene Verteilungen von Matrizen und Vektoren auf verschiedene Knoten und bearbeiten mit diesen erneut grundlegende Matrixoperationen, FFT, und Monte Carlo Simulationen.

Insgesamt stellt das Buch eine Reihe von interessanten Modellen des parallelen Rechnens vor und verdeutlicht diese an häufigen Rechenoperationen der angewandten Mathematik. Insbesondere die physikalischen Beispiele für Monte Carlo Anwendungen sind sehr interessant. Leider ist es schwierig, anhand des Buches eine Übersicht über die angeschnittenen Themen zu gewinnen. Eini-

ge kleinere Fehler machen das Buch auch als Nachschlagewerk oder als Grundlage für eine Lehrveranstaltung nur mit zusätzlichem Aufwand verwendbar.

Saarbrücken

T. von Oertzen



D. Hankerson,
A. Menezes,
S. Vanstone
**Guide to Elliptic Curve
Cryptography**

Berlin u. a., Springer, 2004, 311 S., € 64,95

Die Arithmetik elliptischer Kurven hat innerhalb der letzten zehn Jahre im Bereich der Public-Key-Kryptographie zahlreiche Anwendungen gefunden, das Angebot an einführender Literatur zu diesem Thema ist aber nach wie vor gering. In gängigen Lehrbüchern zur Kryptographie werden die elliptischen Kurven oft lediglich als Fußnote oder in einem kurzen Ergänzungskapitel abgehandelt, was der hohen Relevanz und der umfangreichen mathematischen und ingenieurwissenschaftlichen Forschung auf diesem Gebiet nicht gerecht wird.

Mit dem „Guide to Elliptic Curve Cryptography“ der Autoren Hankerson, Menezes und Vanstone liegt nun eine gründliche Einführung in die anwendungsbezogenen Aspekte dieses Themas vor. Es richtet sich an Studenten der angewandten Mathematik, Informatik oder Elektrotechnik sowie an Personen, die im Bereich der Software-Entwicklung und Datensicherheit tätig sind. Im ersten Kapitel werden die Grundbegriffe der Public-Key-Kryptographie wiederholt und die Vorzüge der EC-Kryptographie gegenüber anderen Verfahren (RSA, diskreter Lo-

garithmus über endlichen Körpern, ...) erläutert. Es folgt eine Beschreibung von Algorithmen zur Arithmetik endlicher Körper, die in dieser Ausführlichkeit wahrscheinlich bisher in keinem Lehrbuch zu finden ist. Auf Grund der vielfältigen Optimierungsmöglichkeiten wird der Fall $p = 2$ von Anfang an separat behandelt. Die Algorithmen werden in einem gut verständlichen Pseudocode angegeben, stellenweise hätte der Begleittext allerdings etwas detaillierter ausfallen können.

Im darauffolgenden, zentralen Kapitel wird die Körperarithmetik dann für die Realisierung der grundlegenden Rechenoperationen auf elliptischen Kurven verwendet, insbesondere der Addition und Invertierung von Punkten sowie die Bildung von ganzzahligen Vielfachen. Auch dieses Thema wird in einer angemessenen Breite behandelt: Die Vor- und Nachteile verschiedener interner Darstellungen der Punktgruppe werden ebenso berücksichtigt wie Verbesserungen, die sich durch die Wahl spezieller elliptischer Kurven (z. B. Koblitz-Kurven) ergeben. Grundlagen aus der Theorie der elliptischen Kurven werden auf elementare Weise nur insoweit behandelt, wie dies für die Beschreibung der Algorithmen unmittelbar erforderlich ist. Dadurch ist der gesamte Text auch ohne Algebrakennnisse lesbar, lediglich das Rechnen mit Restklassen und Polynomen sollte dem Leser vertraut sein.

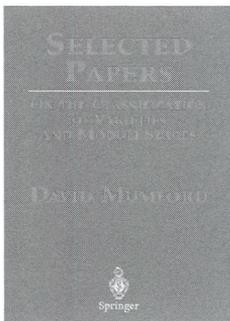
Es folgt ein Kapitel über kryptographische Protokolle basierend auf EC-Kryptographie, wie z. B. Ver- und Entschlüsselung, digitale Signaturen und Schlüsselaustauschverfahren. Da für die Verlässlichkeit von Kryptosystemen in der Praxis ist insbesondere die Wahl geeigneter Kurven ausschlaggebend ist, wird diesem Aspekt besondere Beachtung geschenkt. Das letzte Kapitel befasst sich mit speziellen Implementierungstechniken für gängige Prozessortypen. Überblicksartig werden Techniken zur Hardwareimplementierungen vorgestellt, und es wird auf mögliche hardwareabhängige Sicherheitslücken (z. B. durch Power Attacks) eingegangen. Den Abschluss bilden eine Reihe von Tabellen zur Konstruktion kryptogra-

phisch geeigneter Kurven sowie ein ausführliches Literaturverzeichnis.

Insgesamt meiner Meinung ein unverzichtbares Werk für jeden, der sich ernsthaft mit praktischer EC-Kryptographie befassen oder sein Wissen auf den aktuellen Stand bringen möchte. Leser, die auch für den mathematischen Hintergrund des Themas interessieren, sollten aber auf jeden Fall andere Quellen, wie z. B. Silvermans Buch „Introduction to Elliptic Curves“, hinzuziehen. Persönlich gewünscht hätte ich mir noch einen Überblick zur Kryptographie mit allgemeineren, z. B. hyperelliptischen Kurven. Der dazu erforderliche technische Mehraufwand hätte den Umfang des Buches von 311 Seiten allerdings noch erheblich anwachsen lassen.

Mainz

R. Gerkmann



D. Mumford
**Selected Papers,
 On the Classification
 of Varieties and
 Moduli Spaces**

New York u. a., Springer, 2004, 795 S., € 99,-

As every algebraic geometer knows, David Mumford is one of the fathers of modern algebraic geometry. His activity in this field lasted more than 30 years, starting from the early 60's. Besides writing about 50 research articles he published several books some of which are nowadays classics, to wit Lectures on Curves on an Algebraic Surface, Geometric Invariant Theory, Abelian Varieties. He is one of the creators of the modern approach to the classification of algebraic varieties and to the construction of moduli

spaces. His work in algebraic geometry is firmly rooted on classical problems and at the same time totally relying on the modern language.

The Editors of this volume of Selected Papers, published by Springer Verlag, have made the choice of grouping his articles under three distinct headings:

Geometric Invariant Theory and the Moduli of Curves

Theta Functions and the Moduli of Abelian Varieties

The Classification of Surfaces and Other Varieties

These groups are introduced by Commentaries written respectively by D. Gieseker, G. Kempf and H. Lange, E. Viehweg, each giving a quite useful overview of the work of Mumford and of its followers.

More specifically, the first Commentary is a quick non-technical overview of Geometric Invariant Theory, from its origins all the way to its numerous applications to diverse areas of mathematics (Note: on p.7 the author quotes item [M2] but he means item [47] from the general list of Mumford's papers). The second Commentary is a very careful guide through the intricacies of abelian varieties and into Mumford's deep contributions; an excellent bibliography is supplied. Mumford's contributions to "other areas" of algebraic geometry are surveyed in Commentary 3. In particular here we find a careful and updated discussion of vanishing theorems, of the classification of algebraic surfaces in positive characteristic, of the celebrated theorem of Mumford's on 0-cycles on surfaces which led to the Bloch conjecture.

Such structure gives the volume an added value: thanks also to recently updated bibliographies, these essays are an invaluable help to orient the reader into contemporary algebraic geometry through the deep and vastly ramified work of Mumford.

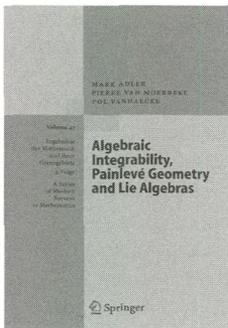
The selection of papers presents some surprises though. It does not include the important "The Irreducibility of the Space of Curves of Given Genus" (with P. Deligne),

studied by generations of algebraic geometers (and referred to at length in the first Commentary), nor “Picard Groups of Moduli Problems”, a jewel of depth and clarity at the same time.

This is a book which is not going to get dust on a shelf: it will more likely spend its life on desks, read more often than a Graduate Text or a Monograph. Algebraic geometers of every generation will certainly welcome it.

Rom

E. Sernesi



M. Adler,
P. van Moerbeke,
P. Vanhaecke
**Algebraic Integrability,
Painlevé Geometry
and Lie Algebras**

Berlin u. a., Springer, 2003, 483 S., € 129,-

Integrierbarkeit eines physikalischen Systems mit Zustandsraum M bedeutet grob gesprochen, es gibt genügend Erhaltungsgrößen $F_j: M \rightarrow \mathbf{R}$ so, dass man bei Vorgabe eines Satzes von Werten c_j , die Bewegungsgleichungen des Systems auf $\bigcap_j F_j^{-1}(c_j)$ explizit lösen kann. Eine fundamentale Erkenntnis in diesem Kontext ist das Noether-Prinzip, das einen Zusammenhang zwischen der Existenz von Erhaltungsgrößen und Symmetrien der Bewegungsgleichungen postuliert. So entspricht z. B. die Erhaltung der Energie der Zeitinvarianz der Bewegungsgleichungen, während Impulserhaltung auf Translationsinvarianz beruht. Um das Noether-Prinzip präzise zu formulieren, muss man einen begrifflichen Rahmen wählen, in dem man die zu behandelnden physikalischen Systeme modellieren möchte. Das

vorliegende Buch benutzt die Poissongeometrie, die eine Verallgemeinerung der symplektischen Geometrie ist, als einen solchen Rahmen.

Als Zustandsräume wählt man Poisson-Mannigfaltigkeiten. Dies sind zunächst einmal reelle Mannigfaltigkeiten M mit einem zusätzlichen Produkt $C^\infty(M) \times C^\infty(M) \rightarrow C^\infty(M)$ auf der Menge $C^\infty(M)$ der glatten Funktionen auf M , das $C^\infty(M)$ zu einer Lie-Algebra macht. Das Produkt von F und H wird für gewöhnlich mit $\{F, H\}$ bezeichnet und die Poisson-Klammer von F und H genannt. Man fordert weitere Eigenschaften (eine Art Leibniz-Regel) von der Poisson-Klammer, die dazu führen, dass durch $\mathcal{X}_H F = \{F, H\}$ ein Vektorfeld auf M definiert wird, das man das Hamiltonsche Vektorfeld von H nennt. Das Vektorfeld \mathcal{X}_H repräsentiert dann die Bewegungsgleichung zu einer vorgegebenen Hamilton-Funktion H , deren Wert in $x \in M$ die Energie des Zustands x angibt. Sie kann auch durch $\dot{F} = \{F, H\}$ beschrieben werden, was zeigt, dass Erhaltungsgrößen durch mit H kommutierenden Funktionen gegeben werden. In diesem Kontext lässt sich das Noether-Prinzip präzise formulieren: zu einer Einparametergruppe von Symmetrien von H , d. h. Diffeomorphismen von M , die H invariant lassen, definiert man durch ableiten ein Vektorfeld auf M , und unter passenden Voraussetzungen lässt dieses sich als Hamiltonsches Vektorfeld \mathcal{X}_H schreiben. Dieses H ist dann eine Erhaltungsgröße. Umgekehrt bildet man das Hamiltonsche Vektorfeld zu einer Erhaltungsgröße und dieses Vektorfeld lässt sich, wiederum unter passenden Voraussetzungen, zu einer Einparametergruppe von Symmetrien integrieren. Dieses Prinzip lässt auf mehrdimensionale (Liesche) Symmetriegruppen G verallgemeinern und führt auf die sogenannte Ko-Impulsabbildung $\mathcal{J}: \mathfrak{g} \rightarrow C^\infty(M)$, deren Werte alle Erhaltungsgrößen sind. Hierbei ist \mathfrak{g} die Lie-Algebra (die Menge der infinitesimalen Erzeuger) von G .

Poisson-Mannigfaltigkeiten lassen eine verallgemeinerte Blätterung in symplekti-

sche Mannigfaltigkeiten zu, auf denen die Trajektorien von Hamiltonschen Bewegungsgleichungen zwangsläufig verlaufen. Die maximal vorkommende Dimension (dies ist immer eine gerade Zahl) einer solchen symplektischen Untermannigfaltigkeit heißt der Rang der Poisson-Mannigfaltigkeit. Mithilfe des Ranges lässt sich die vollständige Integrierbarkeit im Sinne von Liouville definieren: Sei $2r$ der Rang von M und $s = \dim(M) - r$. Wenn man s Poisson-kommutierende Funktionen F_1, \dots, F_s hat, deren Differentiale auf einer dichten Teilmenge von M linear unabhängig sind, dann nennt man M Liouville-integrierbar. Der Grund dafür liegt im Satz von Liouville, der besagt, dass unter passenden Vollständigkeitsvoraussetzungen die Fasern der zusammengesetzten (Impuls-) Abbildung $F = (F_1, \dots, F_s)$ von der Form $\mathbf{R}^{r-q} \times \mathbf{T}^q$ sind, und die Hamiltonschen Vektorfelder zu den F_j auf diesen abelschen Lie-Gruppen alle translationsinvariant (und somit explizit integrierbar) sind. Wenn insbesondere die Mannigfaltigkeit kompakt ist, sind die Fasern alle reelle Tori.

Das eigentliche Thema des Buches sind Liouville-integrierbare Systeme, die eine algebraische Komplexifizierung zulassen, für die dann die Komplexifizierungen der reellen Tori abelsche Varietäten werden. Um diese Aussage präzise zu fassen, stellt man zunächst fest, dass die grundlegenden Definitionen der Poisson-Geometrie (z. B. der Liouville-Integrierbarkeit) auch in der Kategorie der komplexen Mannigfaltigkeiten mit holomorphen statt glatten Abbildungen formulierbar sind. Fragen nach der globalen Integrierbarkeit von Vektorfeldern zu Integralkurven mit komplexer Zeit, d. h. durch \mathbf{C} parametrisierte holomorphe Flächen, sind allerdings deutlich komplizierter, da man im Prinzip damit rechnen muss, dass es Probleme mit analytischen Fortsetzungen entlang unterschiedlicher reeller Kurven gibt. Darüber hinaus erzwingt der Satz von Liouville über das Verhalten von holomorphen Funktionen im Unendlichen für Mannigfaltigkeiten mit kompakten Richtungen Singularitä-

ten. Wenn die zugrundeliegende Mannigfaltigkeit M jetzt eine glatte affine algebraische Varietät ist, und die Impulsabbildung $F: M \rightarrow \mathbf{C}^s$ aus regulären Funktionen zusammengesetzt, dann ist es sinnvoll nach der algebraischen Struktur der Fasern von f zu fragen. Algebraisch vollständig integrierbar heißt dann, dass generische Fasern die affinen Anteile von abelschen Varietäten (d. h. zusammenhängende projektive abelsche Varietäten, die die Struktur einer abelschen kompakten komplexen Lie-Gruppe tragen) sind, und die hamiltonschen Vektorfelder \mathcal{X}_{F_j} translationsinvariant auf den Fasern sind. In diesem Fall lässt sich M algebraisch vervollständigen und die Integralkurven lassen sich auf der Vervollständigung einfach beschreiben. Die Definition der algebraischen vollständigen Integrierbarkeit wirkt auf den ersten Blick ziemlich künstlich. Ihre Berechtigung erfährt sie durch die Existenz hochgradig nichttrivialer Beispiele für solche Systeme und die Existenz zumindestens von Ansätzen einer allgemeinen Theorie, mit der diese Beispiele behandelt werden können. Adler, van Moerbeke und Vanhaecke erklären etliche dieser Beispiele und die Techniken, die zu ihrem Verständnis erforderlich sind.

Aus den obigen Erläuterungen wird klar, dass das Verständnis algebraisch vollständig integrierbarer Systeme Informationen über Poisson-Geometrie und die algebraische Geometrie abelscher Varietäten voraussetzt. Diese werden in den Kapiteln 3 und 5 bereitgestellt. Dabei ist die Einführung in die Poisson-Geometrie deutlich elementarer und mit vollständigen Beweisen versehen. Das Kapitel über abelsche Varietäten ist mehr eine Zusammenstellung der relevanten Definitionen und Resultate. Es ist ebenfalls einleuchtend, dass gewisse Grundkenntnisse über Lie-Algebren in der allgemeinen Theorie nützlich sind. Der Grund dafür, dass das Buch mit einem ganzen Kapitel (eher beschreibender Natur) über Lie-Algebren beginnt, liegt aber eher darin, dass für die Konstruktion der Beispiele sehr viel tiefer liegende Information erforderlich ist. Um dafür ein Gefühl zu

bekommen, ist es nützlich zu wissen, dass die Dualräume von (endlichdimensionalen) Lie-Algebren Paradebeispiele für affine Poisson-Mannigfaltigkeiten sind.

Kapitel 4 und 6 sind im wesentlichen der allgemeinen Theorie vollständig integrierbarer Systeme (analytisch bzw. algebraisch) gewidmet. Eine Ausnahme bildet die Beschreibung des Konzepts eines Lax-Paares, das in speziellen Situationen auf Beispiele von integrierbaren Systemen führt. Zentrale Resultate in diesen Kapiteln sind der Satz von Liouville und sein komplexes Analogon, sowie zwei notwendige Kriterien für das Vorliegen algebraischer vollständiger Integrierbarkeit. Das erste, nach Kowalevski und Painlevé benannte, fordert die Existenz von parametrisierten Familien von Lösungen, die durch Laurent-Reihen gegeben sind und deren Singularitäten auf den Ausnahmefaktoren (im Unendlichen bzgl. M) der abelschen Varietäten liegen. Die Geometrie dieser Singularitäten spielt eine zentrale Rolle für die Theorie, was den Anteil „Painlevé Geometry“ im Titel des Buches erklärt. Das zweite Kriterium, benannt nach Lyapunov, besagt, dass für algebraisch vollständig integrierbare Systeme die oben beschriebenen Mehrdeutigkeitsprobleme in der globalen Integration der komplexen Vektorfelder nicht auftauchen.

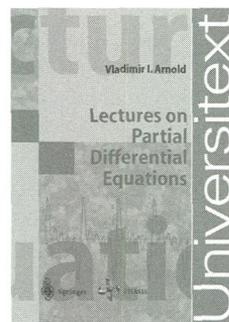
Kapitel 7 ist affinen Poisson-Mannigfaltigkeiten mit gewichtet homogenen polynomialen Impulsabbildungen gewidmet. Für diese Klasse hat man eine weitergehende explizite Theorie, und man hat Methoden um mithilfe der angegebenen Kriterien die algebraisch vollständig integrierbaren Systeme unter den Liouville-integrierbaren auszuheben. Der Rest des Buches (Kapitel 8 bis 10) behandelt drei Klassen von Beispielen: geodätische Flüsse auf $SO(4)$, periodische Toda-Gitter und diverse Kreisel. Alle Beispiele hängen eng mit speziellen Lie-Algebren zusammen und führen auf Systeme von der in Kapitel 7 behandelten Art.

Das vorliegende Buch ist die erste Darstellung des Themenkomplexes in Buchform. Die Autoren haben es als Lehrbuch mit ei-

nem weiten Adressatenkreis konzipiert. Dabei hatten sie die schwierige Aufgabe zu bewältigen, im richtigen Umfang Hintergrundinformationen anzubieten, ohne sich in zusammenhanglosen Einführungen in die relevanten mathematischen Gebiete zu verlieren. Ich denke, dies ist ihnen sehr gut gelungen. Im Vergleich zu den in den frühen 90er Jahren zirkulierten Vorläufermanuskripten ist das Maß an Präzision in Definitionen, Aussagen und Beweisen enorm gestiegen. Kleinere Ungenauigkeiten in den Definitionen lassen sich in der Regel aus dem unmittelbaren Kontext heraus reparieren. Es ist etwas schade, dass die Fertigstellung dieses Buches so lange gedauert hat. Ein Blick in die Literaturliste zeigt, dass sich in dem Gebiet in den letzten fünf Jahren kaum noch etwas getan hat. Zu einem früheren Zeitpunkt hätte es sicher mehr zur Popolarisierung der Arbeitsrichtung beitragen können. Es bleibt zu hoffen, dass es nicht die abschließende Beschreibung einer ausgelaufenen Forschungsanstrengung ist, sondern Anstoß für neue Aktivitäten und Resultate. Die Frage, ob die angeführten Beispiele isolierte Phänomene sind oder Teil einer tiefliegenden Theorie, ist auch mit diesem Buch noch nicht entschieden.

Paderborn

J. Hilgert



V. I. Arnold
Lectures on Partial
Differential Equations

Berlin u. a., Springer, 2004, 157 S., € 39,95

In diesem kleinen Band werden in zwölf Kapiteln vorrangig geometrische Aspekte par-

tieller Differentialgleichungen vorgestellt. Arnold hielt diese Vorlesung im Wintersemester 1994/1995 an der *Independent University* Moskau für Studierende im dritten Studienjahr.

Die beiden ersten Kapitel sind den Differentialgleichungen erster Ordnung gewidmet, die als Hyperflächen im Raum $J^1(\mathbb{R}^n, \mathbb{R})$ der 1-Jets aufgefasst werden. Lösungen entsprechen dann 1-Graphen in dieser Hyperfläche, die durch die Charakteristiken gefasert werden. Die Darstellung schließt sich an die von Kapitel 2 in ¹ an.

Das im dritten Kapitel behandelte Huygenssche Prinzip der Wellenausbreitung wird im Rahmen der Kontaktgeometrie diskutiert. Obwohl deren Grundbegriffe kurz eingeführt werden, empfiehlt es sich, vorbereitend eine ausführlichere Darstellung (wie etwa Anhang 4 von ²) zu lesen.

Im Vergleich dazu werden bei der Diskussion der schwingenden Saite (Kapitel 4 und 5) vom Studierenden nur geringe Vorkenntnisse erwartet. Für verschiedene Randbedingungen wird die D'Alembertformel ausgewertet und für den periodischen Fall die Fouriertheorie vorgestellt.

In den nächsten beiden Kapiteln wird das Variationsprinzip von natürlichen mechanischen Systemen mit endlich vielen Freiheitsgraden auf Probleme der Kontinuumsmechanik verallgemeinert. Der Wert des Dirichletintegrals einer Membran wird als Flächeninkrement interpretiert, und das Dirichletproblem wird vorgestellt.

Eine Diskussion der harmonischen Funktionen, des Maximumprinzips und der Lösung des Dirichletproblems schließt sich in Kapitel 8 an.

¹ V. I. Arnold: *Geometrical Methods in the Theory of Ordinary Differential Equations*. Grundlehre der Math. Wissenschaften **250**, Berlin u. a., Springer Verlag 1983

² V. I. Arnold: *Mathematical Methods of Classical Mechanics*. Graduate Texts in Mathematics, Berlin u. a., Springer, 1989, 2. Aufl.

Der Poissongleichung und ihrem Zusammenhang mit den Fundamentallösungen des Laplaceoperators in n Dimensionen ist die nächste Vorlesung gewidmet.

Kapitel 10 mit dem Titel „The Double-Layer Potential“ bietet eine Überraschung. Für die Kugelflächenfunktionen des \mathbb{R}^3 vom Homogenitätsgrad k wird ein auf Maxwell zurückgehender Satz vorgestellt, nachdem diese als Restriktionen von k -fachen Lieableitungen $L_{v_k} \dots L_{v_1}$ auf die Sphäre $S^2 \subset \mathbb{R}^3$ dargestellt werden können. Dabei sind die v_i konstante Vektorfelder, deren Richtungen wiederum durch die Kugelflächenfunktion festgelegt werden.

Geometrisch entspricht dieser Aussage der Homöomorphismus

$$(\mathbb{R}P^2 \times \dots \times \mathbb{R}P^2)/S(k) \rightarrow \mathbb{R}P^{2k},$$

wobei die symmetrische Gruppe $S(k)$ die k Faktoren $\mathbb{R}P^2$ des kartesischen Produktes permutiert.

In einem Anhang wird diese Aussage in ihren geometrischen Kontext gestellt und z. B. mit dem Homöomorphismus

$$\text{Sym}^n(\mathbb{C}P^1) \rightarrow \mathbb{C}P^n$$

von Viète verglichen.

Als Ausklang stellt Arnold im letzten Kapitel die inneren bzw. äußeren Randwertprobleme des Laplaceoperators für Dirichlet- bzw. Neumannbedingungen bei $S^{n-1} \subset \mathbb{R}^n$ vor und untersucht die entsprechenden Existenz- und Eindeutigkeitsfragen.

Anhand von Differentialoperatoren mit konstanten Koeffizienten werden Grundbegriffe aus der Theorie der Pseudodifferentialoperatoren (Symbol und Prinzipalsymbol, Elliptizität und Hyperbolizität) motiviert.

Diese Lecture Notes ähneln stilistisch einer tatsächlichen Vorlesung. Wie beim Autor zu erwarten, sind sie reich illustriert. Arnold formuliert sein Ziel mit dem Satz

“the author of the present course has attempted to teach the audience how to conjecture and predict bold generalizations ... rather than the difficult skill of giving a rigorous justification of these results.”

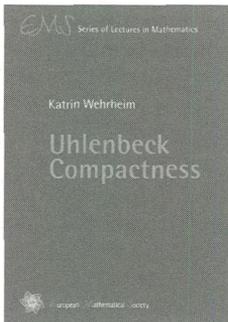
In diesem Sinn ist das Buch anregend, eignet sich aber andererseits wenig als alleinige Grundlage für einen in Deutschland üblichen Grundkurs über partielle Differentialgleichungen.

Arnold hebt sich damit bewusst ab von der stärker analytisch geprägten Behandlung partieller Differentialgleichungen, die er als „old-fashioned art of juggling inequalities“ karikiert. Konsequenter zitiert er auch nur Werke anderer Autoren über partielle Differentialgleichungen, die vor mehr als 50 Jahren entstanden sind.

Wenn auch nicht als Leitfaden einer Vorlesung, so sind die „Lectures on Partial Differential Equations“ doch als stilistisch gegensätzliche Ergänzung zu einem Lehrbuch wie z. B. dem von Evans zu empfehlen.

Erlangen

A. Knauf



K. Wehrheim
**Uhlenbeck
 Compactness**
 EMS Series of Lectures
 in Math.

Zürich, European Mathematical Society,
 2004, 212 S., € 39,50

The strong compactness theorem for Yang-Mills connections, proved by K. Uhlenbeck in 1982, has been crucial for all subsequent work on mathematical gauge theory. In particular, it laid the analytical foundations for S. Donaldson’s work on smooth four-manifolds, as well as A. Floer’s instanton homology of three-manifolds.

This book grew out of K. Wehrheim’s PhD thesis on the Atiyah-Floer Conjecture. For this work she had to generalize the com-

compactness theorem in several directions, at the same time filling in many missing details in Uhlenbeck’s original twelve page paper. So, in the young author’s own words, “I ended up writing the book that I would have needed at the beginning of my graduate studies: A self-contained exposition of Uhlenbeck compactness with all the analytical details, which only refers back to standard textbooks for classical results.”

The two main theorems in this book are the following.

Theorem A (Weak Uhlenbeck Compactness). *A sequence of connections with uniform L^p -bound on the curvature has a subsequence that is gauge equivalent to a sequence which converges weakly in $W^{1,p}$.*

Theorem E (Strong Uhlenbeck Compactness). *A sequence of Yang-Mills connections with uniform L^p -bound on the curvature has a subsequence that is gauge equivalent to a sequence which converges uniformly with all derivatives.*

Here all connections are defined on a fixed principal G -bundle, with G a compact Lie group, over a compact manifold M . The standing assumption is $p > n/2$, where n is the dimension of M . The base manifold M is allowed to have boundary, in which case the definition of “Yang-Mills connection” includes a Neumann-type boundary condition. Both theorems also have versions for certain noncompact M , including the manifolds with cylindrical ends appearing in Floer’s instanton homology (Theorems A’ and E’).

The proof of weak Uhlenbeck compactness is given in Part II of the book. It follows Uhlenbeck’s original argument, putting the connections in local Coulomb gauge (Theorem B) and then patching these together. The local Coulomb gauge leads to an inhomogeneous Neumann boundary value problem for the gauge transformations. The existence of the local Coulomb gauge thus follows from the general theory of the Neumann problem developed in Part I.

The proof of strong Uhlenbeck compactness in Part III differs from Uhlenbeck’s original one. It follows an idea by D. Salamon

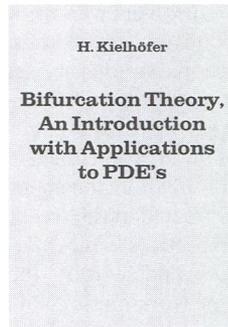
of putting the connections in global Coulomb gauge with respect to the limit connection provided by the weak compactness theorem. Once this is achieved, the strong compactness theorem follows from the elliptic estimates in Part I. The existence of the global Coulomb gauge (Theorem F) can be viewed as a local slice theorem for the action of the gauge group on connections; it is proved by a rather subtle Newton iteration. This new proof of strong Uhlenbeck compactness has the conceptual advantage of avoiding a second patching argument. Moreover, the local slice theorem is of independent interest for the study of moduli spaces of connections and has already found applications in the work of Salamon and others.

The book is completed by a series of appendices. Appendix C contains a little analytical gem: A criterion due to Marcinkiewicz and Mihlin for a function to be an L^p -multiplier (Theorem C.2). This criterion, proved by Mihlin in 1957, was discovered by the author in a 1968 book by Ladyzenskaya, Solonnikov and Uralceva. It yields a very simple proof of the Calderon-Zygmund inequality (Theorem C.3) but is much stronger. For example, this criterion overcame a major obstacle in recent work by Salamon and Weber on Floer homology of cotangent bundles.

Given the analytical subject, one cannot expect this book to be leisure reading. But it is getting quite close. An excellent introduction provides a good guideline through the book; ideas are always explained before the actual proofs; and the proofs are complete without being overly technical. This book should become the standard future reference for Uhlenbeck compactness.

München

K. Cieliebak



H. Kielhöfer

**Bifurcation Theory,
An Introduction with
Applications to PDE's**

Berlin u. a., Springer, 2004, 347 S., € 79,95

The Springer series on Applied Mathematical Sciences features many books which have set standards in the development of many areas of applied mathematics. As volume 156 in this series we find a book titled "Bifurcation Theory" with the subtitle "An Introduction with Applications to PDE's" written by Hansjörg Kielhöfer. Of course over the last 30 years partial differential equations modeling various applications have been a driving force behind the developments in bifurcation theory. In most cases the application of the theory to partial differential equations in a rigorous way leads to substantial technical difficulties. As a result we find many papers with applications to relatively simple model cases of ordinary differential equations and some statements that the theory applies to partial differential equations as well, but the burden of going through the computations rests on the reader. The book which is reviewed here claims to close this gap, the subtitle and the introduction promise to give a full account of the theory in context of partial differential equations. Before we go into some detail, let me mention that there are several recent books on bifurcation theory which also treat certain aspects of nonlinear partial differential equations. A very distinct example is the book by Buffoni and Toland titled "Analytic Theory of Global Bifurcations" (Princeton University Press (2003)) which discusses many aspects of bifurcation theory with the

goal to discuss the Stokes problem which is a deep and significant application to a certain partial differential equation. Another recent book by Demazure (Bifurcations and Catastrophes, Springer (2000)) aims at the singularity theory aspects of bifurcation theory. Many applications of bifurcation theory to real world problems are treated in the recent volume "Symmetry Perspectives" (Birkhäuser (2002)) by Golubitsky and Stewart, the authors of the two volume work on singularity theory and symmetry in bifurcation problems from the mid-eighties. The reviewer and Pascal Chossat have written a book (Methods in Equivariant Bifurcation and Dynamics, World Scientific (2000)) on symmetry and dynamics, again PDE examples are one of the main motivations for the development of the theory.

The beginnings of bifurcation theory go back to Euler, Poincaré, Schmidt and others. The modern theory starts with a paper by Eberhard Hopf and two seminal papers by Crandall and Rabinowitz. In this era the main emphasis was to discuss the change of the number of steady states or periodic solutions of certain equations depending on one parameter. The main tools are reduction principles and methods to discuss the number of solutions for low dimensional algebraic equations. This leads naturally to questions in singularity theory and so the second main era started with a paper by Golubitsky and Schaeffer where they used singularity theory ideas to organize the thoughts on the structure of sets of solutions. Later on symmetry principles started to give new insights. It also allowed to use new techniques to simplify the computations. Another interpretation of bifurcation theory looks at the topological structure of the time orbits near the critical point and asks for changes of this structure due to external parameters. Of course there are many links between various ways to look at this class of problems. Most texts fall into more than one of these categories and so this scheme gives only a crude classification.

Following this crude scheme we would classify the work by Kielhöfer as a contribution to classical bifurcation theory. Already the introduction gives us traditional sketches of pitchfork bifurcation and addresses non-uniqueness issues for nonlinear equations. The book is divided into three chapters of very unequal length. The first chapter is the longest one and it is titled "Local Theory". It starts citing the implicit function theorem. The author assumes that the reader is familiar with the basic concepts of nonlinear functional analysis and uses terms like Fréchet derivative freely. One might ask whether this is adequate for an introduction (Buffoni and Toland define such notions in their book), however the references for this part are well chosen and so this shortcoming should not be taken to serious. Section I.2 describes the reduction method of Lyapunov-Schmidt. Section I.3 shows that potential operators are preserved under the Lyapunov-Schmidt procedure. This is an observation which is central for some applications to gradient systems. Section I.4 discusses turning points, Section I.5 bifurcations with one dimensional kernels. For some computational problems the knowledge of some higher derivatives of the reduced bifurcation function (this is what one gets from the Lyapunov-Schmidt procedure) is useful. Section I.6 provides the reader with this information. In Section 1.7 the important principle of exchange of stability is presented. Beginning with Section 1.8 the author looks at the creation of periodic orbits by Hopf bifurcation and some global aspects of such branches. In Section 1.10 we find the famous Lyapunov center theorem. In Section 1.11 constrained Hopf bifurcation is considered, especially for Hamiltonian, and reversible systems. The version of the principle of exchange of stability for periodic solutions is established in section 1.12. Continuation principles for the periodic case are found in 1.13 and period doubling bifurcations in 1.14. In local bifurcation theory one needs to solve equation with vanishing linear parts. An important tool is the so called Newton polygon which is

discussed in Section 1.15. It has applications to some degenerate bifurcations, where for example one has only a weak crossing condition. We find Sections on such bifurcations in 1.16 for steady states, and in 1.17 for the periodic case. Higher dimensional kernels and degenerate bifurcations lead to question on the stability of solution branches. One question is whether the bifurcation equation (obtained via the Lyapunov Schmidt method) contains this information. This question is called the principle of reduced stability and it is presented in Section 1.18. Applications to higher dimensional kernels are given in Section 1.19. Bifurcations from infinity which play an important rôle in PDE's are discussed in Section 1.20. In Section 1.21 we find variation principles and their application to bifurcations. Chapter I ends with some historical comments in Section 1.22.

Chapter II is titled "Global theory". It reviews many aspects of global bifurcations. It starts out with a review of Brouwer degree (Section II.1) and continues with a section on Leray-Schauder degree (Section II.2). In order to appreciate the beautiful mathematics of these sections it is helpful either to have some previous knowledge or to consult a textbook like the work by Deimling on Nonlinear Functional Analysis. The use of degree theories in Bifurcation Theory is analyzed in Section II.3. Here we find some of the famous theorems (Krasnosel'ski II.3.2 and the global bifurcation result due to Rabinowitz II.3.3). Section II.4 looks at local results following from odd crossing numbers. In Section II.5 a degree theory for nonlinear proper Fredholm mappings is constructed and it is used to prove global bifurcation theorems for such a class of mappings. Section II.6 presents a global implicit function theorem. In Section II.7 the notion of Morse index is introduced and it is used to prove bifurcation results for potential operators. A final section titled "Notes and Remarks" presents some historical comments. It completes the second chapter.

Chapter III bears the simple title "Applications". As it is well known in applied

mathematics this word has many different meanings. Here it refers to applications of the previous abstract theory to partial differential equations of elliptic type. It is apparent that the reader wishing to learn bifurcation theory in context of partial differential equations has to be patient. Chapter III starts on page 219 and it is the first appearance of PDE's. If one still remembers the subtitle, one might be surprised that PDE's did not come up earlier, but of course it takes a lot of space to discuss abstract bifurcation theory. Let us go through the present chapter again in some detail. Section III.1 shows the Fredholm property of linear elliptic operators on appropriate function spaces. It contains a discussion of regularity and of various boundary conditions as well as of equations on lattices and of spectral properties of elliptic operators. In Section III.2 we find a thorough discussion of local bifurcation for elliptic operators. The starting point are simple eigenvalues, then the odd crossing number case is discussed. Finally a description of variational methods is given. An application of the theory to Cahn-Hilliard equations begins here and is completed in later sections. It serves to show how the various elements of the theory work together to discuss important and highly nontrivial examples. Section III.3 applies the theory to the nonlinear wave equation and hence shows the occurrence of so called free vibrations. This section includes the discussion of symmetry properties of solutions. It depicts nodal structures along global solution branches. Hopf bifurcation for parabolic equations are studied in Section III.4. It depends on a precise functional analytic setting in appropriate function spaces.

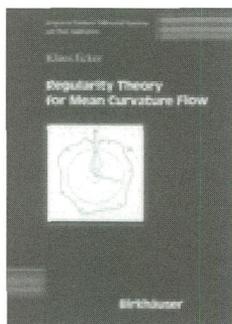
The important issue of global continuation for solutions of elliptic equations is presented in Section III.5. Preservation of nodal structures reduce the possibilities in the global continuation theorem. Technics elaborating these ideas can be found in Section III.6 while Section III.7 addresses the special case of positive solutions.

As in Chapter II the present chapters final section contains notes and remarks, mainly historical remarks on the development of the theory.

Let me try to come to a final assessment of this work: the book is written on a high technical level and treats some aspects of local and global bifurcations for nonlinear elliptic equations thoroughly. It does not discuss all aspects of modern bifurcation theory. It is a monograph and not a textbook. It assumes an understanding of some concepts of (linear and nonlinear) functional analysis, it requires prerequisites from PDE theory and the theory of Sobolev spaces. If the reader is familiar with these concepts or willing to learn the material this book provides insight in a fascinating area of modern applied mathematics.

Hamburg

R. Lauterbach



K. Ecker
**Regularity Theory for
Mean Curvature Flow**

Basel u. a., Birkhäuser, 2004, 152 S., € 68,-

Im Mittelpunkt der vorliegenden Monographie von Klaus Ecker stehen Hyperflächen $(M_t)_{t \in [0, T)}$, welche der Bewegungsgleichung

$$(1) \quad V_n = -H \quad \text{auf } M_t$$

genügen. Dabei bezeichnen V_n die Geschwindigkeit in Normalenrichtung, H die mittlere Krümmung von M_t und die Orientierung ist so gewählt, dass $H > 0$ für eine Sphäre mit nach aussen gerichteter Normale.

Die Gleichung (1) wird als Fluss entlang der mittleren Krümmung (mean curvature flow) bezeichnet. Sie besitzt die wichtige Eigenschaft, dass die Oberfläche der Lösungen zeitlich abnimmt, weshalb (1) auch als Gradientenfluss für das Flächenfunktional interpretiert werden kann. Der Fluss entlang der mittleren Krümmung ist jedoch nicht allein aus geometrischer Sicht interessant: geeignete Varianten von (1) treten beispielsweise bei der Modellierung von Kristallwachstum oder im Bereich der Bildverarbeitung auf.

Existenz glatter Lösungen von (1) erhält man mit Hilfe der Theorie partieller Differentialgleichungen, indem man eine geeignete Darstellung von M_t wählt. Die Lösungen schrumpfen in endlicher Zeit auf einen Punkt oder aber entwickeln schon vorher Singularitäten. Ein Beispiel für letzteres Phänomen liefert der Fluss einer hantelförmigen Startfläche unter (1), wobei es im mittleren Teil der Fläche zu einer Abschnürung und damit zu einer Topologieänderung kommt. Mit Hilfe einer Niveaulächenformulierung ist es möglich, den Fluss in mathematisch sinnvoller Weise über die Singularität hinaus zu verfolgen. Eine Darstellung dieses Zugangs hätte den Umfang des Buches beträchtlich erhöht und so konzentriert sich der Autor auf das Studium glatter Lösungen einschließlich des Zeitpunkts t_0 , zu dem die erste Singularität auftritt. Im Mittelpunkt stehen dabei das Hausdorff-Maß einer geeignet definierten singulären Teilmenge von M_{t_0} sowie das asymptotische Verhalten bei Annäherung an eine Singularität.

Den Ausgangspunkt der Untersuchungen bildet die Monographie [B] von Kenneth Brakke, in der der Fluss entlang der mittleren Krümmung mittels Methoden aus der geometrischen Maßtheorie studiert wurde. Neben der Konstruktion von Lösungen, welche (1) in einem verallgemeinerten Sinn erfüllen, finden sich in [B] auch weitreichende Aussagen zur Regularität dieser Lösungen, welche sich zum Teil auf den technisch recht aufwendigen Apparat der geometrischen Maßtheorie stützen. Ein Verdienst des vorliegenden Buches besteht darin, die Ideen

von Brakke in die Sprache der geometrischen Analysis und der partiellen Differentialgleichungen zu übersetzen und sie somit einem größeren Leserkreis zugänglich zu machen. Daneben trägt das Buch aber natürlich auch neueren Entwicklungen Rechnung.

Zum Inhalt: Nach dem einleitenden Kapitel 1 werden in Kapitel 2 einige spezielle Lösungen von (1) wie etwa selbstähnliche Lösungen und Graphenlösungen diskutiert. Bekannte Aussagen zu Situationen, in denen die Lösungen keine Singularitäten entwickeln, bevor sie auf einen Punkt schrumpfen, schließen das Kapitel ab. Ausgangspunkt von Kapitel 3 ist ein schwaches Maximumprinzip für Funktionen, welche auf den Flächen M_t definiert sind. Dieses wird im folgenden verwendet, um Aussagen über die Position der Flächen sowie Abschätzungen für Ableitungen zu gewinnen. Dabei wird besonderer Wert auf die Verwendung geometrischer Größen und die von ihnen erfüllten Evolutionsgleichungen gelegt. Während dieses Vorgehen primär punktweise Information liefert, stehen in Kapitel 4 Integralabschätzungen im Vordergrund. Diese beruhen im wesentlichen auf der Analyse von Ausdrücken der Form

$$\frac{d}{dt} \int_{M_t} \phi(x, t) d\mathcal{H}^n(x)$$

und führen zunächst auf die bereits erwähnte Abnahme der Oberfläche von M_t sowie – als Hauptresultat – auf eine zuerst von Huisken bewiesene Monotonieformel. Mit Hilfe dieser Formel werden unter anderem obere und untere Schranken für $\frac{\mathcal{H}^n(M_t \cap B_\rho(x_0))}{\rho^n}$ sowie Mittelwertungleichungen bewiesen. Dabei ist n die Dimension der sich bewegenden Flächen. Den Höhepunkt des Buches bildet Kapitel 5, welches viele der zuvor hergeleiteten Aussagen zusammenführt, um die Regularität der Lösung von (1) im Zeitpunkt t_0 , in dem die erste Singularität auftritt, zu untersuchen. Unter einer Stetigkeitsannahme für den Limes $M_t \rightarrow M_{t_0}$ wird gezeigt, dass das n -dimensionale Hausdorff-Maß einer geeig-

net definierten Singularitätenmenge verschwindet.

In einem längeren Anhang werden schließlich grundlegende Definitionen und Aussagen aus der Flächentheorie und der geometrischen Maßtheorie zusammengestellt sowie einzelne Aspekte der zuvor behandelten Fragestellungen vertieft.

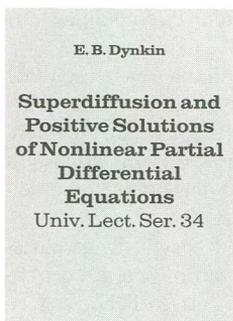
Das Buch ist äußerst sorgfältig geschrieben und besitzt einen klaren, sehr gut durchdachten Aufbau. Die wesentlichen Ideen werden zumeist erst informell erläutert, so dass man als Leser nicht in Gefahr gerät, über den unvermeidlichen technischen Details den Überblick zu verlieren. Obwohl das Thema des Buches auf den ersten Blick recht speziell erscheint, bietet diese sehr empfehlenswerte Monographie einem Leser oder einer Leserin mit Interesse an geometrischer Analysis eine Fülle von Anregungen. So können einige der vorgestellten Techniken auch zur Untersuchung anderer geometrischer Flüsse wie etwa des Ricci-Flusses verwendet werden. Es ist ein weiterer positiver Aspekt des Werks, dass solche Bezüge hergestellt werden, wann immer dies möglich ist.

References

- [B] K. A. Brakke, *The Motion of a Surface by its Mean Curvature*, Math. Notes Princeton, NJ, Princeton University Press, 1978.

Magdeburg

K. Deckelnick



E. B. Dynkin
**Superdiffusion and
 Positive Solutions of
 Nonlinear Partial
 Differential Equations**
 Univ. Lect. Ser. 34

Providence, Am. Math. Soc., 2004, 120 S.,
 \$ 29,-

The scope of this monography is the complete description of all nonnegative solutions of the partial differential equation $\Delta u = u^\alpha$ in a bounded smooth domain $E \subset \mathbb{R}^d$, for $\alpha \in (1, 2]$. This completes the previous monography [3] from the same author, and extends the initial case $\alpha = 2$ of J.-F. Le Gall [6] with $d = 2$ (subcritical case) and B. Mselati [9] with $d \geq 3$ (supercritical case). The description relies on superdiffusions introduced by S. Watanabe [10] and D. Dawson [1] and their links with partial differential equations investigated in the seminal work of E. Dynkin [2]. The results presented relies on the fine trace theory developed by E. Dynkin and S. Kuznetszov [4]. The description of nonnegative solutions of $\Delta u = u^\alpha$ has also been investigated using purely analytic tools by M. Marcus and L. Véron [7, 8].

Let \mathcal{U} the set of nonnegative solutions of $Lu = \psi(u)$ in a bounded smooth domain $E \subset \mathbb{R}^d$, where L is an elliptic second order differential operator and ψ is an increasing convex function, such that $\psi(0) = \psi'(0) = 0$. The set \mathcal{U} is stable for pointwise convergence. If $u, v \in \mathcal{U}$, then there exists a unique element in \mathcal{U} , noted $u \oplus v$, which is the smallest element of \mathcal{U} that dominates all $w \in \mathcal{U}$ such that $w \leq u + v$.

Let \mathcal{H} the set of nonnegative harmonic functions in E : h harmonic means $Lh = 0$. There is a 1-1 correspondance between the

set of finite measure on ∂E and \mathcal{H} given by $h_\nu(x) = \int_{\partial E} k(x, y) \nu(dy)$, where k is the Poisson kernel of L in E . A solution $u \in \mathcal{U}$ is called **moderate** if $u \leq h_\nu$ for some finite measure ν on ∂E . The formula $u + G\psi(u) = h_\nu$, where G is the Green operator of L in E , establishes a 1-1 correspondance between the set \mathcal{U}_1 of moderate solutions and a subset of the harmonic functions \mathcal{H}_1 (and thus a subset, \mathcal{N}_1 , of the set of finite measures on ∂E): h_ν is the minimal harmonic function dominating u , and u is the maximal solution dominated by h_ν . The set \mathcal{N}_1 is a cone (stable by addition and multiplication by a positive constante) and $u_\mu \oplus u_\nu = u_{\mu+\nu}$ for $\mu, \nu \in \mathcal{N}_1$.

Let $(\nu_n, n \geq 1)$ be an increasing sequence of \mathcal{N}_1 . The limit $\nu = \lim_{n \rightarrow \infty} \nu_n$ is also a measure on ∂E (which might not be σ -finite), and let u_ν be the increasing limit of the moderate solutions $(u_{\nu_n}, n \geq 1)$. The limit u_ν belongs to \mathcal{U} and is called **σ -moderate**. Let \mathcal{U}_0 be the set of σ -moderate solutions and \mathcal{N}_0 the corresponding set of measures. If u, v are σ -moderate, so is $u \oplus v$. The goal is to prove that all solutions are σ -moderate (i.e. \mathcal{U} reduces to \mathcal{U}_0).

One particular solution of interest is u_Γ , where Γ is a Borel subset of ∂E , defined as $u_\Gamma = \sup\{u_\nu, \nu \in \mathcal{N}_1, \nu \text{ is concentrated on } \Gamma\}$. Since there exists a measure $\nu \in \mathcal{N}_1$ concentrated on Γ such that $u_\Gamma = \lim_{n \rightarrow \infty} u_{\nu_n}$, u_Γ is σ -moderate.

An other interesting solution is w_Γ : if K is closed, $w_K = \sup\{u \in \mathcal{U}; u = 0 \text{ on } \partial E \setminus K\}$ and for any Borel set $\Gamma \subset E$, $w_\Gamma = \sup\{w_K; K \text{ closed and } K \subset \Gamma\}$. In fact $w_\Gamma \geq u_\Gamma$.

For each $u \in \mathcal{U}$ there is a natural way to define its trace $\text{Tr}(u) = (\Gamma, \nu)$. The Borel set $\Gamma \subset \partial E$ is the set of all singular points of u that is points of ∂E corresponding to rapid growth of u . More precisely $\Gamma = \{y \in \partial E; \int_0^\tau \psi'(u(\xi_s)) ds = \infty \text{ } \mathbb{P}_{x \rightarrow y}\text{-a.s. for all } x \in E\}$, where ξ is under $\mathbb{P}_{x \rightarrow y}$ a diffusion with generator L , started at x and conditionned to exit E at y and τ is the corresponding exit time. The set Γ can be seen as a closed set for a fine topology on ∂E . The measure $\nu \in \mathcal{N}_0$ is a σ -finite measure on $\partial E \setminus \Gamma$ given by $\nu(B) =$

$\sup\{\mu(B); \mu \in \mathcal{N}_1, \mu(\Gamma) = 0, u_\mu \leq u\}$. In particular $\nu(\Gamma) = 0$. The function $u_\nu = \sup\{u_\mu; \mu \in \mathcal{N}_1, \mu(\Gamma) = 0, u_\mu \leq u\}$ is σ -moderate. Furthermore $u \geq u_\Gamma \oplus u_\nu$ and $u_\Gamma \oplus u_\nu$ is the maximal σ -moderate solution dominated by u . To prove that all solutions are σ -moderate, it is enough to prove that $w_\Gamma = u_\Gamma$ (Chapter 8) and that $u \leq w_\Gamma \oplus u_\nu$, where $(\Gamma, \nu) = \text{Tr}(u)$ (Chapter 9).

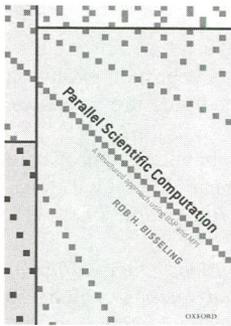
After the introduction of Chapter 1, Chapter 2 recalls results on \mathcal{U} from [3] under minimal assumptions on L and ψ . Chapter 3 presents the superdiffusion theory. Those measure valued processes, which are limits of branching particles system, give a natural representation formula for solutions $u \in \mathcal{U}$. This covers the case of branching mechanism functions ψ , and in particular the case $\psi(u) = u^\alpha$, $\alpha \in (1, 2]$. It also introduces the stochastic boundaries values (SBV) associated to each $u \in \mathcal{U}$. Superdiffusions are infinitely divisible random measure. Chapter 4 is devoted to the construction of the canonical measures of superdiffusion and its applications to represent some elements of \mathcal{U} (in particular $w_\Gamma \oplus u_\nu$, with $\nu \in \mathcal{N}_0$) using SBV and the range of the superdiffusion. Moments of superdiffusion are computed in Chapter 5, in order to prove a preliminary result on absolute continuity. Chapter 6 presents results on Poisson capacities (used to get bound for u_Γ and w_Γ) and Chapter 7 a non trivial inequality for superdiffusions. Chapters 8 and 9 deal with the particular case of the Brownian motion ($L = \Delta$) and α -stable branching ($\psi(u) = u^\alpha$ and $\alpha \in (1, 2]$) for $d \geq 4$. Their presentation follow [9]. The proof that $w_\Gamma = u_\Gamma$, and thus that w_Γ is σ -moderate is given in Chapter 8, using an upper estimate on w_K with Poisson capacities from S. Kuznetsov [5]. Eventually, Chapter 9 is devoted to the proof that if $\text{Tr}(u) = (\Gamma, \nu)$, then $u \leq w_\Gamma \oplus u_\nu$. This proves that all solutions $u \in \mathcal{U}$ are σ -moderate and can be classified by their trace.

References

- [1] D. A. DAWSON. Stochastic evolution equations and related measure processes. *J. multivariate Analysis*, 5:1–52, 1975.
- [2] E. DYNKIN. A probabilistic approach to one class of nonlinear differential equations. *Probab. Th. Rel. Fields*, 89:89–115, 1991.
- [3] E. DYNKIN. *Diffusions, superdiffusions and partial differential equations*, volume 50 of *Colloquium Publications*. American Mathematical Society, 2002.
- [4] E. B. DYNKIN and S. E. KUZNETSOV. Fine topology and fine trace on the boundary associated with a class of semilinear differential equations. *Comm. Pure Appl. Math.*, 51(8):897–936, 1998.
- [5] S. E. KUZNETSOV. An upper bound for positive solutions of the equation $\Delta u = u^\alpha$. *Electron. Res. Announc. Amer. Math. Soc.*, 10:103–112 (electronic), 2004.
- [6] J.-F. LE GALL. A probabilistic Poisson representation for positive solutions of $\Delta u = u^2$ in a planar domain. *Comm. Pure Appl. Math.*, 50(1):69–103, 1997.
- [7] M. MARCUS and L. VÉRON. The boundary trace of positive solutions of semilinear elliptic equations: The subcritical case. *Arch. Ration. Mech. Anal.*, 144(3): 201–231, 1998.
- [8] M. MARCUS and L. VÉRON. The boundary trace of positive solutions of semilinear elliptic equations: The supercritical case. *J. Math. Pures Appl.*, 77:481–524, 1998.
- [9] B. MSELATI. Classification and probabilistic representation of the positive solutions of a semilinear elliptic equation. *Mem. Amer. Math. Soc.*, 168(798), 2004.
- [10] S. WATANABE. A limit theorem of branching and continuous state branching processes. *J. Math. Kyoto Univ.*, 8(1):141–167, 1968.

Marne-la-Vallée

J.-F. Delmas



R. H. Bisseling
**Parallel Scientific
 Computation**

Oxford University Press, 2004, 305 S.,
 \$ 124,43

Das Buch von Rob. H. Bisseling ist ein Lehrbuch für paralleles Rechnen unter Verwendung des Bulk Synchronous Parallel (BSP) Modells von L. G. Valiant. Der Autor versucht nicht, alle Möglichkeiten parallelen Rechnens oder alle parallelen Algorithmen aufzuzählen, sondern erläutert stattdessen gründlich an einzelnen, relativ einfachen Standardbeispielen den grundsätzlichen Umgang mit parallelen Berechnungen. Auf diese Weise erreicht er äußerst erfolgreich sein Ziel eines didaktisch wertvollen Einstiegs in Parallelberechnungen.

Das Buch gliedert sich in 4 Kapitel, die jeweils durch eine explizite Zielvorgabe über die zu lernenden Inhalte eingeleitet werden und in vielfältigen und teilweise sehr umfangreichen Übungsaufgaben enden, mit denen abgeprüft werden kann, ob diese Inhalte erfolgreich erworben wurden. Alle Kapitel enthalten Beispielprogramme, meist sowohl in übersichtlichem Pseudocode als auch in unmittelbar lauffähigen Programmen. Das Buch schließt mit 3 Anhängen über zusätzliche Funktionen für die Bibliothek BSPedupack, eine Tabelle mit BSP-Funktionen und eine Übertragung der im Buch angegebenen Programme in ein Modell unabhängig arbeitender Prozessoren, die nur über das Message Parsing Interface (MPI) miteinander kommunizieren.

Das erste Kapitel behandelt zunächst grundsätzliche Eigenschaften von parallelen

Berechnungen, dem BSP Modell und der zugehörigen Programmbibliothek BSPlib. Der Leser wird in das Konzept von Synchronisation über Supersteps eingeführt und erhält grundsätzliche Notationen für die Berechnung von Laufzeiten paralleler Programme. Diese werden am inneren Produkt zweier Vektoren verdeutlicht.

Kapitel zwei behandelt die LU -Zerlegung einer Matrix. Nachdem zunächst der ‚klassische‘ sequentielle Gauss-Algorithmus dargestellt wird, erörtert der Autor dann verschiedene Möglichkeiten, Vektoren und Matrizen über mehrere Rechner zu verteilen, um eine LU -Zerlegung möglichst effizient durchführen zu können.

Im dritte Kapitel wird das sehr gut parallelisierbare Problem der schnellen Fourier Transformation behandelt. Wieder beginnt der Autor mit dem sequentiellen Algorithmus für die FFT und führt dann zu parallelen Versionen über.

Im letzten Kapitel behandelt der Autor schließlich das Problem der Matrix-Vektor-Multiplikation für dünn besetzte Matrizen. Neben anderen Verteilungsmuster der Matrix und des Vektors auf die verschiedenen Prozessoren erörtert der Autor hier auch eine adaptive Verteilung, die er als Mondriaanverteilung bezeichnet. Zur Herleitung dieser Verteilung führt der Autor in grundlegende Konzepte von Graphen ein und definiert die Mondriaanverteilung schließlich als optimalen Schnitt in einem Hypergraphen, der das Besetzungsmuster der Matrix widerspiegelt.

Das Buch ist sowohl als Lehrbuch für eine Vorlesung über paralleles Rechnen als auch als Handbuch und Einstiegshilfe für Entwickler von parallelen Algorithmen, z. B. in Physik oder Chemie, gedacht. Für beide Anwendungen ist das Buch sehr gut einsetzbar, auch wenn es sicherlich notwendig ist, dass sich der Nutzer auch experimentell über das Buch hinaus mit dem Stoff auseinandersetzt. Die zahlreichen Verweise auf weiterführende Literatur und Software machen dies auf sehr angenehme Weise möglich, so dass das Buch vorbehaltlos zu empfehlen ist.

Saarbrücken

T. von Oertzen

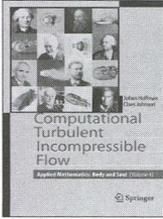


Springer

the language of science

springer.com

Applied Mathematics in Focus



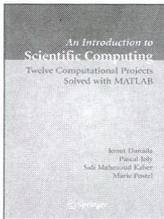
Computational Turbulent Incompressible Flow

Applied Mathematics:
Body and Soul 4

J. Hoffman, C. Johnson, Royal
Institute of Technology - KTH,
Stockholm, Sweden

This is Volume 4 of the book series of the Body and Soul mathematics education reform program. It presents a unified new approach to computational simulation of turbulent flow starting from the general basis of calculus and linear algebra of Vol 1-3. The book puts the Body and Soul computational finite element methodology in the form of General Galerkin (G2) up against the challenge of computing turbulent solutions of the inviscid Euler equations and the Navier-Stokes equations with small viscosity. This is an outstanding textbook presenting plenty of new material with an excellent pedagogical approach

2007. XIX, 397 p. Hardcover
ISBN 978-3-540-46531-7 ► € 59,95 | £38.50



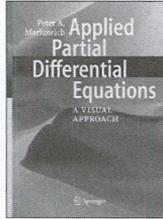
An Introduction to Scientific Computing

Twelve Computational
Projects Solved with
MATLAB

I. Danaila, P. Joly, S. M. Kaber,
M. Postel, Université Pierre et
Marie Curie, Paris, France

This book demonstrates scientific computing by presenting twelve computational projects spanning a broad spectrum of disciplines including Fluid Mechanics, Chemistry, Elasticity, Thermal Science, Computer Aided Design, Signal and Image Processing, and offers practical methods not usually included in basic textbooks.

2007. XV, 294 p. Hardcover
ISBN 978-0-387-30889-0 ► € 46,95 | £36.00



Applied Partial Differential Equations

A Visual Approach

P. A. Markowich, University of
Vienna, Austria

This book presents topics of science and engineering which are part of daily life. The author has chosen topics representing his career-long interests, including the flow of fluids and gases, granular flows, biological processes, kinetics of rarified gases and semiconductor devices. Each topic is presented in its scientific or engineering context, followed by an introduction of applicable mathematical models in the form of partial differential equations.

2007. IX, 206 p. With CD-ROM. Hardcover
ISBN 978-3-540-34645-6 ► € 62,95 | £48.50

Wave Propagation and Time Reversal in Randomly Layered Media

J. Fouque, North Carolina State University, Raleigh, NC, USA; J. Garnier, Université de Paris VII, Paris, France; G. Papanicolaou, Stanford University, Stanford, CA, USA; K. Solna, University of California, Irvine, CA, USA

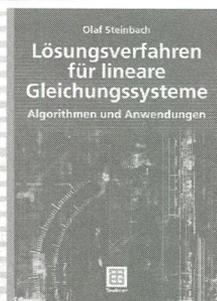
This book is addressed to a wide audience of graduate students and researchers interested in the intriguing phenomena related to waves propagating in random media. The authors give references and additional comments on the various results presented in each chapter.

2007. X, 440 p. (Stochastic Modelling and Applied Probability, Volume 56) Hardcover
ISBN 978-0-387-30890-6 ► € 54,95 | £42.50

Easy Ways to Order for the Americas ► **Write:** Springer Order Department, PO Box 2485, Secaucus, NJ 07096-2485, USA ► **Call: (toll free)** 1-800-SPRINGER ► **Fax:** +1(201)348-4505 ► **Email:** orders-ny@springer.com or **for outside the Americas** ► **Write:** Springer Distribution Center GmbH, Haberstrasse 7, 69126 Heidelberg, Germany ► **Call:** +49 (0) 6221-345-4301 ► **Fax:** +49 (0) 6221-345-4229 ► **Email:** SDC-bookorder@springer.com ► Prices are subject to change without notice. All prices are net prices.

012985x

Lösungsverfahren in der Praxis: verständlich und effizient



Olaf Steinbach
**Lösungsverfahren für
lineare Gleichungssysteme**
*Algorithmen und
Anwendungen*
2005. 200 S. Br. EUR 29,90
ISBN 978-3-519-00502-5

Inhalt

Grundlagen - Direkte Verfahren - Klassische
Iterationsverfahren - Moderne Iterationsver-
fahren - Gleichungssysteme mit Blockstruktur
- Hierarchische Matrizen

Das Buch

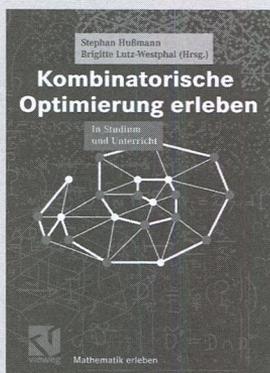
Die Simulation technischer Prozesse erfordert in der Regel die Lösung von linearen Gleichungssystemen großer Dimension. Hierfür werden moderne vorkonditionierte Iterationsverfahren (z.B. CG, GMRES, BiCGStab) hergeleitet und die zur Realisierung notwendigen Algorithmen beschrieben. Für Systeme mit strukturierten Matrizen werden effiziente direkte Lösungsverfahren angegeben. Numerische Beispiele für praktische Problemstellungen illustrieren die Effizienz der vorgestellten Verfahren.

Teubner Lehrbücher:
einfach clever



Abraham-Lincoln-Str. 46
65189 Wiesbaden
Fax 0611.7878-420
www.teubner.de

Mathematikunterricht wird zum Erlebnis!



Stephan Hußmann/
Brigitte Lutz-Westphal (Hrsg.)

Kombinatorische Optimierung erleben In Studium und Unterricht

2007. XVI, 311 S. mit zahlr. mehrfarb. Abb.
Br. EUR 29,90
ISBN 978-3-528-03216-6

INHALT

Kürzeste Wege - Minimale aufspannende Bäume - Das chinesische Postbotenproblem - Das Travelling-Salesman-Problem - Färbungen - Kombinatorische Spiele - Matchings - Flüsse in Netzwerken - Das P-NP Problem - Kombinatorische Optimierung für die Landwirtschaft

DAS BUCH

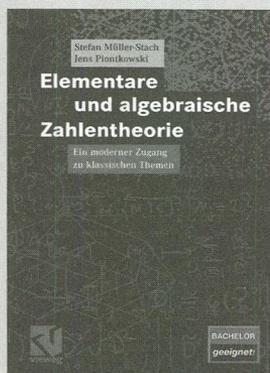
Kombinatorische Optimierung ist allgegenwärtig: Ob Sie elektronische Geräte oder Auto-Navigationssysteme verwenden, den Mobilfunk nutzen, den Müll von der Müllabfuhr abholen lassen oder die Produkte einer effizient arbeitenden Landwirtschaft konsumieren, immer steckt auch Mathematik dahinter. Dieses Buch gibt eine Einführung in die wichtigsten Themen der kombinatorischen Optimierung. Alle diese Themen werden problemorientiert aufbereitet und mit Blick auf die Verwendung im Mathematikunterricht vorgestellt. So wird Lehrerinnen und Lehrern, Studierenden im Grundstudium und anderen Interessierten der Zugang zu einem angewandten Gebiet der modernen Mathematik ermöglicht, das sich an vielen Stellen im Alltag wieder findet.



Abraham-Lincoln-Straße 46
D-65189 Wiesbaden
Fax 0611.78 78-420
www.vieweg.de

Änderungen vorbehalten.
Erhältlich beim Buchhandel oder beim Verlag.

Zahlentheorie: Klassische Themen - aktuelle Darstellung



Stefan Müller-Stach/Jens Piontkowski
Elementare und algebraische Zahlentheorie
Ein moderner Zugang zu klassischen Themen

2007. IX, 240 S. Br. EUR 19,90
ISBN 978-3-8348-0211-8

INHALT

Primzahlen - Teilbarkeitstheorie - Der ggT und der euklidische Algorithmus - Kongruenzrechnung - Die Ringe $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$ - Endlich erzeugte abelsche Gruppen - Die Struktur der Einheitengruppen U_n - Quadratische Reste - Quadratsätze - Kettenbrüche - Primzahltests - Faktorisierungsalgorithmen - p -adische Zahlen - Quadratrestklassen und Hilbert-Symbole - Der Satz von Hasse-Minkowski - Zahlkörper - Teilertheorie im Ring ganzer Zahlen - Die Idealklassengruppe - Die Klassenzahl quadratischer Zahlkörper
Anhänge: Elementare Gruppentheorie - Elementare Ringtheorie - Elementare Körpertheorie - Lösungshinweise zu den Aufgaben

DAS BUCH

Das Buch wendet sich an alle, die in die klassischen Themen der Zahlentheorie einsteigen wollen. Viel Wert wird auf die konkrete Berechenbarkeit bei allen Problemlösungen gelegt. So gibt es auch Abschnitte über moderne Primzahltests und Faktorisierungsalgorithmen und am Ende des Buches wird ein Weg zur Bestimmung der Klassenzahl der quadratischen Zahlkörper aufgezeigt. Im Rahmen der Bachelor-/Master-Studiengänge eignet sich das Buch als Grundlage für zwei Semester: einen Aufbauomodul in elementarer Zahlentheorie mit einem Vertiefungsmodul in algebraischer Zahlentheorie.



Abraham-Lincoln-Straße 46
D-65189 Wiesbaden
Fax 0611.78 78-420
www.vieweg.de

Änderungen vorbehalten.
Erfhältlich beim Buchhandel oder beim Verlag.

Teubner Studienbücher Wirtschaftsmathematik, Hrsg. von Bernd Luderer



Klaus Neusser
**Zeitreihenanalyse in den
Wirtschaftswissenschaften**
2006. XVI, 264 S. Br. EUR 29,90
ISBN 978-3-8351-0117-3

Albrecht Irle/Claas Prella
**Übungsbuch
Finanzmathematik**
*Leitfaden, Aufgaben und Lö-
sungen zur Derivatbewertung*
2007. 221 S. Br. EUR 24,90
ISBN 978-3-8351-0086-2

Heidrun Matthäus/
Wolf-Gert Matthäus
Mathematik für BWL-Bachelor
*Schritt für Schritt mit
ausführlichen Lösungen*
2006. 318 S. Br. EUR 24,90
ISBN 978-3-8351-0099-2

Bernd Luderer/Uwe Würker
**Einstieg in die
Wirtschaftsmathematik**
6., überarb. Aufl. 2005.
443 S. Br. EUR 24,90
ISBN 978-3-8351-0044-2

Stephan Dempe/
Heiner Schreier
Operations Research
*Deterministische Modelle
und Methoden*
2006. 381 S. Br. EUR 34,90
ISBN 978-3-519-00448-6

Teubner Lehrbücher:
einfach clever



Abraham-Lincoln-Str. 46
65189 Wiesbaden
Fax 0611.7878-420
www.teubner.de

