105. Band Heft 2, Juni 2003 D 20577

Jahresbericht

der Deutschen Mathematiker-Vereinigung

2 – 2003

Herausgegeben von A. Krieg
unter Mitwirkung von
U. Gather, E. Heintze, B. Kawohl,
H. Lange, H. Triebel

Teubner

Jahresbericht
der Deutschen Mathematiker-Vereinigung

Der „Jahresbericht" ist das offizielle Veröffentlichungsorgan der Deutschen Mathematiker-Vereinigung, für dessen inhaltliche Gestaltung im Auftrag des Präsidiums der jeweilige Herausgeber zuständig ist. Im „Jahresbericht" sollen vornehmlich Überblicksartikel über Teilgebiete der reinen und angewandten Mathematik, Nachrufe sowie historische Artikel und Buchbesprechungen veröffentlicht werden.

Manuskripte:

Alle für die Schriftleitung des Jahresberichts bestimmten Briefe und Manuskripte sind an Prof. Dr. A. Krieg zu richten. Für Buchbesprechungen ist Prof. Dr. H. Lange zuständig. Bücher, von denen eine Besprechung erfolgen soll, werden bei den Verlagen angefordert. Autoren von Buchbesprechungen und Artikeln werden gebeten, die vorhandenen LATEX-style-files für den Jahresbericht zu verwenden. Somit kann der Aufwand für die Satzarbeiten erheblich reduziert werden. Sollten Illustrationen in die Arbeiten integriert werden, können diese auch in das Satzsystem übernommen werden. Dazu ist es erforderlich, dass die Daten der Abbildungen nochmals in separaten Dateien einzeln abgespeichert werden. Die LATEX-style-files sind neben weiteren Informationen im Internet verfügbar unter

http://www.mathA.rwth-aachen.de/dmv/index.html

Auf Anfrage können die style-files auch auf Diskette zugeschickt werden.

Grundsätzlich sollen nur solche Manuskripte eingereicht werden, die nicht gleichzeitig an anderer Stelle zur Veröffentlichung eingereicht oder bereits veröffentlicht worden sind. Mit der Annahme zur Veröffentlichung erwirbt der Verlag das Recht zur Vervielfältigung und Verbreitung sowie das Recht der Übersetzung in andere Sprachen.

Verlag:

B. G. Teubner Verlag/GWV Fachverlage GmbH
Abraham-Lincoln-Straße 46
65189 Wiesbaden
http://www.teubner.de
http://www.gwv-fachverlage.de

Geschäftsführer: Dr. Hans-Dieter Haenel
Verlagsleitung: Dr. Heinz Weinheimer
Gesamtleitung Anzeigen: Thomas Werner
Gesamtleitung Produktion: Reinhard van den Hövel
Gesamtleitung Vertrieb: Gabriel Göttlinger

Abo-/Leserservice:

Tatjana Hellwig
Telefon: (06 11) 78 78-1 51
Fax: (06 11) 78 78-4 23
E-Mail: tatjana.hellwig@bertelsmann.de

Marketing/Sonderdrucke:

Stefanie Hoffmann
Telefon: (06 11) 78 78-3 79
Fax: (06 11) 78 78-4 39
E-Mail: stefanie.hoffmann@bertelsmann.de

Abonnentenverwaltung:

(Änderungen von Adressen und Bankverbindung, Rückfragen zu Rechnungen oder Mahnung)
VVA-Zeitschriftenservice, Abt. D6F6 / Jahresbericht der Deutschen Mathematiker-Vereinigung, Postfach 7777, 33310 Gütersloh
Ursula Müller
Telefon: (0 52 41) 80-19 65
Fax: (0 52 41) 80-96 20
E-Mail: ursula.mueller@bertelsmann.de

Bezugsbedingungen:

Die Zeitschrift erscheint 4mal jährlich zum Jahresabonnementpreis von € 98,– (176,– sFr) inkl. Versandkosten. Der Bezug von Einzelheften ist nicht möglich. Schriftliche Kündigung des Abonnements spätestens sechs Wochen vor Ablauf des Bezugsjahres.

Für persönliche Mitglieder der DMV, die den Jahresbericht zu beziehen wünschen, ist der zwischen DMV und Verlag vereinbarte Bezugspreis maßgebend, der im Rahmen des Mitgliedsbeitrags erhoben wird.

Satz: Fotosatz Behrens, D-68723 Oftersheim
Druck: Thomas Müntzer, Bad Langensalza

ISSN 0012-0456

Inhalt

Jahresbericht der Deutschen Mathematiker-Vereinigung, 105. Bd. 2003, Nr. 2

Jahresbericht der Deutschen Mathematiker-Vereinigung, 105. Bd. 2003, Nr. 2

In den nächsten Heften erscheinende Arbeiten

K. Mohnke: Holomorphe Kurven, Hamiltonsche Dynamik und Symplektische Topologie

---

Anschriften der Herausgeber

Prof. Dr. Aloys Krieg, Lehrstuhl A für Mathematik, RWTH Aachen, 52056 Aachen
E-Mail: krieg@mathA.rwth-aachen.de

Prof. Dr. Ursula Gather, Lehrstuhl für Mathematische Statistik und industrielle Anwendungen, Universität Dortmund, 44221 Dortmund
E-Mail: gather@statistik.uni-dortmund.de

Prof. Dr. Ernst Heintze, Institut für Mathematik, Universität Augsburg, 86135 Augsburg
E-Mail: heintze@math.uni-augsburg.de

Prof. Dr. Bernhard Kawohl, Mathematisches Institut, Universität zu Köln, 50923 Köln
E-Mail: kawohl@mi.uni-koeln.de

Prof. Dr. Herbert Lange, Mathematisches Institut, Friedrich-Alexander-Universität Erlangen-Nürnberg, Bismarckstraße 1½, 91054 Erlangen
E-Mail: lange@mi.uni-erlangen.de

Prof. Dr. Hans Triebel, Mathematisches Institut, Friedrich-Schiller-Universität, Ernst-Abbe-Platz 1–4, 07740 Jena
E-Mail: triebel@minet.uni-jena.de

Bezugshinweis

Früher erschienene Bände (ab Band 68) des „Jahresberichts der Deutschen Mathematiker-Vereinigung" können durch den Buchhandel oder den Verlag bezogen werden.

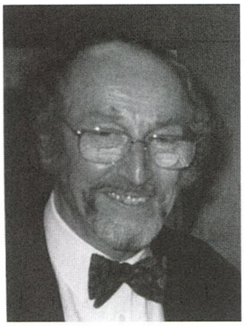
Nachdruck der Bände 41 bis 67 liefert: Swets & Zeitlinger, Heereweg 347 b, POB 810, NL-2160 SZ Lisse/Holland

Jahresbericht der Deutschen Mathematiker-Vereinigung, 105. Bd. 2003, Nr. 2

Vorwort

In diesem Heft liegt der Schwerpunkt auf den historischen Arbeiten. Sie finden drei Nachrufe auf besonders verdienstvolle Kollegen. Herr Rohrbach hätte zu Beginn dieses Jahres seinen 100. Geburtstag gefeiert. Herr Bauer ist letztes Jahr verstorben und der Beitrag von Herrn Heyer beinhaltet seine Rede im Rahmen des Gedenkkolloquiums. Darüber hinaus finden Sie eine Würdigung von Herrn Peyerimhoff, der 1996 verstorben ist.

A. Krieg



Heinz Bauer – Wissenschaftlicher Weg und Werk

Eine anläßlich des Gedenk-Kolloquiums am 31. Januar 2003 in Erlangen gehaltene Rede

Herbert Heyer

Abstract

- Mathematics Subject Classification: 01 A 70

This is the printed version of the slightly enlarged manuscript which the author prepared for his lecture given in memory of Heinz Bauer on the occasion of his 75th birthday at the University Erlangen-Nürnberg on January 31st, 2003. The speaker tried to draw the lines of Bauer's scientific development and discussed highlights of his research achievements. Tribute is also paid to his general academic stature and to his impeccable personality.

Eingegangen: 26. 03. 2003

DMV
JAHRESBERICHT DER DMV

Herbert Heyer, Math. Institut, Universität Tübingen, Auf der Morgenstelle 10, 72076 Tübingen, herbert.heyer@uni-tuebingen.de

1 Einleitung

„Die Erinnerung an verstorbene Freunde und Bekannte pflegt nach Art von Photographien mit der Zeit zu verblassen; manche verschwinden bei wachsender Entfernung in der Dämmerung: Das gilt für viele – bei anderen treten die Konturen prägnanter hervor."

Im Geiste dieses Zitats aus den Tagebuchaufzeichnungen Ernst Jüngers erkenne ich meine Aufgabe, die Konturen von Heinz Bauer nachzuzeichnen, eines akademischen Forschers und Lehrers von Rang, der in besonders markanter Weise hohen wissenschaftlichen Anspruch und einen unverkennbaren Stil in Denk- und Arbeitsweise vereinigte.

Über Heinz Bauer, seinen wissenschaftlichen Weg und sein Werk zu reden, gelingt mir nicht, ohne meine erste Begegnung mit ihm und so manche Gespräche in meiner Erinnerung aufleben zu lassen. Sie mögen zur Konturierung des Gesamtbildes beitragen.

Lassen Sie sich zurückversetzen in das Jahr 1959: Hamburg, Rothenbaumchaussee, Mathematisches Seminar, Hörsaal 3. Die unter NN angekündigte Vorlesung über „Funktionalanalysis" paßte gut in unser Studienprogramm. Schon vor Ablauf des akademischen Viertels waren die Versammelten in gespannter Erwartung. Die üblichen Bedenken wurden wach: Würde man dem jungen Dozenten aus Erlangen, dessen Name noch nicht ganz durchgedrungen war, folgen können? Hinzu kam die bekannte Sorge um eine saubere Mitschrift nach dem Tafelaufschrieb, um die Bewältigung der Fülle des Stoffes, um den Aufwand des Nachbereitens, eben den Anspruch, den der Dozent stellen würde.

Aber wie schnell waren solche Sorgen ausgestanden! Mit Schlag 11 Uhr 15 schritt ein äußerst gepflegter Herr zum Pult, begrüßte die Zuhörer mit wohlgesetzten Worten, drehte sich ruckartig zur Tafel und begann ohne viel vermittelnden Text medias in res zu gehen. Unsere Bewunderung für die Darbietung wuchs: Der Dozent trug ohne Manuskript vor, leistete sich keinen Verschreiber, geschweige denn einen Fehlschluß, und entschuldigte sich, wenn die Kreide einmal knirschte.

Ja, in dieser Form Mathematik lernen und über Mathematik reden, vielleicht sogar später einmal Mathematik erforschen zu können, das schwebte uns vor, und es waren nicht wenige im Hörsaal, die dieser Begeisterung erlagen.

Soweit die Erinnerung an die erste Begegnung mit dem jungen Dozenten Heinz Bauer in Hamburg.

Über 40 Jahre später, nach einem reichen Leben als Forscher und Lehrer, sind die Verdienste des Hochgeehrten kaum zu übersehen: das international anerkannte Oeuvre, die große Schülerzahl, die wissenschaftlichen Ehrenämter, die Einladungen zu Hauptvorträgen auf renommierten Tagungen und Symposien. Die besonderen Ehrungen als Träger des Bayerischen Maximiliansordens, des Bayerischen Verdienstordens, als Ehrendoktor der Universitäten Prag und Dresden, als ordentliches Mitglied der Bayerischen Akademie, als Mitglied der Deutschen Akademie der Naturforscher Leopoldina, um nur die bedeutendsten hervorzuheben, tragen ihren Ursprung im Werk, und dessen Hauptlinien herauszuarbeiten, wird mein Ziel sein.

Andererseits ist das Werk eines Wissenschaftlers einer Entwicklung unterworfen, und diese erhält ihre Impulse u.a. aus den Begegnungen mit Lehrern und Fachkollegen, also auf einem nachvollziehbaren wissenschaftlichen Weg, umso mehr in unserem Metier, da erst der einvernehmliche Diskurs mit dem Fachvertreter das Forschungsergebnis sichert, bevor es getrost in die Welt gesetzt werden kann.

So scheint sich eine natürliche Gliederung für den Hauptteil meiner Ausführungen herauszubilden.

Zunächst werde ich Heinz Bauers Weg von Erlangen über Paris, Seattle, Hamburg zurück nach Erlangen beschreiben, sodann Höhepunkte seines Forschens gemäß der naheliegenden Gliederung in

Maß- und Integrationstheorie,
Konvexitätstheorie und
Potentialtheorie

darlegen und schließlich auf seine besondere Begabung und erfolgreiche Tätigkeit als Schriftsteller der Mathematik eingehen.

An dieser Stelle nehme ich die Gelegenheit wahr, mich für unvollständig bleibende Referenzen zu entschuldigen; zu schwer fällt mir die systematische Namensnennung für die mannigfachen Beziehungen zum wissenschaftlichen Werk von Heinz Bauer. Andererseits wird man meiner Darstellung entnehmen können, wie hoch Bauer die Zusammenarbeit mit seinen Schülern geschätzt und Beiträge zu seinen Resultaten, vor allem weiterführende, bewertet hat.

Bei meinen Recherchen zu diesem Vortrag habe ich von Bauers eigenen Äußerungen zur Entstehung von Teilen seines Werkes profitiert, auch von den Beiträgen zu den „Selecta Heinz Bauer“, die in wenigen Monaten beim de Gruyter-Verlag erscheinen werden, und da denke ich vor allem an die Beiträge der Kollegen S.D. Chatterji, D.A. Edwards und I. Netuka. Der stattliche Band, der von Niels Jacob, Ivan Netuka und mir herausgegeben wird, eine vollständige Bibliographie Bauers und die eindrucksvolle Liste seiner Doktoranden enthält, sollte ursprünglich dem 75-jährigen am heutigen Tage überreicht werden. Der Lauf der Dinge hat ihn nun zu einem Dokument kostbaren Vermächtnisses werden lassen.

2 Wissenschaftlicher Weg

2.1 Erlangen (Otto Haupt)

Ab 1948 studierte Bauer in Erlangen. Sein Lehrer war Otto Haupt, der von 1921 bis zur Emeritierung im Jahr 1953 hier wirkte. Drei große Strömungen im Werk Haupts wurden zum Repertoire des begabten, eifrigen Studenten: die Funktionentheorie, die Ordnungsgeometrie und die reelle Analysis moderner Prägung, letztere besonders wegen Haupts Studien zum Oberflächenmaß und zum Integralbegriff. Haupt war mit der sich seit der Jahrhundertwende immer stärker durchsetzenden, auf Hilberts Initiative zurückgehenden axiomatischen Methode vertraut. Z. Bsp. entstand unter dem Einfluß Emmy Noethers noch vor van der Waerdens „Moderner Algebra" (1930/31) Haupts „Einführung in die Algebra" (1929), ein Werk, das langfristig zwar nicht den Erfolg der „Modernen Algebra" erreichte, aber dennoch spezifisch interessierte Leser fand und in den 50er Jahren neu aufgelegt wurde. Aber der Hilbert-Noethersche Geist durchdrang nicht nur die Algebra. Das strukturorientierte mathematische Denken griff auch auf Teile der Geometrie und der Integrationstheorie über. Aus dem Umfeld der Ordnungsstrukturen erwuchs das Thema von Bauers Dissertation über Bewertungen zwischen Vektorverbänden. Ungefähr zeitgleich erhielt er in Erlangen die Anregung zum Studium von Integralen als Linearformen, die noch vor Ablauf des anschließenden Paris-Aufenthalts, aber nicht ohne die Einflüsse der instruktiven Studiensemester in Nancy, zur Habilitation in Erlangen „über die Beziehung einer abstrakten Theorie des Riemann-Integrals zur Theorie der Radonschen Maße" führte.

2.2 Paris (Marcel Brelot, 1956–1959)

Der Weg von Erlangen nach Frankreich war der nächste fruchtbare Schritt in der wissenschaftlichen Entwicklung Heinz Bauers. Seine Lehrer in Erlangen, besonders Haupt und durch dessen Vermittlung Christian Pauc, hatten den Studenten nach Nancy empfohlen. Hier muß um das Jahr 1953 auch Bauers Begegnung mit Jean Dieudonné stattgefunden haben, die für den jungen Mathematiker, wie er später einmal pointiert formulierte, eher entmutigend gewesen war.

In Paris traf Bauer auf die Protagonisten der Bourbaki-geprägten Analysis, insbesondere auf George Choquet, der ihm Marcel Brelot als „Paten", wie man die Zuordnung seinerzeit im CNRS nannte, zur Seite stellte. Zum besseren Verständnis der dogmatisch ausgerichteten Sicht der Mathematik, die von Paris aus an Einfluß gewann, muß man sich bewußt machen, daß gerade die ersten Bände analytischer Prägung der Bourbakischen Enzyklopädie verbreitet erschienen: die „Topologie générale", die „Espaces vectoriels topologiques" und die „Intégration". Man weiß heute, daß die „Intégration" durch die dominante Rolle Dieudonnés im Bourbaki-Kreis und trotz der rechtzeitig vorgebrachten Warnungen von Laurent Schwartz total verunglückt ist. Dennoch war in jenen Jahren ein Integralbegriff für lokalkompakte Räume fixiert, mit dem die Analytiker auch außerhalb des engeren Zirkels von Bourbaki souverän umgehen konnten.

Bauer erlebt nun in Paris das von Brelot initiierte Zusammentreffen mit J.L. Doob und damit die Öffnung seines analytischen Denkens gegenüber der Wahrscheinlichkeitstheorie. Während Brelot als Schüler von Emile Picard bereits zu einer Theorie des Fegens im klassischen Rahmen der Potentialtheorie beigetragen und damit einen Ansatz für die axiomatische Potentialtheorie für Differentialgleichungen elliptischen Typs vorbereitet hatte, entnimmt Bauer den Vorträgen und Arbeiten Doobs den für ihn und auch für die Pariser Analytiker neuen auf das Jahr 1944 zurückgehenden wahrscheinlichkeitstheoretischen Zugang Kakutanis zum Dirichlet-Problem. Etwas technischer ausgedrückt hat Kakutani die ersten Randtreffer der von einem Punkt des zugrundeliegenden Gebietes ausgehenden Brownschen Pfade studiert, und es hat Doob gezeigt, daß man harmonische Funktionen längs Brownscher Pfade als Martingale interpretieren kann. Für die Wegbereiter Brelot und Doob stellte sich sogleich die Frage, ob die bisher konzipierte auf die Laplace-Gleichung eingeengte axiomatische Theorie eine die Wärmeleitungsgleichung mit erfassende Erweiterung gestatte. Diese Frage wird für Bauer zur Herausforderung.

Im Paris jener Jahre sieht man nun die Fortschritte bei der Entwicklung der Potentialtheorie auch im Zusammenhang mit den Neuerungen in der Funktionalanalysis. So erlebt Bauer sozusagen aus erster Hand die gerade aufblühende Theorie der Integraldarstellung kompakter konvexer Mengen, ein Thema, das über Jahrzehnte sein Hauptarbeitsgebiet bleiben sollte und gerade hier in Erlangen eine besondere Pflege erfuhr.

Als eher erheiterndes Aperçu füge ich hinzu, daß es in der Zeit, als ich mich auf die Habilitation vorbereitete, nicht ganz risikolos war, in einem Seminar- oder Kolloquiumsvortrag das Zitat des Choquetschen Satzes auszulassen.

Auf der Rückreise von Paris nach Erlangen war das Gepäck des Dozenten Bauer reichlich gefüllt mit Anregungen, die in den folgenden Jahren zu einer vielseitigen Forschungsaktivität führen sollten.

2.3 Seattle (Robert Blumenthal, Ronald Getoor, 1961/62)

Im Jahre 1961 wird Bauer als ordentlicher Professor nach Hamburg berufen, er tritt die Nachfolge von Leopold Schmetterer an, auch als Direktor des Instituts für Versicherungsmathematik und Mathematische Statistik. Schon als Privatdozent und als Lehrstuhlvertreter hatte er das Hamburger Mathematische Seminar kennen und schätzen gelernt. Aber jetzt ging es zunächst weniger um Konsolidierung als um Stillung der Unruhe. Die Freistellung für ein Forschungsjahr an der University of Washington in Seattle war wohl Teil der Berufungsvereinbarung gewesen.

In Seattle fand Bauer einerseits Gesprächspartner für seine aktuellen Interessen in Konvexitäts – und klassischer Potentialtheorie (Victor Klee und Robert Phelps im einen und Maynard Arsove im anderen Gebiet), andererseits eine Schule der modernen Wahrscheinlichkeitstheorie vor, die ihn gefangen nahm. Hierzu muß man wissen, daß nach Doob nun der hochbegabte Bochner-Schüler Gilbert A. Hunt um 1957 mit profunden Arbeiten über die Potentialtheorie Markoffscher Prozesse von sich reden machte. In Seattle hörte Bauer erstmalig eine Vorlesung über Markoffsche Prozesse. Die Kollegen Blumenthal und Getoor arbeiteten gerade an einer Monographie über die Huntschen Arbeiten, und Getoor sollte wenig später (im Sommersemester 1964) in Hamburg über gewisse Kapitel dieser Monographie (nämlich über additive Funktionale) vortragen. Das Blumenthal-Getoorsche Werk erschien 1968 im Druck. Es ist ein Standardwerk der Theorie geblieben.

Man kann sich leicht vorstellen, mit welchem Enthusiasmus Bauer in sein Hamburger Lehramt zurückkehrte, das ihm nun die Freiheit bot, die in Seattle aufgegriffenen neuen Entwicklungen der Wahrscheinlichkeitstheorie in Vorlesungen und Seminaren zusammen mit uns Studenten zu vertiefen.

Und so ergibt sich eine natürliche Überleitung vom Studienjahr in Seattle zur „schönsten Zeit seines Lebens als Hochschullehrer", wie er es selbst einmal ausdrückte, in

2.4 Hamburg (Leopold Schmetterer, 1959–1961, 1961–1965)

Die Jahre als Professor in Hamburg waren neben der Forschung, jetzt intensiv am Ausbau der axiomatischen Potentialtheorie unter Einschluß des parabolischen Falles orientiert, durch mehrere groß angelegte Vorlesungen geprägt:

Integrationstheorie in lokalkompakten Räumen
Markoffsche Prozesse
Konvexität in topologischen Vektorräumen
Harmonische Räume und ihre Potentialtheorie

Daneben las Bauer pflichtgemäß Wahrscheinlichkeitstheorie und Mathematische Statistik, wobei ihm die damals verfügbare Literatur zu letztgenanntem Gebiet (bei seinem hohen Anspruch an Klarheit) aufwendige Vorbereitungsarbeit abverlangte.

Zugleich begann die Arbeit am Göschenbändchen über „Wahrscheinlichkeitstheorie und Grundzüge der Maßtheorie", das in den folgenden Jahrzehnten zu einem höchst erfolgreichen Lehrbuch über die analytische Grundlegung der Wahrscheinlichkeitstheorie heranreifte. Das Göschenbändchen erschien 1964, die letzte Auflage der „Probability Theory" in besonderer Ausstattung, noch immer bei de Gruyter, im Jahre 1996.

Wie Bauer es in einer biographischen Notiz zum Ausdruck brachte, erinnerte er sich besonders dankbar der Zeit als Privatdozent in Hamburg und des Zusammenwirkens mit Leopold Schmetterer, der ihm ja schließlich den Weg in die Hansestadt gebahnt hatte. Man muß sich die Hamburger Situation zu jener Zeit vor Augen halten. Da gab es die „Titanen der reinen Mathematik": Artin, Hasse, Sperner, Witt und daneben die „Angewandten" Collatz und Schmetterer. „Statistiker" war ein geläufiges, nicht immer liebenswürdig dargebotenes Schimpfwort, und nur diejenigen „Angewandten" hatten die Chance der Anerkennung, die reinen Ursprungs waren. Für Schmetterer und Bauer standen die Chancen gut, dieser mit seinen Arbeitsgebieten Maßtheorie, Konvexität und Potentialtheorie bestens ausgewiesen, jener als Radon-Schüler, der in seinen Anfängen in Wien Zahlentheorie getrieben hatte und diese Expertise nun beim Studium der Arithmetik von Wahrscheinlichkeitsmaßen auf Gruppen zur Wirkung gelangen ließ.

In jenen Jahren war in Hamburg von den angewandten Aspekten dessen, was man heute Stochastik nennt, wenig die Rede, dafür aber ein Austausch unter den Kollegen auf übergeordnetem allgemein-mathematischen Niveau garantiert.

Nach 1965 nahm die Entwicklung für Bauer ihren Lauf zurück in die heimatlichen Gefilde.

2.5 Erlangen (ab 1965)

Das besondere Angebot, zusammen mit Konrad Jacobs nach Erlangen zu gehen, um dort nun in enger Fachkollegenschaft die Konsolidierung der Forschungs – und Lehrinteressen zu vollziehen, erlaubte kein Zögern. Hier in Erlangen wuchs die Schülerschaft, gewann die Arbeitsgemeinschaft „Potentialtheorie" Gestalt, wurden die Auslandskontakte, insbesondere diejenigen zu den Kollegen in Prag und Bukarest weiter ausgebaut. Manche von Ihnen werden sich zweier glänzender Festkolloquien erinnern: des „Doppelgeburtstages Bauer-Jacobs“ im Jahre 1988 und der „30 Jahre Arbeitsgemeinschaft Potentialtheorie“ 7 Jahre danach.

Während der Erlanger Jahre nahmen die Ehrungen zu, auch die Verantwortung für die Förderung unserer Wissenschaft (Engagement bei DMV und DFG, Herausgebertätigkeit) und das Übliche, dem sich Bauer nicht entziehen wollte: immer wieder Auslandsaufenthalte und Vortragsverpflichtungen weltweit.

Mit der Emeritierung im Jahre 1996 war die offizielle Phase der akademischen Tätigkeit zu Ende gekommen. Bald darauf der unheilvolle körperliche Zusammenbruch, der Abschluß dieses Daseins im August vorigen Jahres.

3 Werk

3.1 Maß- und Integrationstheorie

3.1.1 Zerlegungssätze im Rahmen vektorverbandswertiger Bewertungen auf einem allgemeinen Verband.

Es seien V ein Verband und W ein vollständiger Vektorverband. Eine Abbildung $f : V \to W$ heißt eine *Bewertung*, falls die Funktionalgleichung

$$f(x \vee y) + f(x \wedge y) = f(x) + f(y)$$

für alle $x, y \in V$ gilt. Zwei Spezialfälle dienen der Einordnung des Begriffs: Ist V ein Boolescher Ring, so ist f ein W-wertiges Maß auf V. Ist andererseits V ein Vektorverband und f linear, so ist f eine Bewertung.

Wir betrachten nun Bewertungen f mit $f(c) = 0$ für festes $c \in V$. Erste Resultate Bauers (1953) betreffen Zerlegungssätze vom Hewitt-Yoshidaschen Typ (1952): Jede Bewertung f von relativ beschränkter Variation läßt sich als Summe einer stetigen und einer rein unstetigen schreiben. In abgekürzter Form kann man diese Aussage (mit den entsprechend suggestiv gewählten Symbolen) so ausdrücken

$$\Phi_c = \Phi_c^s \oplus \Phi_c^u.$$

Ist insbesondere V ein Boolscher Ring von Mengen und $c := \emptyset$, so ergibt sich der Satz von Hewitt-Yoshida für beschränkte endlich additive Maße.

Weitere Resultate sind in Bauers Dissertation (1955) erhalten, z. Bsp. Zerlegungssätze vom Lebesgueschen Typ in reguläre und singuläre Anteile. Definiert man nämlich für einen gesättigten Unterverband S in V und $f \in \Phi_c$ mit $f \geq 0$ den S-singulären Anteil f_S in f durch

$$f_S := \inf\{h \in \Phi_c : h \geq 0, h(x) = f(x) \text{ für alle } x \in S\},$$

so liefert die Darstellung

$$f = f_S + (f - f_S)$$

eine Zerlegung von f (beliebigen Vorzeichens) vom Lebesgueschen Typ.

3.1.2 Der Umkreis des Satzes von Riesz

Gemeint ist die Darstellung einer Linearform I auf einer geeigneten Menge von Funktionen mittels eines Maßes μ_I, so daß die Zuordnung

$$I \mapsto \mu_I$$

der Gestalt

$$I(\cdot) = \int \cdot \, d\mu_I$$

bestenfalls bijektiv wird. In Kurzform lautet das Thema: Von M.H. Stone (1949) zu Bourbaki (1952) und zurück. Stone betrachtet einen Vektorverband $\mathfrak{L}$ (zunächst beschränkter) reeller Funktionen auf einer Menge X und ein *abstraktes Integral* als eine positive Linearform I auf $\mathfrak{L}$, welche die Stetigkeitsbedingung

(L) erfüllt: $\quad 0 \leq f_n \in \mathfrak{L}, \quad f_n \downarrow 0 \Rightarrow I(f_n) \to 0.$

Schon bei P.J. Daniell (1917/18) tritt die Frage auf: Existiert ein klassischer Maßraum (X, Σ, μ), so daß $\mathcal{L}^1(X, \Sigma, \mu)$ und $\mathfrak{L}$ übereinstimmen ?

In diesem Zusammenhang kommt die zusätzliche *Stone-Bedingung*

(S) ins Spiel $\quad f \in \mathfrak{L} \Rightarrow 1 \wedge f \in \mathfrak{L}.$

Nun zeigt Stone (vor Bourbaki): Ist $\mathfrak{L}$ ein Stonescher Vektorverband reeller (nicht notwendigerweise beschränkter) Funktionen auf X und $I : \mathfrak{L} \to \mathbb{R}$ ein abstraktes Integral, so stimmen $\mathcal{L}^1(X, \Sigma, \mu)$ und $\mathfrak{L}$ in der Tat überein.

Im Spezialfall der Bourbakischen Integrationstheorie ist X ein lokalkompakter Raum und $\mathfrak{L} = \mathcal{K}(X)$ der Vektorverband der stetigen Funktionen auf X mit kompaktem Träger. Tatsächlich erfüllt $\mathfrak{L}$ die Bedingung (S), und jede positive Linearform auf $\mathfrak{L}$ genügt der Bedingung (L). D. h. Die Bourbaki-Theorie ist ein Spezialfall der Stone-Theorie.

Bauers einschlägige Arbeiten (Habilitationsschrift von 1956 und eine im Bull. Soc. Math. France in 1957 erschienene) betreffen die Umkehrung dieser Aussage, d.h. die Implikation

Bourbaki-Theorie $\Longrightarrow$ Stone-Theorie.

Schon in den frühen 50er-Jahren hatte man die Frage gestellt, inwieweit die Daniellsche Darstellung unter Verzicht auf die Stetigkeitsbedingung (S) erhalten werden könne. Durch Rückgriff auf Resultate von L.H. Loomis entwickelt Bauer eine abstrakte Theorie der Riemann-Integrierbarkeit und zeigt, daß bei vorgegebenem Stoneschen Vektorverband $\mathfrak{L}$ reeller Funktionen auf X und vorgegebener positiver Linearform I auf $\mathfrak{L}$ o.B.d.A. angenommen werden kann, daß

- $\mathfrak{L}$ nur beschränkte Funktionen enthält und
- $\mathfrak{L}$ die Punkte von X trennt.

Auf diese Weise kann er das abstrakte Problem in ein konkretes überführen und sein Ziel erreichen: Seien $\mathfrak{L}$ ein Stonescher Vektorverband über X. Dann existiert ein lokalkompakter Raum X' mit der folgenden Eigenschaft: Für jedes abstrakte Integral I auf $\mathfrak{L}$ gibt es ein positives Radonmaß μ' auf X', so daß

$$L^p(\mu') \cong L^p(I)$$

für alle $p \in [1, \infty[$, wobei die Identifikation durch eine Isometrie der Banachräume bzw. durch einen Verbandsisomorphismus vermittelt wird.

Eine detaillierte topologische Beschreibung des Raumes X' ist in einer späteren Arbeit Bauers zusammen mit G. Nöbeling enthalten.

Der Darstellungssatz von Daniell-Stone war bis zur dritten Auflage des noch ungeteilten Bauerschen Lehrbuchs ein für viele Anwendungen günstig zitierbares Resultat. Daß Bauer sich später gegen die Aufnahme dieses Satzes entschied, und zwar, wie er mir einmal sagte, weil er ihn für seine Maßtheorie (auf lokalkompakten Räumen) nicht benötigte, habe ich nie ganz verstanden. Vielleicht dachte er bei dieser Entscheidung auch an die vielen guten Bücher über Integrationstheorie in nicht notwendigerweise lokalkompakten topologischen Räumen, die inzwischen erschienen waren.

3.2 Konvexitätstheorie

3.2.1 Minimum-Prinzip

Am Anfang meiner Berichterstattung über Bauers allgemeine Minimum-Prinzipien steht die bekannte Umformulierung des Satzes von Krein-Milman: Jeder Punkt einer kompakten konvexen Menge K ist der Schwerpunkt eines Wahrscheinlichkeitsmaßes, welches vom Abschluß der Menge K_e der Extremalpunkte von K getragen wird. Der Satz von Choquet (1956) geht über diese Aussage insofern hinaus, als daß das Darstellungsmaß von K_e selbst, dann aber in einem schärfer zu fassenden Sinne getragen wird.

Der Standardbeweis des Satzes von Krein-Milman impliziert, daß jede stetige Linearform ihren kleinsten Wert auf K in einem Extremalpunkt annimmt.

Das von Bauer im Jahre 1960 publizierte Minimum-Prinzip lautet wie folgt. Es sei $\mathcal{F}$ eine Menge nach unten halbstetiger Funktionen auf einen kompakten Raum X, welche die Punkte von X trennt. Dann existiert für jedes $g \in \mathcal{F}$ ein $x \in X$ derart, daß

$$g(x) = \inf g(X),$$

und ε_x ist das einzige Radonsche Wahrscheinlichkeitsmaß μ auf X, für welches

$$\int f d\mu \leq f(x)$$

für alle $f \in \mathcal{F}$ gilt.

Dieses bedeutende Resultat Bauerscher Forschung wird von großem Einfluß auf spätere Studien in Potential- und Korovkin-Theorie sein.

3.2.2 Ränder

Der *Choquet-Rand* eines kompakten Raumes X bezüglich einer die Punkte von X trennenden Menge $\mathcal{F}$ nach unten halbstetiger Funktionen ist so definiert, daß jede Funktion aus $\mathcal{F}$ ihr Minimum in einem Punkt dieses Randes annimmt. Eine formale Definition erreicht man wie folgt: Für jedes $x \in X$ sei

$$M_x(\mathcal{F}) := \{\mu \in M^1(X) : \int^* h d\mu \leq h(x) \quad \text{für alle } h \in \mathcal{F}\}.$$

Dann ist der Choquet-Rand von X bezüglich $\mathcal{F}$ gerade die Menge

$$Ch_{\mathcal{F}}(X) := \{x \in X : M_x(\mathcal{F}) = \{\varepsilon_x\}\}.$$

Daneben betrachtet Bauer den *Šilov-Rand* von X bezüglich $\mathcal{F}$ als die kleinste abgeschlossene Menge in X, auf der jede Funktion aus $\mathcal{F}$ ihr Minimum annimmt. Man beobachtet, daß unter der Voraussetzung $\mathcal{F} + \mathcal{F} \subset \mathcal{F}$ der Šilov-Rand $\check{S}_{\mathcal{F}}(X)$ von X bezüglich $\mathcal{F}$ existiert und mit $\overline{Ch_{\mathcal{F}}(X)}$ übereinstimmt.

In seiner grundlegenden Arbeit aus dem Jahre 1961 löst Bauer mittels der Theorie der Ränder ein *abstraktes Dirichlet-Problem:* Hierzu führt er für einen punktetrennenden und die Konstanten enthaltenden linearen Unterraum $\mathcal{H}$ von $C(X)$ mittels einer abstrakten Mittelwerteigenschaft die Menge $\hat{\mathcal{H}}$ der $\mathcal{H}$-affinen (bzw. $\mathcal{H}$-harmonischen) Funktionen ein, nennt eine Funktion $f \in C(X^*)$, wobei $X^* := \check{S}_{\mathcal{H}}(X)$ gesetzt wird, *$\mathcal{H}$-resolutiv*, falls ein $h \in \hat{\mathcal{H}}$ mit $f = \mathrm{Res}_{X^*} h$ existiert, und etabliert notwendige und hinreichende Bedingungen für ein gegebenes $f \in C(X^*)$ (bzw. für alle $f \in C(X^*)$), $\mathcal{H}$-resolutiv zu sein. Das resultierende Theorem in der Form der Äquivalenz der beiden Aussagen

- Alle $f \in C(X^*)$ sind $\mathcal{H}$-resolutiv
- $\hat{\mathcal{H}}$ ist bezüglich $\leq$ ein Verband

gestattet wesentliche Anwendungen auf das klassische Dirichlet-Problem und auf die Korovkin-Theorie. Aus jeder dieser beiden äquivalenten Aussagen folgt insbesondere, daß $Ch_{\mathcal{H}}(X)$ abgeschlossen ist, also Choquet- und Šilov-Rand zusammenfallen.

Weitere sich in natürlicher Weise aus der Theorie ergebende Fragen wie z.B. die Bestimmung der Gestalt der Ränder, ihre Beziehung zu den Extremalpunkten (im Falle einer kompakten und konvexen Menge X) werden von Bauer in nachfolgenden Arbeiten beantwortet.

3.2.3 Korovkin-Approximation

Man erinnere sich der klassischen Korovkin-Aussage, die von Šaskin Anfang der 60er Jahre in ein allgemeines Licht gesetzt wurde: Es sei (L_n) eine Folge positiver linearer Operatoren auf $C([0,1])$, so daß

$$L_n p \longrightarrow_{\mathrm{glm}} p$$

für alle quadratischen Polynome p gilt. Dann folgt bereits

$$L_n f \to f$$

für alle $f \in C([0,1])$. Ersetzt man nun $[0,1]$ durch einen kompakten Raum, die Menge der quadratischen Polynome durch einen linearen Unterraum $\mathcal{H}$ von $C(X)$, welcher die Punkte trennt und die Konstanten enthält, so liegt es nahe, ein Netz (T_α) positiver linearer Operatoren auf $C(X)$ *$\mathcal{H}$-zulässig* zu nennen, wenn

$$T_\alpha h \longrightarrow_{\mathrm{glm}} h$$

für alle $h \in \mathcal{H}$ gilt. Man sagt, daß f in der *Korovkin-Hülle* Kor $(\mathcal{H})$ von $\mathcal{H}$ liege, falls

$$T_\alpha f \longrightarrow f$$

für jedes $\mathcal{H}$-zulässige Netz (T_α) erfüllt ist. Die folgenden Probleme liegen auf der Hand

- Charakterisierung von Kor $(\mathcal{H})$.
- Auffinden notwendiger und hinreichender Bedingungen für

  $$\text{Kor}\ (\mathcal{H}) = C(X).$$

Das erstgenannte Problem konnte von Šaškin und Bauer in der Form der Identität

$$\text{Kor}\ (\mathcal{H}) = \hat{\mathcal{H}}$$

gelöst werden, wobei $\hat{\mathcal{H}}$ den in 3.2.2 eingeführten Raum der $\mathcal{H}$-affinen Funktionen bezeichnet. Mit ähnlichen Rückgriffen auf frühere Resultate und Überlegungen von Wulbert (1968) ergab sich die Lösung des zweitgenannten Problems in der Form

$$\text{Kor}\ (\mathcal{H}) = C(X) \Longleftrightarrow Ch_{\mathcal{H}}(X) = X.$$

In seiner umfassenden Arbeit aus dem Jahre 1973 dehnt Bauer die Korovkin-Theorie auf adaptierte Unterräume $\mathcal{H}$ in $C(X)$ (im Sinne von Choquet) aus. Eine befriedigende Bestimmung der Korovkin-Hülle gelingt erst im Jahre 1979 in einem Erlanger Team.

3.3 Harmonische Räume

Das zentrale Thema der Bauerschen Forschung, die Theorie der harmonischen Räume, ist in gewissem Sinne die Synthese seiner breit angelegten analytischen Untersuchungen zu Integration und Konvexität. Auf dem Wege zu einer den parabolischen Fall umfassenden (axiomatischen) „Potentialtheorie ohne Kern" erhob sich die grundlegende Frage (bereits bei Doob), ob das Randminimum-Prinzip ein Axiom oder ein Satz werden würde. Mit Hilfe seines allgemeinen Minimum-Prinzips schaffte es Bauer, sowohl das Randminimum-Prinzip als auch einen Resolutivitätssatz aus einem recht eng gefaßten Axiomensystem, das nun die Systeme von Brelot und Doob umfaßt, zu deduzieren. Dieser Erfolg war der Theorie um das Jahr 1963 beschieden. Die heute verfügbaren Monographien von Constantinescu und Cornea (1972) und von Bliedtner und Hansen (1986) gründen weitgehend auf Bauers Arbeiten.

3.3.1 Ein nützliches Axiomensystem

Seien X ein lokalkompakter Raum mit abzählbarer Basis und $\mathcal{H}$ ein Garbendatum von Vektorräumen stetiger Funktionen. D.h. jeder nichtleeren offenen Menge U von X wird der Vektorraum $\mathcal{H}_U \subset C(U)$ der in U *harmonischen Funktionen* so zugeordnet, daß die Harmonizität eine lokale Eigenschaft ist.

Von Brelot wird das *Basisaxiom* übernommen, daß nämlich eine Basis offener Mengen in X existiert, welche aus lauter regulären Mengen besteht. Hierbei heißt eine offene relativ kompakte Menge V *regulär*, wenn sich jede Randfunktion $f \in C(V^*)$ mittels einer eindeutig bestimmten Funktion $H_f^V \in \mathcal{H}_V$ stetig nach V hinein fortsetzen läßt und wenn $f \geq 0$ stets $H_f^V \geq 0$ nach sich zieht (Man sagt in diesem Fall, daß für V das Dirichlet-Problem lösbar ist.)

Hinzu kommen nun aufgrund von Bauers neuen Einsichten zwei weitere Axiome: das *Trennungsaxiom*, daß nämlich die harmonischen oder wenigstens die hyperharmonischen Funktionen auf geeigneten offenen Mengen die Punkte von X trennen, und das *Konvergenzaxiom* (Doobscher Prägung), welches etwa so formuliert werden kann: Für jede isotone Folge (h_n) in $\mathcal{H}_U$, so daß $\sup h_n(x) < \infty$ auf den Punkten x einer in U dichten Teilmenge gilt (bzw. so daß (h_n) lokal beschränkt ist), ist $\sup h_n \in \mathcal{H}_U$.

Bei Vorgabe dieser drei Axiome läßt sich nunmehr das Randminimum-Prinzip beweisen:

$$\liminf_{x \to z} u(x) \geq 0 \quad \text{für alle } z \in U^* \Longrightarrow u \geq 0$$

für alle hyperharmonischen Funktionen u auf U.

In der so gestalteten axiomatischen Theorie ist natürlich die Brelotsche (vom elliptischen Typ) als Spezialfall enthalten. Der erweiterte Aufbau führt eine Fülle neuer Resultate über die Potentialtheorie der Wärmeleitungsgleichung zutage und macht den Weg frei zu einer umfassenden Theorie des Fegens in streng harmonischen Räumen, also solchen mit strengen Potentialen, zur Theorie der verallgemeinerten Lösungen inklusive Regularitätskriterien und zur anwendungsreichen Korrespondenz zwischen hyperharmonischen Funktionen (einer Potentialtheorie) und exzessiven Funktionen (einer Theorie Markoffscher Prozesse). Als Referenzen für diese Korrespondenz nenne ich P.A. Meyer (1963), J. Bliedtner – W. Hansen (1978) und J.C. Taylor (1978).

Anläßlich eines Vortrages in Rostock im Herbst 1977 resümiert Bauer die Erfolge der Theorie: 20 Jahre nach der Pionierleistung von Doob und Brelot sei die Theorie der harmonischen Räume zu einem gewissen Abschluß gekommen. Die ursprünglichen Ziele seien weitgehend erreicht worden. Zugleich hätten die letzten Jahre zu neuen Fragen Anstoß gegeben, z. Bsp. zur Simplizialität und zu den fein-harmonischen Funktionen. Daneben seien unerwartete neue Beispiele für harmonische Räume aufgetaucht, wie etwa elliptische harmonische Strukturen auf dem unendlich dimensionalen Torus (Ch. Berg, A.D. Bendikov, 1975). Diese und andere Beispiele (Harmonische Räume mit Netzwerk- bzw. Fraktalstruktur) veranlassen Bauer im Jahre 1989 zu der Äußerung, daß „die Gefahr der Entwicklungsjahre, die Theorie der harmonischen Räume als Spiel mit Axiomen zu betrachten, gebannt zu sein scheint." Von dem vielleicht zu engen Klassifikationsschema „Axiomatische Potentialtheorie" meint er, daß es zu Mißverständnissen und Fehleinschätzungen Anlaß gebe.

Was Bauer über seine Potentialtheorie ohne Kern hinaus an verwandten Fragestellungen angestoßen hat, kann im Folgenden nur in Auswahl wiedergegeben werden. Im folgenden Abschnitt zitieren wir zwei Anwendungen, bei denen die Kraft der neuen Axiomatik am Beispiel der Wärmeleitungsgleichung so recht erkennbar wird.

3.3.2 Beiträge zur Theorie der Wärmeleitungsgleichung

In einer Arbeit von 1966 hebt Bauer die traditionelle Unterscheidung zwischen Anfangs- und Randwertproblem (bei partiellen Differentialgleichungen) auf, indem er zeigt, daß *Cauchy- und Dirichlet-Problem* als Spezialfälle eines allgemeinen Dirichlet-Problems für offene, nicht notwendigerweise relativ kompakte Mengen aufgefaßt werden können.

Dies für beliebige offene Mengen U formulierte Dirichlet-Problem erfordert den Bezug zu einem besonders gewählten Potential p im streng harmonischen Raum X. Durch Anpassung der Perron-Wiener-Brelotschen Methode (der Ober- und Unterfunktionen) an das Potential p läßt sich das Randminimum-Prinzip für nach unten p-beschränkte hyperharmonische Funktionen beweisen. Ermutigt durch diesen Fortschritt entwickelt Bauer die zugehörige p-Potentialtheorie (mit p-Harmonizität, p- Resolutivität, p-Regularität) und zeigt, daß unter der Voraussetzung der Regularität aller Randpunkte von U die p-Lösung für jede stetige p-beschränkte Randfunktion f von U die einzige auf U p-harmonische Funktion ist, welche f auf $\overline{U}$ stetig fortsetzt.

Im Spezialfall des Cauchyschen Anfangswertproblems für die Wärmeleitungsgleichung im offenen Halbraum L des $\mathbb{R}^{p+1}$ geht es also bei Vorgabe einer stetigen Randfunktion f auf U^* mit

$$\sup_{z \in U^*} \frac{f(z)}{p(z)} < +\infty$$

um das Auffinden einer (dann eindeutig bestimmten) Lösung u der Wärmeleitungsgleichung, welche stetig an f anschließt und

$$\sup_{x \in U} \frac{|u(x)|}{p(x)} < +\infty$$

erfüllt. Als eine notwendige und hinreichende Bedingung für die Lösbarkeit in diesem Sinne ergibt sich die Regularität eines jeden Randpunktes von U. Dabei heißt $z \in U^*$ regulärer Randpunkt von U, wenn es eine relativ kompakte offene Umgebung V von z derart gibt, daß z im üblichen Sinne regulärer Randpunkt von $U \cap V$ ist. Insbesondere ist dieser Regularitätsbegriff unabhängig vom vorgegebenen Potential p. Das Cauchy-Problem wird also durch spezielle Wahl von p und durch den Nachweis der Regularität aller Randpunkte von L gelöst. Ist U zudem relativ kompakt, so ist man zum Dirichletschen Randwertproblem zurückgelangt.

Als weiteren Beitrag erwähnen wir Bauers Arbeiten über *Wärmekugeln und Fulksmaße* aus den Jahren 1984/85. Diese Thematik betrifft ein Analogon der klassischen Mittelwerteigenschaft für harmonische Funktionen und die euklidische Kugel, nunmehr im Rahmen der Theorie kalorischer Funktionen (der Lösungen der Wärmeleitungsgleichung) und zugehöriger Wärmekugeln, welche überraschende Eigenschaften besitzen.

Unter wesentlicher Verwendung der allgemeinen Theorie harmonischer Räume zeigt Bauer im kalorischen Rahmen, daß das im Jahre 1966 durch einen expliziten Ansatz eingeführte und nach seinem Autor benannte Fulksmaß μ_d zum Niveauparameter $d > 0$ potentialtheoretisch als ein gefegtes Maß dargestellt werden kann. Genauer gilt

$$\mu_d = \varepsilon_0^{\Omega_d^c},$$

daß μ_d also mit dem durch Fegen des Dirac-Maßes ε_0 auf das Komplement der Wärmekugel Ω_d gewonnenen Maß übereinstimmt. Die Bauersche Arbeit enthält darüberhinaus eine wahrscheinlichkeitstheoretische Interpretation des Fulksmaßes: μ_d ist nämlich die Verteilung der ersten Treffer der Wärmesphäre durch den Brownschen Wärmetransport (das ist die Raum-Zeit-Modifikation der Brownschen Bewegung) bei Start im Ursprung.

3.3.3 Vertiefung der Theorie: Feines Randverhalten harmonischer Funktionen

Diese Problemstellung wird von Bauer in 1985 im Rahmen der allgemeinen Theorie harmonischer Räume behandelt. Genauer geht es um das feine Grenzverhalten der Perron-Wiener-Brelot-Lösung für beschränkte resolutive Funktionen in einem polaren, irregulären Punkt des Randes, eine Eigenschaft, die in Abweichung von Brelots früheren Studien nunmehr ohne Rückgriff auf Green-Kern und Martin-Darstellung bewerkstelligt werden kann. Die Studien Brelots aus den 40er Jahren wurden von E.P. Smyrnelis in einer Arbeit aus dem Jahre 1973 unter starken Zusatzvoraussetzungen auf Brelotsche harmonische Räume übertragen. Der Zugang von Smyrnelis blieb für die Theorie der Wärmeleitungsgleichung solange unanwendbar bis Bauer sein allgemeines Resultat gewann: Es sei X ein streng harmonischer Raum, für welchen insbesondere das Doobsche Konvergenzaxiom gültig ist. Es seien U eine relativ kompakte offene Menge in X und z ein polarer irregulärer Randpunkt von U. Dann ist jede beschränkte resolutive Randfunktion f bezüglich des gefegten Maßes $\varepsilon_z^{U^c}$ integrierbar, und für den feinen Limes der zugehörigen (verallgemeinerten) Lösung H_f^U des Dirichlet-Problems gilt

$$f-\lim_{x\to z} H_f^U(x) = \int f \, d\varepsilon_z^{U^c}.$$

Bei entsprechender Vorgehensweise kann Bauer außerdem den auf Brelot zurückgehenden Begriff der maximalen Folge (in einer offenen Menge U für einen Randpunkt z) in seine axiomatische Theorie mit aufnehmen. Er zeigt, daß man feine Limiten beschränkter harmonischer Funktionen in polaren irregulären Randpunkten z von U mittels maximaler Folgen in U für z erreichen kann. Die Bedeutung des Bauerschen Ansatzes zeigt sich u.a. in weiterführenden Arbeiten von W. Hansen (1986) und I. Netuka (1990).

4 Ein Schriftsteller der Mathematik

In seinem bekannten Essay in der anspruchslosen Publikation „How to write mathematics", die zu Ehren von Norman Steenrod von der AMS im Jahre 1973 herausgegeben worden war, fixiert P.R. Halmos seine Ansprüche an die schriftliche Kommunikation über Mathematik: „The basic problem in writing mathematics is the same as in writing biology, writing a novel, or writing directions for assembling a harpsichord: the problem is to communicate an idea. To do so, and to do it clearly, you must have something to say, and you must have some one to say it to, you must organize what you want to say, and you must arrange it in the order you want to say it in, you must write it, and rewrite it, and re-rewrite it several times, and you must be willing to think hard about and work hard on mechanical details such as diction, notation, and punctuation …"

Manche der genannten Kriterien für gutes wissenschaftliches Schriftstellertum scheinen uns in der Profession Tätigen selbstverständlich, die Gesamtheit jedoch zu realisieren, ist nicht jedem, auch nicht den ganz hervorragenden Forschern gegeben. Diese scheinen oft eher für sich als für den Leser zu schreiben und machen letzterem das Leben schwer.

Heinz Bauer war ein expositeur par excellence, in Wort und Schrift. Sein erfolgreiches Lehrbuch über „Wahrscheinlichkeitstheorie und Grundzüge der Maßtheorie", die bestens durchgearbeitete Vorlesungsausarbeitung über „Harmonische Räume und ihre Potentialtheorie" und viele seiner Überblicksarbeiten sind Beweise für diese Exzellenz. Aus persönlicher Erfahrung im Umgang mit Bauers Schrifttum möchte ich besonders den außerhalb der Bauerschen Forschung tätigen Kollegen und Freunden den im L'Enseignement Mathématique im Jahre 1979 erschienenen Artikel über „Halbgruppen und Resolventen in der Potentialtheorie" zur Lektüre empfehlen, der m.E. ein kompositorisch und zugleich sprachliches Kunstwerk ist. Mit Befriedigung entnahm ich einem aktuellen Brief von George Choquet die ähnlich würdigende Formulierung vom „véritable bijou" der Bauerschen Arbeiten.

Und um die Nähe der Darstellungsweisen in Mathematik und Literatur ein wenig zu vertiefen, ohne mich vom Thema allzusehr zu entfernen, erinnere ich an einen Auftritt Otto Haupts in der Mainzer Akademie, der, wie Bauer gern berichtete, vom Schriftsteller H.E. Nossack in dessen bedeutender Schrift über die „Schwache Position der Literatur" (1965) ohne Namensbezug beschrieben und reflektiert wurde. Nossack hatte Haupt als zwar in einer Geheimsprache Vortragenden, aber von der Sache Besessenen erlebt, der gelegentlich – träumerisch in den Saal blickend – nach dem rechten Ausdruck für etwas Unaussprechbares suchte. Und Nossack resümiert: „ im besseren Bemühen, ihre Sache stimmend zur Darstellung zu bringen, sind Wissenschaftler und Schriftsteller sich gleich."

Mir scheint, daß in der Bauerschen Berichterstattung über dies Mainzer Ereignis das für ihn Vorbildhafte seines verehrten Lehrers ausgesprochen wird.

Schlußwort

Ich fasse zusammen, was zur Konturierung der akademischen Persönlichkeit Heinz Bauers beitragen sollte. Wichtiger als die Folge der biographischen Daten schien mir der inhaltliche wissenschaftliche Weg, der dem Werk Struktur verleiht. So folgte die Berichterstattung über die großen Begegnungen, sodann die Darstellung der hohen Schule der Potentialtheorie wie sie sich seit den 60er Jahren des vorigen Jahrhunderts ausgeprägt hatte. Es sollten die Schnittpunkte der Bauerschen Forschung sichtbar werden, ihr Ursprung in den durch Hilberts axiomatische Methode und Bourbakis Enzyklopädie eröffneten großen Forschungslinien, und schließlich ein Stück Wirkungsgeschichte.

Als erfolgreicher Universitätslehrer mit einer übergreifenden Verantwortung für Forschung und Lehre nicht nur an seiner Heimatuniversität, sondern auch in überregionalen Gremien war Heinz Bauer das, was Max Weber in seiner berühmten Schrift „Wissenschaft als Beruf" aus dem Jahr 1919 einen Geistesaristokraten nennt, womit der berühmte Ökonom mit der Verantwortung zugleich auch universitäres Ethos und Stil verbindet.

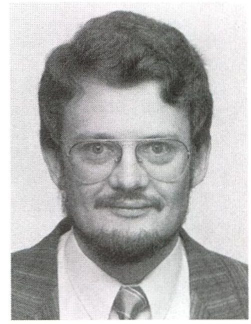
Ich schließe, wie ich begonnen habe, mit einem weiteren Zitat aus Ernst Jüngers Tagebuchaufzeichnungen:

„Die Toten sind wie Schnittblumen, die noch geraume Zeit leben – sie wollen gepflegt werden. Sie ziehen sich dann allmählich zurück; man spürt in den Träumen wie ihre Gegenwart schwächer wird …“

Gewiß werden wir nicht verhindern können, daß die imaginäre Präsenz des von uns Gegangenen und hier zu Ehrenden mit der Zeit schwächer wird. Aber wir wissen aus der Geschichte und tragen die Überzeugung in uns, daß das Werk eines Gelehrten den kurzen Zeitraum seines Erdenlebens weit überdauert und dies Werk als ein Teil des in seiner Zeit gewonnenen Wissenszuwachses für alle Zeiten erhalten bleibt.

Alexander Peyerimhoff
1926 – 1996

Werner Kratz
und
Ulrich Stadtmüller



Abstract

- Mathematics Subject Classification: 01 A 70
- Keywords and Phrases: klassische Analysis, Limitierungstheorie, gewöhnliche Differentialgleichungen

Eingegangen: 31.03.2003

Werner Kratz und Ulrich Stadtmüller, Universität Ulm,
Abteilungen für Mathematik, 89069 Ulm,
kratz@mathematik.uni-ulm.de; stamue@mathematik.uni-ulm.de

DMV
JAHRESBERICHT
DER DMV

Der Lebenslauf

Nach kurzer schwerer Krankheit verstarb am 13.08.1996 Alexander Peyerimhoff nur 5 Monate nach seinem 70ten Geburtstag und nur kurze Zeit nach dem Tod seiner Frau. Er hinterließ zwei erwachsene Kinder, Ulrike und Norbert.

Alexander Peyerimhoff wurde am 5. März 1926 in Göppingen geboren. In seiner Kindheit zog die Familie öfter um, da sein Vater als Finanzbeamter verschiedentlich versetzt wurde. Stationen waren Ludwigsburg, Rottweil und schließlich ab 1937 Heidenheim, die Stadt, der er immer verbunden blieb. Obwohl er in seinem katholischen Elternhaus eine große Distanz zu dem Nationalsozialistischen Regime in sich aufnahm, durchlief er die üblichen vormilitärischen Stationen eines jungen Mannes, wie Wehrertüchtigungslager, Luftwaffenhelfereinsatz in Karlsruhe und Reichsarbeitsdienst bei Kassel. Von dort meldete er sich zur Marine und wurde 1944 nach Stralsund einberufen. Als Soldat erhielt er, wie fast alle Gymnasiasten seines Jahrganges, den Reifevermerk, das sogenannte Notabitur nach $7\frac{1}{2}$ Jahren Gymnasium. Nach kurzer Ausbildung an der Ostseeküste wurde er der Infanterie an der Odermündung zugeteilt, konnte aber der russischen Gefangenschaft entgehen, indem er sich nach Westen durchschlug und in die amerikanische Gefangenschaft geriet. Anschließend wurde er in englische Kriegsgefangenschaft nach Schleswig-Holstein überstellt. Diese Zeit brachte Hunger und Not mit sich, aber es gelang ihm durch eine kleine Fälschung seiner Altersangabe im November 1945 nach Heidenheim zu seinen Eltern entlassen zu werden.

Schon als Schüler hatte er sich verschiedentlich Mathematikbücher gekauft, um seine Schulkenntnisse zu verbessern, jetzt konnte er endlich seinem Wunsch nachkommen Mathematik zu studieren. Er bewarb sich in Heidelberg und Tübingen. Da er in Heidelberg noch einen einjährigen Vorkurs bestehen sollte, in Tübingen aber sofort zugelassen wurde, begann er sein Mathematikstudium in Tübingen und studierte dort insbesondere bei Kamke und Knopp. Nach 10 Semestern promovierte Peyerimhoff im Jahr 1951 bei Konrad Knopp mit dem Thema „Konvergenz und Summierbarkeitsfaktoren“.

Auf Empfehlung von Knopp erhielt er danach in Gießen eine zeitlich befristete Assistentenstelle bei Ullrich, dessen Assistent Kanold nach Würzburg beurlaubt war. Schon ein Jahr nach seiner Promotion habilitierte er sich im Sommersemester 1952. Die wirtschaftliche Lage war karg, aber trotzdem arbeitete er wissenschaftlich intensiv und hielt mit Freude viele Vorlesungen. 1954 ging er für ein Jahr nach Cincinnati als Research Associate und arbeitete dort mit Knopp und Jurkat. Aus der Zusammenarbeit mit Wolfgang Jurkat entwickelte sich eine langjährige mathematische Partnerschaft und persönliche Freundschaft. Peyerimhoff kehrte nochmals 1955/56 und 1957/58 für ein Jahr als Associate Professor nach Cincinnati zurück. Dazwischen lag ein zweisemestriger Lehrauftrag in Göttingen, wo auch Hans-Egon Richert arbeitete, mit dem er sein Leben lang in Freundschaft verbunden blieb. Im Jahr 1958 erhielt Peyerimhoff eine Diätendozentur in Gießen und wurde kurz darauf zum außerplanmäßigen Professor ernannt. In diesem Jahr heiratete er seine Frau Isolde, eine promovierte Biologin. Während seiner Gießener Zeit hielt er auch eine Vorlesung in Marburg und bekam wenig später einen Ruf auf einen Lehrstuhl dort. Der andere Lehrstuhlinhaber war H.A. Schmid, der ein strenges Regiment in Marburg führte. Peyerimhoff gelang es trotzdem das Curriculum zu erneuern und auch die Mathematik auszubauen. Der nächste Kollege, der dann nach Marburg berufen wurde, war Richert. Nochmals erfolgte eine Phase mit verschiedenen Aufenthalten in den USA, nun in Salt Lake City, bei dem auch verschiedene Mitarbeiter aus Marburg miteinbezogen waren und lebenslange Freundschaften entstanden.

Diese Marburger Zeit ging 1969 zu Ende. Peyerimhoff entschied sich, in der neugegründeten Universität Ulm den ersten Lehrstuhl für Mathematik zu übernehmen. Mit ein Grund für diese Entscheidung war, dass Marburg eine Hochburg der studentischen Unruhen der 68er Jahre war. Verschiedene Mitarbeiter und junge Kollegen begleiteten ihn nach Ulm. Peyerimhoff baute dann die Mathematik in Ulm auf. Mitte der siebziger Jahre hat er sich zusammen mit den Kollegen Jurkat und Trautner Gedanken über neue Wege in der Mathematikausbildung gemacht. Es entstand das Konzept der Wirtschaftsmathematik, das zunächst inneruniversitär und dann landespolitisch durchgesetzt werden musste. Im Jahr 1977 begann dieser erfolgreiche Studiengang, und die Fakultät wuchs in der Folge um Bereiche der angewandten Mathematik und Wirtschaftswissenschaften. Dieser Studiengang bildet heute das Rückgrat der Ausbildung der Fakultät für Mathematik und Wirtschaftswissenschaften der Universiät Ulm und hat an vielen deutschen Universitäten Nachahmung gefunden.

Peyerimhoff hat sich vielfältig in der Universität engagiert, als Prorektor, Vorsitzender verschiedener Gremien und als Senatsbeauftragter zur Einführung des Studiengangs Informatik an der Universität Ulm. Er stellte sich die Informatik zunächst in der Fakultät für Mathematik mit starken Bezügen zur Mathematik vor, was sich aber nicht realisieren ließ. Peyerimhoff selbst war am Rechnen mit hoher Genauigkeit interessiert und hat sich schließlich selbst geeignete Rechner gebaut und Software erstellt und dafür mit Mitarbeitern viel Zeit im Labor im elterlichen Haus in Heidenheim verbracht. In den 70er Jahren war Peyerimhoff am Aufbau der Mathematik in Trier mitbeteiligt. Im Jahr 1981 gründete er die Zeitschrift Analysis, die immer noch mit Ulm und Trier verbunden ist. Wichtig war für ihn auch der Austausch mit ausländischen Universitäten, unter seiner Führung entstanden Austauschabkommen mit der University of Western Ontario in London, Kanada, und der Bar Ilan Universität in Ramat Gan in Israel.

Im Laufe seines Lebens hat Alexander Peyerimhoff durch seine fürsorgliche freundliche Art, seine guten Vorlesungen und vielseitigen mathematischen Interessen seine Begeisterung für die Mathematik weitergeben können. Seinen Schülern und Kollegen bleiben die jährlichen Ausflüge zum Bergwandern im Kleinwalsertal in Erinnerung, an denen oft auch Peyerimhoffs Schwester Sigrid, Ordinaria für Theoretische Chemie in Bonn, teilnahm. Er war jahrelang Vertrauensdozent der Studienstiftung und des Cusanuswerkes in Ulm. Sein großes Hobby neben der Mathematik wurde in seinen letzten zwei Jahrzehnten das Segeln, entweder mit dem eigenen Boot auf dem Chiemsee oder mit dem Unisegelclub in der Ägäis.

Das wissenschaftliche Werk

Wie wir weiter unten sehen werden, hat Alexander Peyerimhoff auf verschiedenen Gebieten geforscht, über Themen aus der Analysis, der Zahlentheorie, der Numerik bis hin zum wissenschaftlichen Rechnen. Dennoch galt sein Hauptinteresse stets der **klassischen Analysis.** Aber nun der Reihe nach. Peyerimhoffs Dissertation bei Konrad Knopp in Tübingen im Jahre 1951 befaßt sich mit einem Thema aus der Limitierungstheorie, auf die er immer wieder zurückgekommen ist. Deren systematische Entwicklung beginnt Ende der 40er Jahre. Der Krieg war glücklich überstanden, die Nachkriegsjahre waren allerdings auch nicht gerade einfach. An der Schwaben-Universität Tübingen wirken einige hochkarätige Mathematiker: Knopp, Kamke, Kneser, Müller. Knopp war weit bekannt als Fachmann für Reihen und Limitierungstheorie. Er hatte um 1944 noch G.G. Lorentz angezogen, der neben klassischen Methoden vor allem die neuen Methoden der Funktionalanalysis aus Rußland mitgebracht hatte. Hier war also um 1950 eine *Werkstatt für Limitierungstheorie* vorhanden, in der die Meister Knopp und Lorentz wirkten; Knopp schon Ende 60 und Lorentz ein junger Mann von etwa 40 Jahren. Die Studenten waren, trotz oder wegen der äußerlich bedrängten Lage, wissbegierig und voller Forschergeist, und so war es kein Wunder, daß sich in der Werkstatt drei leistungsstarke Gesellen einfanden: Jurkat, Peyerimhoff, Zeller, die sich den anstehenden Themen der **Limitierungstheorie** mit neuem Schwung und neuen Methoden annahmen.

Als erstes Thema nahmen sie sich vor: *Summierbarkeitsfaktoren und Mittelwertsätze.* Für eine unendliche Matrix $A = (a_{n\nu})$ nennt man eine unendliche Reihe $\sum a_n$ A-limitierbar, kurz

$$\sum a_n \in A, \text{ falls der Grenzwert } \lim_{n\to\infty} \sum_{\nu=0}^{\infty} a_{n\nu} s_\nu \text{ existiert, wobei } s_n = \sum_{\nu=0}^{n} a_\nu.$$

Beim Thema der Summierbarkeitsfaktoren geht es um die folgende Frage. Gegeben zwei Limitierungsverfahren A und B. Charakterisiere die Folgen (ϵ_n), so daß aus $\sum a_n \in A$ stets $\sum \epsilon_n a_n \in B$ folgt. Für spezielle Verfahren, wie etwa die Cesàroverfahren, lagen bereits Resultate vor. Die erwähnten Tübinger Mathematiker (insbesondere Peyerimhoff in seiner Dissertation) beschäftigten sich mit der allgemeineren Frage der Charakterisierung der Summierbarkeitsfaktoren für möglichst allgemeine Matrizenklassen. Das Ziel wurde angegriffen mit Methoden der Funktionalanalysis (Darstellung von linearen Funktionalen in Wirkfeldern) oder auch mit konventionellen analytischen Methoden. Von zentraler Bedeutung ist hierbei die „Mittelwerteigenschaft": Eine untere Dreiecksmatrix A erfüllt die Mittelwerteigenschaft, falls für eine Konstante K die Abschätzung

$$\Big|\sum_{\nu=0}^{m} a_{n\nu} s_\nu\Big| \le K \max_{\mu\le m} \Big|\sum_{\nu=0}^{\mu} a_{\mu\nu} s_\nu\Big| \quad \text{für alle } m \le n$$

gilt. Für permanente Verfahren, die die Mittelwerteigenschaft erfüllen (wie gewichtete Mittel, Nörlundverfahren oder Riesz-Verfahren) konnte Peyerimhoff die Summierbarkeitsfaktoren charakterisieren. Diese Ergebnisse wurden, insbesondere in gemeinsamen Arbeiten mit seinem engsten Koautor, Wolfgang Jurkat, auf absolute Summierbarkeit oder starke Summierbarkeit übertragen. Daß mit der Mittelwerteigenschaft eine wichtige Eigenschaft allgemeiner Matrizen getroffen wurde, zeigen weitere Anwendungen auf Größenordnungsabschätzungen, Vergleich verschiedener Verfahren, Konvexitätssätze und *Taubersätze*, etwa für Riesz-Verfahren.

Nach einem Ergebnis von Kuttner von 1962 spielen beim Beweis der Äquivalenz der unstetigen Riesz-Verfahren und der Cesàroverfahren für Ordnungen κ zwischen -1 und 2 die Nullstellen der Funktionen $f_\kappa(z) = \sum_{n=0}^{\infty}(n+1)^\kappa z^n$, die sich in die längs $[1,\infty)$ geschlitzte Ebene analytisch fortsetzen lassen, eine entscheidende Rolle. Peyerimhoff und einige seiner Doktoranden haben genauere Aussagen über die Anzahl, die Lage, das asymptotische Verhalten und die Dichteverteilung der Nullstellen dieser Funktionen mittels geeigneter Integraldarstellungen hergeleitet. Die Ergebnisse wurden auf allgemeinere Klassen von Potenzreihen übertragen.

Ein weiteres Thema aus der Limitierungstheorie befaßt sich mit *Fourierreihen.* Ausgangspunkt ist dabei der Satz von Fatou (1906), der folgendes besagt: Eine Potenzreihe $f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n$ sei analytisch im Punkte $z = 1$, und es gelte $a_n \to 0$, dann ist die Reihe $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ konvergent, und ihr Wert ist gleich $f(1)$. Riesz hat 1911 ein entsprechendes Resultat für Cesàro-Summierbarkeit gezeigt. In einer Reihe von Arbeiten beweist Peyerimhoff (mit Koautoren) entsprechende Resultate für absolute Konvergenz bzw. absolute Summierbarkeit sowie, damit eng zusammenhängend, Lokalisationssätze für trigonometrische und Fourierreihen. Richtungsweisend ist dabei folgendes Ergebnis: Ist $f(z)$ wie oben analytisch im Punkte $z = 1$, und gilt $\sum_{n=0}^{\infty} |a_n - a_{n+1}| < \infty$, so folgt $\sum_{n=0}^{\infty} |a_n| < \infty$.

Im Zusammenhang mit dem Verfassen eines Lehrbuches über **gewöhnliche Differentialgleichungen** begann sich Peyerimhoff auch in seiner Forschung mit diesem Gebiet zu befassen, insbesondere mit Themen aus dem 2. Band, nämlich mit *Sturm-Liouvilleschen Eigenwertproblemen* und *meromorphen Differentialgleichungen.*

Die zentralen Ergebnisse über die einfachsten *Eigenwertprobleme* der Form

$$y'' - q(x)y + \lambda y = 0 \text{ mit Dirichletschen Randbedingungen } y(0) = y(1) = 0$$

und Eigenwertparameter λ hat Picone (1928) mit einer später nach ihm benannten Identität bewiesen. Peyerimhoff hatte nun erkannt, daß diese Identität nichts anderes ist als ein Spezialfall des Hilbertschen invarianten Integrals aus der Feldtheorie der klassischen Variationsrechnung. Diese Entdeckung führte zu verschiedenen Verallgemeinerungen der Piconeschen Formel und wurde eingesetzt, um für Sturm-Liouvillesche Eigenwertprobleme höherer Ordnung und später allgemeiner für Hamiltonsche Systeme die wichtigsten Aussagen aus der Spektraltheorie, wie Existenz unendlich vieler Eigenwerte, Rayleigh-Prinzip (also Charakterisierung der Eigenwerte als Extrema eines Variationsproblems), Entwicklung nach Eigenfunktionen, Oszillationssätze (Anzahl von Nullstellen bzw. fokaler Punkte von Lösungen der zugehörigen Differentialgleichungen) und Vergleichssätze herzuleiten.

In der mathematischen Physik spielen Differentialgleichungen eine große Rolle, die zur Klasse der sogenannten *meromorphen Differentialgleichungen* gehören. Diese sind von der Form

$$x' = A(z)x \text{ mit } x(z) \in \mathbb{C}^n \text{ und mit einer komplexwertigen } n \times n\text{-Matrix} A,$$

deren Matrixelemente meromorphe Funktionen sind. Man interessiert sich nun für das asymptotische Verhalten der Lösungen bei unendlich. Die Idee von Birkhoff, durch geeignete lineare Transformationen $x = T(z)y$ mit meromorpher $n \times n$-Matrix T die Differentialgleichung in eine „einfachere" Gleichung überzuführen, wurde von Peyerimhoff (mit Koautoren) im für die mathematische Physik wichtigsten Fall $n = 2$ dahingehend ausgeführt, daß die betrachteten Gleichungen auf vier Normalformen transformiert wurden.

Schon sehr früh begann sich Peyerimhoff für **Computer** zu interessieren. Er hatte stets mit elektronischen Bauelementen gebastelt, und so begann er selbst Rechner zu entwickeln, die speziell für schnelles Rechnen mit vielstelligen Zahlen geeignet sein sollten. Seine mathematische Forschung in diesem Zusammenhang würde man heute wohl als **wissenschaftliches Rechnen** bezeichnen.

Als erstes beschäftigte er sich mit einem Problem aus der Zahlentheorie, der *Mertensschen Vermutung*. Diese besagt daß

$$M(x) = \sum_{n \leq x} \mu(n) < \sqrt{x} \text{ für alle } x > 1,$$

dabei ist $\mu(\cdot)$ die Möbiusfunktion. Gemeinsam mit Jurkat hat Peyerimhoff dazu einen Algorithmus zur Berechnung von Lösungen eines hochdimensionalen Problems simultaner inhomogener Diophantischer Approximationen entwickelt, mit dessen Hilfe sie 1976 zeigen konnten, daß

$$\sup_{x>1} M(x)/\sqrt{x} > 0.779, \text{ und sogar } \limsup_{x \to \infty} M(x)/\sqrt{x} > 0.779$$

ist, und zwar mit einem Wert für x in der Nähe von $10^{80 \cdot 10^{12}}$. Diese Rechnungen benötigten die ersten 400 Nullstellen der Riemannschen Zetafunktion auf 64 Stellen. Sie wurden von Peyerimhoff auf einem auch für damalige Verhältnisse Kleinstrechner (Wang 700) ausgeführt. Mittels eines Algorithmus von Lenstra, Lenstra und Lovácz wurde 1984 die Mertenssche Vermutung von Odlyzko und te Riele widerlegt, und zwar mit Rechnungen, die auf derselben Grundidee basierten und an einem Großrechner (sie berechneten die ersten 2000 Nullstellen auf 100 Stellen) durchgeführt wurden.

In den letzten Jahren hat sich Peyerimhoff zunehmend dem Rechnen mit großen Zahlen und der Entwicklung entsprechender Rechner zugewandt. Er interessierte sich in dieser Zeit im Zusammenhang mit einem Forschungsprojekt zur *Hydrodynamik* für die numerische Lösung der Stokesschen Gleichungen.

Peyerimhoff war ein begeisternder Lehrer, und er hat daher auch sehr viele Examensarbeiten betreut. Insgesamt wurden unter seiner Anleitung 31 Dissertationen angefertigt. Die Doktoranden sind unten in chronologischer Reihenfolge aufgeführt.

Unser Dank gilt einerseits posthum Dieter Gaier, einem langjährigen, kürzlich verstorbenen Freund von Alexander Peyerimhoff, auf dessen Manuskript seines Vortrages zum 60.ten Geburtstag von Peyerimhoff über dessen wissenschaftliches Werk wir hier zurückgreifen konnten. Andererseits war uns die Rede von Hans Wolff, dem jetzigen Rektor unserer Universität, bei der Emeritierung Peyerimhoffs eine große Hilfe beim Abfassen des Lebenslaufes.

Seine Doktoranden

Ralph Leubbe (1956), Lee Suyemoto (1959), Lothar Hoischen (1962), Heinz Fiedler (1962), Otto Fröhlich (1963), Walter Miesner (1963), Hans-Heinrich Körle (1964), Jay Kurtz (1965), Ronald Irwin (1965), Dieter Gromes (1965), Reinhard Hermann (1965), Gerald Peterson (1966), Knut Schaper (1966), Rudolf Goedecke (1967), Ilse Fuchs (1969), Rolf Trautner (1969), Peter Bautsch (1970), Hannfried Zügge (1970), Uwe Pittelkow (1972), Werner Balser (1972), Wolfgang Gawronski (1973), Werner Kratz (1974), Timm Gramms (1975), Ulrich Stadtmüller (1977), Max Riederle (1978), Eberhard Stickel (1985), Heinrich Möller (1987), Matthias Autrata (1989), Roland Miller (1993), Louis Rocha (1994).

Das Schriftenverzeichnis von Alexander Peyerimhoff

Monographien

[1] Lectures on summability. Lecture Notes in Mathematics, Vol. 107. Springer, Berlin, New York, 1969.

[2] Gewöhnliche Differentialgleichungen. I. Akademische Verlagsgesellschaft, Frankfurt, 1970. 2. Auflage, Wiesbaden, 1982.

[3] Gewöhnliche Differentialgleichungen. II. Akademische Verlagsgesellschaft, Frankfurt, 1970. 2. Auflage, Wiesbaden, 1982.

Zeitschriftenartikel

[1] Konvergenz- und Summierbarkeitsfaktoren. *Math. Z.*, 55:23–54, 1951.

[2] (mit W. Jurkat) Mittelwertsätze bei Matrix- und Integraltransformationen. *Math. Z.*, 55:92–108, 1951.

[3] Konvergenzfaktoren beim Euler-Knoppschen Limitierungsverfahren. *Math. Z.*, 55:288–291, 1952.

[4] (mit W. Jurkat) Mittelwertsätze und Vergleichssätze für Matrixtransformationen. *Math. Z.*, 56:152–178, 1952.

[5] Über einen Satz von Herrn Kogbetliantz aus der Theorie der absoluten Cesàroschen Summierbarkeit. *Arch. Math.*, 3:262–265, 1952.

[6] Untersuchungen über absolute Summierbarkeit. *Math. Z.*, 57:265–290, 1953.

[7] (mit D. Gaier) Summierbarkeitsfaktoren bei Eulerschen Reihentransformationen. *Math. Z.*, 58:232–242, 1953.

[8] (mit W. Jurkat) Summierbarkeitsfaktoren. *Math. Z.*, 58:186–203, 1953.

[9] (mit W. Jurkat) Der Satz von Fatou-Riesz und der Riemnnsche Lokalisationssatz bei absoluter Konvergenz. *Arch. Math.*, 4:285–297, 1953.

[10] Summierbarkeitsfaktoren für absolut Cesàro-summierbare Reihen. *Math. Z.*, 59:417–424, 1954.

[11] Über das Anwachsen der C_κ-Mittel von Laplace-Integralen auf vertikalen Geraden. *Math. Ann.*, 128:138–143, 1954.

[12] (mit W. Jurkat) Lokalisation bei absoluter Cesàro-Summierbarkeit von Potenzreihen und trigonometrischen Reihen I. *Math. Z.*, 60:255-270, 1954.
[13] (mit W. Jurkat) Über einen absoluten Fatou-Rieszschen Satz für Laplace-Integrale. *Acad. Serbe Sci. Publ. Inst. Math.*, 7:61–68, 1954.
[14] (mit W. Jurkat) The consistency of Nörlund and Hausdorff methods (solution of a problem of E. Ullrich). *Ann. of Math.*, (2) 62:498–503, 1955.
[15] Über Summierbarkeitsfaktoren und verwandte Fragen bei Cesàroverfahren I. *Acad. Serbe Sci. Publ. Inst. Math.*, 8:139–156, 1955.
[16] (mit W. Jurkat) Lokalisation bei absoluter Cesàro-Summierbarkeit von Potenzreihen und trigonometrischen Reihen II. *Math. Z.*, 64:151–158, 1956.
[17] On convergence fields of Nörlund means. *Proc. Amer. Math. Soc*, 7:335–347, 1956.
[18] (mit R. Bojanić und W. Jurkat) Über einen Taubersatz für Faltungen. *Math. Z.*, 65:195–199, 1956.
[19] Über Summierbarkeitsfaktoren und verwandte Fragen bei Cesàroverfahren II. *Acad. Serbe Sci. Publ. Inst. Math.*, 10:1–18, 1956.
[20] Über ein Lemma von Herrn H. C. Chow. *J. London Math. Soc.*, 32:33–36, 1957.
[21] (mit H. E. Richert) Über das Anwachsen analytischer Funktionen auf vertikalen Geraden. *Acad. Serbe Sci. Publ. Inst. Math.*, 11:125–134, 1957.
[22] Über trigonometrische Reihen mit monoton fallenden Koeffizienten. *Arch. Math.*, 9:75–81, 1958.
[23] (mit H. E. Richert) Über das Verhalten der Mittelwerte von Laplace-Integralen. *Math. Ann.*, 143:150–162, 1961.
[24] Über einen absoluten Mittelwertsatz und Konvexitätssatz für Rieszsche Mittel. *Math. Ann.*, 157:42–64, 1964.
[25] On discontinuous Riesz means. *Indian J. Math.*, 6:69–91, 1964.
[26] On the modulus of power series of a certain type. *J. London Math. Soc.*, 40:260-261, 1965.
[27] (mit W. Jurkat) Über Äquivalenzprobleme und andere limitierungstheoretische Fragen bei Halbgruppen positiver Matrizen. *Math. Ann.*, 159:234–251, 1965.
[28] (mit W. Jurkat) Über Sätze vom Bohr-Hardy'schen Typ. *Tôhuku Math. J.*, (2) 17:55-71, 1965.
[29] On the zeros of a related function in the theory of discontinuous Riesz means. *J. Mathematics (Jabalpur)*, 1:11–12, 1965.
[30] On the zeros of power series. *Michigan Math. J.*, 13:193–214, 1966.
[31] On summability factors. *J. Mathematics (Jabalpur)*, 2:1–2, 1966.
[32] Über einen Vergleichssatz für Nörlundverfahren. *Arch. Math.*, 18:633–636, 1967.
[33] (mit R. Irwin) On the convexity theorem of M. Riesz. *Indian J. Math.*, 9:109–121, 1967.
[34] On the equivalence of continuous and discontinuous Riesz means. *Proc. London Math. Soc.*, (3) 18:349–366, 1968.
[35] (mit R. Irwin) On absolute summability factors. *Enseignement Math.*, (2) 15:159–167, 1969.
[36] (mit W. Jurkat) Fourier effectiveness and order summability. *J. Approximation Theory*, 4:231–244, 1971.

[37] (mit W. Jurkat) Inclusion theorems and order summability. *J. Approximation Theory*, 4:245–262, 1971.
[38] (mit W. Jurkat) On power series with negative zeros. *Tôhuku Math. J.*, (2) 14:207–221, 1972.
[39] (mit W. Jurkat und D. Lutz) Effective solutions for meromorphic second order differential equations. *Symposium on Ordinary Differential Equations, Lecture Notes in Math. Vol.*, 312:100–107, 1973.
[40] (mit W. Jurkat und W. Kratz) The Tauberian theorems which interrelate different Riesz means. *J. Approximation Theory*, 13:235–266, 1975.
[41] (mit W. Jurkat und D. Lutz) Invariants and canonical forms for meromorphic linear differential equations. *North-Holland Math. Studies, Vol.*, 21:181–187, 1976.
[42] (mit W. Jurkat und D. Lutz) Birkhoff invariants and effective calculations for meromorphic linear differential equations I. *J. Math. Anal. Appl.*, (2) 53:438–470, 1976.
[43] (mit W. Jurkat und D. Lutz) Birkhoff invariants and effective calculations for meromorphic linear differential equations II. *Houston J. Math.*, (2) 2:207–238, 1976.
[44] (mit W. Jurkat) A constructive approach to Kronecker approximations and its application to the Mertens conjecture. *J. Reine Angew. Math.*, 286/287:322–340, 1976.
[45] (mit W. Jurkat und W. Kratz) Explicit representations of Dirichlet approximations. *Math. Ann.*, (1) 228:11–25, 1977.
[46] (mit W. Gawronski) On the zeros of power series with rational coefficients. *Arch. Math.*, (2) 29:173–186, 1977.
[47] (mit W. Jurkat) Characteristic approximation properties of quadratic irrationals. *Internat. J. Math. Sci.*, (4) 1:479–496, 1978.
[48] (mit W. Balser und W. Jurkat) On linear functionals and summability factors for strong summability. *Canad. J. Math.*, (5) 30:983–996, 1978.
[49] (mit W. Jurkat und W. Kratz) On best two-dimensional Dirichlet approximations and their algorithmic calculation. *Math. Ann.*, (1) 244:1–32, 1979.
[50] (mit W. Balser und W. Jurkat) On linear functionals and summability factors for strong summability. II. *Canad. J. Math.*, (4) 33:769–781, 1981.
[51] (mit W. Kratz) Sturm–Liouville eigenvalue problems and Hilbert's invariant integral. *Indian J. Math.*, (2) 25:201–222, 1983.
[52] (mit W. Kratz) An elementary treatment of the theory of Sturm–Liouville eigenvalue problems. *Analysis*, 4:73–85, 1984.
[53] (mit W. Jurkat und A. Kumar) On the absolute Fourier-effectiveness of summability methods. *J. London Math. Soc.*, 31:101–114, 1985.
[54] (mit W. Kratz) A treatment of Sturm-Liouville eigenvalue problems via Picone's identity. *Analysis*, 5:97–152, 1985.
[55] (mit E. Stickel und E. Wirsing) On the rate of convergence for two-term recursions. *Computing*, (4) 40:329–335, 1988.
[56] (mit W. Kratz) A numerical algorithm for the Stokes problem based on an integral equation for the pressure via conformal mappings. *Numer. Math.*, 58:255–272, 1990.

[57] (mit W. Kratz) On the reprensentation of Stokes flows and a solution of the inhomogeneous Stokes equation in the plane. *J. Math. Anal. Appl.*, 180:109–116, 1993.
[58] (mit A. Kumar) Absolute conjugate Fourier effective methods and functions. *Proc. Amer. Math. Soc.*, 121:1123–1132, 1994.
[59] (mit W. Balser) A Laurent-type expansion for solutions of Stokes' equation in sectorial regions. *Anal. Math.*, 24:15–30, 1998.
[60] (mit S. Baron) Complete proofs of the main theorems on summability factors. *Acta Comment. Tartu Math.*, 3:31–61, 1999.

Hans Rohrbach zum Gedächtnis 27.2.1903 – 19.12.1993

Wolfgang Schwarz
und
Bodo Volkmann

Abstract

- Keywords and Phrases: Hans Rohrbach, Lebenslauf, Schriftenverzeichnis, Schülerkreis, gesellschaftliches Engagement
- AMS subject classification: 01 A 70

The article describes the life of Hans Rohrbach, parts of his mathematical work, his social engagement, and his philosophical views. The names of his personal students and a list of his publications are included.

Für wichtige Informationen, die dem erstgenannten Verfasser bei der Vorbereitung einer Laudatio beim Kolloquium aus Anlass des 80. Geburtstages von H. Rohrbach (am 10.6.1983) zugingen, sind wir Frau Hikisch und den Herren R. Güting, E. Härtter, G. Helmberg, G. Hofmeister, E. Kroll und H. Scheid zu Dank verpflichtet.

Eingegangen: 30.1.2003

W. Schwarz, Fachbereich Mathematik, Universität Frankfurt,
Robert-Mayer-Straße 10, 60054 Frankfurt am Main,
schwarz@math.uni-frankfurt.de

B. Volkmann, Postfach 1108, 71692 Möglingen, bodo.volkmann@t-online.de

DMV
JAHRESBERICHT
DER DMV

Am 27. Februar 2003 wäre Hans Rohrbach hundert Jahre alt geworden. Er wurde in Berlin als Sohn des baltendeutschen Schriftstellers Lic. Dr. phil. Paul Rohrbach und dessen Ehefrau Clara geboren. Der Vater Paul (1869–1956) war akademisch gebildet in den Fächern Theologie, Philosophie und Geschichte, und er war wegen seiner Bücher über politische, historische und völkerkundliche Themen in Deutschland sehr bekannt. In Meyers Großem Dudenlexikon wird z. B. über ihn vermerkt, daß er 1898–1902 Generalsekretär des Evangelisch-Sozialen Kongresses war und 1903–1906 Kommissar für das Ansiedlungswesen in der damaligen Kolonie Deutsch-Südwestafrika, dem heutigen Namibia.

Dort verbrachte Hans Rohrbach seine frühe Kindheit, und noch viele Jahrzehnte später – nach seiner Emeritierung – erfuhr er bei einem begeisterten Empfang in Windhuk, welche Hochschätzung die dortige Bevölkerung dem Namen Rohrbach bewahrt hatte.

Der Vater hätte es gern gesehen, wenn Hans Rohrbach sich ebenfalls den Geisteswissenschaften zugewendet hätte, wenn er etwa wie sein älterer Bruder Jurist geworden wäre. Aber aus psychologisch verständlichen Gründen wählte der Sohn ein Studienfach, auf dem er seine eigene Bestätigung finden konnte, ohne daß er ständig Gefahr lief, mit seinem berühmten Vater verglichen zu werden.

Nachdem er am Fichte-Gymnasium in Berlin-Wilmersdorf im Jahr 1921 das Abitur abgelegt hatte, studierte Hans Rohrbach ab 1921 an der Humboldt-Universität Mathematik, Physik und Philosophie. Dieses Studium wurde im Wintersemester 1923 und Sommersemester 1924 unterbrochen, als Hans Rohrbach seinen Vater auf einer Reise in die Vereinigten Staaten begleitete. Mit einem Stipendium gefördert, studierte Rohrbach im SS 1924 an der `University of Pennsylvania` in Philadelphia Englisch und Physik. Schon hier zeigte sich sein ausgeprägtes soziales Engagement insofern, als er für die Wirtschaftshilfe der Deutschen Studentenschaft Vorträge über die erbärmliche Lage der Werkstudenten in Deutschland hielt, um so in deutsch-amerikanischen Kreisen Geldmittel zu deren Unterstützung einzuwerben. Sein eigenes Geld reichte jedoch nicht mehr für die Rückfahrt, die er dann durch Arbeit als Kohlenschipper auf einem Schiff finanzierte.

Nach der Rückkehr setzte Hans Rohrbach ab dem Wintersemester 1924/25 sein Studium fort und blieb bis 1929 immatrikuliert. In dieser Zeit und in den nachfolgenden Jahren als Doktorand war er leitend tätig in der MAPHA, der **Ma**thematisch-**Ph**ysikalischen **A**rbeitsgemeinschaft, die weit mehr war als eine studentische Fachschaftsorganisation: Hier wurde ein Stück weit Lebensgemeinschaft praktiziert, und auch Ehen und lebenslange Freundschaften sind im Rahmen der MAPHA entstanden. Frau Rose Rohrbach, geb. Gadebusch, ist nicht die einzige ehemalige Mathematikstudentin, die sich später als unmittelbar Beteiligte immer gerne an jene Jahre erinnerte. Sie und Hans Rohrbach waren von Juli 1932 bis zu seinem Tod am 19. Dezember 1993 miteinander verheiratet, und aus ihrer Zweisamkeit wurde im Laufe der Zeit eine achtköpfige Familie. In späteren Jahren kamen 14 Enkel und bisher 15 Urenkel zur Welt. Im Hause

Rohrbach wird in diesem großen Kreis der Nachkommen mit ihren Ehepartnern eine Tradition von Familientreffen gepflegt, so auch eine mehrtägige Zusammenkunft im Februar 2003 aus Anlaß des 100. Geburtstages von Hans Rohrbach. Es ist kein Zufall, daß es in dieser Großfamilie relativ viele Männer und Frauen gibt, zu deren Biographie das Studium der Mathematik oder Theologie gehört.

Von den Hochschullehrern, bei denen Hans Rohrbach studierte, seien nur die Namen Ludwig Bieberbach, Max von Laue, Karl Löwner, Max Planck, Hans Rademacher, Erhard Schmidt, Issai Schur[1], Gabor Szegö und Wilhelm Westphal erwähnt. Sein Doktorvater war Issai Schur, bei dem er 1932 (in Berlin) mit einer Dissertation über *„Die Charaktere der binären Kongruenzgruppen modulo p^2"* promovierte; die untersuchten Gruppen $\mathrm{SL}(2, \mathbb{Z}) \mod p^2$ haben die Ordnung $p^4(p^2 - 1)$.

Von April 1929 bis zum 1. März 1936 war Hans Rohrbach in Berlin außerplanmäßiger wissenschaftlicher Assistent. Nach Ablauf der Dienstzeit widersetzte sich der damalige Dekan der von Erhard Schmidt beantragten Verlängerung der Assistentenstelle, weil Rohrbach sich für seine jüdischen Freunde, die Gebrüder Richard und Alfred Brauer, eingesetzt hatte. Nach einigen Monaten ohne Stellung wurde ihm jedoch glücklicherweise ab November 1936 von Helmut Hasse in Göttingen die frei gewordene Oberassistentenstelle am dortigen Mathematischen Institut angeboten, die Hans Rohrbach bis 1940 innehatte. Während dieser Jahre konnte er sich 1937 bei Hasse mit der Arbeit *„Ein Beitrag zur additiven Zahlentheorie"* ([4]) habilitieren, die in der Mathematischen Zeitschrift veröffentlicht wurde.

Bei Kriegsausbruch wurde für Hans Rohrbach – wie bei sehr vielen Mathematikern in jener Zeit – die wissenschaftliche Tätigkeit abrupt abgeschnitten. Er mußte zunächst Wehrdienst als Funker bei der Nachrichtentruppe der Luftwaffe ableisten, wurde jedoch ab April 1940 – wie viele Mathematiker – in der Dechiffrierabteilung des Auswärtigen Amtes („Sonderdienst Dahlem") eingesetzt, um verschlüsselte Nachrichten des diplomatischen Verkehrs anderer Staaten zu entschlüsseln; Rohrbach arbeitete „über diplomatische Geheimverfahren der Länder Jugoslawien, Griechenland, England, Arabien, Polen, Japan, China, USA, Türkei und Irland". Neben dieser Tätigkeit wurde Hans Rohrbach 1941 zum außerordentlichen, 1942 zum ordentlichen Professor und Direktor des Mathematischen Instituts der damaligen „Deutschen Universität" in Prag berufen. Er pendelte nun ständig zwischen Berlin und Prag hin und her, um einerseits seinen Lehrverpflichtungen bzw. der Fernbetreuung der meist eingezogenen Studenten, andererseits seinen kryptologischen Aufgaben gerecht zu werden. Zum letzten Mal hielt Hans Rohrbach in Prag seine Vorlesungen im Wintersemester 1944/45, und anschließend ging er in der vorlesungsfreien Zeit, wie üblich, seinen Verpflichtungen im Auswärtigen Amt in Berlin nach. So kam es, daß am Ende des Krieges sein gesamter privater Besitz in Prag einschließlich aller Urkunden und wissenschaftlichen Aufzeichnungen verloren ging – ein praktisch unersetzlicher Verlust; z. B. war es ihm damit nicht mehr möglich, alle Unterlagen zu seiner dienstlichen Laufbahn beizubringen. Doch blieben ihm durch diese Abwesenheit im Unterschied zu anderen Mathematikern Schäden an Leib und Leben erspart.

Die unter seiner Leitung stehende Teilgruppe der kryptologischen Abteilung des Auswärtigen Amtes wurde im Februar 1945 nach Thüringen ausgelagert. Dort wurde Hans Rohrbach im April 1945 mit seinen Mitarbeitern von amerikanischen Truppen gefangen genommen, später in London interniert und von angloamerikanischen Experten systematisch über die angewandten Dechiffrierverfahren befragt.

Im Oktober 1945 konnte Hans Rohrbach zu seiner Familie zurückkehren, die inzwischen nach Göttingen geflohen war. Dort war er nun ohne Stellung, ohne Einkommen, ohne berufliche Aussichten in einem besiegten, in Besatzungszonen aufgeteilten, von den Militärs der bisherigen Kriegsgegner regierten Land. Für ihn und seine Familie bedeutete dies eine äußerst schwierige Zeit unter extremen materiellen Bedingungen. Im Wintersemester 1946/47 erlebte Hans Rohrbach jedoch einen ersten Schritt einer Rückkehr in seinen akademischen Beruf, als er durch die Initiative von Gottfried Köthe an der (nach Jahrhunderten) wieder eröffneten Universität Mainz für ein Jahr als Gastprofessor angestellt und aus einer Assistentenstelle bezahlt wurde.[2]

Dieses Arrangement wurde mehrfach verlängert, bis schließlich 1951 (in Mainz) die Ernennung zum planmäßigen Extraordinarius (und zugleich zum persönlichen Ordinarius) und zu guter Letzt am 18. Mai 1957 die zum Ordinarius erfolgte, womit Hans Rohrbach wieder eine akademische Stellung erhielt, die seiner früheren entsprach. 1951 hatte Rohrbach ein Angebot als `Government Advisor` und zugleich Gastprofessor in Neu Delhi; die Annahme des Angebotes war zunächst vom 1. 9. 1951 bis zum 31. 8. 1952 vorgesehen, doch stellte die Universität Mainz am 26. 7. 1951 fest, Herr Rohrbach könne nicht für längere Zeit beurlaubt werden.

Hans Rohrbach war bei den Studierenden sehr beliebt. Zu seinem Vorlesungsstil zitieren wir aus einer Stellungnahme vom 22. 2. 1951: *„Ich kenne Rohrbach als einen ausserordentlich anregenden mathematischen Lehrer mit ungewöhnlichen Erfolgen nicht nur bei den reinen Mathematikern, sondern auch bei den Physikern und Naturwissenschaftlern. Sein Vortrag ist klar und beherrscht, lebendig und Interesse erweckend."*

Neben seiner mathematischen Begabung war Hans Rohrbach unverkennbar eine solche zur Menschenführung und Organisation gegeben. Im Umgang mit anderen fand er aufgrund seiner verständnisvollen Art immer schnell deren Vertrauen, zumal er stets eine besondere Hochschätzung und Aufgeschlossenheit für seine Gesprächspartner erkennen ließ und sich weit mehr für deren Belange einsetzte, als es seine unmittelbaren beruflichen Verpflichtungen erfordert hätten. Frühere Schüler schrieben: *„Herr Rohrbach fühlte sich in fast väterlicher Weise für seine Schutzbefohlenen verantwortlich"* und *„Ich habe es sehr geschätzt, daß Herr Rohrbach auch den Studenten sein Haus öffnete."*

Stets strahlte er Autorität, Würde und Besonnenheit aus, die trotz einer gewissen Zurückhaltung spürbar mit einer aus der Tiefe kommenden Freundlichkeit und Wärme verbunden waren. *„Das angenehme und anregende Arbeitsklima am Institut ist sicher zum großen Teil seiner verständnisvollen Vorstandstätigkeit zuzuschreiben."*

So war Hans Rohrbach sehr erfolgreich als akademischer Lehrer. Die innere Klarheit seiner Persönlichkeit und seine Fähigkeit, sich in andere Menschen hineinzuversetzen, prägten auch seinen Vorlesungsstil und vor allem seinen Umgang mit seinen Schülern, um die er sich intensiv kümmerte. Dies gilt besonders für seine Doktoranden:

> Jürgen Eufinger, Erich Härtter, Franz Krammer, Ekkehard Kroll, Bruno Müller, Hugo Schell, Richard Schulz–Arenstorff, Dieter Szimtenings, Bodo Volkmann und Achim Zulauf (später Professor in Neuseeland),

wie auch für seine Habilitanden:

Günter Bruns, später Professor in Hamilton (Ontario, Kanada),
Erich Härtter, später Professor in Gießen und Mainz,
Gilbert Helmberg von Weitersdorf, später Professor in Eindhoven und Innsbruck,
Gerd Hofmeister, später Professor in Mainz,
Friedrich Kasch, später Professor in München,
Erwin Kreyszig, später Professor in Ottawa (Kanada), Columbus (USA), Graz, Karlsruhe, Ontario (Kanada)
Bruno Müller, später Professor in Hamilton (Ontario, Kanada),
Harald Scheid, später Professor in Mainz, Worms, Wuppertal,
Alfred Stöhr, später Professor in Berlin, † 10. 10. 1973,
Bodo Volkmann und
Franz Wever.

Franz Wever war später Dozent in Erlangen, dann (schließlich als Ministerialrat) im Bundesministerium für Verteidigung tätig.

Aus der Freundschaft mit Edmund Hlawka in Wien resultierte ein regelmäßiger Gastaufenthalt von Hlawka-Schülern in Mainz, die dort durch den Einsatz von Hans Rohrbach wissenschaftlich und finanziell gefördert wurden. Zu den Mathematikern, die auf diese Weise Zeiten in Mainz verbracht haben, gehören

Gilbert Helmberg von Weitersdorf (jetzt in Innsbruck),
Johann Cigler (jetzt in Wien),
Peter Flor (jetzt in Graz),

und andere. Die dabei entstandenen Kontakte erwiesen sich als fruchtbar in beiden Richtungen.

Rohrbachs politische Einstellung war sein ganzes Leben hindurch konservativ, christlich und im besten Sinn patriotisch. Dabei gehörte er zu denen, die sich zwar gesellschaftlich engagiert haben, aber niemals einer Partei beigetreten sind.

In Anbetracht der geschilderten Bereitschaft zum Engagement ist es verständlich, daß Hans Rohrbach häufig in akademische und andere Ehrenämter gewählt wurde, zumal er in den Gremien, denen er angehörte, oft auch bei schwierigen Problemen gute, für die verschiedenen Kontrahenten akzeptable Lösungen vorzuschlagen und durchzusetzen wußte.

Von 1951 bis 1954 war Hans Rohrbach an der Universität Mainz Vorsitzender der Gebührenerlaß- und Stipendienkommission. Hier betrieb er auch die Gründung einer Darlehenskasse für Studierende.

1954–1956 war Rohrbach Dekan der Naturwissenschaftlichen Fakultät, danach Leiter des Auslandsamtes der Universität. Das Jahr 1966/67 verbrachte Rohrbach im Rahmen eines Forschungsaufenthaltes in Chapel Hill (USA), wo sein alter Freund Alfred Brauer noch wirkte. Dem erstgenannten Verfasser gab er so die Gelegenheit, ihn im SS 1966 in Mainz (mit Vorlesungen über Algebraische Zahlentheorie und Taubersätze) zu vertreten. Im akademischen Jahr 1966/67 schließlich bekleidete Rohrbach das Amt des Rektors, im Jahr darauf das des Prorektors. *„Die sich damals abzeichnenden unruhigen Entwicklungen an den Universitäten verstand er durch umsichtiges und bedachtes Handeln und im Respekt vor der Person des anderen an der Universität Mainz zum Wohle aller universitären Gruppen zu lenken.“* Die Rektorats-Antrittsrede *Was sind und* *was sollen die Zahlen?* mit einem bewußt an Dedekind angelehnten Titel ist als [28] veröffentlicht. In dieser Zeit gründete Rohrbach eine „ Beratungsstelle für studentische Lebensfragen", deren Ausbau und Leitung er als eine Art von psychologischem Naturtalent noch lange nach seiner 1969 vollzogenen Emeritierung – bis 1977 – wahrnahm, wobei er gerade auch bei den Studenten sehr beliebt war, die sich dort von ihm beraten ließen.

Ab 1977 lebte Hans Rohrbach mit seiner Frau in Haselbach bei Bischofsheim in der Rhön. In diesen Jahren bis kurz vor seinem Tode am 19. Dezember 1993 widmete er sich intensiv und aktiv seinen Interessen auf dem Grenzgebiet zwischen Naturwissenschaften und Theologie. Sein Anliegen war, zu zeigen, daß naturwissenschaftliches Denken und christlicher Glaube nicht im Widerspruch stehen müssen. Als ein überzeugter und engagierter Christ[3] bewältigte er eine umfangreiche Vortragstätigkeit in christlichen Organisationen, meist solchen von Studenten und Akademikern. Durch diese Vorträge knüpfte er viele Kontakte zu Menschen jeden Alters.

Schon in den fünfziger Jahren hatte er einer Gruppe von Naturwissenschaftlern unter Leitung von Carl Friedrich von Weizsäcker angehört, die an Fragen eines neuen Naturbildes an Stelle des Weltbildes der klassischen Physik arbeitete und alljährlich interdisziplinäre Gespräche mit Theologen führte. Auf diesem Gebiet wurde er durch zahlreiche Vorträge, Aufsätze und Bücher bekannt, z. B. durch sein populärwissenschaftliches Werk *„Naturwissenschaft, Weltbild, Glaube"* ([40]), das viele Auflagen erlebte und ganz oder in Teilen in mehrere Sprachen übersetzt wurde.

Das starke gesellschaftliche und soziale Engagement von Hans Rohrbach wurde dadurch gewürdigt, daß ihm 1974 das Bundesverdienstkreuz und 1977 anläßlich der 500-Jahr-Feier der Universität Mainz die Ehrenmedaille dieser Universität verliehen wurde.

Zu den Aufgaben, die Hans Rohrbach neben den Verpflichtungen seines Lehrstuhls Jahrzehnte lang mit viel Hingabe wahrnahm, gehörte auch (ab 1950) die Mitarbeit beim Journal für die Reine und Angewandte Mathematik, das in der Zeit von 1952 bis 1977, ab Band **190** bis Band **296**, von Helmut Hasse und ihm gemeinsam herausgegeben wurde. Als Dank wurden Rohrbach zu seinem 60., 65. und 70. Geburtstag in Band **212/213**, 1964, **232**, 1968 und **271**, 1974 des Crelle-Journals eine Reihe von Arbeiten namhafter Autoren gewidmet. Die Geschichte des Crelle-Journals unter Helmut Hasse hat Rohrbach in seinem Vortrag beim Hasse-Gedenk-Symposium in Hamburg am 7. Februar 1981 behandelt; der Vortrag ist als [38] veröffentlicht.

Das wissenschaftliche Schriftenverzeichnis von Hans Rohrbach enthält Arbeiten aus so verschiedenen Gebieten wie Darstellungstheorie, Kombinatorik, additiver und elementarer Zahlentheorie, zahlentheoretischen Ungleichungen, Determinanten und Matrizen wie auch Axiomatik der natürlichen Zahlen und Kryptologie, wo er besonders erfolgreich war.

Über seine Arbeit [18] zum Axiomensystem von Erhardt Schmidt für die Menge der natürlichen Zahlen schreibt der Referent in den Mathematical Reviews: *„It is unfortunate that these simple axioms for the natural numbers are are not better known."*

Die Dissertation [3] von Hans Rohrbach war – nach den Worten von Helmut Hasse – eine für die Entwicklung der Darstellungstheorie bestimmende algebraisch-zahlentheoretische Leistung. Noch 1969 konnte sein Doktorand E. Kroll (mit seiner Dissertation *Zur Darstellungstheorie unendlicher Gruppen mod* p^3) an diese Arbeit anknüpfen. Die irreduziblen Darstellungen der hier untersuchten Gruppen sind von Bedeutung für die Theorie der elliptischen Modulfunktionen.[4]

Die Arbeiten von Rohrbach zur additiven Zahlentheorie haben in den einschlägigen Standard-Werken wie etwa in dem zweibändigen Springer-Ergebnisbericht *Additive Zahlentheorie* von Hans–Heinrich Ostmann, in dem Buch *Sequences* von H. Halberstam und K. F. Roth (Chapter I) oder in dem Lehrbuch von H. B. Mann *Addition Theorems* ihren festen Platz gefunden. Auch die große zweiteilige Übersichtsarbeit *Gelöste und ungelöste Fragen über Basen der natürlichen Zahlenreihe* von A. Stöhr (Journ. Reine u. angew. Math. **194** (1955), 40–65 und 111–140) knüpfte unmittelbar an Rohrbach an. Besonders erwähnenswert sind aus der Sicht der additiven Zahlentheorie außer der bereits genannten Habilitationsschrift [4] der Beitrag [8] wie auch die späteren Arbeiten [21] und [22]. Ausgangspunkt dieser Arbeiten war der von L. G. Schnirelmann um 1930 eingeführte Begriff der „ Schnirelmann-Dichte“

$$\sigma(\mathcal{A}) = \inf_{n\geq 1} \frac{A(n)}{n},$$

einer Menge $\mathcal{A} \subset \mathbb{N} \cup \{0\}$, wobei $A(n)$ die Anzahlfunktion

$$A(n) = \#\{a \in \mathcal{A};\ 0 < a \leq n\}$$

bezeichnet (analog ist $B(n)$ die Anzahlfunktion der Menge $\mathcal{B}$). Das Hauptinteresse auf diesem Gebiet galt damals der später (1942) von H. B. Mann bewiesenen Vermutung, daß für zwei solche Mengen $\mathcal{A}$ und $\mathcal{B}$ mit $0 \in \mathcal{A} \cap \mathcal{B}$ die Dichte der Summenmenge

$$\mathcal{A} + \mathcal{B} = \{a + b;\ a \in \mathcal{A}, b \in \mathcal{B}\}$$

stets die Ungleichung

$$\sigma(\mathcal{A} + \mathcal{B}) \geq \min\{1, \sigma(\mathcal{A}) + \sigma(\mathcal{B})\}$$

erfüllt. Rohrbach [8] untersuchte den damit verwandten Begriff der (unteren) asymptotischen Dichte

$$\underline{\mathbf{d}}(\mathcal{A}) = \liminf_{n\to\infty} \frac{A(n)}{n}$$

und stellte die folgende Vermutung auf:

$$\underline{\mathbf{d}}(\mathcal{A} + \mathcal{B}) \geq \min\left\{1, \frac{3}{4}\left(\underline{\mathbf{d}}(\mathcal{A}) + \underline{\mathbf{d}}(\mathcal{B})\right)\right\}, \quad \text{falls } 0, 1 \in \mathcal{A} \cap \mathcal{B}.$$

Diese Vermutung wurde in verschärfter Form von Ostmann bewiesen; der Beweis wurde später von Rohrbach & Volkmann [21] vereinfacht. Schließlich fand Martin Kneser ein Kriterium dafür, wann für die asymptotische Dichte das genaue Analogon zu dem erwähnten Satz von Mann gilt, und er konnte für den Ausnahmefall eine strukturelle Beschreibung der auftretenden Summenmengen angeben (*Abschätzungen der asymptotischen Dichte von Summenmengen*, Math. Z. **58** (1953), 459–484); in der erwähnten Monographie von Halberstam & Roth ist dieses Ergebnis in Chapter I, § 7, ausgeführt.

Zu erwähnen sind in diesem Rahmen auch Rohrbachs Beiträge über sogenannte asymptotische Basen der Ordnung h, d.h. Mengen $\mathcal{B}$, für die es ein $h > 1$ gibt, so daß alle natürlichen Zahlen $n \geq n_0$ als Summen von h Summanden aus $\mathcal{B}$ darstellbar sind.

Als durchschnittliche Ordnung einer solchen Menge definiert man

$$h^* = \limsup_{n\to\infty} \frac{1}{n} \cdot \sum_{n_0 \le m \le n} h(m),$$

wobei $h(m)$ die Minimalzahl der Summanden aus $\mathcal{B}$ mit der Summe m bezeichnet. Mit Benutzung dieses Begriffes gelang Rohrbach z. B. folgende Verschärfung der unteren Abschätzung der asymptotischen Dichte von Summenmengen:

Ist $\mathcal{B}$ eine asymptotische Basis der durchschnittlichen Ordnung h^*, dann gilt für jede Teilmenge $\mathcal{A} \subset \mathbb{N}_0$:

$$\underline{\mathbf{d}}(\mathcal{A}+\mathcal{B}) \ge \underline{\mathbf{d}}(\mathcal{A}) + \frac{1}{2h^*} \cdot \left(1 - \underline{\mathbf{d}}(\mathcal{A})\right) \cdot \underline{\mathbf{d}}(\mathcal{A}).$$

Dieses Resultat ist in Analogie zu einem Ergebnis von P. Erdös (Acta Arithm. **1** (1936), 197–200) und E. Landau (*Über einige neuere Fortschritte der additiven Zahlentheorie*, Cambridge Tracts **35**, 1937, p. 60–62) über $\sigma(\mathcal{A}+\mathcal{B})$ zu sehen:

Ist $\mathcal{B}$ eine Basis der genauen Ordnung h [bzw. der durchschnittlichen Ordnung h^*], so gilt für jedes $\mathcal{A}$

$$\sigma(\mathcal{A}+\mathcal{B}) \ge \sigma(\mathcal{A}) + \frac{1}{2h}\left(1 - \sigma(\mathcal{A})\right)\sigma(\mathcal{A}),$$

[bzw. bei Landau $\sigma(\mathcal{A}+\mathcal{B}) \ge \sigma(\mathcal{A}) + \frac{1}{2h^*}\left(1 - \sigma(\mathcal{A})\right)\sigma(\mathcal{A})$.*]*

Die Bedeutung des obigen Ergebnisses über $\underline{\mathbf{d}}(\mathcal{A}+\mathcal{B})$ liegt in dem Korollar, daß jede asymptotische Basis $\mathcal{B}$ eine sogenannte *asymptotisch wesentliche Komponente* ist, d.h. für alle $\mathcal{A}$ mit $0 < \underline{\mathbf{d}}(\mathcal{A}) < 1$ gilt

$$\underline{\mathbf{d}}(\mathcal{A}+\mathcal{B}) > \underline{\mathbf{d}}(\mathcal{A}).$$

Im Anschluß an die Aussage, daß trivialerweise für jede Basis $\mathcal{B}$ der Ordnung h die Ungleichung

$$B(n) \ge (n+1)^{\frac{1}{h}} \text{ für } n = 1, 2, \ldots$$

gilt, wurde in der additiven Zahlentheorie nach möglichst scharfen Ungleichungen in der umgekehrten Richtung gesucht. Rohrbach bewies hierzu,

1. daß zu jedem $h > 1$ und zu jedem $\varepsilon > 0$ die Menge $\mathbb{N}_0$ eine Basis $\mathcal{B}$ von h-ter Ordnung besitzt, die für genügend großes n die Ungleichung $B(n) \le n^{\frac{1}{h}+\varepsilon}$ erfüllt, und
2. daß es zu jedem $h > 1$ und jedem $n > h$ Basen $\mathcal{B}_h$ von höchstens h–ter Ordnung für den Abschnitt $[0, n]$ gibt, derart daß $B_h(n) \le h \cdot n^{\frac{1}{h}}$ gilt.

In diesem Zusammenhang, also bei der Suche nach möglichst „dünnen“ Basen für Abschnitte $[0, n]$, schlug Rohrbach vor, für jede Menge $\mathcal{A}_k$ von k natürlichen Zahlen nach dem größten Abschnitt $[0, n]$, wobei $n = n(h, \mathcal{A}_k)$ von k und $\mathcal{A}_k$ abhängt, zu fragen, der in der h–fachen Summenmenge $\underbrace{\mathcal{A}+\ldots+\mathcal{A}}_{h\text{-mal}}$ enthalten ist. Als *Reichweite* $n(h, k)$ bezeichnete er das Supremum von $n(h, \mathcal{A}_k)$ bezüglich aller $\mathcal{A}_k$. Dieser Parameter, der sich in bekannter Sprechweise mit Hilfe von Münzsystemen oder Gewichtssätzen beschreiben lässt, wird noch heute untersucht und ist bislang nur für kleine Werte von h und k bekannt.

Sehr viel Anklang fanden Rohrbachs Beiträge zur **Kryptologie**. Insbesondere in den Vereinigten Staaten galt er auf diesem Gebiet als wichtiger Experte, was auch in dem Geschichtsband „*The Codebreakers*" von David Kahn (1967) entsprechend hervorgehoben wird. Diese Beiträge werden auch in dem Buch *Entzifferte Geheimnisse* von F. L. Bauer (3. Aufl. 2000) ausführlich gewürdigt. 1957 hielt Hans Rohrbach auf einem Kongress in den USA einen einstündigen Vortrag über dieses Gebiet, und bei der Gründung der Zeitschrift „Cryptologia" wandten sich die Herausgeber an ihn mit der Bitte um Beiträge. So entstanden die Arbeiten [34] und [35]. In [31] wird ein von Euler verfaßter Text, der 1744 in einem Brief an Goldbach gesandt wurde, entziffert (auch P. Speziali hatte 1953 die Lösung veröffentlicht).

Abschließend sei auf den wissenschaftstheoretischen Beitrag [40] von Hans Rohrbach hingewiesen. Er betont das Prinzip der Erfahrbarkeit als Grundlage des positivistischen Denkens. Dort heißt es am Ende:

> *„Auch als ein Mathematiker, der an den persönlichen Gott glaubt, werde ich meine Forschung als Positivist betreiben – um der Sauberkeit und Unbestechlichkeit der Methode willen. Aber ich werde die Ergebnisse wie den gesamten kunstvollen Bau der Mathematik nicht nur als menschliche Schöpfung werten, sondern bei aller Anerkennung menschlicher Scharfsinnigkeit und Erkenntnisfähigkeit Gott die Ehre geben. Die Mathematik enthält keine absoluten Wahrheiten – was im Sinne des Positivismus auch nicht relevant wäre – und kann ebensowenig zum Absoluten hinführen. Sie ist aber auch kein Produkt des menschlichen Geistes, sondern sozusagen klüger als der menschliche Geist . . ."*

Anmerkungen

1 Zu Issai Schur (*10.1.1875 Mohilev am Dnjepr, † 10.1.1941 Tel Aviv) vgl. man M. Pinl, *Kollegen in einer dunklen Zeit*, J. Ber. DMV **71** (1961), 167–220, insbes. p. 195–199. Dort werden auch Alfred Brauer und die MAPHA erwähnt. In Teil III (J. Ber. DMV **73**) wird über Richard Brauer berichtet (p. 184–185).

2 Die Universität Mainz bestand von 1477 bis 1797; sie wurde 1946 neu gegründet. Mainz fällt damit gerade aus dem in *Mathematische Institute Deutschland 1800–1945*, Dokumente zur Geschichte der Mathematik Band 5, bearbeitet von Winfried Scharlau, Vieweg-Verlag 1990, behandelten Zeitraum.

3 Hans Rohrbach war auch Vorstandsmitglied in der Evangelischen Bekenntnisbewegung.

4 Man sehe hierzu die Bemerkungen im Zentralblattreferat dieser Arbeit von W. Magnus.

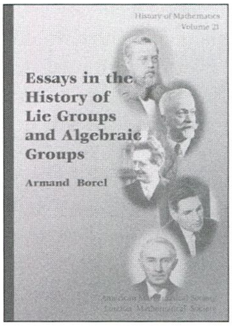
Schriftenverzeichnis von Hans Rohrbach

[1] Kleinere Beiträge in den Jahresber. DMV, Zweite Abt., **39** (1930), 3–4, **41** (1932), 8–9, **41** (1932), 38–39, **42** (1933), 9–12, **42** (1933).

[2] *Bemerkungen zu einem Determinantensatz von Minkowski*, Jahresber. DMV **40** (1931), 49–53.

[3] *Die Charaktere der binären Kongruenzgruppen mod p^2* (Dissertation), Schriften des Math. Seminars u. d. Inst. f. angew. Math. Univ. Berlin **1** (1932), 33–94.
[4] *Ein Beitrag zur additiven Zahlentheorie* (Habilitationsschrift), Math. Z. **42** (1936), 1–30.
[5] *Ein Identitätssatz für Polynome*, Journ. Reine u. Angew. Math. **177** (1937), 55–60.
[6] *Anwendung eines Satzes der additiven Zahlentheorie auf eine gruppentheoretische Frage*, Math. Z. **42** (1937), 538–542.
[7] *Beweis einer zahlentheoretischen Ungleichung*, Journ. Reine u. Angew. Math. **177** (1937), 193–196.
[8] *Einige neuere Untersuchungen über die Dichte in der additiven Zahlentheorie*, Jahresber. DMV **48** (1939), 199–236.
[9] *Vereinfachter Beweis eines Identitätssatzes für Polynome*, Journ. Reine u. Angew. Math. **180** (1939), 189–190.
[10] *Anwendung der Basen h–ter Ordnung zur Herstellung günstigster Endmaßsätze*, Wehrmachtsauftrag OKH Berlin (1942), nicht im Druck erschienen.
[11] Vier *Beiträge zur Entzifferung von Chiffrierverfahren*, Auswärtiges Amt Berlin, Schriften des Sonderdienstes Dahlem, 1940–1945.
[12] *Bemerkungen zu einer Arbeit von H. Hadwiger*, Mitt. Vereinig. Schweizerischer Versicherungsmath. **48** (1948), 43–45.
[13] (Mit Paul Armsen) *Sequenzen in Permutationen*, Arch. d. Math. **1** (1948), 106–112.
[14] *Chiffrierverfahrm der neuesten Zeit*, Arch. f. elektr. Übertragung **2** (1948), 106–112.
[15] *Mathematische und maschinelle Methoden bein Chiffrieren und Dechiffrieren* (Voranzeige), ZAMM **25/27** (1947), 901.
[16] *Mathematische und maschinelle Methoden bein Chiffrieren und Dechiffrieren*, FIAT Review on German Science 1939–1946, Applied Math., Part 1 = Naturwissenschaft und Medizin in Deutschland 1939–1946, **3** (1948), 233–257.
[17] *Die Anzahl der Zahlen mit vorgegebener Quersumme*, Math. Nachr. **1** (1948), 357–364.
[18] *Das Axiomensystem von Erhard Schmidt für die Menge der natürlichen Zahlen*, Math. Nachr. **4** (1950/51), 315–321.
[19] (Mit Bodo Volkmann) *Zur Konvergenz von Mengenfolgen*, Math. Ann. **124** (1952), 298–302.
[20] *Einführung in die höhere Mathematik* (Herausgabe und stark erweiterte Bearbeitung von Vorlesungen von Georg Feigl), Springer-Verlag, Berlin 1953, 375 S.
[21] (Mit Bodo Volkmann) *Zur Theorie der asymptotischen Dichte*, Journ. Reine u. Angew. Math. **192** (1953), 102–112.
[22] (Mit Bodo Volkmann) *Verallgemeinerte asymptotische Dichten*, Journ. Reine u. Angew. Math. **194** (1955), 195–209.
[23] (Mit Robert E. Clark) *Zur Theorie der asymptotischen Dichte* II, Journ. Reine u. Angew. Math. **201** (1959), 113–118.
[24] *Bericht über das Symposion zur Zahlentheorie 1960 in Oberwolfach*, Journ. Reine u. Angew. Math. **206** (1961), 1–2.
[25] *Zahlentheorie der rationalen Zahlen*, Manuskript (176 S.) für die Enzyklopädie der math. Wissenschaften **1**, Zweite Aufl. (Nicht erschienen, da der Verlag Teubner die Veröffentl. der 2. Aufl. einstellte). Dasselbe gilt für das Manuskript *Elementare additive Zahlentheorie*
[26] (Mit Jürgen Weiss) *Zum finiten Fall des Bertrandschen Postulats*, Journ. Reine u. Angew. Math. **214/215** (1964), 432–440. – Berichtigung hierzu, Journ. Reine u. Ange. Math. **216** (1964), 220.
[27] *Helmut Hasse und das Crellesche Journal*, Journ. Reine u. Angew. Math. **214/215** (1964), 443–444.
[28] *Was sind und was sollen die Zahlen?* Mainzer Universitätsreden **27**, Verlag Dr. J. A. Kohl, Mainz 1967, 28 S.
[29] *Erhardt Schmidt, ein Lebensbild*, Jahresber. DMV **69** (1968), 209–224.
[30] (Mit Alfred Brauer) *Einige Anwendungen der Matrizentheorie auf algebraische Gleichungen*, Journ. Reine u. Angew. Math. **226** (1969), 11–25.
[31] *The Logogryph of Euler*, Journ. Reine u. Angew. Math. **262/263** (1973), 292–299.

[32] Mitherausgabe von I. Schur, Gesammelte Abhandlungen **1–3**, Springer-Verlag 1973. Hierin findet sich eine Bearbeitung des von I. Schur nachgelassenen Manuskripts: *Arithmetisches über die Tschebyscheffschen Polynome*.
[33] *Der Fachbereich Mathematik*, in: Mathematik und Naturwissenschaften an der Johannes-Gutenberg-Universität, F. Steiner-Verlag, Wiesbaden 1977, 1–17.
[34] *Mathematical and mechanical methods in cryptography* (Übersetzung und Überarbeitung von [15]). Part I, Cryptologia **2** (1978), 21–37.
[35] *Mathematical and mechanical methods in cryptography*, Part II, Cryptologia **2** (1978), 101–121.
[36] *Report on the decipherment of the American strip-cipher 0–2 by the German Foreign Office*, Cryptologia **3** (1979), 16–26.
[37] *Richard Brauer zum Gedächtnis*, Jahresber. DMV **83** (1981), 125–134.
[38] *Helmut Hasse und Crelles Journal*, Mitt. Math. Ges. Hamburg **11** (1982), 155–166.
[39] Beiträge zum Sammelwerk Neue Deutsche Biographie, Bayerische Akademie der Wissenschaften, München:
Georg Feigl, N.D.B. **5** (1961), 57
Erich Hecke, N.D.B. **8** (1969], 177
Erich Kamke, N.D.B. **11** (1977), 82
Leopold Kronecker, N.D.B. **13** (1982), 82–83.
[40] *Zum Positivismus in der Mathematik*, in: Positivismus als wissenschaftstheoretisches Problem, Mainzer Universitätsgespräche, WS 1964/65, 42–52.



A. Borel
Essays in the History of Lie Groups and Algebraic Groups
Hist. in Math. 21

Am. Math. Soc., London Math. Soc., 2001, 184 S., $ 39,–

Die Theorie der „endlichen und stetigen" Gruppen, der Lieschen Gruppen wie man heutzutage sagt, entstand aus den Arbeiten des norwegischen Mathematikers Sophus Lie zu Differentialgleichungen und Kontakttransformationen. Er hatte vor, eine Galoistheorie der Differentialgleichungen zu entwickeln, in der den von ihm behandelten Gruppen die Rolle der Galoisgruppen algebraischer Gleichungen zugedacht war. Dieses Ziel wurde nicht ganz erreicht, aber die Theorie Liescher Gruppen mit ihren zahlreichen Verzweigungen ist inzwischen von zentraler Bedeutung in der Mathematik und der Mathematischen Physik.

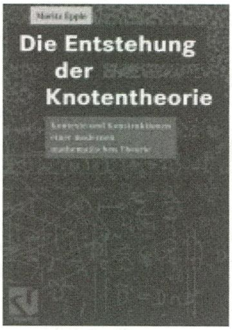
Die Theorie, die S. Lie in den Jahren 1869–1873 entwickelte, war eine lokale Theorie; er behandelte analytische lokale Gruppen analytischer Transformationen. Aber gleichzeitig trat schon ins Bewußtsein, daß zwei Gruppen, die lokal im Lieschen Sinne übereinstimmen, globale Unterschiede aufweisen können. Dieser bald als notwendig erachtete Übergang vom lokalen zum globalen Standpunkt vollzog sich zum Einen im Bereich der Differentialgeometrie, zum Anderen hin in Richtung auf die Theorie linearer algebraischer Gruppen, in der mehr algebraisch – geometrische Aspekte wichtig sind. Beiträge von A. Hurwitz (1897), I. Schur (1922), H. Weyl (1924) and E. Cartan markieren den Weg hin zur Theorie globaler Liescher Gruppen und Riemannscher symmetrischer Räume. Die andere Linie beginnt mit Arbeiten von E. Study, E. Picard und L. Maurer, letztere motiviert durch Invariantentheorie. Sie werden dann erst gegen 1941 durch C. Chevalley, und später L. Kolchin, wieder aufgenommen. Insbesondere die Arbeiten von Chevalley nach 1954 legen die Grundlagen der Theorie algebraischer Gruppen über beliebigen Körpern.

In diese Entwicklungslinien der Theorie Liescher Gruppen im weitesten Sinne ist auch A. Borel mit seinen Arbeiten an verschiedenen Stellen eingewoben. Als exemplarisch seien nur die gemeinsamen Ergebnisse mit J. Tits zur Strukturtheorie reduktiver Gruppen über beliebigen Körpern genannt. In dem vorliegenden Band sind jetzt die in letzten Jahren entstandenen Abhandlungen A. Borels zur Entwicklung der Theorie Liescher Gruppen und algebraischer Gruppen, zum Teil ergänzt und modifiziert gegenüber der ursprünglichen Publikation, zusammengefaßt. Um ein ausgewogenes Bild zu geben, sind diese Arbeiten durch vier neue neue Abhandlungen ergänzt worden. Neu hinzugekommen sind neben einem Überblick die Beiträge:

- Élie Cartan, Symmetric Spaces and Lie groups
- Linear Algebraic Groups in the 19 th Century
- Linear Algebraic Groups in the 20 th Century.

Sie machen im Seitenumfang fast die Hälfte des Buches aus. Damit ergibt sich ein recht geschlossenes Bild dieses fundamentalen Gebietes der Mathematik, an dessen Werden Borel selbst maßgeblich beteiligt war. Dieses Buch ergänzt, da aus der Sicht eines Mathematikers geschrieben, gut die grundlegenden mathematikhistorischen Untersuchungen von T.S. Hawkins in dem Buch „Emergence of the Theory of Lie Groups. An Essay in the History of Mathematics 1869–1924, 2000.

Wien J. Schwermer



M. Epple
Die Entstehung der Knotentheorie
Kontexte und Konstruktionen einer modernen mathematischen Theorie

Braunschweig/Wiesbaden, Vieweg 1999,
449 S., € 52,–

Das Buch von Herrn Epple hat mich sehr fasziniert. Über die sehr informative Darstellung der Entwicklung eines mathematischen Spezialgebietes hinaus hat es für mich etwas Programmatisches: So stelle ich mir eine für Mathematiker attraktive mathematik-historische Arbeit über neuzeitliche Mathematik vor. Das Programmatische kommt im Untertitel zur Sprache: Kontexte und Konstruktionen einer modernen mathematischen Theorie. Ich habe noch vor dem Lesen des Buches und dann immer wieder auch während des Lesens darüber nachgedacht, um welches Programm es Herrn Epple gehen mag. Besonders das unerwartete und schillernde Wort „Konstruktionen“ deutet eine spannende Fragestellung an. Geht es hier darum, dass eine mathematische Theorie gleichsam wie ein technischer Gegenstand am Reißbrett konstruiert wird? Mit dieser Interpretation würde man Herrn Epple nicht gerecht, obwohl auch dieser Aspekt mitschwingt. Bevor man aber von Theorie redet, die sich auf einen schon vorhandenen, natürlich eventuell weiter zu entwickelnden mathematischen Gegenstand bezieht, muss dieser zuerst einmal da sein, und dabei könnten Konstruktionen auch eine Rolle spielen. Und in der Tat scheint mir das immer so zu sein. Bevor der Begriff der Gruppe systematisiert wurde, wurden Beispiele von mathematischen Objekten konstruiert, z. B. als Permutationsgruppen, und was für die Algebra gilt, gilt erst recht für ein Teilgebiet der Geometrie, und als solche ist die Knotentheorie zu betrachten. Nicht zufällig ist am Beginn des Buches ein Bild von 13 in der Praxis wichtigen Knoten aus einem kurz vor der Wende zum 19. Jahrhundert erschienenen Naturlexikon abgedruckt, welches Gauß offensichtlich kannte, denn er kopierte sich diese bereits als 17-Jähriger. Um die Vielfalt der Bedeutung des Wortes Konstruktionen in Epples Buch zu erfassen, müsste man auf jedes Kapitel einzeln eingehen. Ich will statt dessen einen Satz von Epple zitieren, der mir die grundsätzliche Bedeutung auf einen Punkt zu bringen scheint: „Im Zusammenhang dieser Studie ist lediglich die grundsätzliche Beziehung zwischen der Konstruktion mathematischer Erkenntnisobjekte und dem konkreten mathematischen bzw. wissenschaftlichen Handeln entscheidend.“ (Seite 14)

Das Stichwort „Kontext“ hat mir sofort eingeleuchtet. Die Entwicklung einer mathematischen Theorie findet nicht im luftleeren Raum isoliert statt, sondern im Zusammenhang mit anderen mathematischen und nicht-mathematischen Disziplinen, also in einem Kontext. Auch hier sei ein Satz von Epple zitiert: „Die Mathematikgeschichte kann jedoch gerade aus der Beschreibung historischer Bedeutungszusammenhänge und Verwendungsweisen, mithin aus der Untersuchung der Verschiebungen und Differenzierungen, der Eliminationen und Neueröffnungen von Kontexten, in welchen ein bestimmtes Problem behandelt wurde, Aufschlüsse über die Entwicklung der mathematischen Praxis gewinnen.“ (Seite 8)

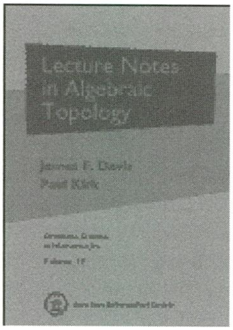
Das im Untertitel angesprochene Programm ist sicher nicht das einzige, mit dem man eine so komplizierte Frage wie die Entstehung der Knotentheorie behandeln kann, aber ein sehr überzeugendes. Nun ist die Formulierung eines guten Programms eines, die Durchführung ein anderes. Hier erst wird sich zeigen, ob das Programm dem Gegenstand angemessen ist, und zum Ziel beiträgt, Entwicklungen der Mathematik bewusst zu machen. Wie schon oben gesagt, finde ich die Durchführung ganz ausgezeichnet. In der hochinteressanten Einleitung wird gleichsam der philosophische Rahmen, von dem ich oben nur Teile angedeutet habe, beschrieben. Der Hauptteil des Buches besteht aus zwei Teilen, die „Mathematisierung", bzw. „Knotentheorie in der Mathematischen Moderne" überschrieben sind. Der erste Teil behandelt die Periode vor Poincaré, also in etwa bis zur Wende vom 19. zum 20. Jahrhundert, während sich der zweite Teil auf die erste Hälfte des letzten Jahrhunderts bezieht. Wie schon die Überschrift „Mathematisierung" sagt, geht es im ersten Teil im wesentlichen darum aufzuzeigen, wie ein Begriff des täglichen Lebens „Knoten" Eingang in die Mathematik gefunden hat. Eine besondere Rolle spielt dabei der Beitrag von Gauß und die von Physikern vorangetriebene Spekulation über die Rolle von Knoten beim Aufbau der Materie. Natürlich wird auch über die Rolle der Knotentheorie bei der Herausbildung derjenigen mathematischen Disziplin reflektiert, welcher wir heute die Knotentheorie zuordnen, nämlich der Topologie.

Über den zweiten Teil kann man nicht berichten ohne auf den wohl von Herbert Mehrtens eingeführten Begriff der mathematischen Moderne einzugehen. Epple weist darauf hin, dass die im ersten Teil des Buches behandelte Entwicklung stark vom Kontext mit anderen Wissenschaften, insbesondere der Physik, geprägt war, während sie danach von Mathematikern im engeren Sinne bestimmt war, die „in einem wohlorganisierten System wissenschaftlicher Arbeitsteilung ihr Geld verdienten". Dies ist ein erster Hinweis auf das, was unter mathematischer Moderne verstanden wird. Diesem Thema wird ein ganzes Kapitel gewidmet, aus dem ich nur einige Stichworte zitieren möchte: „Differenzierung", „Autonomie", „Heteronomie", „Ontologie", „Axiomatik", „Imagination".

Natürlich wird hier auf die besondere Rolle von Hilbert bei der Entwicklung der mathematischen Moderne hingewiesen. Mathematische Moderne hat auf jeden Fall etwas mit der Aufspaltung der Mathematik in feinere Teildisziplinen zu tun, und nicht nur Aufspaltung, sondern Neuentwicklung. Das vielleicht wichtigste Beispiel einer modernen Entstehung einer neuen Teildisziplin ist wohl die Topologie. So verwundert es nicht, dass der zweite Teil des Buches in gewissem Sinne eine exemplarische Studie zur Entwicklung der Topologie ist. Natürlich wird Poincaré ein eigenes Kapitel gewidmet, um dann vom ersten Beweis, dass die Kleeblattschlinge ein nicht-trivialer Knoten ist, bis zur systematischen Einführung von Invarianten, mit denen man Knoten unterscheiden kann, voranzuschreiten. Für uns ist es heute selbstverständlich, dass wir mathematische Gegenstände klassifizieren, aber das scheint mir – zumindest in dieser Ausprägung – typisch für die moderne Mathematik. Und die Knotentheorie mit ihren so einfach zu beschreibenden Gegenständen und der dazu proportional stehenden Schwierigkeit, diese Gegenstände zu unterscheiden, eignet sich nicht nur dazu, diese Entwicklung zu verdeutlichen. Man sieht an ihr auch, dass sich die Mathematik in dieser Richtung entwickeln musste, um bei dem Verständnis von Knoten voranzukommen.

Diese wenigen Gedanken sollen neugierig machen. Neugierig auf ein Buch, das sich wunderbar lesen lässt, was neben einer schönen Sprache und fesselnden Gedanken auch daran liegt, dass das Buch spannend geschrieben ist. Man versteht nicht nur die Knotentheorie besser und die sie umgebende Disziplin, die Topologie; das Buch ist ganz generell ein sehr hilfreicher Hintergrund für den in der Forschung tätigen Mathematiker, weil es etwas bewusst macht, was für die tägliche Arbeit stets eine gewisse Rolle spielt.

Heidelberg M. Kreck



J. F. Davis, P. Kirk
Lecture Notes in Algebraic Topology
Grad. Studies in Math. 35

Providence, American Math. Soc., 2001, 367 S., $ 55,–

Angesichts der Tatsache, daß es kaum möglich ist, in einer zweisemestrigen Vorlesung eine angemessene Einführung in die algebraische Topologie zu geben, wenn man die Einzelheiten wie in den Grundvorlesungen vollständig darbietet, stellt sich die Frage nach anderen Unterrichtsweisen. Mit den vorliegenden Lecture Notes wird eine Strategie vorgeschlagen, deren Ziel und Anlage durch zwei Zitate aus dem Vorwort angedeutet sei:

By their second year of graduate studies students must make the transition from understanding simple proofs line-by-line to understanding the overall structure of proofs of difficult theorems.

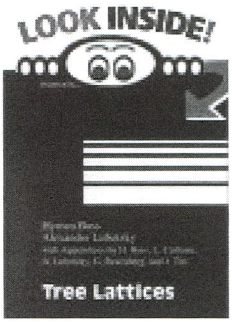
A large part of the material in these notes was distilled from these books [zitierte Lehrbücher].

Die Autoren haben zu diesem Zweck einen Text verfaßt, der eine gut lesbare und leicht faßliche Einführung ist. Erkauft wird dieser Vorteil durch Weglassen zahlloser Beweise und technischer Einzelheiten. Es werden grundlegende Begriffe und Resultate der algebraischen Topologie beschrieben und erläutert, wie sie etwa seit dreißig Jahren in bekannten Lehrbüchern dargestellt sind. Der Stoffumfang wird durch die (hier etwas gekürzten) Kapitelüberschriften deutlich: Chain complexes, Homology, and Cohomology. Homological Algebra. Products. Künneth Theorem. Fibre Bundles. Local Coefficients. Fibrations, Cofibrations, Homotopy Groups. Eilenberg-MacLane Spaces. Bordism, Spectra, and Generalized Homology. Spectral Sequences I, II. Simple-Homotopy Theory. Die beiden Kapitel über Spektralsequenzen enthalten eine größere Anzahl substantieller Anwendungen, zum Beispiel charakteristische Klassen und Klassisches zur Homotopietheorie. Vorausgesetzt wird der Stoff eines Grundkurses: Fundamentalgruppe und Überlagerungen, singuläre Homologie und Nachweis der Axiome von Eilenberg-Steenrod. CW-Komplexe. Teilweise auch Grundlagen der Differentialtopologie. Vorausgesetzt wird ferner eine schon beträchtliche Fertigkeit im Umgang mit den Argumentationsweisen der algebraischen Topologie.

In jedem Kapitel werden die Grundbegriffe übersichtlich zusammengestellt, und dazu werden einfache Sätze bewiesen, aber oft skizzenhaft oder mit Auslassungen, die als exercises kaschiert werden. Wegen technischer Beweise, zum Beispiel Konstruktion der Spektralsequenzen, und auch sonst häufig wird auf Lehrbücher verwiesen. Auch für einige Aufgaben und zu knapp geratene Begründungen (Zitat: you need either a fair amount of technical skill (...) or you need to be credulous) wird man andere Lehrbücher benutzen wollen. Klassische Resultate der Topologie, von denen eine Auswahl in keinem Kurs fehlen darf (zum Beispiel Poincaré-Dualität, Satz von Hurewicz, Konstruktion klassifizierender Räume), werden ohne Beweis formuliert und als projects (etwa im Sinne erweiterter Seminarvorträge) in Auftrag gegeben. Weiterführende Resultate werden leider mehrmals ohne Literaturhinweise erwähnt.

Dem Referenten scheint, daß der Text insbesondere zu einer ersten nachhaltigen Information über Gegenstände der algebraischen Topologie dienen kann, auch für diejenigen (etwa Anwender), die sich einem gründlicheren Studium dieses Gebietes nicht unbedingt unterziehen wollen. Ferner mag der Text zur Vorbereitung von Kursen und Prüfungen dienlich sein. Aber, wie die Autoren nicht verschweigen, ist entweder weitere Anleitung oder weitere Lektüre angebracht.

Göttingen Tammo tom Dieck



H. Bass, A. Lubotzky
Tree lattices
Progress in Math. 176

Basel u. a., Birkhäuser, 2001, 233 S., $ 54,95

Obgleich die Bäume auf den ersten Blick zu den einfachsten graphentheoretischen Strukturen gehören, sind sie durch ihre Automorphismengruppen sowie die Tatsache, daß ihre Ecken durch algebraische Strukturen, vornehmlich Gruppen, und ihre Kanten durch Morphismen, angereichert werden können, zu zentralen Objekten algebraischer und geometrischer Forschung geworden. Die erste Beobachtung, die man bei lokal endlichen Bäumen X (Bäumen mit allen Ecken vom endlichem Grad) macht, ist der Tatbestand, daß ihre Automorphismengruppen bezüglich einer natürlichen Topologie lokal kompakte Gruppen G und die Stabilisatoren von Ecken offene proendliche Untergruppen von G sind. Eine diskrete Untergruppe Γ von G heißt ein X-Gitter, wenn die Stabilisatoren Γ_x von Ecken x endlich sind und man mit ihren Ordnungen ein endliches Volumen des Fundamentalbereichs $\Gamma\backslash X$ definieren kann. Ein X-Gitter Γ heißt uniform, wenn der Fundamentalbereich $\Gamma\backslash X$ ein endlicher Graph ist.

Im ersten Anhang des Buches wird bewiesen, daß die Automorphismengruppe G eines lokal endlichen Baumes genau dann X-Gitter Γ enthält, wenn G unimodular und man mit dem Haarmaß der Stabilisatoren G_x der Ecken x des Fundamentalbereichs $G\backslash X$ ein endliches Maß auf $G\backslash X$ definieren kann. Ist $G\backslash X$ sogar ein endlicher Graph, so enthält G ein uniformes Gitter Γ, so daß der Bahnenraum $\Gamma\backslash G$ kompakt ist; in diesem Fall heißt X ein uniformer Baum. Ein uniformer Baum X besitzt auch nichtuniforme Gitter Γ; ist X nicht virtuell starr, so sind die Bahnenräume $\Gamma\backslash G$ nicht kompakt, haben aber ein endliches Maß. Während die Klasse der uniformen Gittergruppen von Bäumen mit der Klasse der endlich erzeugten und virtuell freien Gruppen zusammenfällt, ist die Struktur nichtuniformer Gitter von Bäumen, wie man den Ergebnissen der Kapitel 4, 5, 9 und 10 entnehmen kann, weniger festgelegt. Ein nichtuniformes X-Gitter ist nicht endlich erzeugbar und enthält beliebig große endliche Untergruppen. Die Mächtigkeit der Konjugiertenklassen maximaler lokal endlicher unendlicher Untergruppen von Γ kann jede Kardinalzahl zwischen 0 und $2^{\aleph_0}$ sein. Die Gruppe Γ muß nicht (im Gegensatz zu Gittern in Lieschen Gruppen) residuell endlich sein. Hat der Baum X ein einziges Ende und ist Γ lokal endlich, so kann Γ eine einfache Gruppe sein.

Der Ausgangspunkt für Untersuchungen von Gittern waren Liesche Gruppen und ihre diskreten Untergruppen mit kompakten Kovolumen (Margulis, Discrete Subgroups of Semi-simple Lie groups, Springer-Verlag 1972). Ist H eine einfache Liegruppe vom Rang 1 über einem lokalen nichtarchimedischen Körper, so operiert H auf einem Bruhat-Tits-Baum T, und die Gittergruppen von T sind Untergruppen von H. Die Autoren studieren in ihrer Monographie natürliche Verallgemeinerungen dieser Situation. In der Einleitung (Kapitel 0) geben sie einen Überblick über den Stand der Theorie der Gitter von Bäumen, wie sie sich heutzutage mit dem in ihrem Werk erzielten Ergebnissen einem darstellt. Kapitel 1 und 2 sind den Grundlagen der Theorie von Gittern und Graphen gewidmet, im dritten Kapitel werden Gitter von Bäumen eingeführt, die Sätze über ihre Existenz vorgestellt (so wird etwa der im ersten Anhang des Buches bewiesene Existenzsatz nach seiner Besprechung in der Einleitung (S. 5) zum drittenmal in 3.9 zitiert) und die Struktursätze über nichtuniforme und uniforme Gitter von Bäumen diskutiert.

Im vierten Kapitel wird gezeigt, was alles bei nichtuniformen Gittern von lokal endlichen Bäumen X passieren kann. Zu jeder positiven reellen Zahl r gibt es einen regulären Baum X vom Grad $d \geq 3$, so daß das Volumen des Fundamentalbereichs von Γ in X gerade r ist; die Fundamentalbereiche $\Gamma\backslash X$ können jede mögliche Anzahl von Kuspen (von Wegen ins Unendliche) haben (also auch keine), unabhängig davon, ob die Fundamentalgruppe des Fundamentalbereiches $\Gamma\backslash X$ endlich oder unendlich erzeugt sein mag. Jeder lokal endliche zusammenhängende Graph kann als Fundamentalbereich $\Gamma\backslash X$ auftreten, wenn man auf die Regularität von X verzichtet.

Ein Gitter Γ wirkt minimal auf einem Baum X, wenn es keinen Γ-invarianten Unterbaum von X gibt; diesen minimalen Wirkungen ist das Kapitel 5 gewidmet.

Kapitel 6 beschäftigt sich mit Zentralisatoren $Z_G(\Gamma)$ und Normalisatoren $N_G(\Gamma)$ von Gittern Γ in der Automorphismengruppe G von lokal endlichen Bäumen X. Sowohl $Z_G(\Gamma)$ als auch $N_G(\Gamma)$ sind abgeschlossene Untergruppen von G. Wirkt Γ minimal auf X, dann gilt (bis auf genau beschriebene Ausnahmefälle) $Z_G(\Gamma) = 1$. Die Faktorgruppe $N_G(\Gamma)/\Gamma$ ist eine proendliche Gruppe, die sogar endlich ausfällt, wenn Γ uniform ist. Die Elemente von G, die Γ auf eine Untergruppe Γ' konjugieren, so daß der Durchschnitt $\Gamma \cap \Gamma'$ in der Gruppe Γ endlichen Index hat, bilden eine Untergruppe, den Kommensurator $C_G(\Gamma)$ von Γ in G. Liegt $C_G(\Gamma)$ in G dicht, so ist Γ (vielleicht bis auf eine genau angegebene Ausnahme) residuell endlich. Bei den Beweisen des sechsten Kapitels spielt das Titsche Kriterium, nach welchem man entscheiden kann, wann eine Untergruppe von G einfach ist, eine entscheidende Rolle.

Das siebte Kapitel ist als Ergänzung des ersten Anhangs zu sehen; in ihm werden wichtige Beispiele von X-Gittern untersucht und Techniken zu Beweisen der Existenz nichtuniformer Gitter von uniformen Bäumen beigesteuert.

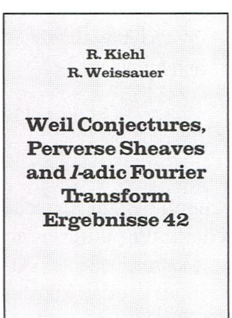
Das neunte Kapitel ist dem Studium parabolischer Bäume X (das sind Bäume mit genau einem Ende) sowie den Gittern Γ von X gewidmet. Die parabolischen Bäume X lassen sich mittels der Wirkungen ihrer Gitter charakterisieren. Ein Gitter Γ eines Baumes X nennt man parabolisch, wenn es ein einziges Ende, aber keine Ecke von X festläßt. Gestattet ein lokal endlicher Baum X ein parabolisches Gitter, so ist jedes X-Gitter parabolisch, und X ist ein parabolischer Baum. Eine sehr interessante Klasse von parabolischen Gittern Γ sind solche, für die der Fundamentalbereich eine Kette bildet. Für solche Γ kann die gruppentheoretische Struktur von den Zentralisatoren $Z_G(\Gamma)$ bzw. Normalisatoren $N_G(\Gamma)$ von Γ in $G = AutX$ einigermaßen zufriedenstellend beschrieben werden; ihre gruppentheoretische Struktur kann stark variieren. Außerdem wird im 9. Kapitel bewiesen, daß ein Gitter Γ eines Baumes X nur dann eine einfache Gruppe sein kann, wenn Γ parabolisch ist.

Im zehnten Kapitel werden ausführlich die Gitter des Nagao-Typs untersucht. Es wird dort etwa die allgemeine projektive lineare Gruppe $PGL_2(F_q[t])$ über der polynomialen Algebra $F_q[t]$ mit Koeffizienten aus dem Körper F_q mit q Elementen als Gitter eines Bruhat-Titschen Baums realisiert.

Bei der Diskussion typischer Beispiele in den Kapiteln 9 und 10 spielen die PNeumann-Gruppen eine wichtige Rolle; diese werden im dritten Anhang des Buches (Appendix [PN]) ausgehend von einer einfachen Gruppe S, für die die Abbildung $u \mapsto tut^{-1} : S \to Aut(S)$ ein Isomorphismus ist, und einer Untergruppe H von S, die mit ihrem Normalisator in G zusammenfällt, definiert und konstruiert. Der zweite Anhang des Buches ist eine luzide Arbeit von H. Bass und J. Tits, die unabhängig vom Rest des Buches gut verständlich ist. In ihr wird ein algorithmisches Kriterium bewiesen, welches es erlaubt zu entscheiden, wann die Automorphismengruppe eines uniformen Baumes diskret ist.

Die Monographie von H. Bass und A. Lubotzky ist unentbehrlich für jeden, der sich der kombinatorischen Gruppentheorie und ihren geometrischen Methoden nähern will. Sie ist erstaunlich gut auch für Nichtexperten lesbar, wenn man fähig ist, sofort die richtige Stelle zu finden, wo der behandelte Begriff definiert ist. Es ist klar, daß in der Einleitung (Chapter 0), die der Übersicht dient, die Begriffe und Bezeichnungen im allgemeinen als bekannt vorausgesetzt werden. Doch manchmal werden dort auch elementarste Begriffe erklärt (z. B. auf S. 8 der Zentralisator bzw. Normalisator) oder fast erklärt (auf S. 8 der Kommensurator bis auf die Bezeichnung *virt*). Auf Seite 32 wird der Begriff des Kommensurators als bekannt vorausgesetzt und auf S. 74 wird er ausführlich definiert (übrigens geschieht dies dort nochmals für den Zentralisator und Normalisator). Der ausführliche Index bzw. das Verzeichnis der Bezeichnungen am Ende des Buches helfen einem Uneingeweihten jedoch über diese kleinen Unebenheiten hinweg und lassen ihn entdecken, daß der Reiz des Buches um so höher ist, je unsystematischer man in den von den Verfassern dargelegten Stoff einzudringen sucht.

Erlangen K. Strambach



R. Kiehl, R. Weissauer
Weil Conjectures, Perverse Sheaves and *l*-adic Fourier Transform
Ergebnisse 42

Berlin u. a., Springer, 2001, 375 S., $ 99,–

Sei V eine Varietät über einem endlichen Körper $\mathbb{F}_q$ mit q Elementen, z. B. die Nullstellenmenge eines Polynoms
$P \in \mathbb{F}_q[X_1, \ldots, X_n]$.

Sei N_ν die Anzahl der $\mathbb{F}_{q^\nu}$-wertigen Punkte von V, im konkreten Fall also die Anzahl der Lösungen von P in $(\mathbb{F}_{q^\nu})^n$. Diese Zahlen werden in eine erzeugende Funktion, die Zeta-Funktion $Z(V, t)$ von V kodiert. Ihre logarithmische Ableitung hat die Form

$$t\frac{Z'(V,t)}{Z(V,t)} = \sum_{\nu=1}^{\infty} N_\nu t^\nu \ .$$

Wie Weil vermutete, ist $Z(V, t)$ für projektive glatte Varitäten V eine rationale Funktion, die einer gewissen Funktionalgleichung genügt.

Als tiefste der Weil-Vermutungen erwies sich die „Riemannsche Vermutung“ über die Absolutbeträge der Nullstellen von Zähler und Nenner der rationalen Funktion. Grothendieck formulierte die Vermutung um in eine Aussage über die Absolutbeträge der Eigenwerte des Frobenius auf étaler Kohomologie von V. Sie wurde schließlich 1974 von Deligne bewiesen. Diese Arbeit und die benötigten Techniken wurden vom ersten Autor gemeinsam mit E. Freitag in Lehrbuchform behandelt (Etale Cohomology and the Weil Conjecture, Ergebnisse der Mathematik und ihrer Grenzgebiete Band 13, Springer Verlag 1988).

Der vorliegende Band versteht sich als eine Fortsetzung. Er stellt einen weiteren, unabhängigen Beweis der „Riemannschen Vermutung“ vor, den Laumon 1987 mit Hilfe von Delignes Fourier-Transformation führte. Dies erlaubt einen eleganten Zugang auch zu den weitergehenden Ergebnissen Delignes über Gewichte für allgemeine Varietäten und allgemeinerere Koeffizienten, die unter dem Stichwort Weil II bekannt sind.

Die Monographie zerfällt in zwei Teile. Einerseits werden die Fouriertransformation und die Theorie der perversen Garben vorgestellt, sowie die Sätze der Gewichtstheorie in ihrer wohl endgültigsten Form bewiesen. Dieser erste Teil liest sich tatsächlich wie ein

Fortsetzung von Freitag/Kiehl. In einem zweiten Teil stellen die Autoren eine interessante Auswahl von sehr verschiedenartigen Anwendungen der Ergebnisse und Techniken vor, die nun zur Verfügung stehen. Dieser zweite Teil hat mehr den Charakter einer Folge von Übersichtsartikeln.

Im Detail: Die Autoren beginnen mit einem Durchgang durch Delignes Theorie von reinen und gemischten Garben und beweisen die nötigen Lemmata. Daran schließt sich die Fourier-Transformation und Laumons Beweis des Hauptsatzes von Weil II an. Als Spezialfall erhält man insbesondere die Riemannschen Vermutung für projektive Varietäten über endlichen Körpern.

Das zweite Kapitel ist recht technisch. Es werden Grundlagen über triangulierte Kategorien im allgemeinen und die derivierte Kategorie der konstruierbaren $\bar{\mathbb{Q}}_l$-Garben im besonderen zusammengestellt. Im folgenden Kapitel III wird das zweite Grundthema des Buches angestimmt: perverse Garben. Sie werden definiert und dann die Hauptsätzes über gemischte perverse Garben via Fourier-Transformation bewiesen, nämlich Existenz einer Gewichtsfiltrierung auf gemischten perversen l-adischen Garben und Verhalten von Gewichten unter Grothendiecks 6 Funktoren.

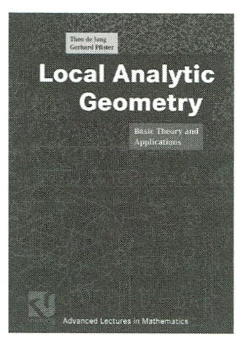
Mit den letzten Paragraphen von III beginnt der zweite Teil des Buches mit Vertiefungen und Anwendungen. Dies sind die Konstruktion der Kazhdan-Lusztig Polynome via äquivarianter perverser Garben; Beweis des harten Lefschetz Theorems via Brylinski-Radon Transformation (Kapitel IV); Abschätzungen von trigonometrischen Summen (Kapitel V); sowie Konstruktion der Springer Darstellungen von Weyl Gruppen halbeinfacher algebraischer Gruppen (Kapitel VI).

Es schließen sich vier kurze Appendices an, die weiteres technisches Material für die Hauptkapitel I und III bereitstellen.

Das Buch liefert einen sehr wichtigen, teilweise auch originären Beitrag zum Thema étale Kohomologie, Weilvermutungen und Gewichte. Viele, auch die Referentin, haben das Erscheinen ungeduldig erwartet, nachdem Vorversionen des ersten Teils schon vor Jahren zirkulierten. Teilweise wirkt auch die gedruckte Fassung inhomogen und unfertig. Zwei der Anwendungskapitel haben ihre eigene Bibliografie, das dritte aber nicht. Mal wird im Lehrbuchstil überhaupt nicht erwähnt, auf wen die Ideen zurückgehen (wie bei der Einführung der Fourier-Transformation), mal werden sehr präzise Referenzen gegeben (wie im Kapitel über Springer Darstellungen). Gleich auf den ersten Seiten haben sich etliche Ungenauigkeiten eingeschlichen. Die Einleitung ist für meinen Geschmack zu knapp ausgefallen.

Interessenten mit Vorkenntnissen der ersten beiden Kapitel von Freitag/Kiehl sollten sich davon nicht abschrecken lassen. Nirgends sonst wird so direkt auf diese sehr tiefen und schönen Ergebnisse hingearbeitet und wirklich alles benötigte Material bereitgestellt. Wer bereit ist, ein wenig Arbeit zu investieren, für den wird es sich lohnen.

Leipzig A. Huber



T. de Jong, G. Pfister

Local Analytic Geometry, Basic Theory and Applications

Braunschweig/Wiesbaden, Vieweg, 2000, 382 S., $ 59,–

Ich sehe das zu besprechende Buch als sehr willkommene Neuerscheinung unter den Lehrbüchern, die sich mit kommutativer Algebra, algebraischer Geometrie oder lokaler analytischer Geometrie befassen.

Es ist sowohl für Spezialisten als auch für eine Einführung in diese Gebiete geeignet, wobei die Grundkonzepte der kommutativen und lokalen Algebra in genügender Allgemeinheit entwickelt werden und in besonderem Maße am konkreten Beispiel der Kategorie der lokalen analytischen Algebren illustriert werden. Dabei wird auf die Besonderheiten (Konvergenzfragen) ausführlich eingegangen und der geometrische Hintergrund (analytische Räume) ist immer gegenwärtig, ja die Sprache ist vorwiegend geometrisch, statt von „analytischen Algebren" und „Morphismen analytischer Algebren" ist von „Keimen analytischer Räume" und „Keimen analytischer Abbildungen" die Rede.

Sehr willkommen ist weiterhin, daß jedem Kapitel eine ausführliche Einleitung vorangestellt ist, die Auskunft über die Ziele des Kapitels gibt, Querverbindungen zu anderen Kapiteln aufzeigt und einfache motivierende Beispiele diskutiert. Die Hauptergebnisse werden klar gegliedert und prägnant dargestellt und in vielen Fällen an Beispielen illustriert, ergänzt durch zahlreiche informative Übungsaufgaben, die jedem Abschnitt angefügt sind. Dadurch eignet sich das Buch sowohl als Grundlage für ein Seminar oder eine Vorlesung zu dieser Thematik, als auch für das selbständige Einarbeiten in die Thematik.

Eine weitere Besonderheit ist, daß einige in dem Buch behandelte Themen (die letzten 4 Kapitel) bisher nicht in Monographien zu finden sind, was das vorliegende Buch sehr attraktiv macht.

Ich will im folgenden den Inhalt kurz beschreiben:

Kapitel 1 behandelt in gebotenem Umfang die Grundbegriffe aus der Theorie Noetherscher (kommutativer) Ringe und Moduln: Hilberts Basissatz, Lokalisierung, Primärzerlegung, ganze Erweiterungen.

Kapitel 2 behandelt einige Grundbegriffe der affinen algebraischen Geometrie (Nullstellensatz, Noether-Normalisierung, Morphismen).

Kapitel 3 behandelt Grundbegriffe der lokalen analytischen Geometrie: Formale und konvergente Potenzreihen (die Definition formaler Potenzreihen könnte etwas präziser sein), Gleichheit von „holomorph" (= komplex differenzierbar) und „analytisch" (= lokal durch konvergente Potenzreihe gegeben), Identitätssatz, Riemannsche Fortsetzungssätze, und als wichtigstes den Weierstraßschen Vorbereitungs- und Divisionssatz, mit verschiedenen Anwendungen, u.a. Noether-Normalisierung (für analytische Algebren).

Schließlich werden sorgfältig Keime analytischer Mengen und Keime analytischer Räume eingeführt, und die analytische Version des Nullstellensatzes bewiesen.

Kapitel 4 diskutiert ausführlich den Dimensionsbegriff für analytische Raumkeime bzw. lokale Noethersche Ringe, indem für lokale Ringe drei verschiedene Dimensionsbegriffe (Krull-Dimension, Grad des Hilbert-Samuel-Polynoms, Erzeugendenzahl lokaler Parametersysteme) bzw. für Raumkeime ein vierter (aus der Noether-Normalisierung) als gleich nachgewiesen werden. Weiterhin werden glatte und singuläre Punkte und das Jacobi-Kriterium diskutiert, reguläre lokale Ringe und Normalisierung von Raumkeimen.

Kapitel 5 behandelt ebene Kurvensingularitäten (Puiseux-Entwicklung, Invarianten, Gorenstein-Eigenschaft, Auflösungen).

Kapitel 6 hat den Titel „The Principle of Conservation of Number", was den Inhalt m.E. nur unzureichend wiedergibt.

Behandelt wird u. a. auch die Frage nach der (geeignet zu präzisierenden) Stetigkeit von bestimmten Invarianten in analytischen Familien von Raumkeimen. Darüber hinaus nimmt aber die Einführung des Garbenbegriffes allgemein, der Eigenschaft „kohärent" und der einschlägigen Kohärenz-Sätze (Cartan-Oka) für analytische Mannigfaltigkeiten und analytische Räume einen breiten Raum ein. Ferner werden einige weitere Begriffe der lokalen Algebra (Cohen-Macaulay-Eigenschaft) und der homologischen Algebra eingeführt (projektive Dimension, Hilberts Syzygien Satz, Auslander-Buchsbaum Formel über Tiefe und projektive Dimension eines Moduls, Buchsbaum-Eisenbud-Kriterium für die Exaktheit eines Komplexes freier Moduln, Hilbert-Burch Theorem über Ideale der projektiven Dimension 1).

Kapitel 7 (Standard-Basen) ist in Lehrbuchform relativ neu. Diese Basen sind Analoga zu den Gröbner-Basen für Polynomideale und ebenso für Computer-Algebra-Systeme sehr gut geeignet. Für Ideale in Potenzreihenringen wird eine Art Divisionsalgorithmus angegeben, der den Weierstraßschen Divisionssatz verallgemeinert und besonders effektiv bei Verwendung von Standard-Basen ist.

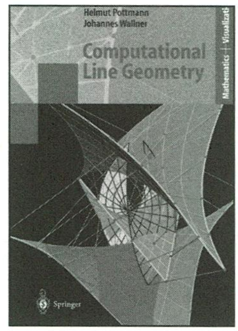
Kapitel 8 behandelt in aller Ausführlichkeit Approximationssätze von Artin und Grauert für konvergente Potenzreihen, die in dieser Form noch nicht in Monographien erschienen sind. Es geht darum, daß die Lösbarkeit eines analytischen Gleichungssystems durch formale Potenzreihen schon dessen Lösbarkeit durch konvergente Potenzreihen nach sich zieht, und daß die konvergenten Lösungen bis zu beliebig hoher Ordnung mit einer gegebenen formalen Lösung in Übereinstimmung gewählt werden können. Grauerts Approximationssatz ist dafür geschaffen, die Existenz einer semiuniversellen Deformation eines analytischen Raumkeimes nachzuweisen.

Die Deformationstheorie von Raumkeimen und der Existenzsatz für semiuniverselle Deformationen werden in *Kapitel 10* ausführlich behandelt. Anschaulich gesprochen geht es darum, einen Raumkeim als Spezialfall eines „allgemeinen Raumkeims derselben Art" zu verstehen. Sehr sorgfältig wird hier der etwas technische Begriff der „Flachheit" eines Morphismus von Raumkeimen im Zusammenhang mit Fragen der Deformationstheorie motiviert.

In *Kapitel 9* werden u.a. die sogenannten einfachen Singularitäten (i. S. von Arnold) klassifiziert und weitere Einzelheiten über Singularitäten bewiesen (z. B. Mather-Yau-Kriterium über die Charakterisierung von Äquivalenzklassen von Singularitäten).

Wie bereits erwähnt, sind Kapitel 7 bis 10 relativ neu in Form einer Monographie. Zusammenfassend kann ich jedem, der sich für die Thematik des Buches interessiert, die Lektüre dieses Lehrbuches wärmstens empfehlen.

Berlin H. Kurke



H. Pottmann, J. Wallner
Computational Line Geometry

Berlin u. a., Springer, 2001, 563 S., $ 79,95

Beide Autoren sind Mitglieder des Instituts für Geometrie der TU Wien. Dieses Institut ist ein bekanntes Zentrum (vielleicht sogar das bekannteste), an dem Geometrie gleichermaßen als abstrakte mathematische Disziplin, wie auch anwendungsbezogen gepflegt wird. Die enge Verbindung beider Aspekte macht dieses sehr inhaltsreiche Buch zu einem mathematisch äußerst interessanten, und wie mir scheint, auch nützlichen Werk. In der Einleitung schreiben die Autoren, dass ihnen von verschiedenen Kollegen nahegelegt wurde, ein Buch über „klassische" Geometrie und deren Anwendung auf geometrisches Rechnen zu schreiben. Da ihnen diese Aufgabe als zu umfangreich erschien, haben sie sich hier auf Geraden-Geometrie beschränkt. Sie haben damit eine sehr glückliche Wahl getroffen: Einerseits ist diese Darstellung thematisch einheitlich und geschlossen, andererseits wird eine schier unglaubliche Fülle von Material detailliert beschrieben.

Charakteristisch für die Vorgehensweise ist schon das erste Kapitel (Fundamentals). Auf den ersten 50 Seiten werden die Grundzüge der reellen projektiven Geometrie skizziert. Danach wird der Zusammenhang zur

Differentialgeometrie der Kurven und Flächen hergestellt, in einem weiteren Abschnitt der Kontakt zur Algebraischen Geometrie einschließlich des Begriffs der Gröbnerbasen. Die letzten dreißig Seiten befassen sich mit rationalen Bézier-Kurven und Flächen. Ganz wesentlich ist, dass diese anwendungs-motivierten Konzepte nicht einfach neben die bis dahin entwickelte Geometrie gestellt werden, sondern darin integriert.

Kapitel 2 beschreibt den Raum der Geraden des dreidimensionalen Raums, d.h., die Klein-Quadrik und Plücker-Koordinaten. Einerseits wird dies begrifflich sauber bis zur Grassmann-Algebra durchgeführt. Andererseits werden die sechs Plücker-Koordinaten einer endlichen Geraden sehr schnell in ein Paar $(\ell, \overline{\ell})$ von Vektoren zerlegt, wovon ℓ ein Richtungsvektor der Geraden ist, und $\overline{\ell}$ der Momentenvektor. Für alle konkreten Rechnungen, und für das ganze weitere Buch ist diese Aufspaltung fundamental. Das Kapitel schließt mit dem Study-Modell des Raums der orientierten Geraden.

Kapitel 3 behandelt die klassische Theorie der linearen Geradenkomplexe. Eine Zielrichtung ist hier deren Anwendungen in räumlicher Kinematik und in der Statik räumlicher Kräfte bis hin zur Theorie der Schrauben nach Ball.

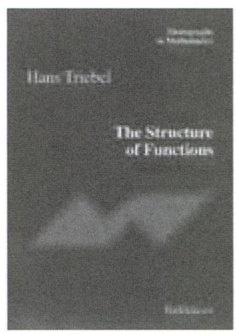
Kapitel 4 beschäftigt sich mit der Approximation einer gegebenen Menge von Geraden durch einen linearen Komplex. Kapitel 5 ist den Regelflächen gewidmet. Und wieder wird hier die Theorie (euklidische, projektive und Differentialgeometrie) direkt neben deren numerische Diskretisierung gestellt. Kapitel 6 behandelt abwickelbare Flächen, insbesondere abwickelbare Bézier-Flächen. Hier werden auch scheinbar weit auseinander liegende Themen wie die Laguerre-Geometrie der Kreise, Offset-Kurven, die Medial-Axis-Transformation (ich weiß nicht, wie die auf Deutsch heißt), Isophoten, Toleranzzonen eingeordnet.

Kapitel 7 bringt Geraden-Kongruenzen und nicht-lineare Geraden-Komplexe. Das abschließende achte Kapitel behandelt Projektionen der Plücker-Quadrik auf niederdimensionale Räume sowie u.a. die Beschreibung von Bewegungen auf der Sphäre mittels Quaternionen.

Das Buch enthält 237 sehr informative und sorgfältig ausgeführte Illustrationen und 17 Farbtafeln. Damit ist das Buch auch ästhetisch sehr beeindruckend.

Das Buch wird wohl ein Standard-Werk für die sogenannte „Angewandte Geometrie" werden, eine Weiterentwicklung der traditionellen Ingenieurs-Geometrie mit modernsten Methoden.

Erlangen W. Barth



H. Triebel
The Structure of Functions
Monogr. in Math. 97

Basel u. a., Birkhäuser, 2001, 440 S., $ 109,–

Thema des neuesten Buches von Hans Triebel sind – und das ist nicht überraschend – Funktionenräume und ihre Eigenschaften. Genauer gesagt, beschäftigt sich die vorliegende Monographie mit den Skalen der Besov-Räume $B^s_{p,q}$ sowie der Triebel-Lizorkin-Räume $F^s_{p,q}$, zunächst über $\mathbb{R}^n$ und später über Gebieten und Fraktalen. Diese beinhalten als Spezialfälle die klassischen Funktionenräume wie Sobolev-, Bessel-Potential-, Slobodeckii-, Hölder-Zygmund- oder (inhomogene) Hardy-Räume.

Im Gegensatz zum üblichen Zugang zu diesen Räumen via einer dyadischen Zerlegung der Eins und Summierbarkeitseigenschaften der Fourier-Transformierten von gewissen Funktionenfolgen, verfolgt das

Buch von Herrn Triebel einen Weg, welcher sehr an den Weierstraßschen Zugang zu holomorphen Funktionen erinnert. Dieser Weg kann wie folgt beschrieben werden: sei ψ eine positive C^∞-Funktion mit kompaktem Träger und $\{\psi(\cdot - m), m \in \mathbb{Z}^n\}$ eine Zerlegung der Eins in $\mathbb{R}^n$. Ferner sei $\psi^\beta(x) = x^\beta \psi(x)$. Es ist nun verlockend zu fragen, unter welchen Umständen Funktionen oder Distributionen Entwicklungen der Form

$$f(x) = \sum_{\beta \in N^n} \sum_{j \geq 0} \sum_{m \in \mathbb{Z}^n} \lambda^\beta_{jm} \psi^\beta(2^j x - m),$$

$$x \in \mathbb{R}^n$$

mit Koeffizienten $\lambda^\beta_{jm} \in \mathbb{C}$ zulassen. Dies erinnert in der Tat stark an den Weierstraßschen Zugang zu holomorphen Funktionen in der komplexen Ebene kombiniert mit den aus der Wavelet-Philosophie wohlbekannten Translationen $x \mapsto x - m$ und dyadische Dilatationen $x \mapsto 2^j x$. Ziel ist es zum einen, an den Koeffizienten λ^β_{jm} alle gewünschten Eigenschaften einer Funktion ablesen zu können, z. B. ob sie zu einem der Räume $B^s_{p,q}$ oder $F^s_{p,q}$ gehört, und zum anderen, Charakterisierungen dieser Räume in Termen solcher Entwicklungen zu finden.

Darstellungen obiger Art von Funktionen und Distributionen stehen im Zentrum des Buches und es ist ein Ziel des Autors zu zeigen, dass solche Darstellungen der Schlüssel zu einem konstruktiven Aufbau der Funktionenräume sind.

Kapitel I beschäftigt sich mit dem oben skizzierten konstruktiven Zugang zu Besov- und Triebel-Lizorkin-Räumen auf $\mathbb{R}^n$, Gebieten, Fraktalen und Mannigfaltigkeiten. Ziel ist es zunächst, Funktionenräume via solcher Entwicklungen zu definieren und zu zeigen, dass diese mit den klassisch definierten Räumen übereinstimmen. Enge Verbindungen bestehen zu den atomaren Zerlegungen von Frazier und Jawerth sowie zu dem von Meyer beschriebenen Wavelet-Zugang zu Funktionenräumen.

Kapitel II untersucht intensiv ein Hauptthema des Studiums von Funktionenräumen: Einbettungen und scharfe Ungleichungen. In Abhängigkeit der gewählten Skala und der Parameter n, p, q und s werden kritische, sub- und superkritische Fälle unterschieden und es wird ein sehr befriedigendes Bild der Einbettungssituation gewonnen.

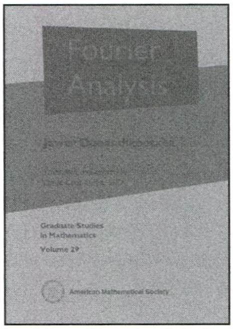
Fraktale elliptische Operatoren bilden den Kern des 3. Kapitels. Untersucht werden insbesondere der fraktale Laplace Operator und das fraktale Dirichlet Problem. Als besonders nützlich erweist sich hier das Zusammenspiel von fraktaler Geometrie und Spektraltheorie mit der in Kapitel I beschriebenen Zerlegung von Funktionen in Besov- und Triebel-Lizorkin-Räumen.

Das letzte Kapitel des Buches, Kapitel IV, untersucht das Abschneideverhalten von Funktionen aus diesen Räumen. Auch hierzu liefert die zu Beginn beschriebene Summendarstellung präzise Informationen, welche dann als Konsequenz neue Regularitätseigenschaften gewisser semilinearer Probleme implizieren.

Die Darstellung ist, der Natur der Sache entsprechend, schon ein wenig technisch; jedes Kapitel beginnt jedoch mit einer sehr instruktiven Einleitung und in den vielen kleinen, in den Text eingestreuten, Diskussionsabschnitten, werden die weiteren Schritte bestens motiviert. Ein Beispiel hierfür ist die Diskussion in Abschnitt 12.3 über äquivalente Quasi-Normen: um seine Sicht der Dinge zu erklären, verweist der Autor auf eine den Funktionenräumen angepasste Passage der berühmten Novelle *Animal Farm* von G. Orwell: *„all equivalent quasi-norms are equal but some equivalent quasi-norms are more equivalent than others“*, und lässt auf diese elegante Art und Weise den roten Faden in den technischen Ausführungen besser erkennbar werden.

Das vorliegende Buch ist sehr sorgfältig geschrieben und präsentiert einen modernen Zugang zu Funktionenräumen. Es ist zusammen mit den anderen Büchern des Autors zu verwandten Themen, *Theory of Function Spaces I* und *II*, *Fractals and Spectra*, eine wahre Fundgrube für jeden an reeller Analysis interessierten Mathematiker.

Darmstadt M. Hieber



J. Duoandikoetxea
Fourier Analysis
(Graduate Studies in Math. Vol. 29)

Amer. Math. Soc., Providence, R.I., 2001, 222 S., $ 35,–

Wenn man ein Buch mit dem Titel „Fourieranalysis" zur Hand nimmt, erwartet man, daß zunächst die elementaren Eigenschaften von Fourierreihen bzw. -integralen von Anfang an entwickelt werden. Diese Erwartung erfüllt das vorliegende Buch nicht – es ist von der Konzeption her sehr verschieden zu den z. B. wohlbekannten Büchern von A. Zygmund [3], E. M. Stein und G. Weiss [1], A. Torchinsky [2]. Seine Zielsetzung wird sehr gut durch folgenden Satz aus dem Vorwort wiedergegeben: „The goal of this book is to study the real variable methods introduced into Fourier Analysis by A. P. Calderón and A. Zygmund in the 1950's". Dies wird klar und elegant an einigen wichtigen Beispielen durchgeführt. Zum Inhalt:

In Kap. 1 werden sehr knapp die Standardergebnisse der Theorie referiert; so nimmt etwa die Behandlung des Schwarzschen Testfunktionenraums $S(\mathbb{R}^n)$, der temperierten Distributionen und der Fouriertransformation auf diesen Räumen knapp drei Seiten in Anspruch.

In Kap. 2 werden detailliert die Abbildungseigenschaften der Hardy-Littlewood Maximalfunktion

$$Mf(x) := \sup_{r>0} \frac{1}{|B_r|} \int_{B_r} |f(x-y|\,dy$$

$$f \in L^p(\mathbb{R}^n)\,,\ 1 \le p \le \infty\,,$$

(wobei $B_r = \{y \in \mathbb{R}^n : |y| < r\}$) abgeleitet, insbesondere wird der Interpolationssatz von Marcinkiewicz kurz und sauber bewiesen und die Konsequenzen für Aussagen über punktweise Konvergenz von Approximationsverfahren (u. a. der Lebesguesche Differentiationssatz) aufgewiesen. Kap. 2 schließt – wie auch die anderen Kapitel – mit einem Abschnitt *Notes and further results*, in dem neben der Herkunft der Ergebnisse auf eine Fülle von z. T. tiefliegenden Modifikationen und ergänzenden Ergebnissen (meist ohne Beweis) hingewiesen wird: z. B. die Dimensionsabhängigkeit der Konstanten, die starke Maximalfunktion, die Kakeya Maximalfunktion.

In Kap. 3 wird die Hilberttransformation

$$Hf(x) := \lim_{\varepsilon \to 0} H_\varepsilon f(x)\,,$$

$$H_\varepsilon f(x) := \frac{1}{\pi} \int_{|y| \ge \varepsilon}$$

$$\frac{f(x-y)}{y}\,dy\,, \quad f \in S(\mathbb{R}),$$

diskutiert. Dem Leitmotiv des Vorworts entsprechend wird mittels des Calderón-Zygmund Zerlegungslemmas das Kolmogorov Ergebnis: ‚H ist vom schwachen Typ $(1,1)$' hergeleitet und daraus mittels Interpolation und Dualität das klassische Ergebnis von M. Riesz: $\|Hf\|_{L^p(\mathbb{R})} \lesssim \|f\|_{L^p(\mathbb{R})}$, $1 < p < \infty$, gewonnen. Das Problem der punktweisen Konvergenz von $H_\varepsilon f(x)$, $\varepsilon \to 0$, wird auf das Abbildungsverhalten der zugehörigen Maximalfunktion $H^* f(x) = \sup_{\varepsilon>0} |H_\varepsilon f(x)|$ reduziert. In den *Notes and further results* werden u. a. der ursprüngliche Beweis von M. Riesz wiedergegeben und $L \log L$-Abschätzungen gestreift.

In Kap. 4 werden singuläre Integraloperatoren der Form

$$Tf(x) := \lim_{\varepsilon \to 0} \int_{|y|>\varepsilon} \frac{\Omega(y')}{|y|^n} f(x-y)\,dy\,,$$

$$f \in S(\mathbb{R}^n),$$

betrachtet, wobei $y' = y/|y|$ und Ω bzgl. der Einheitssphäre $\mathbb{S}^{n-1} \subset \mathbb{R}^n$ integrierbar sei mit $\int_{\mathbb{S}^{n-1}} \Omega(y')\,dy' = 0$. Mittels der sog. Rotation-Methode lassen sich dann im Falle ungerader Ω die eindimensionalen Ergebnisse für die Hilberttransformation unmittelbar auf den multivariablen Fall übertragen; hierin ist insbesondere der wichtige Spezialfall der Riesztransformation enthalten: $\Omega(y') = y'_j$. In den *Notes and further results* findet sich Weiteres zu den Themen: spherical harmonics, Operatorenalgebren, Methode der Rotation, $L \log L$-Ergebnisse, schwache Typ $(1,1)$-Ungleichungen, gebrochene Integration und Sobolev Räume.

In den beiden ersten Paragraphen des Kap. 5 wird sehr sorgfältig das folgende berühmte Ergebnis von Calderón-Zygmund (unter Verwendung der Hörmander-Bedingung (2)) entwickelt:

Satz. *Sei* $K \in L^1_{loc}(\mathbb{R}^n \setminus \{0\}) \cap S'(\mathbb{R}^n)$ *ein Kern, der den Bedingungen*

$$|\widehat{K}(\xi)| \leq A\,, \tag{1}$$

$$\int_{|x|>2|y|} |K(x-y) - K(x)|\,dx \leq B, y \in \mathbb{R}^n, \tag{2}$$

genügt. Dann gilt die starke Typ (p,p)*-Abschätzung*

$$\|K * f\|_p \leq C_p \|f\|_p\,, \qquad 1 < p < \infty\,,$$

und die schwache Typ $(1,1)$*-Abschätzung*

$$|\{x \in \mathbb{R}^n : |K * f(x)| > \lambda\}| \leq \frac{C}{\lambda} \|f\|_{L^1(\mathbb{R}^n)}\,.$$

Hieran schließt sich eine Einführung in die Theorie verallgemeinerter Calderón-Zygmund Operatoren (i. a. nicht vom Faltungstyp) als Grenzwerte von

$$T_\varepsilon f(x) = \int_{|x-y|>\varepsilon} K(x,y) f(y)\,dy$$

an. Während die Übertragung der Hörmander Bedingung (2) naheliegend ist, ist einem geeigneten Ersatz der einfachen Bedingung (1) mit dem $T1$-Theorem das ganze Kap. 9 gewidmet.

In Kap. 6 werden die Grenzfälle L^1 bzw. L^∞, die bekanntermaßen Anomalien beim Abbildungsverhalten von singulären Integraloperatoren verursachen, durch H^1 und BMO ersetzt; Kap. 7 befaßt sich mit gewichteten Varianten.

In Kap. 8 werden Abschätzungen vom Littlewood-Paley Typ entwickelt. Die berühmten Fourier-Multiplikatorensätze von Hörmander und Marcinkiewicz ergeben sich dann als Folgerungen. In den *Notes and further results* werden u. a. C. Fefferman's Ergebnis zu dem „multiplier of the ball", der Tomas-Stein Restriktionssatz, die Beschränktheit der Stein'schen sphärischen Maximalfunktion angesprochen.

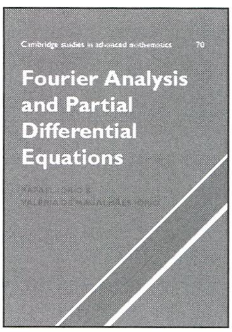
Zusammenfassend: Das Versprechen des Autors, in die von Calderón und Zygmund entwickelten reellen Methoden einzuführen, wird anhand von einigen fundamentalen Problemen der Fourieranalysis, die in natürlicher Weise aufeinander aufbauen, ausgezeichnet eingelöst. Die *Notes and further results* geben einen sehr schönen Überblick über die bis Ende der neunziger Jahre stattgefundene Entwicklung in diesem Gebiet (Für den praktischen Gebrauch erscheint es dem Rezensentem etwas ärgerlich, daß dort die präzisen Referenzen in den Text eingearbeitet und nicht am Ende des Kapitels gesammelt sind; so kommt es zu Formulierungen wie „... were proved by ... in the paper cited in Section ..."). Meiner Meinung nach ist der Übergang von dem regulären Text zu den *Notes and further results* etwas unvermittelt.

Das anspruchsvolle Buch ist sehr geeignet für Leser, die sich ohne allzu großen Aufwand einen soliden Eindruck über den Teil der reellen Analysis verschaffen wollen, der mit dem Stichwort Calderón-Zygmund Methoden bezeichnet wird. Die *Notes and further results* machen es gleichzeitig zur nützlichen Orientierung denjenigen, die sich hierin tiefer einarbeiten und offenen Problemen nachgehen wollen. Ich möchte daher das vorliegende Buch, das vorzüglich Tiefe und Schönheit dieser Theorie vermittelt, allen an der Reellen Analysis Interessierten (mit Vorkenntnissen in der Fourieranalysis – es ist in der Reihe Graduate Studies in Math. der AMS erschienen) nachdrücklich zur Lektüre empfehlen.

References

[1] E. M. Stein and G. Weiss, *Introduction to Fourier Analysis on Euclidean Spaces,* Princeton Univ. Press, Princeton, N.J., 1971.
[2] A. Torchinsky, *Real-Variable Methods in Harmonic Analysis,* Academic Press, New York, 1986.
[3] A. Zygmund, *Trigonometric Series,* 2nd ed., Cambridge Univ. Press, Cambridge, 1968.

Darmstadt W. Trebels



R. Iorio, V. Iorio
Fourier Analysis and Partial Differential Equations
(Cambridge studies in advanced mathematics 70)

Cambridge University Press 2001, 41 S., £ 45,–

Das Buch gibt in drei Teilen (Teil I: Fourier-Reihen und periodische Distributionen; Teil II: Anwendungen auf partielle Differentialgleichungen; Teil III: Einige Nichtlineare Probleme) eine vollständige Einführung in die Konzepte der Fourier-Analysis und wendet diese auf wichtige Klassen nichtlinearer Evolutionsgleichungen an.

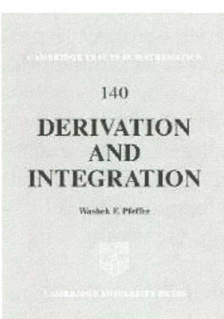
Teil I des Buches (Kapitel 1, 2 und 3) enthält klassisches Material über lineare partielle Differentialgleichungen, wie die Einteilung in die drei Grundtypen, die Methode der Separation der Variablen, die Maximumprinzipien für die Laplace- bzw. Wärmeleitungsgleichung, die Theorie der Fourier-Reihen stückweise stetiger Funktionen, deren Anwendung auf die Lösung der Wärmeleitungsgleichung sowie die Theorie periodischer Distributionen und der Sobolev-Räume. Damit sind die Grundlagen, die im Weiteren benutzt werden, etabliert.

Teil II (Kapitel 4, 5 und 6) ist den Anwendungen der Fourier-Analysis auf partielle Differentialgleichungen gewidmet. In Kapitel 4 werden die Wärmeleitungsgleichung, die Schrödingergleichung und die Wellengleichung behandelt. Das Ziel dabei ist, die Grundlagen für die Behandlung nichtlinearer Evolutionsgleichungen zu etablieren. Zunächst wird in Kapitel 4.1 ein Funktional-Kalkül für den Differentialoperator $D = \frac{1}{i}\partial_x$ entwickelt. Kapitel 4.2 ist dann dem zu einer allgemeinen Klasse linearer Evolutionsgleichungen assoziierten Cauchy-Problem gewidmet. Schließlich wird in Kapitel 4.3 die Theorie stark stetiger Halbgruppen entwickelt, die eine abstrakte Behandlung der Schrödinger- und Wärmeleitungsgleichung erlaubt. In Kapitel 5 wenden sich die Autoren Evolutionsgleichungen der Form $\partial_t u(t) = F(t, u(t))$ (etwa der verallgemeinerten nichtlinearen Schrödinger-Gleichung) zu. Fragen nach der Wohlgestelltheit und der maximalen Lebensdauer einer Lösung des Cauchy-Problems werden eingehend behandelt. Darüber hinaus wird das Konzept des Hamilton'schen Systems eingeführt. Kapitel 6 widmet sich ausführlich der KdV-Gleichung $\partial_t u(t) + \partial_x^3 u(t) + u(t)^p \partial_x u(t) = 0$ ($p \geq 1$), die durch Hinzufügen eines regularisierenden Viskositätstermes $\mu\partial_x^2 u(t)$ auf der rechten Seite behandelt wird. Angesprochen werden die lokale Wohlgestelltheit des Cauchy-Problems und die a-priori Abschätzungen der regularisierten Probleme, sowie der lokalen Wohlgestelltheit zum Cauchy-Problems des Ausgangsproblems. Schließlich wird auch die Wohlgestelltheit des Cauchy-Problems der KdV-Gleichung eingehend untersucht.

Teil III (Kapitel 7 und 8) ist dem sogenannten nicht periodischen Fall bei der KdV-, der BO-Gleichung oder verwandter nichtlinearer Evolutionsgleichungen gewidmet. Fragen nach der Wohlgestelltheit des Cauchy-Problems zu Anfangsdaten in gewichteten Sololev-Räumen oder Anfangsdaten mit unendlicher $L^2(\mathbb{R})$-Norm werden eingehend behandelt. Kapitel 7 ist der Theorie der Fourier-Transformation, der Theorie der L^2-Sobolev-Räume in $\mathbb{R}^d$ und deren Anwendung auf lineare partielle Differentialgleichungen (Wärmeleitungsgleichung, Schrödinger- Gleichung) gewidmet. Kapitel 8 behandelt das Cauchy-Problem der KdV-, der BO- oder verwandter Gleichungen, wie etwa $\partial_t u(t) + iq(\frac{1}{i}\partial_x) + \lambda u(t)^p\, \partial_x u(t) = \mu\partial_x^2 u(t)$ ($p \geq 1, \mu > 0$, q reellwertig von langsamem Wachstum).

Das Buch ist sorgfältig geschrieben und gut gegliedert. Des Weiteren finden sich viele Übungsaufgaben, welche die Theorie vertiefen und fortsetzen. Die Lektüre des Buches verlangt (abgesehen von einigen Stellen) keine größeren Vorkenntnisse. Der sorgfältige Aufbau des Buches und die detaillierte Beweisführung machen es für Studenten mittleren Semesters brauchbar. Andererseits kann das Buch auch als Leitfaden für den Experten dienen, da es eine detaillierte, sorgfältige Aufarbeitung der Theorie darstellt. Alles in allem gibt das vorliegende Werk eine sehr schöne Einführung in ein aktuelles, vielschichtiges und anwendungsorientiertes Gebiet der Mathematik. Es kann uneingeschränkt zur Lektüre empfohlen werden.

Erlangen F. Duzaar



W. F. Pfeffer
Derivation and Integration
Cambridge Tracts in Mathematics Vol. 140

Cambridge University Press, 2001, S. 282, \$ 70,–

Das zentrale Anliegen der vorliegenden Monographie ist, im mehrdimensionalen Fall aus der Kenntnis ihrer Ableitung(en) eine Funktion zu bestimmen. Der Autor selbst kündigt im Vorwort an, daß es sich nicht um ein Werk für Anfänger handelt. In der Tat liegt, wie der Gegenstand erwarten läßt, ein begrifflich und technisch anspruchsvolles Werk vor. Der gut ausgebildete Analytiker kann aber der Darstellung (mit viel Papier und Bleistift) folgen – mit Gewinn.

Im Mittelpunkt stehen die Begriffe „BV-Mengen" (Teilmengen, deren charakteristische Funktionen von beschränkter Variation sind) und „charges", additve Funktionen auf den BV-Mengen, die bezüglich einer bestimmten Topologie stetig sind. Typische „charges" (bewußt möchte ich nicht die Übersetzung „Ladung" einführen) sind z. B. signierte Maße oder Flüsse von Vektorfeldern. Die (obere) Ableitung einer „charge" F wird durch den Ausdruck

$$\inf D_\eta\, F(x)$$

mit

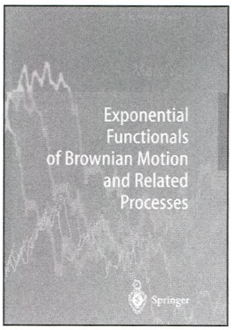
$$D_\eta\, F(x) = \sup_{\delta < 0}\ \inf_{E}\ \frac{F(E)}{\lambda^{(n)}E}$$

erklärt. Hierbei ist $\lambda^{(n)}$ das Lebesgue-Maß und das Infimum wird über alle BV-Mengen E mit Durchmesser $d(Ev\{x\}) < \delta$ und $r(Ev\{x\}) > \eta$ genommen. Es ist $r(H)$ eine etwas kompliziertere Funktion des Durchmessers, des Lebesgue-Maßes und des Perimeters von H. Einen analogen Ausdruck gibt es für die untere Ableitung. „Charges" werden in Dualität zu BV-Mengen stehen, Regularitätsresultate liefern, daß Begriffe für „charges", die von glatten, klassischen Größen herrühren (z. B. von Flüssen glatter Vektorfelder) mit klassischen Begriffen übereinstimmen. Zu Recht fühlt sich der Leser an Ideen der geometrischen Maßtheorie erinnert. Die Theorie wird nun bis hin zu Analoga des Gauss'schen und des Stokes'schen Satzes ausgebaut.

Es hat einige Zeit gebraucht, ehe sich die geometrische Maßtheorie als Theorie, vor allem aber als Werkzeug (z .B. in der Variationsrechnung oder der Theorie der Minimalflächen) durchgesetzt hat. Ein Blick in das

Buch von Federer mag einen Hinweis geben, warum dies der Fall war. Ich könnte mir vorstellen, daß die von W. Pfeffer dargestellte und zu einem großen Teil mitentwickelte Theorie auch noch einige Zeit braucht, um ihre volle Nützlichkeit zu entfalten. Trotzdem, nein gerade deshalb, ein wichtiges Buch für den Fachmann.

Swansea N. Jacob



M. Yor

Exponential functionals of Brownian motion and related processes

Springer Verlag Berlin u. a., 2001, 203 S., $ 49,95

„En Mai 1990, lors du Colloque Itô à Paris, Michel Emery m'a parlé du travail de Daniel Dufresne, actuaire canadien" schreibt Yor Ende 1990. Er stößt so auf das, was er noch zehn Jahre später ein „amazing subject" nennen wird. Der Hintergrund dafür ist, daß auf den Finanzmärkten längst nicht mehr nur einfache Optionen gehandelt werden, also Anrechte etwa darauf, eine Aktie zu einem festgelegten Zeitpunkt zu einem festgelegten Preis kaufen zu können. Ein Großteil des weltweiten Wachstums des Marktes für Derivate wird von immer höher entwickelten Finanzinstrumenten getragen. Mit Optionen auf arithmetische Mittel von Wertpapierkursen, den *asiatischen Optionen*, ist sogar mathematisches Neuland betreten worden. Aufgeworfen werden insbesondere Fragen zur Stochastik exponentieller Funktionale speziell von Brownschen Bewegungen. Über sie haben in den letzten zehn Jahren fast ausschließlich Yor und seine Schüler nachgedacht. Zu Teilaspekten dieser Forschung sind bereits die Bücher [Y92] und [Y97] erschienen.

Der vorliegende Band ist komplementär zu den beiden oben genannten Büchern. In ihm hat Yor seine 9 grundlegenden Zeitschriftenbeiträge zu exponentiellen Funktionalen von Prozessen aus den Jahren 1992 bis 1998 gesammelt. Einige der Aufsätze sind hierzu eigens aus dem Französischen übersetzt worden. Alle Aufsätze hat Yor mit Ergänzungen und Hinweisen zu aktuellen Entwicklungen versehen. Er hat darüberhinaus für diesen Band eine weitere Arbeit geschrieben, in der er die Resultate seiner Aufsätze aus heutiger Sicht in Perspektive setzt. Durch Anfügen einer Einleitung und eines Index ist so fast eine kohärente Monographie entstanden, die in 10 Kapiteln eine einzelne Klasse von stochastischen Prozessen analysiert. Genauer sind dies die Prozesse $A^{(\nu)}$, die durch Integrieren einer exponentierten Brownschen Bewegung mit Drift nach der Zeit gegeben sind:

$$A_h^{(\nu)} = \int_0^h e^{2(\nu t + B_t)}\, dt \qquad h \in [0, \infty)$$

mit ν einer reellen Driftkonstante und B einer Brownschen Bewegung. Das Buch berichtet aber nicht nur über die Rolle von $A^{(\nu)}$ in den Anwendungen. Es entwickelt auch eine überraschende Vielfalt von Wechselwirkungen dieser Prozesse mit anderen Teilen der Mathematik. Und mit großer Virtuosität zeigt Yor wie dies tatsächlich der Schlüssel zum Verstehen der dann doch nicht so einfachen Struktur von $\mathrm{A}^{(\nu)}$ ist. Im folgenden sollen diese Einsichten, in thematischer Form geordnet, kurz geschildert werden.

Yors Sichtweise der *stochastischen Struktur der Prozesse* $\mathrm{A}^{(\nu)}$ hat sich in Kapitel 1 bis 4 entwickelt. Es sei jedoch geraten, für diesen Aspekt die Lektüre mit Kapitel 6 zu beginnen, das Yor für dieses Buch neu verfaßt hat. Yors Idee ist, geeignetes Randomisieren nach der Zeit als Ausgangspunkt zur Untersuchung der Struktur stochastischer Prozesse zu nehmen. Die Prozesse $\mathrm{A}^{(\nu)}$ werden hierfür genauer nach unabhängigen Exponentialvariablen T_z randomisiert. Nach Konstruktion gibt der Erwartungswert des resultierenden Prozesses die Laplacetransformierte nach der Zeit der ersten Momente von $A^{(\nu)}$, und in diesem Sinn wird hier Laplacetransformieren stochastisch gemacht. Yors grundlegendes Resultat ist, daß die Verteilung von $A^{(\nu)}(T_z)$ mit der des Quotienten aus einer Beta- durch eine von ihr unabhängigen Gammavariablen identisch ist. An zwei Prüfsteinen wird die Tragweite dieses Resultates gezeigt. Es impliziert Dufresnes Resultat, das die Verteilung des zeitlichen Limes von $A^{(\nu)}$ als die einer gewissen reziproken Gammavariablen identifiziert und das Yor, wie in Kapitel 1 beschrieben, zu seinen Untersuchungen motiviert hat. Dann folgt aus ihm *Bougerols Identität*, die $A^{(0)}$ in Beziehung setzt mit der hyperbolischen Brownschen Bewegung $\sinh(B)$ und für die Momente impliziert:

$$E\Big[(A_h^{(0)})^n\Big]\cdot\frac{(2n)!}{2^n\,n!}=E\Big[\sinh^{2n}(B_h)\Big].$$

Diese beiden Resultate sind Konstanten des vorliegenden Buches. Der Leser findet sie zwar nicht im zusammen mit P. Carmona und F. Petit geschriebenen Kapitel 8, das obigen Ansatz auf exponentielle Funtionale von gewissen Lévyprozessen verallgemeinert. Er findet sie aber in den ersten beiden Kapiteln, in Kapitel 4 und 6, und er findet sie auch im zusammen mit A. Comtet und C. Monthus verfassten Kapitel 10. Dieses letzte Kapitel des Buches stellt den Zusammenhang mit Diffusion in Teilchensystemen her und bildet auch als zeitlich letzte Arbeit so etwas wie einen abschließenden Neuanfang.

Auch *methodisch* unterscheidet sich Kapitel 10 mit seinem Betonen der Spektralanalyse der Fokker-Planck Gleichung und asymptotischer Betrachtungsweisen von den übrigen Arbeiten des Buches. Deren Ausgangspunkt ist nämlich die *Lamperti Identität*

$$e^{2(\nu t+B_t)}=\big(R^{(\nu)}\big)^2\big(A_t^{(\nu)}\big)\qquad t\in[0,\infty).$$

Wie auf S. 16 beschrieben, wird hier der Integrand von $A^{(\nu)}$ bezüglich $A^{(\nu)}$ faktorisiert über das Quadrat eines Besselprozesses $R^{(\nu)}$ vom Index ν. Für positiv ganzzahliges $\delta=2(\nu+1)$ ist dabei $R^{(\nu)}$als euklidischer Abstand einer δ-dimensionalen Brownschen Bewegung vom Nullpunkt gegeben. Während dies eine gute Intuition für Besselprozesse von Indizes $\nu\geq 0$ gibt, findet der Leser die im Buch benötigten präzisen Resultate über diese Prozesse in den Kapiteln 2, 6 und 7 sorgfältig zusammengetragen und in Perspektive gesetzt; in Kapitel 7 sogar explizit als englischsprachiger *fil d'Ariadne*.

Ihre Schlagkraft erhält die Lamperti Identität, indem sie den Prozessen $A^{(\nu)}$ eine doppelte Rolle gibt: Als zu studierendes Objekt und als stochastische Zeitvariable. Eine der Ideen des Buches ist, die Zeit tatsächlich auf diese Weise stochastisch zu machen. Die *Philosophie des Buches* ist aber, solche Zeitwechsel auf dem Niveau der Laplacetransformierten auszuführen. Und in diesen treten so ganz natürlich Besselfunktionen auf.

Exemplarisch stellt Yor dieses Vorgehen in Kapitel 7 dar. Indem er zusätzlich Exkursionstheorie heranzieht, findet er hier Beziehungen zwischen der Umlaufzahl ebener Brownscher Bewegungen und den Laplacetransformierten der Momente von $\exp(-A^{(\nu)})$. Letztere sind gegeben durch Integrale gegen Produkte von I-Bessel- und K-Besselfunktionen. Was nicht gesagt wird: Diese Integrale vom Weber-Schafheitlin Typ lassen sich klassisch durch Gaußsche hypergeometrische Funktionen ${}_2F_1$ ausdrücken. Diese geben Uniformisierungen der komplexen projektiven Geraden ohne die Punkte 0, 1 und ∞ und parametrisieren so Quotienten der oberen Halbebene, siehe [H]. Andererseits wird in [Y80] oder [Y92, Chapter 5] gezeigt, daß obige Umlaufzahlen eng mit Thetareihen zusammenhängen, also mit einer natürlichen Klasse von Funktionen auf Quotienten der oberen Halbebene. Aus dieser Sicht stellt Yor Zusammenhänge zwischen ganz natürlichen Objekten her.

Stochastisch gesehen ist die Umlaufzahl ebener Brownscher Bewegungen eine der Quellen für *Lévyprozesse*. Und so ist es vielleicht zu erklären, daß im zusammen mit P. Carmona und F. Petit geschriebenen Kapitel 8, wie schon erwähnt, die Verallgemeinerung der Analyse von Kapitel 6 auf gewisse solcher Prozesse untersucht wird. Die Motivation für Kapitel 7 aus der *Finance* sind andererseits Fragen nach dem Berechnen von Annuitäten, wenn Zinssätze einer Brownschen Bewegung mit Drift folgen. Zinssätze werden hierbei aber auch negativ. Diesbezüglich zufriedenstellender ist das CIR Modell, in dem Zinssätze als gewisse quadrierte Besselprozesse, den *square-root processes*, modelliert werden. Und Kapitel 9 studiert so explizit die Momente ewiger Renten in diesem Kontext.

Zum *Verstehen asiatischer Optionen* gibt das Buch Zugänge über eine explizite Dichte von $A^{(\nu)}$ und über eine direkte Analyse des Black-Scholes Preises. Beide Zugänge basieren auf der Lamperti Identität und benutzen das Konzept der Laplacetransformierten. Als eines der Hauptresultate von Kapitel 2 wird die Laplacetransformierte obiger Dichte explizit bestimmt. Aus den Untersuchungen zu den Hartman-Watson Identitäten in [Y80] ist deren Laplaceinverses bekannt und führt zu (6.e) auf S. 44. Dieses Resultat gibt insbesondere eine geschlossene Lösung für den Black-Scholes Preis einer asiatischen Option. In der angegebenen Form ist diese Preisformel aber inzwischen für ihre Nichtberechenbarkeit notorisch: In ihr wird ein Dreifachintegral multipliziert mit einer Konstanten, die, wenn sie klein ist, eine Größenordnung 10^{100} hat, die aber in der Regel viel größer ist.

Im Gegensatz zu diesem Resultat hatte jedoch das zusammen mit H. Geman verfasste *Kapitel 5* einen großen Einfluß auf die Entwicklung. Es soll im folgenden genauer diskutiert werden. Die erklärte Strategie ist, nicht den Preis $C^{(\nu)}$ der asiatischen Option selbst zu berechnen, sondern dessen Laplacetransformierte. Als diesbezügliches Hauptresultat werden folgende Laplacetransformierten angegeben

$$\int_0^\infty e^{-zh} E\big[(A_h^{(\nu)} - a)^+\big]\, dh = \frac{D_\nu(a,z)}{z(z-2(\nu+1))},$$

$$D_\nu(a,z) = \int_0^\infty \frac{1}{a} \exp\left(-\frac{1}{2a}(1+w^2)\right) w^{\nu+3}$$

$$I_{\sqrt{2z+\nu^2}}\left(\frac{w}{a}\right) dw,$$

wobei $a > 0$ und $\mathrm{Re}(z) \gg 0$. Analytisches Invertieren ergab später im Vergleich zu Yors Dreifachintegral überraschend strukturelle Ausdrücke für ihre Laplaceinversen

$$h \mapsto E\big[(A_h^{(\nu)} - a)^+\big].$$

Zum großen Schrecken der Experten zeigte Ende 1999 aber eine Analyse der Normalisierungen des Bewertungsproblems auf S. 68–70, daß

$$C^{(\nu)} = E\big[(A_h^{(\nu)} - \varphi(h))^+\big]$$

mit nichtkonstanten Funktionen $\varphi(x) = \alpha x + \beta$ gilt. Die Laplacetransformierte von $C(\nu)$ stimmt so mit keiner der oben angegebenen Laplacetransformierten überein. Glücklicherweise konnte dann ein Praktiker, Peter Carr vom *Derivatives Research* von Morgan Stanley in New York, die Relevanz der obigen Resultate des Buchs für das Bewerten asiatischer Optionen wiederherstellen: Er fand einen Weg das Berechnen von $C^{(\nu)}$ auf das Berechnen *aller* Abbildungen $h \mapsto E[(A^{(\nu)}(h) - a)^+]$ zu reduzieren. Mathematische Hinweise zu dieser Reduktion findet der Leser auf S. 95f. Hier sollte aber speziell kt durch $\varphi(t)$ ersetzt werden. Und etwa auf S. 78 oder S. 86f ist die Interpretation der obenstehenden Laplacetransformierten als der des Preises $C^{(\nu)}$ nicht richtig.

Ein weiteres für die Anwendungen relevantes Problem wird durch die Beschränkung der Analyse auf den Fall $\nu \geq 0$ aufgeworfen. Es gilt nämlich $\nu = 2\sigma^{-2}(r-\delta) - 1$, und so kann ν insbesondere unter den getroffenen Voraussetzungen $\delta = 0$, $r > 0$ bereits negativ werden. Das Argument auf S. 78 ist dann vom Leser zu modifizieren. Etwa durch geeignetes Adaptieren der Argumentation von Yor auf S. 97–99, die auf einer sorgfältigen Analyse von Besselprozessen von negativem Index beruht. Andere Zugänge sind möglich. Sehr sorgfältig ist speziell in diesem Fall auch die nicht angesprochene Endlichkeit der Integrale $D_\nu(a,z)$ in Abhängigkeit von $\mathrm{Re}(z)$ zu untersuchen. Etwa durch Heranziehen der Asymptotik der I-Besselfunktionen nahe Null und gegen Unendlich aus [L, §5.7].

Aus heutiger Sicht haben Yors Arbeiten in der *Finance* zu vielfältigen Anwendungen des Konzeptes der Laplacetransformierten geführt. Speziell wurden Fragen der numerischen Laplaceinversion erneut aufgegriffen. Während auf die Fehlerhaftigkeit der ersten Ansätze dazu bereits in [Li] hingewiesen wurde, ist hierfür heute der Inversionsalgorithmus aus [AW] zum Standard geworden; siehe etwa [FMW], [DL] oder speziell neuere Arbeiten von L.C.G. Rogers (Bath, UK). Aus konzeptioneller Sicht versteht man asiatische Optionen heute als augenfälligstest Beispiel von Mittelungsproblemen, die in fast alle neueren Entwicklungen in *Finance* und *Insurance* an zentraler Stelle auftreten. Erinnert sei hier etwa an Fragen der Zinstheorie [MR], des *credit risk* [HT] oder der *Insurance* im Zusammenhang mit indexgebundenen Lebensversicherungen [AS].

Für alle solchen Fragen zu Mittelungsprozessen oder ihrer Wechselwirkungen sind Yors inhaltsreiche, sorgfältig und kompetent geschriebene Arbeiten mathematisch grundlegend und richtungsweisend. Allen, die in dieser Richtung nachdenken wollen, kann so Yors Buch nur sehr empfohlen werden.

Literatur

[AS] J. Aase Nielsen, K. Sandmann: Uniqueness of the fair premium of equity-linked life insurance contracts, *Geneva papers on risk and insurance theory* **21** (1996), 65–102.

[AW] J. Abate, W. Whitt, Numerical inversion of Laplace transforms of probability distributions, *ORSA J. Computing* **7** (1995), 36–43.

[DL] D. Davydov, V. Linetsky: Structuring, pricing and hedging double-barrier step options, *J. Comput. Finance* **5** (2002), 55–87.

[FMW] M.C. Fu, D.B. Madan, T. Wang: Pricing continuous Asian options: a comparison of Monte Carlo and Laplace inversion methods, *J. Comput. Finance* **2** (1998), 49–74.

[H] R.-P. Holzapfel: *Geometry and arithmetic around Euler partial differential equations*, D. Reidel 1986.

[HT] L. Hughston, S. Turnbull: A simple derivation of some results for pricing credit derivatives, *RISK*, October 2000, 36–42.

[L] N.N. Lebedev: *Special functions and their applications*, Dover Publications 1972.

[Li] A. Lipton: Similarities via self-similarities, *RISK*, September 1999, 101–105.

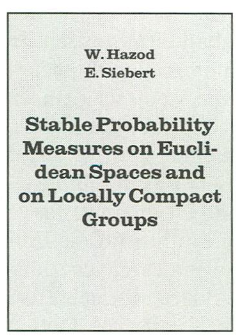
[MR] M. Musiela, M. Rutkowski: *Martingale methods in financial modelling*, Springer 1997.

[Y80] M. Yor: Loi d'indice du lacet Brownien, et distribution de Hartman–Watson, *Z. Wahrscheinlichkeitstheorie* **53** (1980), 71–95.

[Y92] M. Yor: *Some aspects of Brownian motion I*, Birkhäuser 1992.

[Y97] M. Yor [ed.]: *Exponential functionals and principal values related to Brownian motion*, Revista Mathemática Iberoamericana, Madrid 1997

Mannheim M. Schröder



W. Hazod, E. Siebert
Stable Probability Measures on Euclidean Spaces and on Locally Compact Groups

Dordrecht u. a., Kluwer, 2001. 612 S., € 195,–

One of the important areas of classical probability theory, initiated by Khinchin and

Lévy, is the study of the convergence of renormalized sums $a_n \sum_1^n X_i - b_n$ of independent random variables under various additional assumptions and of the nature of the limit laws [5]. This leads to the definition of various classes of infinitely divisible laws including strictly stable, stable, semi-stable, and, more generally, of self-decomposable laws.

Grenander [2] is one of the first who proposed to extend this study to the case of random variables taking values in more general algebraic structures such as locally compact groups. In this direction, Heyer's book [1] gives a comprehensive treatment of infinitely divisible laws, continuous convolution semigroups of measures, Lévy-Khintchin representation and limit theorems for triangular systems on locally compact groups. However, stability is not considered in [1].

The present book is a systematic treatment of stability and assorted limit theorems on locally compact groups. On a group G, a continuous convolution semigroup of measures $(\mu_t)_{t>0}$ is called strictly stable if there exists a continuous one-parameter group $(a_t)_{t>0}$ of automorphisms of G such that

$$\mu_t = a_t(\mu_1)$$

where $a(\mu)$ denote the natural action of the G-automorphism a on the measure μ. It is not clear, a priori, which groups G can carry such stable semigroups. It turns out that such semigroups live, essentially, on certain simply connected nilpotent groups and on totally disconnected groups. The authors discuss several variations on the definition of stability and show how it relates to the structure of the underlying group. They also give a detail treatment of various limit theorems and develop the theory of domains of attraction.

The book is organized in three long chapters with many sections and subsections and contains an informative table of contents.

The first Chapter discuss stability on vector spaces and serves several purposes. It introduces the reader to various concepts concerning stability and presents some of the fundamental results. More comprehensive treatments and other aspects of stability on vectors spaces can be found in books such as [3, 4]. Here, the authors focus on those aspects that are relevant, either directly or as models, for the development of stability theory on locally compact groups.

The second Chapter concerns stability on simply connected nilpotent Lie groups and gives the first comprehensive book treatment of this subject. The nilpotent structure allows for a rich theory of stability, domains of attraction, and related limit theorems. The results concerning finite dimensional vector spaces play a crucial role here because of the important "transfer procedure" which allows to pass from a simply connected nilpotent Lie group to its Lie algebra.

The third chapter is devoted to stability on general locally compact groups. The authors show that, in the case of real Lie groups, the investigation can be reduced to nilpotent Lie groups but that, in general, there are also stable laws on p-adic groups and other locally compact groups.

This book is a useful addition to the literature on probability on algebraic structures. It is a valuable source of information for the specialists and for those trying to understand some aspects of stability and limit theorems on groups. Despite the careful organization of the material, beginners may have difficulty to find their way through the wealth of information presented in the text. The book contains an excellent bibliography and the authors have included pointers to related developments that are not treated in detail in the text.

References

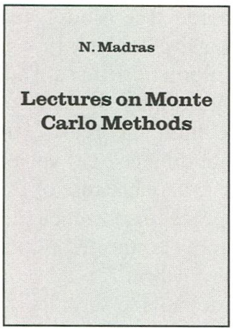
[1] Heyer, H. *Probability Measures on Locally Compact Groups.* 1977, Springer.

[2] Grenander, U. *Probabilities on Algebraic Structures.* 1968, Almquist and Wilksell.

[3] Jurek, Zb. and Masson, J.D. *Operator limit distributions in probability theory.* 1993, J. Wiley.

[4] Sato K. *Lévy Processes and infinitely divisible distributions.* 1999, Cambridge University Press.
[5] Zolotarev, V.M. *One-dimensional stable distributions.* Translations A.M.S. 65, 1986.

Cornell University L. Saloff-Coste



N. Madras
Lectures on Monte Carlo Methods

American Mathematical Society 2002
(Fields Institute Monographs). 103 S.,
US$ 30,–, ISBN 0-8218-2978-5.

Als Monte Carlo Methode bezeichnet man Verfahren, die mit Hilfe von (Pseudo-)Zufallszahlen eines der beiden Ziele verfolgen

(i) Erzeugung von Stichproben einer vorgegebenen (eventuell nur implizit beschriebenen) Zufallsverteilung.
(ii) Approximative Lösung aufwändiger deterministischer Probleme, wie hochdimensionale Integration oder gewisse Optimierungsprobleme.
Das Buch von Madras gibt anhand einfacher Beispiele einen leicht verständlichen Einblick in die Problematik und Ideenwelt der Monte Carlo Verfahren, wobei die neueren Entwicklungen, wie das exakte Ziehen von Stichproben (nach Propp/Wilson oder Fill), leider ausgespart werden.

Die vorliegenden Vortragsausarbeitungen sind in sechs Kapitel gegliedert. Das erste Kapitel erklärt die Vorgehensweise bei der Lösung eines einfachen deterministischen Problems mit Monte Carlo Methoden und zeigt, dass die Konvergenzordnung stets höchstens $\frac{1}{2}$ ist.

Der Erzeugung von (Pseudo-)Zufallszahlen ist das zweite Kapitel gewidmet. Hier werden auch einfache Verfahren zur Qualitätsanalyse von Zufallszahlengeneratoren beschrieben. Weiterhin findet man Verfahren, um aus uniform (auf $[0,1]$) verteilten Zufallszahlen solche mit rechnerisch schwieriger zugänglichen Verteilungen herzustellen, wie die Box-Muller Methode und andere.

Im einfachsten Fall wird ein numerisches Integrationsproblem gelöst, indem man Zufallszahlen herstellt, die auf dem Integrationsgebiet uniform verteilt sind, und dann das arithmetische Mittel der Funktionswerte an diesen Stellen bildet. Nach dem zentralen Grenzwertsatz ist die Konvergenzordnung dieses Monte Carlo Verfahrens $\frac{1}{2}$ (falls der Integrand quadratintegrabel ist). Die numerische Konstante der wirklichen Rechendauer ist durch die Varianz der Ergebnisse bestimmt. Im dritten Kapitel werden Tricks und Kniffe (*importance sampling*, *Kopplung* u. a.) gezeigt, wie diese Konstante, teils um Größenordnungen, reduziert werden kann.

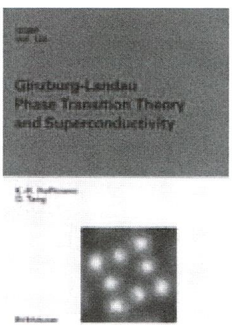
Bei der Markoffketten Monte Carlo Methode wird eine Markoffkette mit einfachen Übergangsregeln erzeugt, deren Verteilung gegen eine gewünschte Gleichgewichtsverteilung konvergiert. Dabei kann diese Gleichgewichtsverteilung selbst statistisch von Interesse sein, wie die Equilibria des Ising Modells, oder so gebaut sein, dass sie nahe an dem Maximierer eines Optimierungsproblems konzentriert liegt. Das Problem und Lösungsansätze (*Metropolis Algorithmus, simulated annealing, Gibbs sampler* u. a.) werden im vierten Kapitel beschrieben.

Das fünfte Kapitel wendet sich der statistischen Untersuchung der Ergebnisse zu. Für den Fall von nicht unabhängigen aber stationären Ergebnissen (etwa durch wiederholtes Beobachten *einer* Realisierung einer Markoffkette) wird ad hoc eine einfache Zeitreihenanalyse durchgeführt.

Das sechste Kapitel reißt – leider viel zu kurz – die Problematik der Simulation von Gleichgewichtzuständen des Isingmodells an. Zu bedauern ist hier insbesondere, dass der so wichtige Swendsen-Wang-Algorithmus nur gestreift wird.

Das Buch ist gut geeignet, um sich schnell einen Einblick in die Verfahrensweise der Monte Carlo Simulation zu verschaffen, ohne sich in den Details der Theorie zu verlieren. Der Text orientiert sich an den Bedürfnissen derer, die ein solches Verfahren selber praktisch einsetzen möchten. Zu stark in die Tiefe geht das Buch nicht, allerdings werden im Text Hinweise auf weiterführende Literatur gegeben. Das Buch erscheint als Grundlage für ein (einfaches) Seminar ebenfalls geeignet.

Köln — A. Klenke



K.-H. Hoffmann, Q. Tang

Ginzburg-Landau Phase Transition Theory and Superconductivity

Basel u. a., Birkhäuser, 2001, 384 S., € 113,40

The discovery of high-temperature superconducting materials in the mid eighties gave a substantial impetus to the level of research interest in superconductivity not only in the engineering and physics community but also in the mathematical community. Indeed there has been an explosion in the level of activity by mathematicians both from the modelling and analytical perspectives. The principal model employed by mathematicians and physicists is the celebrated Ginzburg-Landau theory. The elements of this theory are a complex order parameter, ψ, whose magnitude gives the density of superconducting electron pairs and an energy functional involving a homogeneous free energy depending on ψ and the magnetic field and a gradient energy. The material is in a normal state if ψ is zero and in a fully superconducting state if the magnitude of the order parameter is one. The authors of this monograph have published widely in this field. Their interests being mainly in mathematical and numerical analysis. Their stated purposes in writing the book were to collect "recent research results ...", "... present mathematically sound results ..." and "... provide a good reference for researchers ...". Up to a point they have succesfully achieved their aims. Certainly there are many rigorous results concerning existence, regularity, qualitative properties and asymptotic limits. This is an account not just of the research carried out by the authors but also of leading researchers in the field . However the book is a little dated in that it does not take into account recent important developments. Also there are a number of typographical and grammatical errors which ought to have been avoided. Despite these reservations this monograph is unique in its treatment of the Ginzburg-Landau equations and will serve as a valuable introduction and source book for researchers outside and inside the field.

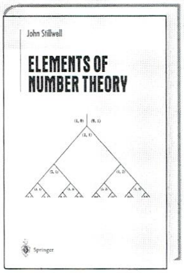
- The first chapter is an introduction to the macroscopic mathematical description of superconductivity. The fundamental concepts of Meissner effect, penetration depth, coherence length and vorticies are introduced. The Ginzburg-Landau model is presented as a phenomenological theory. The importance of dimensional scaling is revealed.
- Chapter 2 is a collection of ideas associated with phase transitions described by G-L functionals and the mathematical description of vortices as zero sets of a complex order parameter which are generically codimension two sets. Thus one is interested in point vortices for planar domains and line vortices in three space dimensions. This in in contrast to Ginzburg-Landau functionals for scalar order parameters, such as those arising in phase field

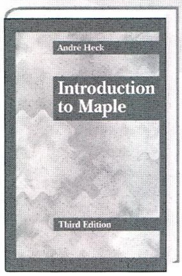
models, where the zero set of the parameter is generically a codimension one set.

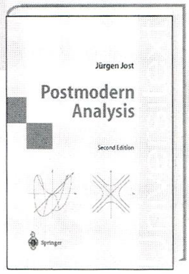
- Formal asymptotics based on very large G-L parameters with the ansatz of rapid transition from the zero set (normally a line) to the set where the magnitude of the order parameter is one lead to an equation of motion for an individual line vortex. The driving force is provided by solving a London equation for the magnetic field. These asymptotics are set out in Chapter 3. When the physical dimensions are such that there are many millions of vortices, it is appropriate to consider averaged models. This leads to so called mean field models developed by Chapman and E amongst others. For current engineering applications these provide the most useful mathematical descriptions, particularly so called critical state or Bean models. The mathematical theory for line vortices and mean field models require their own book/books.
- Steady state solutions are studied in Chapter 4. The existence theory for minimisers is presented. It is shown that for two space dimensional connected domains that the zero set of minimizers consists of isolated points. This justifies the codimension two nature of the zero set. However for annular domains as proved by Berger and Rubinstein this might not be the case. These results are independent of the G-L parameter κ. The line vortex nature of the zero set for minimizers in three space dimensions appears not to be settled yet.
- Chapter 5 is devoted to the theory of well posedness for evolutionary systems. Some ideas from dynamical systems theory relating to dissipative gradient systems are applied.
- The purpose of Chapter 6 is to discuss some rigorous results concerning phase transition asymptotics. A celebrated body of work by Brezis, Bethuel and Helein on the vortex structure of minimisers of the G-L functional forms the basis of the approach in this chapter. In order to control the number of vortices in the domain an unnatural boundary condition is imposed. It is a pity that the authors did not include an account of the work by Sandier and Serfaty which may have obviated the need for the study of this boundary condition.
- An approach to the rigorous study of vortex motion is presented in Chapter 7 in the context of the G-L equation without magnetic field. Formally the law of motion for a collection of point vortices in a planar domain was known for some time. In this book progress towards a proof based on work by Lin and Rubinstein and Sternberg is presented. Indeed there has been much progress in this area, for example by Jerrard, Soner and Lin, which is not reported on in the monograph.
- Dimensional reduction of three space dimensional G-L systems for thin film/plates is considered in Chapter 8.
- Inhomogeneities in superconductors lead to the phenomenon of pinning. The motion of vortices is impeded at various locations known as pinning sites. In the stationary case one expects that the location of vortices is associated with these pinning sites. In Chapter 9 inhomogeneity is introduced into the gradient energy functional and the vortex structure of minimisers is discussed.
- The final chapter turns to numerical analysis of the G-L model. The approximation theory for time discrete finite element solutions is presented. In particular an a posteriori analysis is given which is useful in adaptive simulations. A small number of numerical experiments are described. Because of the complex spatial structure of solutions to the G-L equations computational studies are important and compelling. It is a pity that more use of simulations was not made in this book. In particular it would have been extremely interesting to have simulations of line vortices in three space dimensional superconductors.

Sussex — Ch. M. Elliott

New Textbooks from *Springer*







J. Stillwell

Elements of Number Theory

This book is a concise introduction to number theory and some related algebra, with an emphasis on solving equations in integers. This is the only elementary number theory book that includes significant applications of ideal theory. It is clearly written, well illustrated, and supplied with carefully designed exercises, making it a pleasure to use as an undergraduate textbook or for independent study.

2003. XII, 254 p. 35 illus. (Undergraduate Texts in Mathematics)
Hardcover **49,95**; sFr 86,00; £ 35,00 ISBN 0-387-95587-9

A. Heck *3rd edition*

Introduction to Maple

This book is a gentle introduction to one of the modern computer algebra systems, Maple. Primary emphasis is on learning what can be done with Maple and how it can be used to solve (applied) mathematical problems.

3rd ed. 2003. XVI, 828 p. 221 illus. Hardcover
€ 49,95; sFr 86,00; £ 35,00 ISBN 0-387-00230-8

J. Jost *2nd edition*

Postmodern Analysis

An introduction to advanced analysis at the beginning graduate level that blends a modern presentation with concrete examples and applications, in particular in the areas of calculus of variations and partial differential equations.

2nd ed. 2003. XVII, 367 p. (Universitext) Softcover
€ 34,95; sFr 60,00; £ 24,50 ISBN 3-540-43873-4

B. Grünbaum *2nd edition*

Convex Polytopes

From the reviews: "…I first consulted this book as a graduate student in 1967; yet, even today, I am surprised again and again by what I find there. It is an amazingly complete reference for work on this subject…"
Louis J. Billera, Cornell University

2nd ed. 2003. XVI, 568 p. 162 illus. (Graduate Texts in Mathematics. Vol. 221) Hardcover **€ 79,95**; sFr 133,00; £ 56,00 ISBN 0-387-00424-6

L.M. Lee

Introduction to Smooth Manifolds

This book is an introductory graduate-level textbook on the theory of smooth manifolds, for students who already have a solid acquaintance with general topology, the fundamental group, and covering spaces, as well as basic undergraduate linear algebra and real analysis.

2003. XVII, 628 p. 157 illus. (Graduate Texts in Mathematics. Vol. 218)
Softcover **€ 54,95**; sFr 94,50; £ 38,50 ISBN 0-387-95448-1
Also available as a hardcover edition:
€ 84,95; sFr 141,00; £ 59,50 ISBN 0-387-95495-3

S. Xambó-Descamps

Block Error-Correcting Codes

A Computational Primer

This book covers the mathematical aspects of the theory of block error-correcting codes together, in mutual reinforcement, with computational discussions, implementations and examples of all relevant concepts, functions and algorithms. The digital companion of the book is a non-printable .pdf document with hyperlinks.

2003. X, 266 p. (Universitext) Softcover
€ 39,95; sFr 68,50; £ 28,00 ISBN 3-540-00395-9

Please order from
Springer · Customer Service
Haberstr. 7 · 69126 Heidelberg, Germany
Tel.: +49 (0) 6221 - 345 - 0
Fax: +49 (0) 6221 - 345 - 4229
e-mail: orders@springer.de
or through your bookseller

www.springer.de/math

Springer

All Euro and GBP prices are net-prices subject to local VAT, e.g. in Germany 7% VAT for books and 16% VAT for electronic products. Prices and other details are subject to change without notice. d&p · 009631x

ISSN 0012-0456