108. Band Heft 2, Juni 2006

D 20577

Jahresbericht

der Deutschen Mathematiker-Vereinigung

2 – 2006

Herausgegeben von K. Hulek
unter Mitwirkung von
U. Gather, H.-Ch. Grunau, H. Lange,
J. Rambau, A. Schied, Th. Sonar

Jahresbericht

der Deutschen Mathematiker-Vereinigung

Der „Jahresbericht" ist das offizielle Veröffentlichungsorgan der Deutschen Mathematiker-Vereinigung, für dessen inhaltliche Gestaltung im Auftrag des Präsidiums der jeweilige Herausgeber zuständig ist. Im „Jahresbericht" sollen vornehmlich Überblicksartikel über Teilgebiete der reinen und angewandten Mathematik, Nachrufe sowie historische Artikel, Berichte aus der Forschung und Buchbesprechungen veröffentlicht werden.

Manuskripte:

Alle für die Schriftleitung des Jahresberichts bestimmten Briefe und Manuskripte sind an *Prof. Dr. K. Hulek* zu richten. Für Buchbesprechungen ist *Prof. Dr. H. Lange* zuständig. Bücher, von denen eine Besprechung erfolgen soll, werden bei den Verlagen angefordert.

Die Autoren werden gebeten, für Manuskripte und Buchbesprechungen die **Standard-LATEX-Klasse article mit 10pt (default), \textwidth139mm, \textheight205mm** zu benutzen. Sollen Illustrationen in die Arbeiten integriert werden, können diese auch in das Satzsystem übernommen werden. Dazu ist es erforderlich, dass die Bilddaten der Abbildungen nochmals in separaten Dateien einzeln abgespeichert werden. Ein Foto des Autors sollte als Bilddatei in einem der gängigen Grafikformate (am unproblematischsten: TIF-Format; Graustufenbild mit einer Auflösung von mindestens 300 dpi) oder als normaler Papier-Fotoabzug zum Einscannen mitgeschickt werden. Als Datenträger sind ZIP-Disketten, CD-ROM bzw. Syquest (88 oder 200 MB) möglich.

Grundsätzlich sollen nur solche Manuskripte eingereicht werden, die nicht gleichzeitig an anderer Stelle zur Veröffentlichung eingereicht oder bereits veröffentlicht worden sind. Mit der Annahme zur Veröffentlichung erwirbt der Verlag das Verlagsrecht zur Vervielfältigung und Verbreitung sowie das Recht der Übersetzung in andere Sprachen.

Weitere Informationen zum „Jahresbericht" finden Sie unter
http://www.mathematik.uni-bielefeld.de/DMV/jb/index.html

Verlag:

B. G. Teubner Verlag | GWV Fachverlage GmbH
Abraham-Lincoln-Straße 46
65189 Wiesbaden
http://www.teubner.de
http://www.gwv-fachverlage.de

Geschäftsführer: Andreas Kösters,
Albrecht F. Schirmacher,
Dr. Heinz Weinheimer
Gesamtleitung Anzeigen: Thomas Werner
Gesamtleitung Produktion: Thomas Forner
Gesamtleitung Vertrieb: Gabriel Göttlinger

Marketing/Sonderdrucke:

Eva Brechtel-Wahl
Telefon: (06 11) 78 78-3 79, Fax: (06 11) 78 78-4 39, E-Mail: eva.brechtel-wahl@gwv-fachverlage.de

Abonnentenverwaltung:

(Änderungen von Adressen und Bankverbindung, Rückfragen zu Rechnungen oder Mahnung)
VVA-Zeitschriftenservice, Abt. D6F6 / Jahresbericht der Deutschen Mathematiker-Vereinigung,
Postfach 7777, 33310 Gütersloh
Ursula Müller
Telefon: (0 52 41) 80-19 65, Fax: (0 52 41) 80-96 20, E-Mail: ursula.mueller@bertelsmann.de

Anzeigenleitung

Christian Kannenberg
Telefon: (06 11) 78 78-3 69, Fax: (06 11) 78 78-4 30, E-Mail: christian.kannenberg@gwv-fachverlage.de
www.gwv-anzeigen.de

Es gilt die Preisliste vom 01.01.2006.

Bezugsbedingungen:

Die Zeitschrift erscheint 4mal jährlich zum Jahresabonnementpreis von € 112,– (180,37 sF o. MwSt.) inkl. Versandkosten. Der Bezug von Einzelheften ist nicht möglich. Schriftliche Kündigung des Abonnements spätestens sechs Wochen vor Ablauf des Bezugsjahres.

Für persönliche Mitglieder der DMV, die den Jahresbericht zu beziehen wünschen, ist der zwischen DMV und Verlag vereinbarte Bezugspreis maßgebend, der im Rahmen des Mitgliedsbeitrags erhoben wird.

Copyright ©

B. G. Teubner Verlag | GWV Fachverlage GmbH, Wiesbaden 2006. Printed in Germany. Der Verlag B. G. Teubner ist ein Unternehmen von Springer Science+Business Media. Alle Rechte vorbehalten. Kein Teil dieser Zeitschrift darf ohne schriftliche Genehmigung des Verlages vervielfältigt oder verbreitet werden. Unter dieses Verbot fällt insbesondere die gewerbliche Vervielfältigung per Kopie, die Aufnahme in elektronischen Datenbanken und die Vervielfältigung auf CD-ROM und allen anderen elektronischen Datenträgern.

Satz: Fotosatz Behrens, D-68723 Oftersheim
Druck: Wilhelm & Adam, Heusenstamm

ISSN 0012-0456

Jahresbericht der Deutschen Mathematiker-Vereinigung, 108. Bd. 2006, Nr. 2

Vorwort 63

Übersichtsartikel	Historische Beiträge	Berichte aus der Forschung	Buchbesprechungen

Recent Developments in Mathematical Finance: A Practioner's Point of View
M. Overhaus et al. 65

Maps on Matrix and Operator Algebras
P. Šemrl 91

Übersichtsartikel	Historische Beiträge	Berichte aus der Forschung	Buchbesprechungen

Peter Slodowy
E. Looijenga, T. A. Springer 105

Übersichtsartikel	Historische Beiträge	Berichte aus der Forschung	Buchbesprechungen

I. Wegener: Komplexitätstheorie, Grenzen der Effizienz von Algorithmen
K. Meer *5*

G. Mislin, A. Valette: Proper Group Actions and the Baum-Connes Conjecture
S. Echterhoff *8*

S. Osher, R. Fedkiv: Level Set Methods and Dynamic Implicit Surfaces
K. Deckelnick *11*

Jahresbericht der Deutschen Mathematiker-Vereinigung, 108. Bd. 2006, Nr. 2

In den nächsten Heften erscheinende Arbeiten

M. Einsiedler: Ratner's Theorem
G. Krummheuer: Wie „soft" sind die Softkills des Mathematiklernens?
W. Oberschelp: Nachruf auf Hans Hermes

Anschriften der Herausgeber

Prof. Dr. K. Hulek, Institut für Algebraische Geometrie, Universität Hannover, Welfengarten 1, 30167 Hannover
E-Mail: hulek@math.uni-hannover.de

Prof. Dr. Ursula Gather, Lehrstuhl für Mathematische Statistik und industrielle Anwendungen, Universität Dortmund, 44221 Dortmund
E-Mail: gather@statistik.uni-dortmund.de

Prof. Dr. H.-Ch. Grunau, Institut für Analysis und Numerik, Otto-von-Guericke-Universität Magdeburg, Postfach 4120, 39016 Magdeburg
E-Mail: hans-christoph.grunau@mathematik.uni-magdeburg.de

Prof. Dr. Herbert Lange, Mathematisches Institut, Friedrich-Alexander-Universität Erlangen-Nürnberg, Bismarckstraße 1a, 91054 Erlangen
E-Mail: lange@mi.uni-erlangen.de

Prof. Dr. J. Rambau, Fakultät für Mathematik, Physik und Informatik, Universität Bayreuth, 95440 Bayreuth
E-Mail: Joerg.Rambau@uni-bayreuth.de

Prof. Dr. A. Schied, Institut für Mathematik, Technische Universität Berlin, Straße des 17. Juni 136, 10623 Berlin
E-Mail: schied@math.tu-berlin.de

Prof. Dr. Th. Sonar, Institut für Analysis, Technische Universität Braunschweig, Pockelsstraße 14, 38106 Braunschweig
E-Mail: t.sonar@tu-bs.de

Bezugshinweis

Früher erschienene Bände (ab Band 68) des „Jahresberichts der Deutschen Mathematiker-Vereinigung" können durch den Buchhandel oder den Verlag bezogen werden.

Nachdruck der Bände 41 bis 67 liefert: Swets & Zeitlinger, Heereweg 347b, POB 810, NL-2160 SZ Lisse/Holland

Jahresbericht der Deutschen Mathematiker-Vereinigung, 108. Bd. 2006, Nr. 2

Vorwort

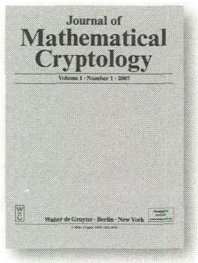
Dieses Heft enthält drei sehr verschiedene Beiträge. Der Artikel „Recent Developments in Mathematical Finance: A Practioner's Point of View" wurde von einer Gruppe von Mathematikern verfasst, die, wie der Titel bereits besagt, nicht in der akademischen Forschung arbeiten, sondern für eine bedeutende Bank. Es handelt sich hier um eine Einführung in Themen der Finanzmathematik, wobei insbesondere der Praxisbezug im Vordergrund steht. Dabei geht es nicht nur um das berühmte Black-Scholes Modell, sondern auch um dessen Weiterentwicklung und die Entwicklung neuer Optionsmodelle.

In seinem Übersichtsartikel berichtet Peter Šemrl über Abbildungen von Matrix- und Operatoralgebren. Die Fragestellungen, die hier behandelt werden, haben ihren Ursprung in verschieden Gebieten, etwa in Physik, Geometrie, linearer Algebra oder der Funktionalanalysis. Der Autor zeigt auf, wie verschiedene, zunächst disjunkt erscheinende Probleme, eng zusammenhängen. Bei diesem Aufsatz handelt es sich um eine erweiterte Fassung des Vortrags, den der Autor während der Jahrestagung von DMV und ÖMG in Graz gehalten hat.

Schließlich enthält dieser Band einen Nachruf auf den Mathematiker Peter Slodowy, Professor in Hamburg, der 2002 im Alter von nur 54 Jahren nach jahrelanger schwerer Krankheit gestorben ist. E. Looijenga und T. A. Springer zeichnen nicht nur den Lebensweg von P. Slodowy nach, sondern gehen auch auf seine wissenschaftlichen Arbeiten ein, die großen Einfluss auf das Gebiet der algebraischen Gruppen und in der Singularitätentheorie haben.

Wie immer finden Sie auch in diesem Heft eine Reihe aktueller Buchbesprechungen.

K. Hulek



Starting in 2007

■ Journal of Mathematical Cryptology

Managing Editors

Spyros Magliveras (Florida Atlantic University, USA)
Rainer Steinwandt (Florida Atlantic University, USA)
Tran van Trung (Universität Duisburg-Essen, GER)

ISSN 1862-2976

Editorial Board

S. Blackburn (Royal Holloway, University of London, UK)
E. Brickell (Intel Corporation, USA)
M. Burmester (Florida State University, USA)
R. Cramer (Leiden University/CWI, NL)
E. Dawson (Queensland University of Technology, Brisbane, AUS)
G. Frey (Universität Duisburg-Essen, GER)
R. Gilman (Stevens Inst. of Technology, USA)
O. Grosek (Slovak Technical University, SK)
H. Imai (University of Tokyo, JAP)
K. Kim (ICU, KOR)
N. Koblitz (University of Washington, USA)
K. Kurosawa (Ibaraki University, JAP)
S. Magliveras (Florida Atlantic University, USA)
A. Menezes (University of Waterloo, CAN)
R. Mullin (University of Waterloo, CAN / Florida Atlantic University, USA)
P. Nguyen (École normale superiéure, FRA)
B. Pfitzmann (IBM Research Zurich, CH)
J. Pieprzyk (Macquarie University, AUS)
R. Safavi-Naini (University of Wollongong, AUS)
R. Steinwandt (Florida Atlantic University, USA)
D. Stinson (University of Waterloo, CAN)
T. van Trung (Universität Duisburg-Essen, GER)
W. Wei (Florida Atlantic University, USA)
H. Williams (University of Calgary, CA)
M. Yung (Columbia University, USA)

Aims and Scopes

The Journal of Mathematical Cryptology (JMC) is a forum for original research articles in the area of mathematical cryptology. Works in the theory of cryptology and articles linking mathematics with cryptology are welcome. Submissions from all areas of mathematics significant for cryptology are invited, including but not limited to, algebra, algebraic geometry, coding theory, combinatorics, number theory, probability and stochastic processes. The scope includes mathematical results of algorithmic or computational nature that are of interest to cryptology. While JMC does not cover information security as a whole, the submission of manuscripts on information security with a strong mathematical emphasis is explicitly encouraged.

Call for papers
A manuscript can be submitted to any one of the Managing Editors
Spyros S. Magliveras (Email: spyros@fau.edu), Rainer Steinwandt (Email: RSteinwa@fau.edu), or Tran van Trung (Email: trung@iem.uni-due.de).

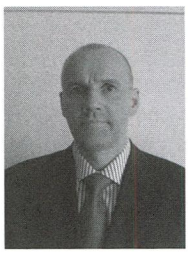
Subscription Information

JMC has four issues per year, with approximately 100 pages per issue.
Approximate subscription rates for 2007:
Print only: approx. € 288.00 / *US$ 348.00
Online only: approx. € 288.00 / *US$ 348.00
Print + Online: approx. € 312.00 / *US$ 378.00

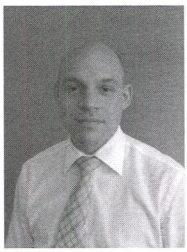
W DE G de Gruyter
Berlin · New York

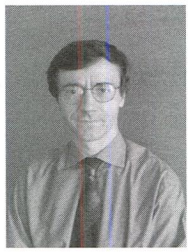
** for orders placed in North America.*
Prices subject to change.
Recommended retail prices; VAT included, shipping costs will be added.

WWW.DEGRUYTER.COM


M. Overhaus

A. Bermudez


H. Buehler


A. Ferraris

C. Jordinson

A. Lamnouar

A. Puthu

Recent Developments in Mathematical Finance: A Practitioner's Point of View

Abstract

- Mathematics Subject Classification: 91 B 24
- Keywords and Phrases: Black-Scholes, Equity Derivatives, Hedging, Replication, Variance Swaps

This article is an introduction into the principles of financial mathematics with a strong view on how the theory is actually used in practise. Using a very basic model, we explain the importance of replication of a financial contract. Afterwards, we show that the concept of replication is an integral part not only of the famous Black&Scholes model but also of more general diffusion based models.

The ideas are then applied to the pricing and hedging of options on variance. In this context, we present recent results on the modelling of the term-structure of variance swaps.

Eingegangen: 24.10.2005, in überarbeiteter Form am 15.12.2005

Quantitative Products Analytics Deutsche Bank AG, Global Markets Equity, Deutsche Bank AG London, 1 Great Winchester Street, London EC2N 2EQ, United Kingdom

DMV
JAHRESBERICHT DER DMV
© B. G. Teubner 2006

1 Introduction

The rise of the financial markets in the last decades has spurred a rapid development of the relatively young field of mathematical finance. Its origins lie in Bachelier's works around 1900 [B00], but it has gained significant attention only with the publication of the works from Black, Scholes and Merton (BSM), [BS73] and [M73a], in 1973, who were the first to apply systematically the most fundamental principle of today's applied finance: the idea of *replication.*

While an insurance company may write contracts on events such as people's deaths, fire accidents, car crashes etc., a financial institution may want to write a contract depending on the movement of a stock price index (a "contingent claim" or "option"). From an economic point of view, the main difference between the number of car crashes and the price level of some index is that we can *trade* in the stock. An insurance company has no means of reacting to market information such as an increased number of car crashes once the contract has been issued. However, the writer (issuer) of a contingent claim is able to trade frequently in the underlying stock price throughout the life of the contract.

This is where the idea of replication starts: the issuer of a contract on the index tries to trade in the index itself such that the value of the trading portfolio is always equal to the value of the obligations arising from the contract. If this is possible, then the "fair" price of the contract must be the cost of the associated replication strategy and since there is no risk involved in executing the strategy, this price is independent of any risk-preference. This fundamental insight has been formalized by Merton [M73b], Harrison and Kreps [HK79] and Harrison and Pliska [HP81] for markets which are "free of arbitrage" in the sense that there is no[1] trading strategy whose execution bears no costs, but which has a non-zero probability of a positive payoff (we call such a strategy a "free lunch").

A key concept here is the idea of a *martingale*: this is a stochastic process such that the expected value of the process at a later time coincides with the known value at the observation time. Hence, it resembles the idea of a "fair" game. Mathematically, the "First Fundamental Theorem of Asset Pricing" states that the market is free of arbitrage if and only if there exists a measure, equivalent to the initial measure, under which all discounted price processes are martingales.[2] Moreover, if this *martingale measure* is unique, then all contingent claims can be replicated and their unique prices are given as discounted expectations under this measure. In this sense, the initial "historic" or "observable" measure plays no other role than to identify which are the possible and which are the impossible states of the world: its actual probabilities do not enter into the construction of a replication strategy and therefore the computation of a contingent claim's price.

The success of Black, Scholes and Merton's model cannot be underestimated: ever since the publication of their articles, huge markets of liquid (i.e. exchange-traded) options have developed. By now, these markets have moved far beyond BSM and the prices of so-called "vanilla" options are subject to supply and demand and cannot be explained anymore by the original BSM model.[3]

This situation poses a new challenge to financial mathematics: since liquid options can be traded on the exchange, there is no immediate need anymore to replicate them. This has become the role of the "market". Rather, they become by themselves *assets* and we can use them alongside the underlying share or index to hedge risks appearing in more complex structures. This in turn requires us to research models which are consistent with a range of observed liquid options which then can be used to price advanced structured products.

2 The Paradigm of Replication

To illustrate the idea of replication, let us first consider a quite simple scenario: hedging of a call option in a one-period model.

A call is the *right to buy* the stock S at time T for a fixed price K. Clearly, if the stock price S_T at T is below K, we would not make use of this right since we can buy the stock cheaper in the market. However, if S_T is larger than K, then we can buy the stock for K and sell it instantly for S_T, thereby locking in a profit of $S_T - K$. Hence, we can write the value of the payoff of a call with maturity T and strike K as

$$(1) \quad C_T := \left(S_T - K\right)^+.$$

(with $x^+ := \max(0, x)$).

Let us assume that a share is trading today at around $S_0 = €100$. We also assume that it is well-known in the market that the stock price S_1 in one year will either be €200 with a probability of 95%, or €98 with 5%. If we want to borrow €1 from the bank today, we will have to pay back €1.05 in one year. We therefore set the value of the bank account today to $B_0 = €1$ and in one year to $B_1 = €1.05$.

In the language of probability theory, we use a probability space $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{Q})$ with two states of the world, $\Omega = \{\omega_u, \omega_d\}$, a set of events $\mathcal{A} = \mathcal{P}(\Omega)$ (the power set) and a probability measure $\mathbb{Q}[\{\omega_u\}] = 95\%$ and $\mathbb{Q}[\{\omega_d\}] = 5\%$. The "process" $S = (S_0, S_1)$ is defined only for the discrete times $t = 0, 1$ and it has the values $S_1(\omega_u) = €200$ and $S_1(\omega_d) = €98$. The cash account $B = (B_0, B_1)$ is deterministic. We also assume that we can invest any amount we want in shares or the cash account, including fractional and negative amounts. Moreover, we assume there are no transaction costs, taxes etc.

Under these assumptions, we want to sell a call with strike $K = €100$. Such a call contract looks like quite a good investment opportunity: it pays out €100 in 95% of all possible future scenarios.

The question at hand is: what is a "fair" price of the call?

If we were thinking in insurance terms, we might suggest to use as a price the average return: $95\% \, €100 = €95$. That may sound reasonable since, *on average*, neither party will make a sure gain or loss. However, we missed the main point made in the introduction: we can trade in the underlying. Can we implement a trading strategy which allows us to deliver the promised payoff without any risk? In our case, the "strategy" can only be an initial investment of Δ into the stock and an investment of β into the cash account. The "fair" price would then be the cost of the implementation of the strategy – hence, the real question is:

How much money do we need to invest in both stock and cash account to be able to replicate the terminal payoff call with $T = 1$ and $K = €100$?

Well, since we only have two possible states of the world, we simply obtain two linear equations for the amount Δ to invest in the share and the amount β to invest in the cash account:

$$(2)\quad \begin{pmatrix} C_1(\omega_u) \\ C_1(\omega_d) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} S_1(\omega_u) & B_1 \\ S_1(\omega_d) & B_1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \Delta \\ \beta \end{pmatrix}$$

Now note that it is far more natural to use discounted values for the value of a contract and the stock price since this allows us to compare cash flows based on a single reference date. We therefore divide the above equation by the cash value B_1 and obtain an equivalent equation in terms of the discounted values $\hat{S}_t := S_t/B_t$ and $\hat{C}_t := C_t/B_t$:

$$(3)\quad \begin{pmatrix} \hat{C}_1(\omega_u) \\ \hat{C}_1(\omega_d) \end{pmatrix} = \hat{X}_1 \begin{pmatrix} \Delta \\ \beta \end{pmatrix} \quad \text{with} \quad \hat{X}_1 := \begin{pmatrix} \hat{S}_1(\omega_u) & 1 \\ \hat{S}_1(\omega_d) & 1 \end{pmatrix}$$

Since $S_1(\omega_u) \neq S_1(\omega_d)$, we can invert $\hat{X}_1$ (which does not depend on the payoff C_1) and compute

$$(4)\quad \begin{pmatrix} \Delta \\ \beta \end{pmatrix} = \hat{X}_1^{-1} \begin{pmatrix} \hat{C}_1(\omega_u) \\ \hat{C}_1(\omega_d) \end{pmatrix}.$$

The initial price of this strategy is therefore

$$\hat{C}_0 = (\hat{S}_0, 1)\hat{X}_1^{-1} \begin{pmatrix} \hat{C}_1(\omega_u) \\ \hat{C}_1(\omega_d) \end{pmatrix} = p_0(\omega_u)\,\hat{C}_1(\omega_u) + p_0(\omega_d)\,\hat{C}_1(\omega_d)$$

with

$$p_0(\omega_u) = \frac{\hat{S}_0 - \hat{S}_1(\omega_d)}{\hat{S}_1(\omega_u) - \hat{S}_1(\omega_d)} \quad \text{and} \quad p_0(\omega_d) = \frac{\hat{S}_1(\omega_u) - \hat{S}_0}{\hat{S}_1(\omega_u) - \hat{S}_1(\omega_d)}\,.$$

Remarkably, neither $\hat{X}_1^{-1}$ nor the quantities $p_0(\cdot)$ depend at all on the particular payoff. That means that the fair price of any payoff H with values $H_1(\omega_u)$ and $H_1(\omega_d)$ is uniquely given as

$$(5)\quad H_0 = p_0(\omega_u)\,\frac{H_1(\omega_u)}{B_1} + p_0(\omega_d)\,\frac{H_1(\omega_d)}{B_1}.$$

In our example above, we obtain

$$p_0(\omega_u) = \frac{1}{1.05}\,\frac{1.05\,€100 - €98}{€200 - €98} = 6.54\%$$

and $p_0(\omega_d) = 1 - p_0(\omega_u) = 93.46\%$. Consequently, the fair price of the call which will pay out €100 in 95% of all cases is surprisingly low:

$$C_0 = 6.54\%\,\frac{€200 - €100}{1.05} = €6.22\,.$$

There is another important aspect in the previous computation: in equation (5) above, the quantities $p_0(\omega_u)$ and $p_0(\omega_d)$ are between zero and one as long as

$$(6)\quad \hat{S}_0 > \hat{S}_1(\omega_d) \quad \text{and} \quad \hat{S}_1(\omega_u) > \hat{S}_0.$$

If this is not the case, it means that the stock will either always outperform an investment in the cash account or always underperform it. But this is clearly an arbitrage situation because if the share always outperforms the cash account, then we borrow money to buy the shares and reap a sure profit. Reversely, we sell the stock and invest the proceeds in the cash account.[4] Now imagine one of the two situations would occur. In that case, everybody would rush to exploit the arbitrage opportunity. As an effect, it would disappear quickly, and we conclude intuitively that in a frictionless market no arbitrage opportunity should exist. Under this assumption, that "there is no free lunch", we have therefore shown that (6) must hold.

If (6) holds, $p_0(\cdot)$ can be interpreted as *probabilities* of the outcomes ω_u and ω_d under some measure. Equation (5) can then be written very intuitively as an expectation

$$(7) \quad H_0 = \frac{1}{B_1} \mathbb{E}_{\mathbb{P}}[H_1]$$

in terms of the so-called *risk-neutral* measure defined by $\mathbb{P}[\{\omega_u\}] := p_0(\omega_u)$ and $\mathbb{P}[\{\omega_d\}] := p_0(\omega_d)$.

It is a general concept in finance that a price of a payoff H_1 is usually given as the discounted expectation under a so-called *risk-neutral* measure $\mathbb{P}$.

Of course, a two-state model is too limited for real-life applications. A first improvement is to allow more than one time-period: in each period $0 = t_0 < \cdots < t_n = T$, the stock can either go up or down, so we obtain a tree-like process: for each single node, the situation is locally the same as above. Since we know the value of the contract H at maturity (it is just the payoff), we can compute the value of the contract on each node just before maturity using the same ideas around (5) above. This procedure is then iteratively applied backwards to the evaluation date $t = 0$ and yields today's price of the contract. This price can also be written as an expectation,

$$(8) \quad H_0 = \frac{1}{B_T} \mathbb{E}_{\mathbb{P}}[H_T]$$

in terms of the iteratively defined risk-neutral measure $\mathbb{P}$.

The obvious question is then what happens if the number of time-periods n goes to infinity. Under some regularity conditions,[5] the tree model above will converge against the aforementioned Black/Scholes/Merton model: this is a continuous time model based on Brownian motion.

2.1 Stochastic Calculus

We now work on a probability space $\mathbb{W} = (\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{F}, \mathbb{Q})$. A standard Brownian motion $W^{\mathbb{Q}}$ on $\mathbb{W}$ with horizon T^* is a stochastic process $W^{\mathbb{Q}} = (W_t^{\mathbb{Q}})_{t\in[0,T^*]}$ with continuous trajectories $t \mapsto W_t^{\mathbb{Q}}(\omega)$ and independent, normally distributed increments $W_t - W_s$ with mean zero and variance $t - s$. Such a process formalizes the concept of "random shocks". The BSM-model (based on Samuelson's work [S65]) is written in differential form as

$$(9) \quad \begin{aligned} dS_t(\omega) &= \mu S_t(\omega)\, dt + \sigma S_t(\omega)\, dW_t^{\mathbb{Q}}(\omega) & S_0 &\in \mathbb{R}^+ \\ dB_t &= r B_t\, dt & B_0 &= 1. \end{aligned}$$

The idea is that the stock price S has some deterministic drift μ and that it is subject to sudden random shocks $dW^{\mathbb{Q}}$ with volatility σ. The cash account accrues interest with an instantaneous rate of r.

The problem with (9) is that the continuous paths $t \mapsto W_t^{\mathbb{Q}}(\omega)$ of Brownian motion are very rough: they are almost surely not differentiable (see figure 1).

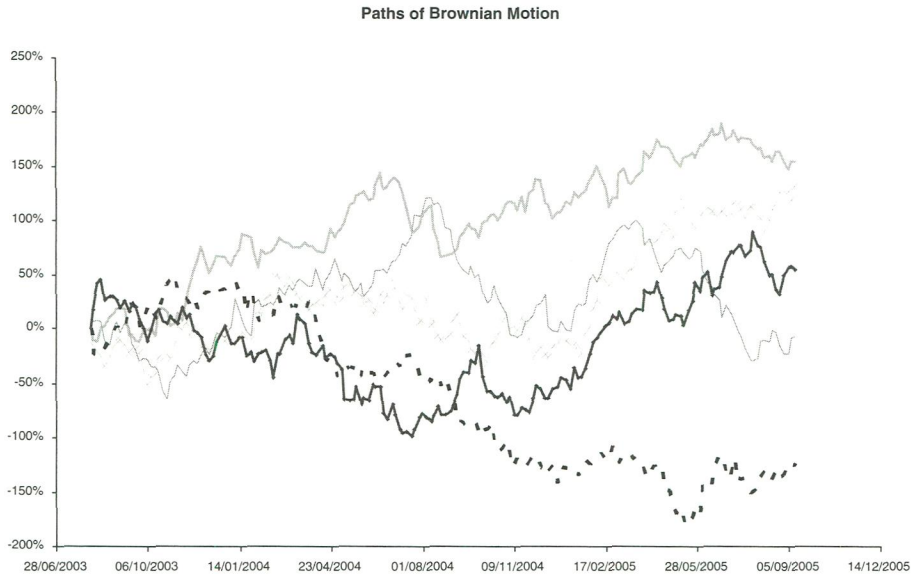


Figure 1: Sample paths of Brownian motion

Indeed, the paths $\omega \mapsto W_\cdot^{\mathbb{Q}}(\omega)$ are not of finite variation, so the Fundamental Theorem of Calculus does not hold. This observation is the starting point for developing the theory of stochastic calculus which has been pioneered by Itô [I44] and, less well-known, Doeblin [D40]. This theory develops the notion of stochastic diffusion processes which are solutions to stochastic differential equations of the form

$$(10) \quad dX_t(\omega) = a\big(t; X_t(\omega)\big)\, dt + \sum_{j=1}^{n} b^j\big(t; X_t(\omega)\big)\, dW_t^j(\omega) \quad X_0 = x \in \mathbb{R}$$

where $W = (W^1, \ldots, W^n)$ is a vector of independent Brownian motions and where the "drift" vector a and the "volatility" matrix b are measurable functions. If they are sufficiently well-behaved (for example, if they are globally Lipschitz) then (10) has a unique solution.[6]

Even though the variation of such a *diffusion* X is generally not finite, the quadratic variation

$$
\begin{aligned}
\langle X\rangle_T(\omega) &:= \lim_{m\uparrow\infty}\sum_{i=1}^{m}\Big(X_{i\frac{T}{m}}(\omega) - X_{(i-1)\frac{T}{m}}(\omega)\Big)^2 \\
&= \sum_{j=1}^{n}\int_0^T b^j\big(t; X_t(\omega)\big)^2\,dt
\end{aligned}
\tag{11}
$$

of such a process is a suitable integrator. As a result,[7] the famous *Itô-formula* holds for $f \in C^{1,2}$:

$$
\begin{aligned}
f(T, X_T(\omega)) - f(0, X_0) &= \int_0^T \partial_t f(t, X_t(\omega))\,dt \\
&\quad + \int_0^T \partial_x f(t, X_t(\omega))\,dX_t(\omega) \\
&\quad + \frac{1}{2}\int_0^T \partial^2_{xx} f(t, X_t(\omega))\,d\langle X\rangle_t(\omega) \\
&= \int_0^T \Big(\partial_t f(t, X_t(\omega)) + \partial_x f(t, X_t(\omega))\,a\big(t; X_t(\omega)\big)\Big)\,dt \\
&\quad + \sum_{j=1}^{n}\int_0^T \partial_x f(t, X_t(\omega))\,b^j\big(t; X_t(\omega)\big)\,dW^j_t(\omega) \\
&\quad + \frac{1}{2}\sum_{j=1}^{n}\int_0^T \partial^2_{xx} f(t, X_t(\omega))\,b^j\big(t, X_t(\omega)\big)^2\,dt.
\end{aligned}
$$

It is often written in concise differential form without the ω argument,

$$
\begin{aligned}
df(t, X_t) = &\Big(\partial_t f(t, X_t) + \partial_x f(t, X_t)\,a(t, X_t) + \frac{1}{2}\partial^2_{xx} f(t, X_t)\,b(t, X_t)^2\Big)\,dt \\
&+ \partial_x f(t, X_t)\,a(t, X_t)\;dW_t.
\end{aligned}
\tag{12}
$$

Extensions to the case where X takes values in $\mathbb{R}^m$ are straight-forward. From here, the entire theory is built up: an integral

$$\int_0^T \varphi_t(\omega)\,dX_t(\omega)$$

with respect to X is again a well-defined diffusion for all "non-anticipating" processes $\varphi = (\varphi_t)_{t\in[0,T^*]}$ which are suitably integrable.[8] "Non-anticipating" means that the value of φ_t can not incorporate information beyond time t. This concept is formalized using a set $\mathbb{F} = (\mathcal{F}_t)_{t\in[0,T^*]}$ of σ-algebras $\mathcal{F}_t$, each of which represents the information available at time t. The set $\mathbb{F}$ is called a *filtration* and the processes X and φ are required to be *adapted* to $\mathbb{F}$.

Using Itô's formula (12) it is straight forward to confirm that

$$
\begin{aligned}
S_t(\omega) &= S_0 \exp\Big\{(\mu - \frac{1}{2}\sigma)t + \sigma W^{\mathbb{Q}}_t(\omega)\Big\} \\
B_t &= e^{rt}
\end{aligned}
$$

is the solution to BSM's model (9). Such a process S is called a *geometric Brownian mo-*

tion with drift μ and volatility σ and it is strictly positive for all finite t. In the special case where the drift vanishes and where σ is one, S is called *stochastic exponential or Doléans-Dade exponential* because it solves the fundamental equation

$$dS_t(\omega) = S_t(\omega)\, dW_t^{\mathbb{Q}}(\omega) \ .$$

The picture of the paths of a geometric Brownian motion in figure 2 illustrates better than any economic or financial argument why the stochastic exponential is widely used in financial modeling:

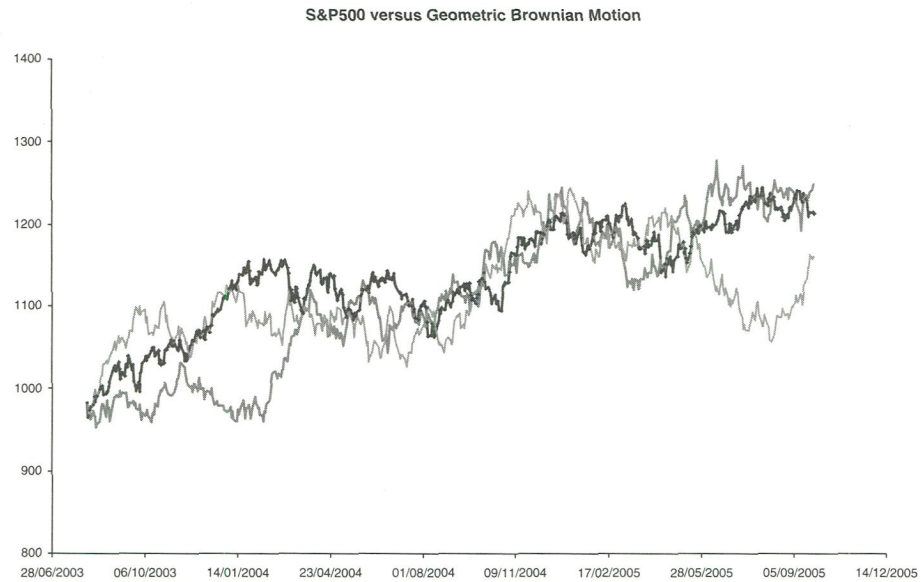


Figure 2: The graph shows a few paths of a geometric Brownian motion (with $\sigma = 15\%$) alongside historical S&P 500 prices. Which one is the index?

2.2 Hedging in Black, Scholes, Merton

Given BSM's model for the evolution of the stock price, the task at hand is now to develop replication or *hedging* strategies for payoffs based on the underlying stock: if we promised a certain payoff to the buyer of a contract, we aim to replicate its value by continuous trading in stock and cash account.

A payoff H_T with maturity T is an $\mathcal{F}_T$-measurable non-negative random variable H_T: the measurability condition formalizes the idea that H_T must be determined by the path of S up to T, while non-negativity (which can be replaced by "bounded from below") ensures integrability of the payoff under all probability measures.

A good example is the call (1) with strike K and maturity T,

$$(13) \quad H_T(\omega) := C_T(\omega) = \Big(S_T(\omega) - K\Big)^+ .$$

As before, we search for a hedging strategy $\varphi = (\Delta, \beta)$ which replicates the payoff H_T: the random process $\Delta = (\Delta_t)_{t\in[0,T]}$ specifies how many shares we will hold at any time t and β tells us how much money we will invest in the cash account. In other words, the value of our portfolio of shares and cash account at time $t \in [0, T]$ is given as

$$U_t(\omega) := \Delta_t(\omega)S_t(\omega) + \beta_t(\omega)B_t \ .$$

If φ moreover replicates H_T, then this implies that

$$H_T(\omega) = U_T(\omega) \ .$$

However, we do not want to allow all possible strategies (Δ, β). Indeed, all costs which may incur during the hedging should be covered by the initial cost of the hedge, $U_0 = \Delta_0 S_0 + \beta_0$, and no further cash injection should be required after the inception of the contract. Such a strategy is called *self-financing*. Mathematically, this means that the change value of the portfolio over time is the result of the change of the value of stock and cash account:

$$(14) \quad dU_t(\omega) = \Delta_t(\omega)\, dS_t(\omega) + \beta_t(\omega)\, dB_t,$$

i.e.

$$(15) \quad U_t(\omega) = U_0 + \int_0^t \Delta_u(\omega)\, dS_u(\omega) + \int_0^t \beta_u(\omega)\, dB_u.$$

If then φ replicates H_T, it is appropriate to call

$$H_t(\omega) := U_t(\omega)$$

the *price* of H_T at time $t \in [0, T]$.

We have transformed the task of finding a hedging strategy to the task of determining U and Δ such that $H_T = U_T$: once they are specified, we can always make our portfolio self-financing by borrowing or investing an appropriate amount of money in the cash account. Formally, this means that β is given as the ratio

$$(16) \quad \beta_t(\omega) = \frac{1}{B_t}\Big(U_t(\omega) - \Delta_t(\omega)S_t(\omega)\Big).$$

It is relatively straight-forward to see that this yields via (15) the representation

$$(17) \quad \hat{U}_t(\omega) = \hat{U}_0 + \int_0^t \Delta_t(\omega)\, d\hat{S}_t(\omega)$$

in terms of the *discounted values*

$$\hat{S}_t(\omega) := B_t^{-1} S_t(\omega) \ , \quad \hat{B}_t \equiv 1 \quad \text{and} \quad \hat{U}_t(\omega) := B_t^{-1} U_t(\omega) \ .$$

The discounted stock price process $\hat{S}$ satisfies the SDE

$$(18) \quad d\hat{S}_t(\omega) = (\mu - r)\hat{S}_t(\omega)\, dt + \sigma \hat{S}_t(\omega)\, dW_t^{\mathbb{Q}}(\omega) \quad S_0 \in \mathbb{R}^+.$$

We will also write $\hat{H}_t := \hat{U}_t$ for $t \in [0, T]$ if $\hat{U}_T = \hat{H}_T$.

The idea of expressing the financial quantities S, U and H relative to the value of the cash account is very natural: in fact, the value of any contract is always relative to the risk-free interest we can earn by investing in the cash account. Therefore, it makes

perfect economic sense to use B itself as a unit for our computations. Mathematically, both approaches are equivalent.

Black, Scholes, Merton

To find now the required Δ-hedge in BSM's model, one can make use of the *representation property* of Brownian motion: this property says that every sufficiently integrable random variable $\hat{H}_T$ can be uniquely written as

$$\hat{H}_T(\omega) = \hat{H}_0^{\mathbb{Q}} + \int_0^T \phi_s^{\mathbb{Q}}(\omega)\, dW_s^{\mathbb{Q}}(\omega) \tag{19}$$

for a integrable process $\phi^{\mathbb{Q}}$ and an initial value $\hat{H}_0^{\mathbb{Q}}$.[9]

This expression does not help us very much yet, since the Brownian motion $W^{\mathbb{Q}}$ itself cannot be traded in the market. However, given (18) we may write

$$dW_t^{\mathbb{Q}}(\omega) = \frac{d\hat{S}_t(\omega) - (\mu - r)\hat{S}_t(\omega)\, dt}{\hat{S}_t(\omega)\sigma},$$

so we obtain

$$\hat{H}_T(\omega) = \hat{H}_0^{\mathbb{Q}} + \int_0^T \frac{\phi_t^{\mathbb{Q}}(\omega)}{\sigma \hat{S}_t(\omega)}\, d\hat{S}_t(\omega) - \int_0^T \frac{\phi_t^{\mathbb{Q}}(\omega)(\mu - r)}{\sigma}\, dt. \tag{20}$$

Unfortunately, this approach does not seem to work either: while it is perfectly possible to trade the stock according to the strategy $\phi_t^{\mathbb{Q}}/\sigma\hat{S}_t$, we cannot realize the right hand integral by dynamic trading in some tradable market instrument (recall that $d\hat{B}_t \equiv 0$). Hence, we would have to inject additional cash into the hedge, which implies that the strategy is not self-financing. This can also be seen by comparing (20) with (17).

The solution to this hurdle comes in the form of a further fundamental theorem of stochastic calculus: the *Cameron-Martin-Girsanov theorem.* It dictates how processes change if we move from one measure $\mathbb{Q}$ to an alternative measure measure $\mathbb{P}$: assume that $\lambda = (\lambda_t)_{t\in[0,T^*]}$ is a bounded integrable process and define

$$D_t(\omega) := \exp\left\{ \int_0^t \lambda_s(\omega)\, dW_s^{\mathbb{Q}}(\omega) - \frac{1}{2}\int_0^t \lambda_s^2(\omega)\, ds \right\}.$$

This process has unit expectation under $\mathbb{Q}$ and can therefore be used to define a new equivalent[10] probability measure

$$\mathbb{P}[\, A\,] := \mathbb{E}_{\mathbb{Q}}[1_A\, D_t] \quad \text{for} \quad A \in \mathcal{F}_t.$$

The *Cameron-Martin-Girsanov*-theorem states that under this measure, the process

$$W_t^{\mathbb{P}}(\omega) := W_t^{\mathbb{Q}}(\omega) - \int_0^t \lambda_s(\omega)\, ds \tag{21}$$

is a Brownian motion.

How does this help in our situation? Well, equations (21) and (18) show that in terms of this Brownian motion, the discounted stock price follows the SDE

(22) $\hat{S}_t(\omega) = \hat{S}_t(\omega)(\mu - r + \sigma\lambda_t(\omega))\,dt + \hat{S}_t(\omega)\,\sigma\,dW_t^{\mathbb{P}}(\omega)$.

Moreover, $W^{\mathbb{P}}$ also has the representation property, hence we find a new process $\phi^{\mathbb{P}}$ and some $\hat{H}_0^{\mathbb{P}}$ such that

$$\hat{H}_T(\omega) = \hat{H}_0^{\mathbb{P}} + \int_0^T \frac{\phi_t^{\mathbb{P}}(\omega)}{\sigma\hat{S}_t(\omega)}\,d\hat{S}_t(\omega) \quad - \int_0^T \frac{\phi_t^{\mathbb{P}}(\omega)(\mu - r + \sigma\lambda_t(\omega))}{\sigma}\,dt\ .$$

Thus we have gained an additional degree of freedom by our choice of λ. Since our aim is to nullify the right hand integral above, we chose the measure $\mathbb{P}$ given by the process

(23) $\lambda_t := (r - \mu)/\sigma$,

(called the "market price of risk") for which we get the desired replication

(24) $\hat{H}_T(\omega) = \hat{H}_0^{\mathbb{P}} + \int_0^T \Delta_t(\omega)\,d\hat{S}_t(\omega)$ with $\Delta_t(\omega) := \dfrac{\phi_t^{\mathbb{P}}(\omega)}{\sigma\hat{S}_t(\omega)}$.

With β defined in (16), this gives us the desired hedging strategy (Δ, β).

2.3 The Price of a Contract as an Expectation

By construction, the strategy we just computed is self-financing, hence the costs of the hedging strategy must be covered by the initial position $H_0^{\mathbb{P}}$. Therefore we call it the *fair price of* H_T. But how can we efficiently calculate $H_0^{\mathbb{P}}$?

To this end, the notion of a *martingale* becomes important: a process $M = (M_t)_{t\in[0,T]}$ is called a martingale under $\mathbb{P}$, if M is $\mathbb{F}$-adapted, if $M_T \in L^1$ and if "the best forecast of a future value of M given the past is its current value":

$$\mathbb{E}_{\mathbb{P}}\left[\, M_{t+u} \,|\, \mathcal{F}_t(\omega))\right] = M_t(\omega) \quad (u \geq 0)\ .$$

For example, Brownian motion itself is a martingale (this is easy to prove using the independence if its increments). Moreover, if $M = (M_t)_{t\in[0,T]}$ is a martingale, then each integral $N_t := \int_0^T \varphi_t\,dM_t$ is, under some regularity conditions, also a martingale.[11] That implies in particular that $\mathbb{E}[N_t] = N_0 = 0$ for all $t \in [0, T]$.

In the BSM-model, we note that (22) becomes

(25) $d\hat{S}_t(\omega) = \hat{S}_t(\omega)\,\sigma\,dW_t^{\mathbb{P}}(\omega)$,

so "under $\mathbb{P}$", $\hat{S}$ has no drift. In integral form, (25) is written as

(26) $\hat{S}_t(\omega) = S_0 + \int_0^t \hat{S}_s(\omega)\,\sigma\,dW_s^{\mathbb{P}}(\omega)$

and for some payoff H_T, we have

$$\hat{H}_t(\omega) = \hat{H}_0^{\mathbb{P}} + \int_0^t \phi_s^{\mathbb{P}}(\omega)\,dW_s^{\mathbb{P}}(\omega)\ .$$

That means that both the discounted stock and the discounted price processes $\hat{H}$ of all suitably integrable payoffs are martingales.[12] As a consequence, the price of H_T is given as

$$(27) \quad H_0^{\mathbb{P}} = \mathbb{E}_{\mathbb{P}}\left[\hat{H}_T\right] = \frac{1}{B_T}\mathbb{E}_{\mathbb{P}}[H_T],$$

just as in (7) for our discrete model. At some later time t, the martingale property equally yields

$$(28) \quad \hat{H}_t^{\mathbb{P}} = \mathbb{E}_{\mathbb{P}}\left[\hat{H}_T \,|\, \mathcal{F}_t.\right]$$

(Note that our discussion also implies that each martingale M can be written as an integral of W.) These quantities can now be computed using either analytical or numerical methods [BFGLMO99]. For more complicated models, we will usually resort to Monte-Carlo or finite difference schemes to evaluate (27).

In case of BSM's model, we can compute the value of a call $H_T(\omega) := (S_T(\omega) - K)^+ = (\hat{S}_T(\omega)B_T - K)^+$ explicitly: as we saw before, the discounted stock price is given in terms of $W^{\mathbb{P}}$ as

$$(29) \quad \hat{S}_T = S_0 \exp\left\{\sigma W_T^{\mathbb{P}} - \frac{1}{2}\sigma^2 T\right\}.$$

Given that $W_T^{\mathbb{P}}$ is normal with mean zero and variance T, it is straight-forward to derive the famous *Black&Scholes* formula

$$(30) \quad H_0 = S_0\mathcal{N}(d^+) - e^{-rT}K\mathcal{N}(d^-)$$

with

$$d^{\pm} := \frac{\ln(S_0/K) + \left(r \pm \frac{1}{2}\sigma^2\right)T}{\sigma\sqrt{T}}$$

(we used $\mathcal{N}(x)$ to denote the cumulative standard normal distribution function).

2.4 The Fundamental Theorem of Asset Pricing

The observation that $\hat{S}$ and all price processes $\hat{H}$ are (local) martingales under some measure $\mathbb{P}$ which is equivalent to $\mathbb{Q}$, is a very general property if the market is free of arbitrage. Let us define an arbitrage opportunity as a self-financing investment strategy Δ such that the value of the portfolio

$$\hat{H}_T^{\Delta}(\omega) = \int_0^T \Delta_t(\omega)\, d\hat{S}_t(\omega)$$

is non-negative with a non-zero probability of being strictly positive. The key point here is that the cost of running Δ is initially zero, so the existence of such a Δ would imply that we could produce a "free lunch" in the form of a risk-less potential profit. If such opportunities are excluded, we say that the market is free of arbitrage.

According to Harrison and Pliska [HP81], such markets can be characterized in discrete time[13] as follows:

Theorem 2.1 (First Fundamental Theorem of Asset Pricing) *A market is free of arbitrage if and only if there exists a measure* $\mathbb{P}$ *equivalent to the original measure* $\mathbb{Q}$ *such that all tradable assets are martingales under* $\mathbb{P}$.

In all commonly used models, the discounted stock price is a true martingale under some measure $\mathbb{P}$ (in fact, it is quite common to model $\hat{S}$ directly under the measure $\mathbb{P}$). Clearly, $\mathbb{P}$ does not need to be unique. In this case, the market is called *incomplete* and there is no unique price for some payoffs. In our discussion later on, we will nonetheless be able to "complete" the market by considering further tradable hedging instruments. Intuitively, we need one linearly independent hedging instrument for every source of randomness.[14]

2.5 The Hedging Strategy in Markovian models

We have shown with (28), that we can compute a price $H_t^{\mathbb{P}}$ of a contingent claim in a complete market at every time $t < T$ as a conditional expectation. Let us now turn to the actual computation of the hedging ratio $\Delta^{\mathbb{P}}$.

To this end, let us once more consider BSM's model (9). The discounted price process $\hat{S}$ has the so-called *Markov* property: intuitively, that means that at any time t, the possible future values of $\hat{S}_T$ depend only on the current state $S_t(\omega)$, but not on any past information. Mathematically, it means that for every bounded function F and all $T \geq t$, we can find a function f such that

$$f\big(t, S_t(\omega)\big) = \mathbb{E}_{\mathbb{P}}\big[F(\hat{S}_T) \,\big|\, \mathcal{F}_t\big](\omega) \ .$$

For example, it follows from (29) that BSM's stock price can be written as

$$\hat{S}_T(\omega) = \hat{S}_t(\omega) \exp\Big\{\sigma\,(W_T^{\mathbb{P}}(\omega) - W_t^{\mathbb{P}}(\omega)) - \frac{1}{2}\sigma^2(T-t)\Big\} \ .$$

The independence of the increments of $W^{\mathbb{P}}$ under $\mathbb{P}$ and the fact that they are normally distributed indeed means that

$$\mathbb{E}_{\mathbb{P}}\,[F(S_T)|\,\mathcal{F}_t](\omega) = \int_{\mathbb{R}} F\big(S_t(\omega) e^{\sigma\sqrt{T-t}y - \frac{1}{2}\sigma^2(T-t)}\big)\, d\mathcal{N}(y) =: f\big(t, S_t(\omega)\big)$$

where $\mathcal{N}$ denotes the standard normal distribution function.

In financial terms the consequence of the Markov property is that if a contingent claim H_T depends only on $S_T = \hat{S}_T B_T$ at the maturity of the deal (for example in the case of a call $H_T(\omega) = (S_T(\omega) - K)^+$), then the value of the claim at time $t < T$ cannot depend on any past data before t, but will depend on $\hat{S}_t(\omega)$ today. Hence, let us assume that H_T can be written as $\hat{H}_T(\omega) = F(S_T(\omega))$. It follows from (28) and the Markov property of $\hat{S}$ that there exists a *price-function* h such that

$$h\big(t, \hat{S}_t(\omega)\big) = \hat{H}_t^{\mathbb{P}}(\omega) \ .$$

Usually, h is smooth enough, so we can apply Itô's formula (12) and get

$$\hat{H}_T(\omega) - \hat{H}_t^{\mathbb{P}}(\omega) = \int_t^T \partial_S h(u, \hat{S}_u(\omega))\, d\hat{S}_t(\omega) + \int_t^T \left(\frac{1}{2} \partial_{SS}^2 h_u(\hat{S}_u(\omega))\, \hat{S}_u^2(\omega)\sigma_u^2 + \partial_t h(u, \hat{S}_u(\omega)) \right) du \,,$$

where we made use of $d\langle \hat{S} \rangle_t = \hat{S}_t^2 \sigma_t^2\, dt$.

We also know that (24) holds. Hence, we can identify the process Δ of the claim H_T at time t simply as the derivative of its price with respect to the stock:

$$(31) \quad \Delta_t^{\mathbb{P}}(\omega) \equiv \partial_S h\big(t, \hat{S}_t(\omega)\big)$$

(the "Delta" of an option is the sensitivity of the price of an option to a change in the stock price). We can also imply that the remaining terms in the above equation must cancel. This yields the following PDE for the price function h:

$$0 = \partial_u h(u,s) + \frac{1}{2} \partial_{ss}^2 h(u,s)\, s^2 \sigma_u^2 \,.$$

This PDE must hold with final condition $h(T,s) = F(s)$. This equation is known as the (discounted) *Black&Scholes* PDE. The solution h is a valid price function for the contingent claim $\hat{H}_T(\omega) = F(\hat{S}_T(\omega))$.

The consequences of relation (31) are remarkable: it means that as long as our underlying model is largely in line with the actual market, we can compute a reliable hedging strategy for any payoff by differentiating its price function with respect to the stock variable $\hat{S}_t$. This way we are able to provide a real life hedging signal to the trading desk. Moreover, we can aggregate various different "delta positions" across different products. The resulting *delta-hedging* is exactly what is done every day on the trading desks of big financial institutions.

3 Option Markets

Black, Scholes and Merton's model was the first model which was widely used in the financial industry. Not least due to their work, the markets for contingent claims (or "options") developed rapidly. Today, millions of dollars and euros worth of options are traded each day.

Of course, the real world has left BSM's model behind: so-called "vanilla" options such as the call (1), are today liquidly traded on exchanges. This means that they have moved from being a risky contract to being an *asset* on their own right – obviously, there is no need to replicate a traded contract. Rather, we can make use of them to improve the hedging of more complex, so-called *exotic* payoffs.

3.1 The End of BSM: The Implied Volatility Skew

Why is BSM's model is not sufficient anymore? After all, it is a robust approach which is well-known to many market participants.

The reason lies in what is known as the "volatility skew" or "volatility smile": if we are able to observe a call option price with maturity T and strike K, and we know the interest rates r, then we can invert the BSM call price function (30) and back out the only unknown parameter, σ. If it is determined in this way, this parameter is called the *implied volatility* of the option and denoted by $\hat{\sigma}(T, K)$. (Note that using the concept of implied volatility does not imply that practitioners actually believe that the market follows BSM's model. Rather, it is a convenient way of parameterizing the liquid option prices. It also indicates the "level of risk" of a liquid instrument.)

If we compute the implied volatility at a fixed maturity for a range of strikes, we will find a picture similar to the one displayed in figure 3.

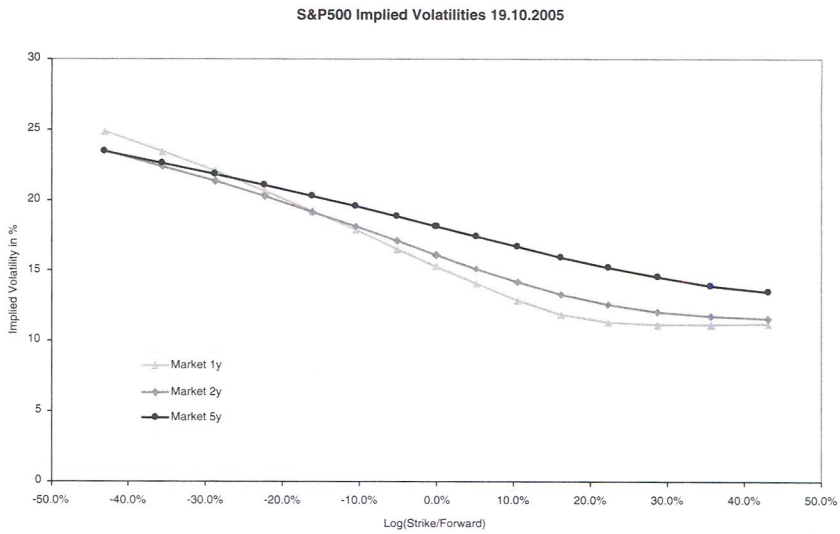


Figure 3: The graph shows S&P,500 implied volatilities for a few maturities. Implied volatilities tend to be much higher on the downside.

If "the market" behaved like a BSM model, this curve would be a flat line. The fact that it has a very pronounced "skew" indicates that whatever cumulative pricing mechanism is at work, it is not close to BSM's model. Rather, we see that options with strikes below 100% are comparatively more expensive than those with strikes above 100% spot.

The reason is that the stock price usually gets more volatile when it falls: investors are more uneasy about a drop in a share price than about a rise. The effect is that "the volatility" itself is stochastic and instantaneously anti-correlated to the stock price. As we will see, this implies that we cannot replicate a payoff by purely trading in the stock: there are additional risk-factors in the economy which need to be hedged by other means. Indeed, the presence of listed options allows us to do just that. Moreover, under the assumption of an arbitrage-free market, the Fundamental Theorem of Asset Pricing

proves that there is some measure $\mathbb{P}$ such that the stock price and all traded options prices are (local) martingales.

Since the options are themselves tradable assets, they become available as hedging instruments. Of course, if we chose a set of tradable instruments for hedging purposes, it is necessary that our model not only assigns the correct market prices to them but also produces a realistic dynamical behavior.[15]

3.2 General Stochastic Volatility Models

If we want to improve the model of the stock price to take into account the observed implied volatility skew, we enter the field of "stochastic volatility". We assume now that the underlying probability space $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$ with martingale measure $\mathbb{P}$ supports n independent standard Brownian motions $W^1, \ldots, W^n$ which generate the underlying filtration $\mathbb{F} = (\mathcal{F}_t)_{t\in[0,T^*]}$; we call the vector $W = (W^1, \ldots, W^n)$ an n-dimensional Brownian motion. We will model the stock and other quantities directly under a martingale measure $\mathbb{P}$.[16]

If we now assume that the discounted stock price process $\hat{S} = (\hat{S}_t)_{t\in[0,T^*]}$ is a strictly positive continuous $(\mathbb{F}, \mathbb{P})$-martingale, it can be shown that there exists a *stochastic variance process* ζ and a Brownian motion X such that, in differential form,

$$d\hat{S}_t(\omega) = \sqrt{\zeta_t(\omega)}\, \hat{S}_t(\omega)\, dX_t(\omega) \ .$$

As before, this equation has the solution

$$\hat{S}_t(\omega) = S_0 \exp\left\{ \int_0^t \sqrt{\zeta_s(\omega)}\, dX_s(\omega) - \frac{1}{2}\int_0^t \zeta_s(\omega)\, ds \right\} .$$

The vector W once more has the representation property in the sense that every non-negative payoff H_T measurable with respect to $\mathcal{F}_T$ can be written in terms of a sum of integrals as

$$\hat{H}_t(\omega) = \hat{H}_0 + \sum_{j=1}^{n} \int_0^t \varphi_s^j(\omega)\, dW^j{}_s(\omega). \tag{32}$$

As we mentioned before, we can also write X in such a form, hence there is a random vector ρ with $dX_t(\omega) = \sum_{j=1}^n \rho_t^j(\omega)\, dW^j{}_t(\omega)$ such that

$$d\hat{S}_t(\omega) = \sqrt{\zeta_t(\omega)}\, \hat{S}_t(\omega) \sum_{j=1}^{n} \rho_t^j(\omega)\, dW^j{}_t(\omega) \tag{33}$$

In a general *stochastic volatility model*, we specify the dynamics of $\zeta = (\zeta_t)_{t\in[0,T^*]}$ in a way which we hope yields reasonable dynamics for the stock price and any reference instruments.

The best-known classic stochastic volatility model is probably that of Heston [H93]. In this two-factor model ($n = 2$), the stochastic variance process is the solution to the SDE

$$d\zeta(\omega) = \kappa(\theta - \zeta_t(\omega))\, dt + \nu\sqrt{\zeta_t(\omega)}\, dW_t^1(\omega) \tag{34}$$

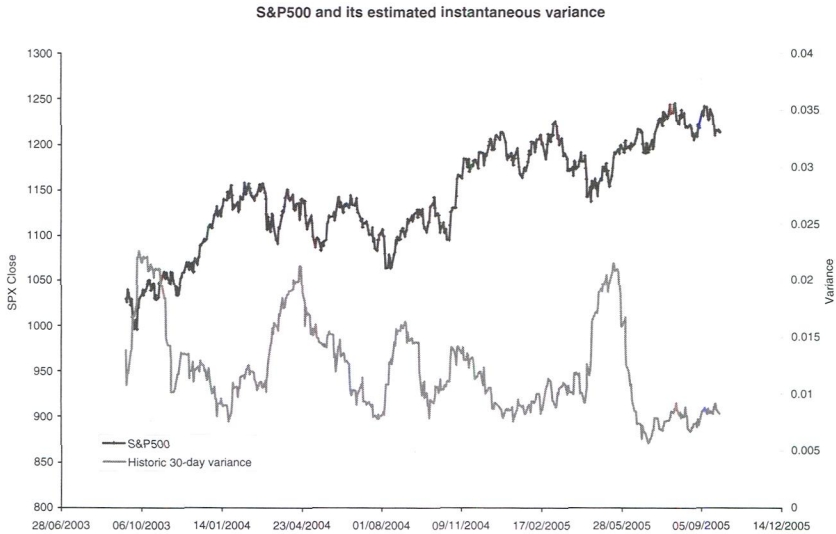


Figure 4: The graph shows S&P 500 and its estimated 30-day variance.

for constants $\kappa > 0$, $\theta > 0$, $\nu > 0$ and starting at $\zeta_0 > 0$. The Brownian motion of the stock is defined as $X_t := \rho W_t^1 + \sqrt{1-\rho^2}\, W_t^2$ for a "correlation coefficient" $\rho \in (-1, 1)$.

This process has a number of properties which can also be observed in real markets: the first is "mean-reversion", i.e. in the absence of random shocks it has an exponential decay with reversion speed κ towards the long-variance level θ. The second is a level-dependent "volatility of volatility" $\nu\sqrt{\cdot}$ which implies that ζ is more volatile if the overall volatility level is high. Finally, the correlation parameter governs the instantaneous co-movement of the stock and the variance process. It is typically negative, say, -0.7, which means that if the stock moves down, variance increases. As mentioned, this behavior is also present in real markets and it also implies that the implied volatility of an option priced with this model exhibits the desired skew.

Heston's model is popular because it provides a parsimonious and intuitive description of the short variance process. Moreover, it is possible to compute the fair price of a call in this model using relatively quick numerical methods. This last point is of big importance: indeed, if we observe a set $C = (C^{T,K})_{(T,K)\in\mathcal{K}}$ of market call prices (given by an implied volatility skew as the one above), then we can try to find parameters $(\kappa, \theta, \nu, \rho, \zeta_0)$ such that

$$\sum_{(T,K)\in\mathcal{K}} \left\| C^{T,K} - B_T^{-1}\, \mathbb{E}_{\mathbb{P}}\left[(S_T - K)^+\right] \right\|$$

is minimized. This procedure of calibrating a model is widely used in practice and guarantees that a model is well-fitted to relevant observed option prices. However, in order to implement the parameter-calibration using a numerical minimization scheme, it is necessary that the computation of the expectation of the option payoffs be reasonably quick.

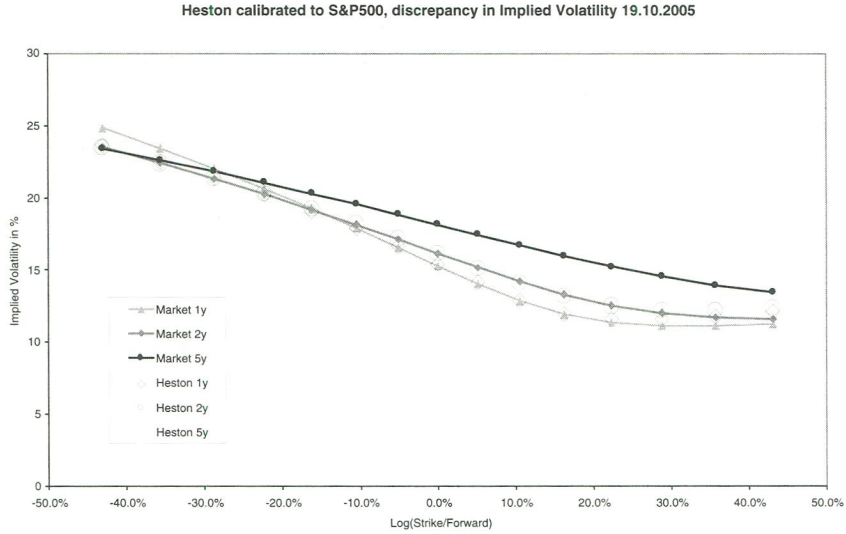


Figure 5: The result of calibrating Heston to S&P,500 option prices. The graph shows the market implied volatilities and those from the calibrated model (the calibrated parameters are $\zeta_0^2 = 0.15, \theta^2 = 0.34, \kappa = 0.13, \rho = -0.76$ and $\nu = 0.23$).

Note that the approach also shows that in this sense the original "historical" measure $\mathbb{Q}$ does not play a role in the implementation of a model if its parameters are determined via calibration. This implies that the value of a contract for any institution that hedges its option risk will be different from its value for an investor who is optimizing his investment according to his risk preference. Therefore, a price offered by a financial institution can be "fair" but still be a good investment for a particular investor (recall the seemingly cheap price of the call in the initial example on page 4).[17]

Hedging in General Stochastic Volatility Models

What happens now to the replication argument from the previous section?

Well, if we are in a one-factor case ($n = 1$), it actually goes through in the same way it did before (for ease of exposure, let us assume that $\zeta_t^1 > 0$). As a first step, we can write

$$dW_t^1(\omega) = \frac{1}{\sqrt{\zeta_t^1(\omega)}\hat{S}_t(\omega)}\, d\hat{S}_t(\omega)$$

which, using equation (32), gives us the desired hedging result

$$\hat{H}_T(\omega) = \hat{H}_0 + \int_0^T \frac{\varphi_s^1(\omega)}{\sqrt{\zeta_t^1(\omega)}\hat{S}_t(\omega)}\, d\hat{S}_t(\omega)\ .$$

just as in (24).

However, it is also intuitively clear that this will not work if $n > 1$: there are more sources of randomness than market instruments in which we can invest. The market with only the stock and the bank account considered as tradable instruments is *incomplete* because we cannot replicate all possible payoffs. This is where the liquid options come in: if in addition to the stock, $(n-1)$ "reference instruments" with discounted price processes $\hat{M}^2, \ldots, \hat{M}^n$ are traded in the market, then we should be able to hedge the remaining uncertainty in the market.

Let $\hat{M}^1 := \hat{S}$. The first step is to use the representation property of W for the vector M. This gives us a random "volatility matrix" $\eta = (\eta^{i,j})_{i,j=1,\ldots,n}$ such that

$$d\begin{pmatrix} \hat{M}_t^1(\omega) \\ \vdots \\ \hat{M}_t^n(\omega) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \eta_t^{1,1}(\omega) & \cdots & \eta_t^{1,n}(\omega) \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \eta_t^{n,1}(\omega) & \cdots & \eta_t^{n,n}(\omega) \end{pmatrix} d\begin{pmatrix} W_t^1(\omega) \\ \vdots \\ W_t^n(\omega) \end{pmatrix}.$$

To recover the vector W we need to be able to invert the matrix η. This confirms the intuition that the liquid options in consideration need to be linearly independent. It also means that if we want to recover W up to some T, none of the options is allowed to expire: otherwise, the price process would be constant (equal to the terminal value of the payoff) and the respective row in the volatility matrix would be zero.

Under the assumption that η is invertible, (32) shows that each payoff H can now be replicated as

$$H_T(\omega) = H_0 + \sum_{j=1}^{n} \int_0^T \Delta_t^j(\omega)\, dM_t^j(\omega) + \int_0^T \beta_t(\omega)\, dB_t$$

by dynamically trading in stock and reference instruments using the strategy $\varphi = (\Delta^1, \ldots, \Delta^n, \beta)$; the investment strategy for the cash account is once more determined by the self-financing requirement. According to (16), this means

$$\beta_t(\omega) = \frac{1}{B_t}\Big(H_t(\omega) - \sum_{j=1}^{n} \Delta_t^j(\omega) M_t^j(\omega)\Big). \tag{35}$$

The strategy is risk-free, which means that H_0 is the fair price of the payoff H_T. Once again, if the price H_t is a sufficiently smooth function of the prices of the market instruments,

$$H_t(\omega) = h\big(t; M_t^1(\omega), \ldots, M_t^n(\omega)\big)\ ,$$

we can compute, just as in (31), the hedging ratios as

$$\Delta_t^j(\omega) \equiv \partial_{M^j} h\big(t; M_t^1(\omega), \ldots, M_t^n(\omega)\big). \tag{36}$$

3.3 Hedging Options on Realized Variance

It seems all the work is done: if there are finitely many continuous risk factors and sufficiently many independent liquid options, then we have seen that we can still hedge all payoffs.

From a theoretical point of view, this is satisfactory. However, from a practical point of view we now have to find some model which, on one hand, provides a good fit to the market prices of our reference instruments and, on the other hand, produces reasonable dynamics for those instruments.

Hence, there are choices to be made which depend on the products we want to hedge with our model. Since so-called "options on realized variance" are a particularly hot topic these days, we shall use these as an example.

We will assume for the remainder of the article that $r = 0$, i.e. $B_t = 1$ such that discounted values and actual values coincide.

The "realized variance" of a stock process in the period $[0, T]$ is the estimated daily variance of the returns of the stock, commonly measured using

$$(37) \quad \sum_{i=1}^{n} \left(\log S_{t_i}(\omega) - \log S_{t_{i-1}}(\omega)\right)^2$$

where $0 = t_0 < \cdots < t_n = T$ are the business days up to T.[18] As in (11), this quantity will converge for $n \uparrow \infty$ to the quadratic variation of the logarithm of the stock price, and it is common to assume that realized variance is indeed measured using

$$(38) \quad V_T^T(\omega) := \langle \log S \rangle_T(\omega) = \int_0^T \zeta_t(\omega)\, dt.$$

The most basic product which is based on realized variance is a so-called *variance swap*. A variance swap pays V_T^T/T in exchange for a fixed cash strike K; since the strike K is fixed, we will ignore it in the sequel. We denote the price at time t of a variance swap with maturity T by V_t^T. It is as usual given as the expectation of the payoff under the risk neutral measure $\mathbb{P}$:

$$\begin{aligned} V_t^T(\omega) &:= \mathbb{E}_{\mathbb{P}}\left[\int_0^T \zeta_s\, ds \;\middle|\; \mathcal{F}_t \right](\omega) \\ &= \int_0^t \zeta_s(\omega)\, ds + \mathbb{E}_{\mathbb{P}}\left[\int_t^T \zeta_s\, ds \;\middle|\; \mathcal{F}_t \right](\omega). \end{aligned}$$

The last equation follows because the variance up to t is measurable with respect to the stock price observations. Note that the prices of variance swaps are usually quoted in terms of their "volatility" i.e. as $\sqrt{V_0^T/T}$. This notation is also used in the graphs below.

The key about variance swaps is that they are reasonably liquid for most major indices. This means we can use them as reference instruments, which makes particular sense if we want to price payoffs based on the realized variance.

An example of such an "option on variance" is a call on variance,

$$(39) \quad H_T(\omega) := \left(\frac{1}{T} \int_0^T \zeta_t(\omega)\, dt - K \right)^+$$

It makes sense to buy such a call if the investor believes that the variance of the stock price will go up (recall that the investor is using the historical measure $\mathbb{Q}$): a call is cheaper than the plain variance swap. For example, overall variance levels are relatively

low these days (at least if compared with the end of the last decade in the internet bubble), so an investor might reasonably assume that the variance will pick up some time soon. If this is not the case, we can sell instead a put,

$$\left(K - \frac{1}{T}\int_0^T \zeta_t(\omega)\,dt\right)^+ .$$

Once the option is sold, we will have to hedge our position. If we assume that there is more uncertainty in the market than a plain one-factor model could capture (where all risks can be hedged by trading in the stock alone), then a reasonable approach is to use variance swaps to hedge our exposure to the variance risk.

The next step is therefore to specify a model which fits the traded variance swap prices well.

Assume we find a $C^{2m,2}$ function $\mathbf{G} : \mathcal{Z} \times [0,T] \to \mathbb{R}^+$ which is seen to interpolate the market prices of variance swaps reasonably well for varying parameter z from the open set $\mathcal{Z} \in \mathbb{R}^m$. An obvious approach would then be to construct a process $Z = (Z_t)_{t\in[0,T]}$ such that

$$V_t^T(\omega) = \int_0^t \zeta_s(\omega)\,ds + \mathbf{G}(Z_t(\omega); T-t). \tag{40}$$

This ensures that the variance swap prices will always have the desired functional shape. By assigning convenient dynamics to Z, we can also ensure that the prices of the variance swaps behave reasonably. Of course, the considerations of the previous chapters imply that the process Z cannot be chosen arbitrarily. In particular, $V^T = (V_t^T)_{t\in[0,T]}$ must be a martingale for all T. If we assume that Z is the solution to an SDE of the form

$$\begin{pmatrix} dZ_t^1 \\ \vdots \\ dZ_t^m \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \mu^1(Z_t) \\ \vdots \\ \mu^m(Z_t) \end{pmatrix} dt + \begin{pmatrix} \varsigma^{1,1}(Z_t) & \cdots & \varsigma^{1,n}(Z_t) \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \varsigma^{m,1}(Z_t) & \cdots & \varsigma^{m,n}(Z_t) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} dW_t^1 \\ \vdots \\ dW_t^n \end{pmatrix}, \tag{41}$$

then it can be shown using Itô's formula that under some regularity conditions (see [B05]), the function $\mathbf{G}$ and the coefficients μ and ς must satisfy

$$\partial_\tau \mathbf{G}(z;\tau) = \sum_{i=1}^m \mu^i(z)\partial_{z^i}\mathbf{G}(z;\tau) + \frac{1}{2}\sum_{i,j=1}^m \partial^2_{z^i z^j}\mathbf{G}(z;\tau)\sum_{k=1}^n \varsigma^{i,k}(z)\,\varsigma^{j,k}(z) .$$

With standard conventions, this can be written more clearly as

$$\partial_\tau \mathbf{G}(z;\tau) = \mu(z)\partial_z \mathbf{G}(z;\tau) + \frac{1}{2}\varsigma(z)^2\,\partial^2_{zz}\mathbf{G}(z;\tau) .$$

If this equation is satisfied for a "consistent" pair $(\mathbf{G}, Z)$, then the price processes of all variance swaps are proper martingales. Moreover, differentiating with respect to the maturity T of the variance swap shows that

$$\zeta_t(\omega) = \partial_\tau \mathbf{G}(Z_t(\omega), 0) .$$

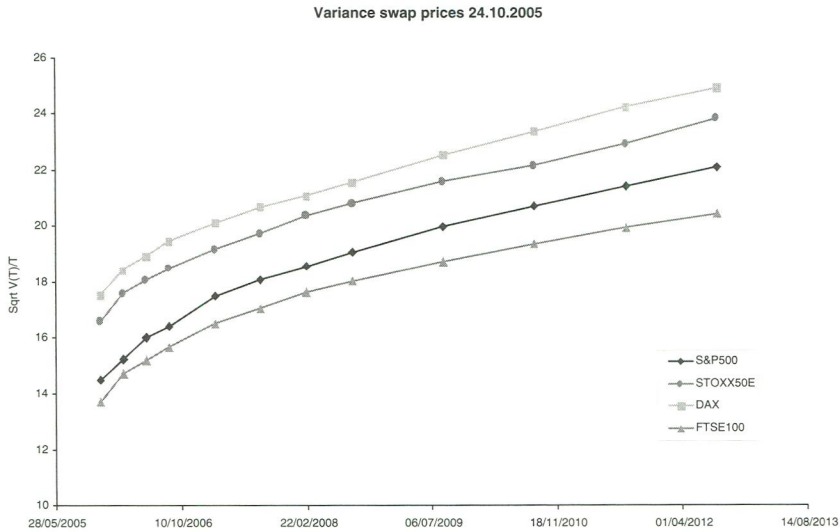


Figure 6: Variance swap market prices on various indices, quoted in "volatility". Note that the general shapes of the curves are quite similar.

Hence our approach produces a stochastic volatility as introduced above: it merely remains to specify the instantaneous correlation vector $\rho = (\rho^1, \ldots, \rho^n)$ for the Brownian motion X. We will assume that this vector is a constant.

Double Mean-Reversion

A good example of the above approach is the "Double mean-reversion" function $\mathbb{G} : \mathbb{R}^{+3} \times [0, \infty) \to \mathbb{R}^+$ defined as

$$\mathbb{G}(z;\tau) = z_3\tau + (z_1 - z_3)\frac{1 - e^{-\kappa\tau}}{\kappa} + (z_2 - z_3)\frac{\kappa}{\kappa - c}\left(\frac{1 - e^{-c\tau}}{c} - \frac{1 - e^{-\kappa\tau}}{\kappa}\right)$$

for strictly positive constants κ and c.[19] The function $\mathbb{G}$ can be reduced to the respective functional $\mathbb{H}$ given by Heston's model (34) by setting $z_2 = z_3$,

$$\mathbb{H}(z;\tau) := z_3\tau + (z_1 - z_3)\frac{1 - e^{-\kappa\tau}}{\kappa} \ .$$

During the course of the last two years, $\mathbb{G}$ has shown to fit well to observed market prices. Figure 7 shows an example[20]

A consistent process Z with SDE (41) has the general form

$$\begin{aligned} dZ_t^1 &= \kappa(Z_t^2 - Z_t^1)\,dt + \varsigma^1(Z_t)\,dW_t \\ dZ_t^2 &= c(Z_t^3 - Z_t^2)\,dt + \varsigma^2(Z_t)\,dW_t \\ dZ_t^3 &= \qquad\qquad\quad \varsigma^3(Z_t)\,dW_t \end{aligned}$$

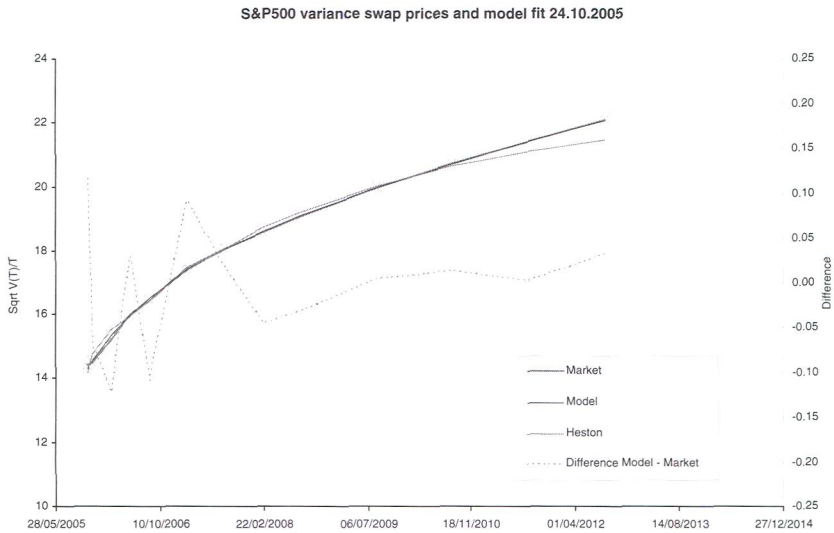


Figure 7: Fit of our model function $\mathbb{G}$ and Heston's function $\mathbb{H}$ to S&P 500 variance swap market prices. The scale of differences between the calibrated function $\mathbb{G}$ and the market is indicated on the right hand axis.

where the volatility vectors $\varsigma^1, \ldots, \varsigma^3$ must ensure that $Z^1, \ldots, Z^3$ stay strictly positive. From the definition of $\mathbb{G}$ it follows that $\zeta_t = Z_t^1$.

The idea is that the stochastic variance process ζ is again mean-reverting. In extension to Heston's model (34), the level of mean-reversion is itself stochastic and mean-reverting to just another stochastic long-term level. This parameterizes the variance swap prices in terms of a short, medium and long level of variance. Such an approach is justified given historic data, which often show a mean-reversion-like behaviour around a moving mean (it should be noted that the improved flexibility of the model comes at a cost: its numerical implementation, in particular of the calibration itself, is far more challenging than for Heston's model for which fast and accurate methods are available).

Once this model is implemented, we can finally hedge our options on variance. Consider for example a call on variance (39) and recall (36). We proceed as follows: by construction, the model vector $(S, Z^1, \ldots, Z^3)$ is Markov. That means that the price H_t of each payoff H_T is given in terms of a function H as

$$(42) \quad H_t(\omega) = \tilde{h}\big(t; S_t(\omega), Z_t^1(\omega), \ldots, Z_t^3(\omega)\big).$$

Unfortunately, Z is not itself tradable. Hence, we choose three reference variance swaps $V^1, \ldots, V^3$ with maturities $T_1, \ldots, T_3$. The function

$$\tilde{\mathbb{G}} : z \in R^{+3} \to \Big(\mathbb{G}(z; T_1), \mathbb{G}(z; T_2), \mathbb{G}(z; T_3)\Big)$$

is invertible with smooth inverse $\tilde{G}^{-1}$. Hence, we can write (42) as

$$H_t(\omega) = \tilde{h}\big(t; S_t(\omega), \tilde{G}^{-1}(V_t^1(\omega) - V_t^t(\omega), \ldots, V_t^3(\omega) - V_t^t(\omega)))\big)$$

and therefore as

$$H_t(\omega) = h\left(t; S_t(\omega), V_t^1(\omega), \ldots, V_t^3(\omega); \int_0^t \zeta_s(\omega)\, ds\right).$$

This gives us the hedging strategy

$$\Delta_t^S := \partial_S h(\cdots) \quad \text{and} \quad \Delta_t^j := \partial_{V^j} h(\cdots) \quad j = 1, \ldots, 3$$

according to (36). The computation of these ratios can be implemented using numerical differentiation (usually, a simple centered difference with a specified width is sufficient).

4 Conclusions

We have introduced basic ideas of mathematical finance and shown that in contrast to an insurance company, a financial institution which trades options on stocks can hedge itself and try to replicate the target payoffs. It is an appealing and intuitive concept to characterize the fair price of a payoff as the cost of the implementation of this replication strategy since it does not involve any risk. It may mean that we have to consider further reference instruments in addition to the stock – in our example, we have used variance swaps alongside the underlying stock to hedge so-called options on realized variance. It is a great challenge today to develop models which capture the relevant behavior of the markets; advanced mathematical tools are applied on a daily basis to develop ever more realistic and complex models.

Of course, the framework presented here is idealistic: in reality, the dynamics of the hedging instruments are not easy to determine and we have to pay transaction costs and taxes. Extraordinary market events often make it impossible to execute a hedging strategy and so forth. Many of these issues have been addressed elsewhere or are the subject of current research.

However, the success of the financial industry also indicates that the general approach of pricing by replication works and that it is a powerful tool to manage the risk of exotic payoffs. Mathematics is a key contributor to this success.

Footnotes

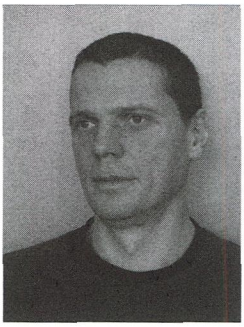
1 admissible
2 This is true for discrete time markets; for continuous time markets a more refined result is due to Delbaen/Schachermayer [DS94].
3 In fact, the underlying mathematical model in BSM's work was originally proposed by Samuelson [S65]. However, it is customary today to refer to it as "Black-Scholes-Merton" – or simply "Black-Scholes"-model.
4 One of the assumptions was that we can sell a stock which we do not own.
5 See, for example Föllmer/Schied [FS04].
6 E.G. see Protter [P04].
7 See Föllmer [F81].
8 It is required that $\int_0^T \varphi_t^2 d\langle X\rangle_t < \infty$ and that φ is bounded from below. The latter property avoids doubling-strategies.
9 The notation should highlight that both $\phi^{\mathbb{Q}}$ and $\hat{H}_0^{\mathbb{Q}}$ depend on $W^{\mathbb{Q}}$.

10 Two measures $\mathbb{P}$ and $\mathbb{Q}$ are equivalent on some σ-algebra $\mathcal{A}$, if their impossible events are the same, i.e. if $\mathbb{P}[A] = 0$ if and only if $\mathbb{Q}[A] = 0$ for $A \in \mathcal{A}$.
11 In general, the integral is just a local martingale; details on the subject can be found in Revuz/Yor [RY99].
12 The regularity conditions hold for the BSM-model.
13 In continuous time, the results are more complex and out of the scope of this article. See Delbaen/Schachermayer [DS94] for details.
14 Not all markets can be completed; genuinely random jump processes procedure markets where replication with finitely many instruments is not possible.
15 Note that a good "fit" to the market prices alone is not good enough. That can already be seen for the stock itself: a perfect fit is achieved with a model which is not stochastic at all, i.e. $S_t = S_0 e^{\mu t}$. But this "model" does not capture the risk of the movement of the stock price at all. We can imagine how happy other people would be to buy puts with downside strikes from us.
16 For notational convenience, we will therefore omit the notion of the underlying measure $\mathbb{P}$ for the remainder of the article.
17 Refer to Föllmer/Schied for details on preferences and related concepts.
18 Usually, the sum (37) is scaled by the constant $252T/n$ in order to annualize the variance with respect to the number of business days per year, normalized to 252. For details on variance swap contracts, see Demeterfi et al [DDKZ99].
19 The limit $\kappa = c$ exists.
20 In theory, the constants κ and c have to be calibrated only once per underlying, but in practise they are updated upon strong movements of the market.

References

[B00] *L. Bachelier*: "Théorie de la spéculation." Ann. Sci. École Norm Sup. 17, pp. 21–86, 1900
[BS73] *F. Black, M. Scholes*: "The Pricing of Options and Corporate Liabilities", Journal of Political Economy, 81, pp. 637–59, 1973
[BFGLMO99] *O. Brockhaus, A. Ferraris, C. Gallus, D. Long, R. Martin, M. Overhaus*: Modelling and hedging equity derivatives. Risk, 1999
[B05] *H. Buehler*: "Consistent Variance Curve Models", working paper, June 2005. *http://ssrn.com/abstract=687258*
[DS94] *F.Delbaen, W.Schachermayer*: "A General Version of the Fundamental Theorem of Asset Pricing", Mathematische Annalen 300, p. 463–520 (1994)
[DDKZ99] *Demeterfi, K., Derman, E., Kamal, M., Zou, J.*: "More Than You Ever Wanted To Know About Volatility Swaps", Quantitative Strategies Research Notes, Goldman Sachs, 1999
[D40] *W. Döblin*: "Sur l'equation de Komogoroff", C.R. Ser. I 331, 1059–1102, 1940
[F81] *H. Föllmer*: "Calcul d'Itô sans probabilités.", Seminaire de probabilites XV, Univ. Strasbourg 1979/80, Lect. Notes Math. 850 (1981), 143–150.
[FS04] *H. Föllmer, A.Schied*: Stochastic Finance. Second Edition. de Gruyter, 2004
[HK79] *J.Harrison, D.Kreps*: "Martingales and Arbitrage in Multiperiod Securities Markets", Journal of Economic Theory, 20, pp. 381–408, 1979
[HP81] *J.Harrison, S.Pliska*: "Martingales and Stochastic Integrals in the Theory of Continuous Trading", Stochasic Processes and their Applications, 11, pp. 215–60, 1981
[H93] *S.Heston*: "A Closed-Form Solution for Options with Stochastic Volatility with Applications to Bond and Currency Options", 1993
[I44] *K. Itô*: "Stochastic integral", Proc. Imperial Acad. Tokyo, Vol. 20, pp.519–524, 1944
[M73a] *R.Merton*: "An intertemporal capital asset pricing model", Econometrica, Vol. 41, pp. 867–888, 1973
[M73b] *R.Merton*: "The theory of rational option pricing", Bell J. Econ. Manag. Sci.4, pp. 141–183, 1973

[P04] *P. Protter*: Stochastic Integration and Differential Equations. Second Edition, Springer 2004
[RY99] *D. Revuz, M. Yor*: Continuous martingales and Brownian motion. Third edition, Springer 1999
[S65] *P. Samuelson*: "Rational Theory of Warrant Pricing", Industrial Management Review 6, pp. 13–31 (1965)



Maps on matrix and operator algebras*

Peter Šemrl

Abstract

- Mathematics Subject Classification: 15-02, 06 A 99, 15 A 04, 15 A 90, 47 B 49, 81 Q 10
- Keywords and Phrases: Adjacency preserving maps, poset of idempotent operators, coherent spacetime events, Wigner's unitary-antiunitary theorem, compatible bounded observables, Grassmann space

In the paper we will discuss several structural problems for maps on matrix and operator algebras as well as some problems from physics and geometry. When describing each of these problems we will just briefly mention some recent results and some interesting open questions. The main purpose of the paper is to show that these problems are closely related.

* Supported in part by a grant from the Ministry of Science in Slovenia.

Eingegangen: 20. 1. 2006

Department of Mathematics, University of Ljubljana, Jadranska 19, SI-1000 Ljubljana, Slovenia, peter.semrl@fmf.uni-lj.si

DMV
JAHRESBERICHT DER DMV
© B. G. Teubner 2006

1 Introduction and notation

In the first part of the paper we will present several problems arising in physics, geometry, linear algebra, and functional analysis. We will discuss adjacency preserving maps on linear matrix spaces, order or orthogonality preserving maps on idempotent matrices or operators, maps on the set of spacetime events preserving coherency, maps on bounded observables preserving compatibility, Wigner's unitary-antiunitary theorem, and geometry of Grassmann spaces. A lot of attention has been recently paid to some of these topics, so that several different survey papers treating just one of the above active research areas could be written. On the other hand, this means that in a survey paper of a reasonable length it is difficult, if not impossible, to cover all the main results and open problems in all of these research areas. In fact, this is not our intention. When describing each of these topics we will just very briefly mention one or two results, formulate some open problems, and give some motivation to work on these problems. At the end we will list just a few references without even trying to make a complete list, but we hope to make a choice which would make a further search in the literature easy.

The problems that we will describe are very easy to understand. At first look they seem to be completely unrelated. The main purpose of this paper is to show that such an impression is wrong. In the third section, which is the main part of the paper, we will show that they are closely related. We will briefly describe the ideas (without going into technical details) explaining the connections between these problems. Some of these connections have been recently used to obtain new results in these research areas.

Let us fix the notation. We denote by $M_{m\times n}$ the linear space of all $m \times n$ matrices over a field $\mathbb{F}$. It should be mentioned here that most of the linear algebra results that will be presented in the paper hold true for matrices over an arbitrary division ring (sometimes some minor modifications are needed because of the noncommutativity of the underlying division ring) but for the sake of simplicity we will restrict here to the commutative case. As already mentioned, the aim of this paper is not to survey all known results in the full generality, but rather to emphasize the connections between these results. Several other results presented in the paper are known to hold true in a somewhat more general setting or under weaker assumptions.

In the case $m = n$ we write $M_n = M_{n\times n}$. The subspaces of all symmetric matrices and all skew-symmetric matrices will be denoted by S_n and A_n, respectively. If $\mathbb{F} = \mathbb{C}$ we further denote by $H_n \subset M_n$ the real subspace of all hermitian matrices. We define the arithmetic distance between $A, B \in M_{m\times n}$ by $d(A, B) = \operatorname{rank}(A - B)$. It is easy to see that d satisfies all the assumptions for the distance function in a metric space. To verify this one has to recall that the rank is subadditive, $\operatorname{rank}(A + B) \leq \operatorname{rank} A + \operatorname{rank} B$, $A, B \in M_{m\times n}$. Two matrices A, B are said to be adjacent if $d(A, B) = \operatorname{rank}(A - B) = 1$. Let $\sigma : \mathbb{F} \to \mathbb{F}$ be any map and $A = [a_{ij}]$ any $m \times n$ matrix. Then A_σ denotes the matrix obtained from A by applying σ entrywise, $A_\sigma = [a_{ij}]_\sigma = [\sigma(a_{ij})]$.

A matrix $P \in M_n$ is called an idempotent if $P^2 = P$. The set of all $n \times n$ idempotent matrices will be denoted by P_n. There are two natural relations on P_n. First, it is well-known that P_n is a poset (partially ordered set) with the partial order $\leq$ defined by

$$P \leq Q \iff PQ = QP = P, \quad P, Q \in P_n.$$

Clearly, if $P = 0$ or $Q = I$ or $P = Q$, then $P \leq Q$. Otherwise, $P \leq Q$ implies that P and Q are simultaneously similar to block diagonal matrices

$$\begin{bmatrix} I & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad \text{and} \quad \begin{bmatrix} I & 0 & 0 \\ 0 & I & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix},$$

respectively.

The second natural relation on P_n is the orthogonality relation defined by

$$P \perp Q \Longleftrightarrow PQ = QP = 0, \quad P, Q \in P_n.$$

Obviously, $P \perp Q$ if $P = 0$ or $Q = 0$ or $P = I - Q$. If $P \perp Q$ and we do not have one of the trivial possibilities mentioned in the previous sentence, then P and Q are simultaneously similar to

$$\begin{bmatrix} I & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad \text{and} \quad \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & I & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix},$$

respectively. We define $P^{\perp} \subset P_n$ to be the set of all idempotents that are orthogonal to P. It is easy to see that

$$P \leq Q \Longleftrightarrow Q^{\perp} \subset P^{\perp}.$$

Let H be a Hilbert space. By $B(H)$ we denote the set of all bounded linear operators on H and by $P(H) \subset B(H)$ the subset of all idempotent operators. Idempotent operators are sometimes called skew-projections, and if an idempotent operator is also hermitian, then it is called a projection. As in the finite-dimensional case the set $P(H)$ is a poset with the partial order defined by $P \leq Q$ if and only if $PQ = QP = P$, $P, Q \in P(H)$. The idempotents $P, Q \in P(H)$ are said to be orthogonal if and only if $PQ = QP = 0$.

We shall now consider indefinite inner products on H. Usually we are interested only in inner products induced by invertible hermitian operators. Here, we will consider a more general case. Let $A \in B(H)$ be any invertible operator. We denote by $(x, y)_A$ the quantity (Ax, y), $x, y \in H$. For an arbitrary nonzero $x \in H$ the symbol $[x]$ stands for the one-dimensional subspace spanned by x. We denote by $\mathbb{P}H$ the set of all one-dimensional subspaces of H. For an arbitrary pair of nonzero vectors $x, y \in H$ we write $[x] \perp_A [y]$ if and only if $(x, y)_A = 0$ (note that this definition is independent of the choice of nonzero vectors from $[x]$ and $[y]$). A bijective transformation $\phi : \mathbb{P}H \to \mathbb{P}H$ is called a symmetry transformation if

$$\phi([x]) \perp_A \phi([y]) \Longleftrightarrow [x] \perp_A [y], \quad x, y \in H \setminus \{0\}.$$

A map $\phi : \mathbb{P}H \to \mathbb{P}H$ is induced by a semilinear transformation $U : H \to H$ if $\phi([x]) = [Ux]$ for every nonzero $x \in H$.

2 Some results and some open problems

2.1 Adjacency preserving maps

Let $\mathcal{V}$ be either $M_{m\times n}$, or S_n, or A_n, or H_n. Assume that $\phi : \mathcal{V} \to \mathcal{V}$ is a bijective map preserving adjacency in both directions, that is, $d(A,B) = 1$ if and only if $d(\phi(A), \phi(B)) = 1$, $A, B \in \mathcal{V}$. Note that we do not assume that ϕ is linear. The problem of describing the general form of such maps was solved under some mild additional conditions by Hua [5]–[12]. The mild additional assumptions were later proved to be superfluous. The entire book [28] is devoted to the characterization of such maps. It turns out that such maps have a surprisingly nice form (see the two results below). These elegant results have many applications. Let us mention two of them. One can use them when studying Jordan homomorphisms of matrix algebras [28] and they are of basic importance in the theory of linear preservers [20]. Motivated by applications one may ask whether the Hua's results can be further improved. Can we omit the bijectivity assumption and still get a nice description of maps preserving adjacency in both directions? Can we characterize bijective maps preserving adjacency in one direction only? We say that $\phi : \mathcal{V} \to \mathcal{V}$ preservers adjacency in one direction if $d(\phi(A), \phi(B)) = 1$ whenever $d(A,B) = 1$, $A, B \in \mathcal{V}$. Can we characterize adjacency preserving maps between spaces of matrices of different sizes? Only very recently some progress has been made on these long standing open problems. We present here two of the recent results.

Theorem 2.1 *[15] Let $\phi : M_{m\times n} \to M_{m\times n}$ be a bijective map preserving adjacency in one direction. Assume that $m, n \geq 2$. Then there exist invertible matrices $T \in M_m$ and $S \in M_n$, a matrix $R \in M_{m\times n}$, and an automorphism σ of the underlying field $\mathbb{F}$ such that $\phi(A) = TA_\sigma S + R$, $A \in M_{m\times n}$. If $m = n$, then we have the additional possibility that $\phi(A) = T(A_\sigma)^t S + R$, $A \in M_n$, where $T, S, R \in M_n$ with T and S invertible and σ is an automorphism of $\mathbb{F}$.*

Theorem 2.2 *[14] Let m, n be positive integers with $n \geq 2$. Assume that $\phi : H_n \to H_m$ is a map such that the matrices $\phi(A)$ and $\phi(B)$ are adjacent whenever A and B are adjacent, $A, B \in H_n$. Suppose that $\phi(0) = 0$. Then either there exist a rank one matrix $R \in H_m$ and a function $\varphi : H_n \to \mathbb{R}$ such that $\phi(A) = \varphi(A)R$, or $m \geq n$ and there exist $c \in \{-1, 1\}$ and an invertible $m \times m$ complex matrix T such that either*

$$\phi(A) = cT\begin{bmatrix} A & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} T^*, \quad A \in H_n,$$

or

$$\phi(A) = cT\begin{bmatrix} \overline{A} & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} T^*, \quad A \in H_n.$$

Here, the zeroes stand for the zero matrices of the appropriate sizes and $\overline{A}$ denotes the matrix obtained from A by applying the complex conjugation entrywise.

Note that in this result we have the additional assumption that $\phi(0) = 0$. We added this assumption because then the formulation of the result is much simpler. And moreover, we can add this assumption without loss of generality. Indeed, if $\phi : H_n \to H_m$ is

any map such that the matrices $\phi(A)$ and $\phi(B)$ are adjacent whenever A and B are adjacent, $A, B \in H_n$, then the map $A \mapsto \phi(A) - \phi(0)$, $A \in H_n$, also preserves adjacency and satisfies our additional assumption $\phi(0) = 0$.

It turns out that the problem of characterizing adjacency preserving maps on hermitian matrices is easier than the same problem on the space of all $m \times n$ matrices. In fact, we see that the second theorem above is optimal. The maps under the consideration act between spaces of hermitian matrices of different sizes and they preserve adjacency in one direction only. We have no additional assumptions on injectivity, surjectivity, or bijectivity. But even in the easier case of hermitian matrices there is still an open question. What happens if we consider hermitian matrices over an arbitrary division ring with an involution? Let us now turn to open problems in the case of the full matrix space, the symmetric case, and the skew-symmetric case. We do not know what are the optimal structural results for adjacency preserving maps on the spaces $M_{m\times n}$, S_n, and A_n. In all these cases we would like to have the description of adjacency preserving maps under as few additional assumptions as possible, and of course, the counterexamples showing that these additional assumptions are indeed essential. Some partial results [23] show that the answer to this question may depend on the underlying field.

2.2 Maps on idempotent matrices and operators

One of the problems in mathematical foundations of quantum mechanics is the description of probability measures on the set of experimentally verifiable propositions that form an orthomodular poset. Gleason's theorem [4] characterizes countably additive probability measures on the set of all projections on a Hilbert space H. To extend this result to other topological linear spaces one has to deal with idempotents instead of with projections. A theory of signed measures on the poset $P(H)$ (or more generally, the poset of all idempotents in a von Neumann algebra) was developed by Matveichuk and Mushtari (see [3] and the references therein). This theory was based on the observation that every $P \in P(H)$ is selfadjoint with respect to some inner product $(x, y)_A = (Ax, y)$ on H. Here, A is an invertible positive operator. For example, we can take A to be $A = P^*P + (I - P^*)(I - P)$. To each strictly positive A we associate the set Π_A consisting of all idempotents $P \in P(H)$ being selfadjoint with respect to $(\cdot, \cdot)_A$. The poset $P(H)$ is the union of such sets and on each of these sets we can apply the classical Gleason's theorem when studying measure theory on $P(H)$. To apply Gleason's theorem the assumption that the measure under the consideration is bounded on every Π_A is needed. This condition seems to be non-internal, and thus, the question here is, whether the family of all sets Π_A, where A is any invertible positive operator, can be defined in terms of $\leq$ alone. This problem motivated Ovchinnikov to characterize poset automorphisms of $P(H)$ (see [3, Appendix, p.84–86] and [19, Remark 4.2]).

Theorem 2.3 *Let H be a real or complex infinite-dimensional Hilbert space and $\phi : P(H) \to P(H)$ a bijective map such that $P \leq Q \Longleftrightarrow \phi(P) \leq \phi(Q)$, $P, Q \in P(H)$. Then there exists a bounded invertible linear or (in the complex case) conjugate-linear operator $T : H \to H$ such that either*

$$\phi(P) = TPT^{-1}, \quad P \in P(H),$$

or

$$\phi(P) = TP^*T^{-1}, \quad P \in P(H).$$

This result can be applied also when studying automorphisms of multiplicative semigroups of operators and in the theory of linear preservers [25]. The same result holds true if we replace the assumption of preserving order in both directions by the assumption of preserving orthogonality in both directions [25]. An interesting open problem here is whether these two results can be proved under the weaker assumption of preserving order (orthogonality) in one direction only. This is true in the finite-dimensional case [26].

Theorem 2.4 *Let $\phi : P_n \to P_n$, $n \geq 3$, be a bijective map such that $\phi(P) \leq \phi(Q)$ whenever $P \leq Q$, $P, Q \in P_n$. Then there exist an invertible $n \times n$ matrix T and an automorphism σ of the underlying field $\mathbb{F}$ such that either*

$$\phi(P) = TP_\sigma T^{-1}, \quad P \in P_n,$$

or

$$\phi(P) = T(P_\sigma)^t T^{-1}, \quad P \in P_n.$$

In fact, in the finite-dimensional case much better results are known [26]. In [26] a systematic study of maps preserving order or orthogonality on $n \times n$ idempotent matrices was carried out. Orthogonality preserving maps were studied not only on the set of all $n \times n$ idempotent matrices but also on the subset of $n \times n$ idempotent matrices of rank one.

2.3 Coherency preserving maps on spacetime events

Two spacetime events $r_1 = (x_1, y_1, z_1, t_1)$ and $r_2 = (x_2, y_2, z_2, t_2)$ are said to be coherent if the light signal can pass between r_1 and r_2, that is

$$(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2 + (z_2 - z_1)^2 = c^2(t_2 - t_1)^2.$$

A map ϕ defined on the set of space time events preserves coherency in both directions if for any two spacetime events r_1 and r_2 the events $\phi(r_1)$ and $\phi(r_2)$ are coherent if and only if r_1 and r_2 are coherent. The problem of characterizing bijective maps on spacetime events preserving coherency in both directions was solved by A.D. Aleksandrov in 1950. It turns out that such maps must be Lorenz transformations up to a scale factor. Later on this result has been improved by first removing the bijectivity assumption and then by considering coherency preserving maps defined not on the whole Minkowski space of spacetime events, but on open connected subsets (see, for example [16]).

2.4 Wigner's unitary-antiunitary theorem

One of the basic theorems in mathematical foundations of quantum mechanics is Wigner's theorem stating that every quantum mechanical invariance transformation can be represented by a unitary or antiunitary operator. Reformulating this into the mathematical language we arrive at the following statement. Let H be a complex Hilbert space, $\dim H \geq 3$, and ϕ a bijective transformation on the set of all one-dimensional subspaces preserving the angle between every pair of such subspaces. Then ϕ is induced by a unitary or antiunitary operator on H. This result has been improved in several directions. The first generalization was due to Uhlhorn [27] who considered bijective maps on one-dimensional subspaces preserving not all angles but just orthogonality. Recently, Molnár [17] extended this result to the indefinite inner product setting. He showed that bijective maps preserving orthogonality in both directions defined on the set of one-dimensional subspaces of a space with an indefinite inner product are induced by A-unitary or A-antiunitary operators. More precisely, we have the following result.

Theorem 2.5 *Let H be a complex Hilbert space, $\dim H \geq 3$, and let $A \in B(H)$ be invertible. Assume that $\phi : \mathbb{P}H \to \mathbb{P}H$ is a symmetry transformation. Then ϕ is induced by either an invertible bounded linear operator $U : H \to H$ satisfying*

$$(Ux, Uy)_A = c(x, y)_A, \quad x, y \in H,$$

for some nonzero constant $c \in \mathbb{C}$, or an invertible bounded conjugate-linear operator $U : H \to H$ satisfying

$$(Ux, Uy)_A = d(y, x)_{A^*}, \quad x, y \in H,$$

for some nonzero constant $d \in \mathbb{C}$.

The operator U is unique up to multiplication by a scalar.

A similar result holds true in the real case (in fact, in the real case the formulation is even simpler as there every semilinear map is automatically linear). It would be interesting to know whether the same conclusion holds true under the weaker assumption that orthogonality is preserved in one direction only. The answer is in the affirmative in the finite-dimensional case [22].

2.5 Commutativity preserving maps on self-adjoint operators

Let H be a complex Hilbert space. By $B_s(H) \subset B(H)$ we denote the real subspace of all hermitian operators. In quantum mechanics these operators describe bounded observable physical quantities. So, they are called bounded observables. Probably the most important relation among observables (hermitian operators) is compatibility (commutativity in the mathematical language). Transformations on quantum structures which preserve a certain physically relevant relation or operation are usually called symmetries of the underlying quantum system. For results in this direction we refer to [1].

To be interested in symmetries with respect to compatibility means that we want to know what are bijective maps on $B_s(H)$ preserving commutativity in both directions. The description of such maps [18] given below is one of the first results in the theory of non-linear preservers on matrix and operator algebras.

Theorem 2.6 *Let H be a complex separable Hilbert space with $\dim H \geq 3$ and let $\phi : B_s(H) \to B_s(H)$ be a bijective transformation such that*

$$AB = BA \iff \phi(A)\phi(B) = \phi(B)\phi(A), \quad A, B \in B_s(H).$$

Then there exists an either unitary or antiunitary operator U on H and for every operator $A \in B_s(H)$ there is a real valued bounded Borel function f_A on $\sigma(A)$ such that

$$\phi(A) = Uf_A(A)U^*.$$

2.6 Geometry of Grassmann spaces

Let $G(n,k)$ be the Grassmann space consisting of all k-dimensional subspaces of an n-dimensional vector space V. We recall that two elements of $G(n,k)$ are adjacent if their intersection has dimension $k-1$. In 1949 Chow [2] determined all bijections $\phi : G(n,k) \to G(n,k)$ that preserve adjacency in both directions. Except in the trivial cases $k = 1$ and $k = n-1$ every such map is induced by a bijective semilinear transformation $S : V \to V$. In the case when $n = 2k$ we have the additional possibility that such a map is induced by a semilinear transformation from V onto its dual V^*. Once again there is a natural question whether we can improve this classical result by relaxing the assumptions. For a result in this direction we refer to [13].

3 Connections between the problems

To give a more detailed description of the above mentioned problems with all known results would require much more space than available. Moreover, this would be an impossible task for us. Namely, the problems are coming from various areas: linear algebra, operator theory, physics, and geometry. Especially in physics and geometry our knowledge is far too limited.

But we came across all these problems in our research work and so we found that all these problems are closely related. Some of the ideas connecting these problems have been known for a long time, while some of them have been discovered very recently. These interesting connecting ideas are what we would like to emphasize in this survey paper.

It has been known for a long time that the problem of characterizing bijective coherency preserving maps on spacetime events and the problem of describing the general form of bijective adjacency preserving maps on 2×2 hermitian matrices are equivalent. Indeed, let us associate to each spacetime event (x, y, z, t) the 2×2 hermitian matrix

$$\begin{bmatrix} ct - z & x + iy \\ x - iy & ct + z \end{bmatrix}.$$

A straightforward computation shows that the condition that the events (x_1, y_1, z_1, t_1) and (x_2, y_2, z_2, t_2) are coherent can be rewritten as

$$\det\left(\begin{bmatrix} ct_1 - z_1 & x_1 + iy_1 \\ x_1 - iy_1 & ct_1 + z_1 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} ct_2 - z_2 & x_2 + iy_2 \\ x_2 - iy_2 & ct_2 + z_2 \end{bmatrix}\right) = 0.$$

The determinant of a 2×2 matrix is zero if and only if this matrix is either the zero matrix, or a rank one matrix. Thus, two different spacetime events are coherent if and only if the associated 2×2 hermitian matrices are adjacent.

Let us continue with the connection between adjacency preserving maps on matrices and order preserving maps on idempotent matrices. The idea that we will present here was first used in [24] where an improvement of Hua's characterization of adjacency preserving maps on real matrices was obtained by reducing Hua's problem to the problem of characterizing order-preserving maps on idempotent matrices. In order to present just the main idea we skip several technical steps. Thus, we assume that the problem of characterizing adjacency preserving maps ϕ on the space of rectangular matrices has been already reduced to the special case when ϕ is a map on the set of all $n \times n$ matrices preserving adjacency. Moreover, we assume that $\phi(0) = 0$ and $\phi(I) = I$. We then claim that ϕ maps idempotents into idempotents and that the restriction of ϕ to the set of idempotents preserves order. Indeed, let P and Q be idempotents with $P \leq Q$. Then P and Q are simultaneously similar to diagonal idempotents, and therefore, we can find a chain of idempotents

$$0 = P_0 \leq P_1 \leq P_2 \leq \ldots \leq P_{n-1} \leq P_n = I$$

such that $\operatorname{rank} P_k = k$, $k = 0, 1, \ldots, n$, P_k and P_{k+1} are adjacent, $k = 0, 1, \ldots, n-1$, and P and Q are members of this chain (let the similarity transformation that brings P and Q to the diagonal form be induced by T, that is, $TPT^{-1} = E_{11} + \ldots + E_{pp}$ and $TQT^{-1} = E_{11} + \ldots + E_{pp} + E_{p+1,p+1} + \ldots + E_{qq}$. Then $TP_1T^{-1} = E_{11}$, $TP_2T^{-1} = E_{11} + E_{22}, \ldots$ Here, E_{ii} denotes the matrix having all entries zero except the (i, i)-entry that is equal to 1). We denote $\phi(P_k) = Q_k$, $k = 0, 1, \ldots, n$. We know that $Q_0 = 0$ and $Q_n = I$. Now, Q_1 is adjacent to 0, and therefore, Q_1 is of rank one. Since Q_2 is adjacent to Q_1, it is of rank at most two. Proceeding in the same way we conclude that $\operatorname{rank} Q_k \leq k$, $k = 0, 1, \ldots, n$. In particular, Q_{n-1} is a matrix of rank at most $n-1$ adjacent to I. Then it is not very difficult to prove that it must be an idempotent of rank $n-1$. Further, Q_{n-2} is a matrix of rank at most $n-2$ that is adjacent to Q_{n-1} which is an idempotent of rank $n-1$. It follows rather easily that Q_{n-2} is an idempotent of rank $n-2$ satisfying $Q_{n-2} \leq Q_{n-1}$. Continuing in this way we conclude that all the Q_k's are idempotents with $Q_k \leq Q_{k+1}$, $k = 0, 1, \ldots, n-1$. In particular, $\phi(P)$ and $\phi(Q)$ are idempotents satisfying $\phi(P) \leq \phi(Q)$, as desired. Thus, starting with the problem of characterizing adjacency preserving maps we have arrived at the problem of describing order preserving maps on idempotent matrices. If we can solve the latter problem we get a nice form of the restriction of the adjacency preserving map to the set of all idempotents. Using the adjacency

preserving property one can then reconstruct the behaviour of this map on the whole matrix space.

Let m, n be positive integers, $m, n \geq 2$. Then to each point in $G(m+n, m)$, that is, to each m-dimensional subspace U of $\mathbb{F}^{m+n}$, we can associate an $m \times (m+n)$ matrix whose rows are coordinates of the vectors that form a basis of U. Each $m \times (m+n)$ matrix will be written in the block form $[X\ Y]$. Here, X is an $m \times n$ matrix and Y is an $m \times m$ matrix. It is an elementary exercise in linear algebra to prove that two matrices $[X\ Y]$ and $[X'\ Y']$ are associated to the same subspace U (their rows represent two bases of U) if and only if $[X\ Y] = P[X'\ Y']$ for some invertible $m \times m$ matrix P. If this is the case, then either both Y and Y' are invertible, or both Y and Y' are singular. So, to each point in a Grassmann space we have associated a (not uniquely determined) matrix $[X\ Y]$. If Y is singular, then the corresponding point in the Grassmann space is called a point at infinity. Otherwise, it is called a finite point. Observe that a finite point $[X\ Y]$ can be represented also with the matrix $[Y^{-1}X\ \ I]$. The matrix $Y^{-1}X$ in such a representation is uniquely determined by the point in the Grassmann space. So, if U and V are two m-dimensional subspaces that are finite points in the Grassmann space, then they can be represented with two uniquely determined $m \times n$ matrices T and S, respectively, and it is easy to see that the subspaces U and V are adjacent if and only if the matrices T and S are adjacent. Using this connection it is possible to deduce Chow's description of bijective maps on the Grassmann space preserving adjacency in both directions from Hua's structural result for bijective adjacency preserving maps on the set of all $m \times n$ matrices.

Next, we will consider compatibility preserving maps on bounded observables. We will very briefly describe the idea showing that the problem of characterizing such maps can be solved using Uhlhorn's generalization of Wigner's unitary-antiunitary theorem. So, let H be a Hilbert space, $\dim H \geq 3$, and let $\phi : B_s(H) \to B_s(H)$ be a bijective map (no linearity is assumed) such that

$$AB = BA \iff \phi(A)\phi(B) = \phi(B)\phi(A), \quad A, B \in B_s(H).$$

For every $A \in B_s(H)$ we denote by A' the commutant of A, that is,

$$A' = \{B \in B_s(H) : AB = BA\}.$$

Because of the commutativity preserving property we have $\phi(A') = \phi(A)'$ for every $A \in B_s(H)$.

We prove the infinite-dimensional case in an almost the same way as the finite-dimensional case. Only some technical details must be added. So, to explain the main ideas it is enough to consider the finite-dimensional case. Then $B_s(H)$ can be identified with H_n, the space of all $n \times n$ hermitian matrices. Obviously, for $A \in H_n$ we have $A' = H_n$ if and only if A is a scalar multiple of the identity. It follows that $\phi(\mathbb{R}I) = \mathbb{R}I$.

Now we would like to know what are hermitian $n \times n$ matrices with a maximal commutant $\neq H_n$. Consider the block diagonal hermitian matrices

$$A = \begin{bmatrix} t_1 I & 0 & 0 \\ 0 & t_2 I & 0 \\ 0 & 0 & t_3 I \end{bmatrix} \quad \text{and} \quad B = \begin{bmatrix} t_1 I & 0 & 0 \\ 0 & t_1 I & 0 \\ 0 & 0 & t_3 I \end{bmatrix},$$

where t_1, t_2, t_3 are real numbers with $t_i \neq t_j$ whenever $i \neq j$. It is easy to see that the commutants of A and B consist of all hermitian matrices of the form

$$\begin{bmatrix} * & 0 & 0 \\ 0 & * & 0 \\ 0 & 0 & * \end{bmatrix} \quad \text{and} \quad \begin{bmatrix} * & * & 0 \\ * & * & 0 \\ 0 & 0 & * \end{bmatrix},$$

respectively. Thus, $A' \subset B'$. One can now guess that $A \in H_n$ has a maximal commutant$\neq H_n$ if and only if A has exactly two eigenvalues. So, ϕ maps the set of all hermitian matrices with exactly two eigenvalues onto itself. From now on we consider only the restriction of ϕ to the set of all hermitian matrices with exactly two eigenvalues.

Two such matrices A and B have the same commutant if and only if they are simultaneously unitarily similar to diagonal matrices of the form

$$A_1 = \begin{bmatrix} t_1 I & 0 \\ 0 & t_2 I \end{bmatrix} \quad \text{and} \quad B_1 = \begin{bmatrix} s_1 I & 0 \\ 0 & s_2 I \end{bmatrix}.$$

We define two hermitian matrices A and B both with exactly two eigenvalues to be equivalent if $A' = B'$. Obviously, $A' = B'$ if and only if $\phi(A)' = \phi(B)'$. Thus, ϕ preserves this equivalence relation in both directions.

In each equivalence class there are exactly two projections. In the equivalence class determined by A_1 and B_1 these two projections are

$$\begin{bmatrix} I & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \quad \text{and} \quad \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & I \end{bmatrix}.$$

Thus ϕ induces a map ψ defined on the set of projections (in fact, we have a certain freedom when defining ψ since each equivalence class contains two projections P and $I - P$). Among projections it is possible to characterize projections of rank one or corank one with the commutativity relation. This characterization is much more complicated than the above characterization of hermitian matrices with exactly two eigenvalues and it involves not only the first commutant but also the second commutant. The idea for obtaining such a characterization comes from a classical paper of Rickart [21] treating isomorphisms of classical linear groups. This characterization together with the commutativity preserving property yields that ψ maps projections of rank one into projections of rank one or corank one. Because of the freedom we had when defining ψ (see the above remark) we can assume with no loss of generality that ψ maps projections of rank one into projections of rank one. Moreover, this map sends commuting pairs of rank one projections into commuting pairs of rank one projections. If we can describe the general form of such maps then we know how ϕ behaves on the set of all rank one projections. It is then rather easy to describe the behaviour of ϕ on the whole set H_n.

So, we have arrived at the problem of describing the general form of bijective maps defined on the set of rank one projections preserving commutativity in both directions. It is easy to see that two rank one projections P and Q, $P \neq Q$, commute if and only if they are orthogonal. Thus, we have to characterize bijective maps defined on the set of rank one projections preserving orthogonality in both directions. Rank one projections can be identified with one-dimensional subspaces of $\mathbb{C}^n$. Thus, we have to describe bijective maps defined on one-dimensional subspaces preserving orthogonality in both direc-

tions and this is exactly what Uhlhorn [27] did when extending Wigner's unitary-antiunitary theorem.

We will conclude by briefly describing the core idea of the Molnár's proof of Theorem 2.5. The main tool in his proof was Theorem 2.3. We have explained above that in the case of the usual inner product Uhlhorn's result can be reformualted as a result on bijective maps on rank one projections preserving orthogonality in both directions. Molnár used a clever algebraic trick to show that in the indefinite inner product case we arrive at the problem of describing bijective maps on rank one idempotents preserving orthogonality in both directions. It is not too difficult to extend such a map to a bijective map defined on the set of all finite rank idempotent operators in such a way that this extension still preserves orthogonality in both directions. It is easy to see that this extension preserves order in both directions. Indeed, if we have two finite rank idempotent operators $P, Q \in P(H)$ then

$$P \leq Q \Longleftrightarrow Q^{\perp} \subset P^{\perp}.$$

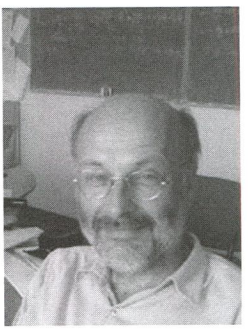
Here, $P^{\perp}$ denotes the set of all finite rank idempotent operators that are orthogonal to P. So, we have now a bijective map defined on the set of all finite rank idempotent operators preserving order in both directions. A slight modification of the Ovchinnikov's proof of Theorem 2.3 gives a characterization of such maps.

Acknowledgment. This paper is based on the plenary talk given at the 16th International Congress of OMG in Klagenfurt, September 2005. I would like to express my gratitude to the organizers for inviting me to this conference.

References

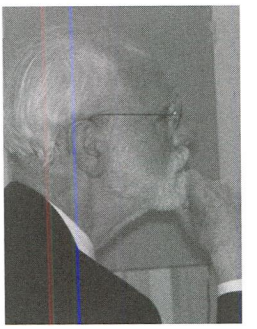
[1] G. Cassinelli, E. De Vito, P. Lahti, and A. Levrero, *The Theory of Symmetry Actions in Quantum Mechanics*, Springer, Lecture Notes in Physics vol. 654, 2004.
[2] W.-L. Chow, *On the geometry of algebraic homogeneous spaces*, Ann. Math. **50** (1949), 32–67.
[3] S.V. Dorofeev et.al., *Measures on projections and orthomodular posets. Collection of papers*, Kazan Tracts in Mathematics **4** (1998), 1–114.
[4] A.M. Gleason, *Measures on the closed subspaces of a Hilbert space*, J. Ration. Mech. Anal. **6** (1957), 885–893.
[5] L.K. Hua, *Geometries of matrices I. Generalizations of von Staudt's theorem*, Trans. Amer. Math. Soc. **57** (1945), 441–481.
[6] L.K. Hua, *Geometries of matrices* I_1. *Arithmetical construction*, Trans. Amer. Math. Soc. **57** (1945), 482–490.
[7] L.K. Hua, *Geometries of symmetric matrices over the real field I*, Dokl. Akad. Nauk. SSSR **53** (1946), 95–97.
[8] L.K. Hua, *Geometries of symmetric matrices over the real field II*, Dokl. Akad. Nauk. SSSR **53** (1946), 195–196.
[9] L.K. Hua, *Geometries of matrices II. Study of involutions in the geometry of symmetric matrices*, Trans. Amer. Math. Soc. **61** (1947), 193–228.
[10] L.K. Hua, *Geometries of matrices III. Fundamental theorems in the geometries of symmetric matrices*, Trans. Amer. Math. Soc. **61** (1947), 229–255.
[11] L.K. Hua, *Geometry of symmetric matrices over any field with characteristic other than two*, Ann. Math. **50** (1949), 8–31.

[12] L.K. Hua, *A theorem on matrices over a sfield and its applications*, Acta Math. Sinica **1** (1951), 109–163.
[13] W.-l. Huang, *Adjacency preserving mappings of invariant subspaces of a null system*, Proc. Amer. Math. Soc. **128** (2000), 2451–2455.
[14] W.-l. Huang and P. Šemrl, *Adjacency preserving maps on hermitian matrices*, Canad. J. Math., to appear.
[15] W.-l. Huang and Z.-X. Wan, *Adjacency preserving mappings of rectangular matrices*, Beiträge Algebra Geom. **45** (2004), 435–446.
[16] J.A. Lester, *A physical characterization of conformal transformations of Minkowski spacetime*, Ann. Discrete Math. **18** (1983), 567–574.
[17] L. Molnár, *Orthogonality preserving transformations on indefinite inner product spaces: generalization of Uhlhorn's version of Wigner's theorem*, J. Funct. Anal. **194** (2002), 248–262.
[18] L. Molnár and P. Šemrl, *Nonlinear commutativity preserving maps on self-adjoint operators*, Quart. J. Math. Oxford **56** (2005), 589–595.
[19] P.G. Ovchinnikov, *Automorphisms of the poset of skew projections*, J. Funct. Anal. **115** (1993), 184–189.
[20] S. Pierce et.al., *A survey of linear preserver problems*, Linear and Multilinear Algebra **33** (1992), 1–192.
[21] C.E. Rickart, *Isomorphic groups of linear transformations*, Amer. J. Math. **72** (1950), 451–464.
[22] L. Rodman and P. Šemrl, *Orthogonality preserving bijective maps on real and complex projective spaces*, Linear and Multilinear Algebra, to appear.
[23] P. Šemrl, *On Hua's fundamental theorem of the geometry of rectangular matrices*, J. Algebra **248** (2002), 366–380.
[24] P. Šemrl, *Hua's fundamental theorem of the geometry of matrices*, J. Algebra **272** (2004), 801–837.
[25] P. Šemrl, *Maps on idempotents*, Studia Math. **169** (2005), 21–44.
[26] P. Šemrl, *Maps on idempotent matrices over division rings*, J. Algebra **298** (2006), 142–187.
[27] U. Uhlhorn, *Representation of symmetry transformations in quantum mechanics*, Ark. Fysik **23** (1963), 307–340.
[28] Z.-X. Wan, *Geometry of matrices*, World Scientific, Singapore, 1996.



Peter Slodowy

E. Looijenga
und
T. A. Springer



Abstract

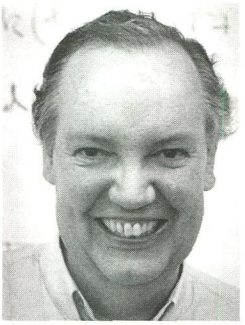
- Mathematics Subject Classification: 01 A 70
- Keywords and Phrases: Peter Slodowy, einfache Singularitäten, einfach elliptische Singularitäten

This article describes the life of Peter Slodowy (1948–2002) and parts of his mathematical work.

Eingegangen: 31.3.2006

Mathematisch Instituut, Universiteit Utrecht,Postbus 80.010, NL-3508 TA Utrecht, Nederland, springer@math.uu.nl, looijeng@math.uu.nl

DMV
JAHRESBERICHT
DER DMV
© B. G. Teubner 2006



Kurzer Lebenslauf

Am 19. November 2002 verschied Peter Slodowy, nur 54 Jahre alt, nach langjährigem Kampf mit einer schweren Krankheit. Die langfristigen Therapien hatte er mutig und mit Optimismus ertragen.Trotz seines Leidens war er praktisch bis zu seinem Tode mit der ihm eigenen Begeisterung mathematisch tätig gewesen. Seine zahlreichen mathematischen Freunde vermissen ihn.

Peter Slodowy wurde am 12.10.1948 in Leverkusen geboren. Er bestand 1967 sein Abitur am Carl-Duisberg-Gymnasium in Leverkusen. Von 1967 bis 1971 studierte er Physik und Mathematik an der Universität Bonn. Danach wandte er sich ganz dem Mathematikstudium zu. 1974 erhielt er das Diplom an der Bonner Universität. Er hatte inzwischen auch ein Semester an der Universität Regensburg studiert.

Slodowys späteres Interesse an der Wechselwirkung von Geometrie und Gruppentheorie muss schon während seines Studiums in Bonn geweckt worden sein. Die Geometrie (Topologie, algebraische Geometrie) lernte er bei Friedrich Hirzebruch und Egbert Brieskorn, die Gruppentheorie (insbesondere die Theorie der Lieschen und algebraischen Gruppen) bei Jacques Tits, der bis 1973 ordentlicher Professor an der Universität Bonn war.

Das akademische Jahr 1974–1975 verbrachte Slodowy am Institut des Hautes Études Scientifiques in Bures-sur-Yvette bei Paris. Er kam dort in Kontakt mit René Thom und arbeitete sich in die Singularitätentheorie ein.

Von 1975 bis 1978 war Slodowy an der Universität Regensburg als wissenschaftlicher Assistent tätig. 1978 wurde er an der Universität Bonn mit der Dissertation „Einfache Singularitäten und einfache algebraische Gruppen" promoviert.

Von 1978 bis 1985 verwaltete er eine Assistentenstelle an der Universität Bonn, unterbrochen durch einen Aufenthalt an der Yale University (New Haven, U.S.A.). 1979 heiratete er Mirie Nozaki. Er besuchte gerne ihre Heimat Japan, insbesondere in seinen letzten Jahren.

1984 habilitierte Slodowy sich an der Universität Bonn. Die Habilitationsschrift „Singularitäten, Kac-Moody-Lie-Algebren, assozierte Gruppen und Verallgemeinerungen" handelt von einer unendlichdimensionalen Version der Resultate seiner Dissertation.

Nach zwei Jahren als Lecturer in Pure Mathematics an der University of Liverpool hatte er 1988–1990 eine C3-Professur an der Universität Stuttgart und seit Herbst 1990 eine C4-Professur an der Universität Hamburg inne. Wegen seiner Krankheit wurde er 2001 vorzeitig pensioniert.

Während dieser letzten Periode wohnte er noch mit seiner Frau in Bonn, wo er einen Arbeitsplatz am Max-Planck-Institut hatte. In Bonn ist er auch gestorben und beerdigt.

Peter Slodowy war ein Mathematiker, der eigene Wege ging. Mit Vorliebe verfolgte er Verbindungswege zwischen verschiedenen Gebieten, sowohl innerhalb der Mathematik

als auch von der Mathematik zu Gebieten der theoretischen Physik. Daneben fesselte ihn die Mathematikgeschichte.

Die Anzahl von Slodowys Publikationen ist nicht besonders groß, aber immer enthalten sie Wertvolles. Übrigens hat er öfters eigene Resultate seinen Schülern zur Publikation überlassen.

Einfache algebraische Gruppen und einfache Singularitäten

Wir werden jetzt einiges aus Slodowys Arbeiten* ausführlicher besprechen.

Der Ideenkreis der Dissertation spielt in vielen seiner Arbeiten eine Rolle. In seiner Traueransprache bei der Bestattung (publiziert in [H]) spricht Friedrich Hirzebruch von Slodowys Jugendtraum: dem Dreiklang Algebren, Gruppen, Singularitäten. Darauf müssen wir zuerst etwas tiefer eingehen.

Eine *binäre Polyedergruppe* Γ ist eine endliche Untergruppe von $SL_2(\mathbb{C})$. Diese Gruppen sind wohlbekannt, die zugehörigen projektiven Gruppen findet man schon in Veröffentlichungen des 19. Jahrhunderts, z. B. in Felix Kleins „Vorlesungen über das Ikosaeder" (1884). Wenn Γ eine binäre Ikosaedergruppe (von der Ordnung 120) ist, dann ist die projektive Gruppe isomorph zur Gruppe der dreidimensionalen Drehungen, die ein Ikosaeder festlassen.

Die Gruppe Γ operiert auf $\mathbb{C}^2$ und der Quotient $X = \mathbb{C}^2/\Gamma$ ist eine affine algebraische Varietät mit genau einem singulären Punkt x (das Bild von $(0,0)$). So ein singulärer Punkt (genauer: der Keim (X,x)) heisst ein *rationaler Doppelpunkt*. Bei der Ikosaedergruppe Γ ist X isomorph zu der Fläche $\{(x,y,z) \in \mathbb{C}^3 \mid x^2 + y^3 + z^5 = 0\}$.

In Klassifikationsresultaten über isolierte Singularitäten erscheinen die rationalen Doppelpunkte als die einfachsten Singularitäten, sie werden (vielleicht darum) auch „einfach" genannt. Slodowy spricht auch von „Kleinschen" Singularitäten.

Bei der Auflösung einer einfachen Singularität stößt man auf ein (irreduzibles) Dynkindiagramm von einem der Typen A_r, D_r, E_r. Wenn Γ zum Beispiel eine Ikosaedergruppe ist, dann findet man den Typ E_8. Nun gehört zu so einem Dynkindiagramm auch eine einfache Liealgebra. Daher stellt sich die Frage, ob es eine direkte Beziehung zwischen einfachen Singularitäten und einfachen Liealgebren gibt.

Das Studium von Brieskorns Arbeiten über rationale Singularitäten führte Grothendieck 1969 zu Vermutungen über eine solche Beziehung, die dann von Brieskorn bewiesen wurden. Brieskorns Kongressvortrag von 1970 [Br] enthält eine Beweisskizze. Die erste ausführliche Darstellung findet man erst in Slodowys Doktorarbeit [S2]. Die erweiterte englische Übersetzung [S4] erschien 1982. Sie ist ein Standardtext über einfache Singularitäten geworden.

Wir beschreiben jetzt die Beziehung, wobei wir [S4] folgen. Dazu brauchen wir einiges aus der Lietheorie.

* Eine Liste befindet sich am Ende.

Es sei $\mathfrak{g}$ eine einfache Liealgebra über $\mathbb{C}$. Die zugehörige adjungierte Gruppe $G \subset \mathrm{GL}(\mathfrak{g})$, d. h. die Komponente der Eins der Automorphismengruppe von $\mathfrak{g}$, ist eine einfache komplexe lineare algebraische Gruppe (oder, wenn man diese Sichtweise bevorzugt, eine einfache komplexe Liegruppe).

Das Element $n \in \mathfrak{g}$ ist *nilpotent*, falls die lineare Abbildung $x \mapsto [n, x]$ von $\mathfrak{g}$ nilpotent ist (d. h. nur Eigenwerte 0 hat). Die nilpotenten Elemente bilden eine irreduzible algebraische Teilvarietät $\mathfrak{g}_n$ von $\mathfrak{g}$. Grothendieck erkannte, dass man eine rationale Singularität mit Dynkindiagramm D in $\mathfrak{g}_n$ finden sollte, wobei $\mathfrak{g}$ die einfache Liealgebra ist, die zu D gehört.

Die Gruppe G operiert auf $\mathfrak{g}_n$ mit nur endlich vielen Bahnen. Eine einzige Bahn ist offen, sie besteht aus den nichtsingulären Punkten, die auch *reguläre* nilpotente Elemente genannt werden. Auch in der Teilvarietät der singulären Punkte von $\mathfrak{g}_n$ hat G eine offene Bahn, deren Punkte die *subregulären* nilpotenten Elemente sind. Die Kodimension dieser Bahn in $\mathfrak{g}_n$ ist 2.

Es sei jetzt D ein Dynkindiagramm vom Typ A_r, D_r oder E_r, $\mathfrak{g}$ sei eine einfache Liealgebra von diesem Typ und $x \in \mathfrak{g}$ ein subreguläres nilpotentes Element. Der folgende Satz beschreibt die Beziehung zwischen einfachen Singularitäten und einfachen Liealgebren (es ist im Wesentlichen der Satz in [S4, p. 92, p. 129]).

Satz von Brieskorn. *Es gibt einen affinen Teilraum S von $\mathfrak{g}$, so dass $(S \cap \mathfrak{g}_n, x)$ eine einfache Singularität mit Dynkindiagramm D ist.*

Der affine Raum S ist eine „transversale Scheibe" in $\mathfrak{g}$ zur Bahn von x. Es gibt solche Scheiben für beliebige nilpotente Elemente einer einfachen Liealgebra $\mathfrak{g}$. Mit Hilfe des Satzes von Jacobson-Morozov aus der Theorie der Liealgebren wird in [S4, 7.4] eine Scheibe mit besonders guten Eigenschaften konstruiert. Insbesondere gestattet sie eine $\mathbb{C}^*$-Operation. (In der Literatur wird diese Scheibe auch „Slodowy slice" genannt, obwohl sie älter ist als [S4].)

Brieskorn gibt auch eine gruppentheoretische Beschreibung der „semiuniversellen" Deformation einer einfachen Singularität. Eine Deformation der Singularität (X, x) ist, grob gesagt, eine Familie von Singularitäten (X_s, s), wobei s einen Parameterraum S durchläuft, so dass es ein $s_0 \in S$ mit $(X_{s_0}, s_0) = (X, x)$ gibt und so dass die (X, s) mit $s \neq s_0$ „weniger singulär" als (X, x) sind. Die semiuniverselle Deformation von (X, x) – die nicht zu existieren braucht – ist durch eine universelle Eigenschaft charakterisiert (worauf wir nicht eingehen). Man hat auch einen analogen Begriff für Singularitäten mit $\mathbb{C}^*$-Operation. (Einzelheiten findet man in [S4, I,2].)

Es sei $\mathfrak{g}$ und G wie oben, T ein maximaler Torus von G und $B \supset T$ eine Borelgruppe von G (d. h. eine maximale zusammenhängende auflösbare abgeschlossene Untergruppe). Die Liealgebren von T und B sind $\mathfrak{t}$ bzw. $\mathfrak{b}$. Dann ist $\mathfrak{t}$ eine (komplexe) Cartanalgebra von $\mathfrak{g}$. Es gibt eine kanonische Retraktion $\mathfrak{b} \to \mathfrak{t}$ von Liealgebren.

Der Quotient G/B ist ein projektiver homogener Raum, die *Fahnenvarietät*. Sie kann auch als die Varietät $\mathcal{B}$ der Borelgruppen beschrieben werden.

Es sei N der Normalisator von T in G. Der Quotient $W = N/T$ ist eine endliche Gruppe, die *Weylgruppe*. Sie operiert auf $\mathfrak{t}$ als Spiegelungsgruppe und man hat einen Quotienten $\mathfrak{t}/W$, dessen Punkte die W-Bahnen in $\mathfrak{t}$ sind. Ein bekannter Satz von Che-

valley besagt, dass der Bahnenraum $\mathfrak{t}/W$ isomorph zu einem affinen Raum (also glatt) ist. Es sei $\psi : \mathfrak{t} \to \mathfrak{t}/W$ die Quotientenabbildung.

Für ein beliebiges $x \in \mathfrak{g}$ ist der Durchschnitt des Abschlusses $\overline{G.x}$ der Bahn durch x mit $\mathfrak{t}$ eine W-Bahn. Das liefert eine Abbildung $\chi : \mathfrak{g} \to \mathfrak{t}$. Sie ist ein Morphismus.

Man bezeichne mit $\tilde{\mathfrak{g}}$ den Quotienten $G \times^B \mathfrak{b}$ von $G \times \mathfrak{b}$ bezüglich der B-Operation $b.(g, x) = (gb^{-1}, b.x)$. Die Abbildung $(g, x) \mapsto g.x$ induziert einen Morphismus $\phi : \tilde{\mathfrak{g}} \to \mathfrak{g}$. Die Projektionen $\tilde{\mathfrak{g}} \to \mathfrak{b}$ und $\mathfrak{b} \to \mathfrak{t}$ führen zu einem Morphismus $\theta : \tilde{\mathfrak{g}} \to \mathfrak{t}$.

Das Diagramm

$$(1) \qquad \begin{array}{ccc} \tilde{\mathfrak{g}} & \xrightarrow{\phi} & \mathfrak{g} \\ \theta \downarrow & & \downarrow \chi \\ \mathfrak{t} & \xrightarrow{\psi} & \mathfrak{t}/W \end{array}$$

ist kommutativ.

Satz von Grothendieck. *Das Diagramm (1) ist eine simultane Auflösung von ϕ.*

Das bedeutet Folgendes:

(a) θ ist glatt,
(b) ψ ist endlich und surjektiv,
(c) ϕ ist eigentlich (sogar projektiv),
(d) für alle $x \in \mathfrak{t}$ ist der von ϕ induzierte Morphismus $\phi_x : \theta^{-1}(x) \to F_x = \chi^{-1}(\psi(x))$ eine Auflösung der Singularitäten von F_x.

Die Voraussetzungen für eine simultane Auflösung waren alle bekannt, aber Grothendieck hat bemerkt, wie man sie für die Singularitätentheorie nutzbar machen kann. Die Arbeit [S4] enthält die erste vollständige Darstellung dieser Resultate, wobei Nachdruck auf die analogen Resultaten für G anstelle von $\mathfrak{g}$ gelegt wird. Übrigens hat Slodowy später gesehen, dass bei Verallgemeinerungen auf den Kac-Moody-Fall die Theorie besser für eine Gruppe als für ihre Liealgebra funktioniert.

Man beachte, dass F_0 die nilpotente Varietät $\mathfrak{g}_n$ ist. Sie ist also in die „Familie" der F_x eingebaut. Für allgemeines x ist F_x eine G-Bahn aus regulären Elementen, also glatt.

Für beliebiges $x \in \mathfrak{g}$ kann man die Faser $\theta^{-1}(x)$ als die Varietät $\mathcal{B}$ der Borelgruppen, die x enthalten, beschreiben.

Es sei $\mathfrak{g}_r$ die Zariski-offene Teilmenge der halbeinfachen regulären Elemente, d. h. der Elemente, deren Zentralisator in $\mathfrak{g}$ eine Cartanalgebra ist. Wir schreiben $\mathfrak{t}_r = \mathfrak{t} \cap \mathfrak{g}_r$. Dann ist $\mathfrak{t} - \mathfrak{t}_r$ die Vereinigung der Spiegelungshyperebenen von W in $\mathfrak{t}$ (der Hyperebenen, die von einem Element von W punktweise festgelassen werden) und $\mathfrak{t}_r$ ist genau die Teilmenge von $\mathfrak{t}$, auf der W frei operiert. Deren Bild im affinen Raum $\mathfrak{t}/W$ ist also der reguläre Bahnenraum $\mathfrak{t}_r/W$ von W und das Komplement ist eine Hyperfläche, die *Diskriminante*. Da $\mathfrak{g}_r$ von χ nach $\mathfrak{t}_r/W$ abgebildet wird, erhalten wir eine Einschränkung $\chi_r : \mathfrak{g}_r \to \mathfrak{t}_r/W$ von χ.

Das Urbild $\phi^{-1}(\mathfrak{g}_r)$ ist isomorph zum Quotienten $G/T \times^W \mathfrak{t}_r$ von $G/T \times \mathfrak{t}_r$ bezüglich der W-Operation $w.(gT, x) = (gw^{-1}, w.x)$. Das Diagramm (1) zeigt dann, dass χ_r nach dem Basiswechsel $\mathfrak{t}_r \to \mathfrak{t}_r/W$ trivial mit Faser G/T wird. Mit anderen Worten ist χ_r eine

lokal triviale Faserung im komplex-analytischen (sogar étalen) Sinne mit Faser G/T und Strukturgruppe W.

Wichtig in [S4] ist eine „Lokalisierung" von (1). Es sei $x \in \mathfrak{g}$ und S ein transversaler Schnitt in x zur Bahn $G.x$. Man setze $\tilde{S} = \phi^{-1}(S)$. Slodowy bemerkt, dass dann

$$(2) \qquad \begin{array}{ccc} \tilde{S} & \xrightarrow{\phi'} & S \\ \theta' \downarrow & & \downarrow \chi' \\ \mathfrak{t} & \xrightarrow{\psi} & \mathfrak{t}/W \end{array}$$

(wobei ϕ', θ', χ' Einschränkungen sind) eine simultane Auflösung von χ' ist (siehe [loc. cit. Remark, p. 68]).

Es sei jetzt x ein subreguläres unipotentes Element und S ein „Slodowy slice" in x. Für $x \in \mathfrak{t}$ setze man $F'_x = (\chi')^{-1}(\psi(x))$. Wenn $\mathfrak{g}$ von einem der Typen A_r, D_r, E_r ist, dann hat (F'_0, x) nach dem Satz von Brieskorn eine einfache Singularität. Die Familie $(F'_x, \phi'(x))$ $(x \in \mathfrak{t})$ liefert dann eine Deformation der Singularität, und ein Hauptresultat ist die Charakterisierung in [S4, 8.7] dieser Deformation als die „G_m-semiuniverselle G_m-Deformation".

Das Bild der Einschränkung von χ' auf $S \cap \mathfrak{g}_r$ ist wieder $\mathfrak{t}_r$ und W ist die Strukturgruppe dieses Morphismus. Die Gruppe W operiert auf der zweiten Homologiegruppe einer Faser der Einschränkung als Spiegelungsgruppe (diese Homologiegruppe enthält und wird erzeugt von einem Wurzelsystem mit Weylgruppe W).

Übrigens enthält [S4] mehr als nur eine Darstellung von Brieskorns Resultaten. Zuerst werden diese elegant und und nicht rechnerisch bewiesen. Das geschieht im Rahmen der algebraischen Geometrie über beliebigen Körpern, mit einigen Einschränkungen der Charakteristik, die in der Theorie der algebraischen Gruppen natürlich sind. (Wir haben hier nur den komplexen Fall betrachtet.)

Dann wird auch die Theorie im Fall der einfachen Liealgebren vom Typ B_r, C_r, F_4, G_2 ausgeführt. Diese Fälle führen zu einfachen Singularitäten mit Automorphismen.

Die binären Polyedergruppen kommen in der Geometrie der Liealgebren nicht explizit zum Vorschein. Aber sie sind im Hintergrund da. So wird auf der letzten Seite von [S4] kurz beschrieben, wie man eine Präsentation einer Polyedergruppe aus dem zugehörigen Dynkindiagramm findet.

Slodowys immer währendes Interesse an den binären Polyedergruppen zeigt sich auch in einer Arbeit mit historischem Hintergrund: die Betreuung einer Neuausgabe von Felix Kleins „Vorlesungen über das Ikosaeder". Slodowy gibt ausführliche Kommentare über die Entwicklungen seit dem Erscheinen von Kleins Buch.

In [S3] findet man eine andere Anwendung der Methoden von [S4]. Es sei $\mathfrak{g}$ wieder eine einfache komplexe Liealgebra und $x \in \mathfrak{g}$ ein nilpotentes Element. Wie vorher sei $\mathcal{B}_x$ die Faser $\theta^{-1}(x)$. Es ist eine projektive, im Allgemeinen singuläre, projektive Varietät. Man kann zeigen (siehe z. B. [Sp]), dass die Weylgruppe W auf der (graduierten) Kohomologie $H^*(\mathcal{B}_x, \mathbb{Q})$ linear operiert. Der ursprüngliche Beweis dieser Tatsache war ziemlich

kompliziert. In [S3] wird eine solche W-Darstellung mit Hilfe der Ideen von [S4] unter Benutzung des Diagramms (2) konstruiert . Die Darstellung der Weylgruppe tritt als „Monodromiedarstellung" für θ' auf. Hier hilft die Singularitätentheorie der Algebra.

Slodowy zeigt auch, dass $\mathcal{B}_x$ homotopie-äquivalent zu einer Faser von θ', einer glatten affinen algebraischen Varietät, ist.

Schleifengruppen und einfach elliptische Singularitäten

Seitdem die Grothendieck-Brieskorn-Korrespondenz einen wunderschönen Zusammenhang zwischen den einfachen Liealgebren und den einfachsten Flächensingularitäten hergestellt hat, kann man sich die Frage stellen, ob es eine ähnliche Beziehung auch für andere Singularitäten gibt. Als Slodowy das Grothendieck-Programm vollendet hatte, gab es einige Hinweise, dass dies zumindest für bestimmte Singularitäten der Fall sein konnte, wobei die *einfach elliptischen Singularitäten* die aussichtsreichsten Kandidaten waren. Dies sind normale Flächensingularitäten, die im Sinne einer Hierarchie der Singularitäten gleich nach den Kleinschen Singularitäten kommen und durch die Tatsache charakterisiert sind, dass sie mit einer einzigen glatten elliptischen Kurve E als exzeptionellem Divisor aufgelöst werden können. Der Isomorphietyp von E (oder, was auf das Gleiche hinaus läuft, ihre j-Invariante) und die Selbstschnittzahl $E \cdot E$ in der Auflösung bestimmen vollständig den Isomorphietyp der Singularität. Die Zahl $d := -E \cdot E$ ist stets positiv und wird gewöhnlich der *Grad* der Kurve genannt. Für $d = 1, 2, 3$ liegt die Singularität auf einer Hyperfläche im $\mathbb{C}^3$ und für $d = 4$ auf einem vollständigen Durchschnitt im $\mathbb{C}^4$. Für diese Grade wie auch für den Fall $d = 5$ lässt die Singularität eine semiuniverselle Deformation mit einem glatten Parameterraum zu. Slodowy war schon immer davon überzeugt, dass sich das Grothendieck-Programm auch auf diese Klasse von Singularitäten übertragen lassen sollte, tatsächlich so sehr, dass sich die Realisierung dieses Programms zum Mittelpunkt seiner Forschung entwickelte. Sein langer Weg zu diesem Ziel begann um das Jahr 1980 herum [S5] und endete im Wesentlichen (mit der Hilfe seines ehemaligen Studenten Helmke) 1999 nach fast zwei Jahrzehnten unermüdlicher Ausdauer ([S31], [S33], [S35]). Verständlicherweise bedeutete das eine große Genugtuung für ihn. Es ist tröstlich zu wissen, dass er die Vollendung der Aufgabe, die er sich selbst gesetzt hatte, erleben konnte. Während dieser Zeit war er zwar auch mit Erfolg auf anderen Gebieten tätig, aber es war sicher diese Frage, die seine Forschung beherrschte. Deswegen halten wir es für gerechtfertigt, uns im Folgenden auf diesen Teil seiner Forschung zu beschränken.

Beginnen wir damit, ins Gedächtnis zurück zu rufen, was Slodowy zu der Hoffnung veranlasste, dass sich das Grothendieck-Programm auf diese Klasse von Singularitäten erweitern lassen sollte. Zuallererst gab es Arbeiten von Gabrielov und Pinkham, die dazu führten, dass man einer einfach elliptischen Singularität vom Grad d ein Wurzelsystem R_{9-d} vom Rang $9 - d$ zuordnen konnte, wobei R_{9-d} vom Typ E_8, E_7, E_6, D_5, A_4 für $d = 1, 2, 3, 4, 5$ war. Daraus ergibt sich wie folgt eine Beschreibung der Monodromiegruppe der semiunversellen Deformation: Ist F eine glatte Faser der semiunversellen Deformation einer einfach elliptischen Singularität vom Grad $d \leq 5$ mit zugehöriger

Kurve E vom Geschlecht 1, dann hat $H_2(F)$ die folgende bemerkenswerte Eigenschaft: Es enthält in natürlicher Weise $H_1(E)$ als Untergruppe, und der Quotient $H_2(F)/H_1(E)$ enthält ein Wurzelsystem R_{9-d}, das ihn erzeugt. Darüber hinaus ist die Monodromiegruppe der semiuniversellen Deformation, die auf $H_2(F)$ operiert, die Gruppe derjenigen Automorphismen von $H_2(F)$, die die Identität auf $H_1(E)$ induzieren und auf dem Quotienten $H_2(F)/H_1(E)$ als Weylgruppenelemente operieren (so dass die Monodromiedarstellung auf diesem Quotienten der einer Kleinschen Singularität vom Typ R_{9-d} gleicht). Eine leichte Verfeinerung des Monodromiebegriffs führt zu einer zentralen Erweiterung dieser Monodromiegruppe durch die unendlich zyklische Gruppe $H_2(E)$.

Ein noch deutlicherer Hinweis war aber vielleicht die Beschreibung der Diskriminante einer einfach elliptischen Singularität nur mit Hilfe des Wurzelsystem R_{9-d} und der elliptischen Kurve, da sie sehr der Identifizierung der Diskriminante einer Kleinschen Singularität mit der Diskriminante von $\mathfrak{t} \to \mathfrak{t}/W$ ähnelte. Nach Pinkham besitzt die semiuniverselle Deformation einer einfach elliptischen Singularität einen affinen Morphismus als natürliches Modell: dessen Fasern sind affine Del-Pezzo-Flächen (oder deren Entartungen), die durch Hinzufügen einer Kopie von E (oder einer kleinen Defomation dieser Kurve) im Unendlichen vervollständigt werden können. Der Ausgangsraum dieses Morphismus ist in natürlicher Weise über dem Deformationsraum von E (dem Keim einer glatten Kurve) mit affinen Räumen als Fasern gefasert. Dabei wird eine Fasern erhaltende $\mathbb{C}^*$-Operation mit positiven Gewichten mitgeliefert. Die Fixpunktmenge dieser Operation ist ein Schnitt der Faserung, der die einfach elliptischen Singularitäten in der Nähe der gegebenen parametrisiert (und den man erhält, indem man nur E deformiert). Wir ziehen es vor, die Deformation von E durch die Tate-Kurve (die Kurve über der punktierten Einheitskreisscheibe Δ^*, deren Faser über $q \in \Delta^*$ die Kurve $E(q) := \mathbb{C}^*/q^{\mathbb{Z}}$ ist) zu parametrisieren, so dass der Basisraum A unserer semiuniversellen Deformation nun ein affines Bündel über Δ^* ist und mit einer relativen $\mathbb{C}^*$-Operation versehen ist, deren Fixpunktmenge einen Schnitt definiert (den wir mit Δ^* identifizieren). Die Diskriminante $\mathcal{D} \subset A$ dieser Familie lässt sich nur mit Hilfe der Art Wurzeldaten, die einer affinen Kac-Moody-Liealgebra vom Typ $\hat{R}_{9-d}$ zugeordnet werden können, beschreiben.

Um genauer zu sein, sei T_o ein algebraischer Torus, der mit einem Wurzelsystem $R_o \subset \mathrm{Hom}(T_o, \mathbb{C}^*)$ vom Typ A, D oder E versehen ist, so dass die Kocharaktergruppe $\mathrm{Hom}(\mathbb{C}^*, T_o)$ von dem dualen Wurzelsystem $R_o^\vee$ aufgespannt wird. Es sei T ein algebraischer Torus, dessen Rang um zwei größer ist als der Rang von R_o, und

$$\mathbb{C}^* \overset{n^\vee}{\subset} T \overset{n}{\twoheadrightarrow} \mathbb{C}^*$$

seien Homomorphismen, deren Hintereinanderschaltung trivial ist und für die $\ker(n)/n^\vee(\mathbb{C}^*) = T_o$ gilt. Wir nehmen an, dass T in einem Sinne, den wir nicht näher präzisieren wollen, mit einem affinen Wurzelsystem versehen ist: es reicht zu wissen aus, dass diese Struktur mit einer Gruppe W von Automorphismen von T (der *affinen Weylgruppe*) verbunden ist, die sowohl n als auch $n^\vee$ festhält, dass das affine Wurzelsystem in T_o das gegebene endliche Wurzelsystem $R_o \subset \mathrm{Hom}(T_o, \mathbb{C}^*)$ bestimmt und dass W auf T_o durch die (endliche) Weylgruppe von R_o operiert. Da W eine unendliche Gruppe ist,

ist die Operation von W nicht auf ganz T eigentlich diskontinuierlich, aber sie ist es auf $T_{\Delta^*} := n^{-1}\Delta^*$. Ist R_o vom Typ R_{9-d}, dann gibt es einen Δ^*-Isomorphismus

$$A - \Delta^* \cong T_{\Delta^*}/W$$

(siehe [Lo]), der $\mathcal{D} - \Delta^*$ mit der Diskriminante der Bahnenabbildung $T_{\Delta^*} \to T_{\Delta^*}/W$ identifiziert und die zentral erweiterte Monodromiegruppe der Singularität mit der Orbifold-Fundamentalgruppe einer Faser von $T_{\Delta^*}/W \to \Delta^*$ (die letztere Gruppe ist einfach die Erweiterung von W durch das Gitter des Torus $\ker(n)$). Da $\dim A \geq 3$ ist, induziert die offene Einbettung $T_{\Delta^*}/W \cong A - \Delta^* \subset A$ einen Isomorphismus zwischen den Algebren von holomorphen Funktionen. Diese Eigenschaft und die Tatsache, dass A ein Steinscher Raum ist, charakterisieren A mit Hilfe von T_{Δ^*}/W (denn Steinsche Räume sind durch ihre Algebren von holomorphen Funktionen bestimmt): A kann mit der sogenannten *Steinschen Hülle* $(T_{\Delta^*}/W)\hat{}$ von T_{Δ^*}/W identifiziert werden. Dies spiegelt eine allgemeine Tatsache wider: für jedes Wurzelsystem R_o (nicht nur eins vom Typ R_{9-d}) ist die Steinsche Hülle $(T_{\Delta^*}/W)\hat{}$ ein affiner Raum über Δ^* und fügt zu T_{Δ^*}/W eine Kopie von Δ^* hinzu.

Dies war der Stand der Dinge um das Jahr 1980 herum. Wenn es damals auch zwingend ausgesehen haben mochte, so war es doch klar, dass ein Grothendieck-Programm, wenn es schon ausgeführt werden konnte, keinesfalls eine direkte Verallgemeinerung des Ausgangsfalls sein würde, einfach weil bei den einfach elliptischen Singularitäten nur bestimmte Typen von Wurzelsystemen vorkommen. Wie sollte es zum Beispiel für A_r aussehen, wenn $r \neq 4$ gilt? Trotzdem war Slodowy zuversichtlich, dass es möglich sein sollte, und letztendlich bewies er, das er recht hatte, indem er genau das durchführte. Im Folgenden wird grob skizziert, was er herausgefunden hat.

Von den Wurzeldaten zu T ausgehend führt eine Standardkonstruktion zu einer (Kac-Moody-)Gruppe $G_{\mathrm{alg}} \supset T$, die eine aufsteigende Vereinigung von affinen Varietäten ist und T als Cartanuntergruppe besitzt (und auch die gegebenen Wurzeldaten liefert). Diese Gruppe kann man ohne Umschweife aus der affin-algebraischen Gruppe G_o erhalten, die (T_o, R_o) als Wurzeldaten hat. (Man beachte, dass G_o notwendigerweise fast-einfach und einfach zusammenhängend und damit von dem Typ ist, den das ursprüngliche Grothendieck-Programm betraf, da T_o von seinen Kowurzeln erzeugt wird.) Man gehe von der algebraischen Schleifengruppe $\mathrm{Mor}_{\mathrm{alg}}(\mathbb{C}^*, G_o)$ von G_o (= die Gruppe ihrer $\mathbb{C}[t, t^{-1}]$-wertigen Punkte) aus, bilde das semidirekte Produkt mit $\mathbb{C}^*$ ($\mathbb{C}^*$ operiert in offensichtlicher Weise auf $\mathrm{Mor}(\mathbb{C}^*, G_o)$) und erweitere letzteres zentral in universeller Art durch $\mathbb{C}^*$, so dass man ein Diagramm $\mathbb{C}^* \subset G_{\mathrm{alg}} \twoheadrightarrow \mathbb{C}^*$ erhält, dass das für T dargestellte Diagramm enthält bzw. liftet. Diese Gruppe könnte ein gutes algebraisches Objekt sein, es stellt sich aber heraus, dass sie für unseren gegenwärtigen Zweck nicht geeignet ist: wir müssen sie erweitern, indem wir beliebige holomorphe Schleifen zulassen, d. h. indem wir $\mathrm{Mor}_{\mathrm{alg}}(\mathbb{C}^*, G_o)$ durch $\mathrm{Mor}_{\mathrm{hol}}(\mathbb{C}^*, G_o)$ ersetzen. Dies liefert dann eine Gruppe $G_{\mathrm{hol}} \supset G_{\mathrm{alg}}$. Wir haben immer noch Homomorphismen

$$\mathbb{C}^* \overset{n^\vee}{\subset} G_{\mathrm{hol}} \overset{n}{\twoheadrightarrow} \mathbb{C}^*,$$

deren Hintereinanderschaltung trivial ist.

Wichtig für das Folgende ist, dass wir

$$\bar{G}_{\mathrm{hol}} := G_{\mathrm{hol}}/n^{\vee}(\mathbb{C}^*) = \mathrm{Mor}_{\mathrm{hol}}(\mathbb{C}^*, G_o) \rtimes \mathbb{C}^*$$

als die Gruppe der Bündelautomorphismen des trivialen holomorphen G_o-Prinzipalbündels $G_o \times \mathbb{C}^* \to \mathbb{C}^*$ interpretieren können. Dies führt zu einer geometrischen Interpretation des Raums der Konjugationsklassen von Elementen von $\bar{G}_{\mathrm{hol}}$, die über $\Delta^* \subset \mathbb{C}^*$ liegen: wählen wir $g \in \bar{G}_{\mathrm{hol}}$, so dass $q := n(g)$ in Δ^* liegt, dann ist der Bahnenraum des Bündels nach $g^{\mathbb{Z}}$ ein G_o-Prinzipalbündel über der elliptischen Kurve $E(q) = \mathbb{C}^*/q^{\mathbb{Z}}$. Der Isomorphietyp dieses Prinzipalbündels hängt nur von der Konjugationsklasse von g ab und daraus ergibt sich eine Bijektion zwischen den $\bar{G}_{\mathrm{hol}}$-Konjugationsklassen in $\bar{G}_{\mathrm{hol}}$ über q und den Isomorphieklassen von G_o-Prinzipalbündeln über der elliptischen Kurve $E(q)$. In der gleichen Weise entsprechen die G_{hol}-Konjugationsklassen über q den Isomorphieklassen von G_o-Prinzipalbündeln über der elliptischen Kurve $E(q)$ mit einer geringfügigen Extrastruktur (die aus der Auswahl eines erzeugenden Elements des eindimensionalen Vektorraums besteht, der auf kanonische Weise dem Bündel zugeordnet ist).

Slodowy und Helmke fiel es auf, dass aus der Arbeit von Goodman und Wallach [GW] folgt, dass das Urbild $G_{\Delta^*} := n^{-1}\Delta^* \subset G_{\mathrm{hol}}$ (eine unter Konjugation mit G_{hol} invariante Halbgruppe) einen adjungierten Quotienten (der analog zu einer integrierten Form von χ ist) im folgenden Sinne zulässt: es gibt einen Morphismus

$$\hat{\chi} : G_{\Delta^*} \to (T_{\Delta^*}/W)^{\wedge},$$

dessen allgemeine Faser eine G-Bahn ist. Später bewiesen sie, dass dies den richtigen Ansatz für das Grothendieck-Programm liefert, wobei die Rolle der unipotenten Varietät von dem Urbild $U := \hat{\chi}^{-1}\Delta^* \subset G_{\Delta^*}$ des Steinschen Randes $\Delta^* \subset (T_{\Delta^*}/W)^{\wedge}$ gespielt wird. Es ist bemerkenswert (und vielleicht überraschend), dass dieser Ort im Umfeld der konventionellen algebraischen Geometrie verstanden und studiert werden kann: Er ist die Vereinigung der G-Bahnen, die den instabilen Prinzipalbündeln entsprechen, und jede G_{hol}-Bahn in U hat endliche Kodimension (so dass endlich dimensionale transversale Scheiben existieren).

Halten wir nun ein $q \in \Delta^*$ fest. Slodowy and Helmke bestimmen in jedem Fall die Bahnenstruktur von U_q in niedriger Kodimension. Anders als im endlich dimensionalen Fall kann U_q mehr als eine offene G-Bahn enthalten (aber immer noch eine endliche Anzahl solcher Bahnen). Wie im endlich dimensionalen Fall gibt es keine G-Bahnen der Kodimension 1, aber es können Ein-Parameter-Familien von Bahnen der Kodimension zwei (dies sind die *subregulären Bahnen*) auftreten, von denen jede eine (singuläre) Hyperfläche U_q ausfüllt. Das bedeutet, das eine transversale Scheibe S in G_{Δ^*} an eine subreguläre Bahn in U_q die Menge U_q in einer Fläche mit einem eindimensionalen singulären Ort schneiden kann. Das kommt zum Beispiel im A_r-Fall für $r \geq 2$ vor. Wenn der subreguläre Ort allerdings isoliert ist (und das passiert nur, wenn R_o zu einem der Typen A_1, D_5, E_6, E_7, E_8 gehört), dann hat $S \cap U_q$ eine einfach elliptische Singularität (in den Fällen $\neq A_1$ vom Typ $(E(q), R_o)$) und $\hat{\chi}|_S : S \to (T_{\Delta^*}/W)^{\wedge}$ ist dann eine semiuniverselle Deformation dieser Singularität. Bei einer sorgfältigen Wahl von S findet man auch die natürliche $\mathbb{C}^*$-Operation wieder. Also gilt hier für die einfach elliptischen Singularitäten vom Grad ≤ 4 das genaue Analogon des Satzes von Grothendieck-Brieskorn-Slodowy.

Slodowy und Helmke haben auch die Fälle, in denen die transversale Scheibe die Menge U_q in einer nicht-isolierten Singularität schneidet, genau untersucht. Solche Singularitäten besitzen keine semiuniverselle Deformation mehr. In diesem Fall ist aber eine Symmetriegruppe beteiligt, die dafür sorgt, dass $\hat{\chi}|_S$ für eine geeignete transversale Scheibe S immer noch die Semiuniversalitätseigenschaft hat. Man beachte, dass auch beliebige affine Wurzeldaten zugelassen werden (so dass G_o nicht einfach zusammenhängend zu sein braucht und auch nicht vom Typ A, D oder E).

Danksagung. Die Autoren danken Wolfgang Ebeling herzlich für sprachliche Hilfe bei der Abfassung des deutschen Textes, insbesondere für seine Übersetzung von Looijengas Beitrag aus dem Englischen, und danken Stefan Helmke für hilfreiche Kommentare.

References

[Br] E. Brieskorn, Singular elements of semi-simple algebraic groups, Actes Congr. Int. Mat. 1970, t 2, 279–284, Paris, 1971

[GW] R. Goodman and N. Wallach, Structure of unitary cocycle representations of loop groups and the group of diffeomorphisms of the circle, J. Reine Angew. Math. 347 (1984), 69–133.

[H] F. Hirzebruch, Traueransprache für Peter Slodowy, in: Geometry and topology of caustics 2002, Banach Center Publ. Nr. 62, S. 13–17, Inst. of Math. Polish Acad. of Sc., Warszawa, 2004

[Lo] E. Looijenga, Rational Surfaces with an anticanonical cycle, Ann. of Math. 114 (1981), 167–322.

[Sp] T. A. Springer, A construction of representation of Weyl groups, Inv. Math. 44 (1978), 279–293.

Arbeiten von P. Slodowy

[S1] Einige Bemerkungen zur Entfaltung symmetrischer Funktionen, Math. Z. 158 (1978), 157–170

[S2] Singularitäten und algebraische Gruppen, XI + 183 S., Regensburger Math. Schr. Nr. 2 (1978)

[S3] Four lectures on simple groups and singularities, II + 64 S., Comm. Math. Inst. Utrecht Nr. 11 (1980)

[S4] Simple singularities and simple algebraic groups, xii + 172 p., Lect. Notes in Math. Nr. 815, Springer-Verlag (1982)

[S5] Chevalley groups over $C((t))$ and deformations of simply elliptic singularities, in: Proc. Int. Conf. Alg. Geom., La Rabida, S. 285–301, Lect. Notes in Math. Nr. 961, Springer-Verlag (1982)

[S6] Sur les groups finis attachés aux singularités simples, in: Intr. Théorie des Singularités, vol. II, S. 109–126, Hermann, Paris (1988)

[S7] A character approach to Looijenga's invariant theory for generalized root systems, Comp. Math. 55 (1985), 3–32

[S8] Platonic solids, Kleinian singularities and Lie groups, in: Proc. Midwest Alg. Geom. Conf., Ann Arbor, S. 102–138, Lect. Notes in Math. Nr. 1008, Springer-Verlag (1982) (mit dem Titel „Platonic solids, Kleinian singularities, elementary catastrophes and Lie Groups" ebenfalls in: Logos et théorie des catastrophes, p. 73–98, Éd. Patiño, Genève (1988))

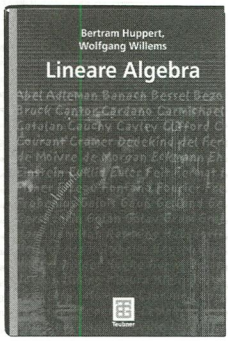
[S9] (mit E. Gutkin) Cohomologie de la variété des drapeaux infinies, C. R. Ac. Sc. Paris, 296 (1983), 625–627
[S10] Singularitäten, Kac-Moody Lie-algebren, assoziierte Gruppen und Verallgemeinerungen, 350 S., Habilitationsschrift Univ. Bonn. (1984) (englische Übersetzung angenommen für Publikation beim Vieweg Verlag in der Reihe „Aspects of Mathematics")
[S11] An adjoint quotient for certain groups attached to Kac-Moody algebras, in: Infinite-dimensional groups and applications, MSRI Publ. Nr. 4, S. 307–333, Springer-Verlag (1985)
[S12] Beyond Kac-Moody algebras, and inside, in: Lie algebras and related topics, CMS-AMS Conf. Proc. Nr. 5, S. 361–371, Amer. Math. Soc. (1986)
[S13] On the geometry of Schubert varieties attached to Kac-Moody Lie algebras, in: Proc. 1984 Vancouver Conf. on Alg. Geom., CMS-AMS Conf. Proc. Nr. 6, S. 405–442, Amer. Math. Soc. (1986)
[S14] Über das Ikosaeder und die Gleichungen fünften Grades, in: Math. Miniaturen Bd. 3, S. 71–113, Birkhäuser (1986)
[S15] Der Scheibensatz für algebraische Transformationsgruppen, in: DMV Sem. Nr. 13, Algebraische Transformationsgruppen und Invariantentheorie, S. 89–109, Birkhäuser (1989)
[S16] Die Theorie der optimalen Einparametergruppen für instabile Vektoren, in: DMV Sem. Nr. 13, Algebraische Transformationsgruppen und Invariantentheorie, S. 115–131, Birkhäuser (1989)
[S17] Zur Geometrie der Bahnen reeller reduktiver Gruppen, in: DMV, Sem. Nr. 13, Algebraische Transformationsgruppen und Invariantentheorie, S. 133–143, Birkhäuser (1989)
[S18] Einführung und Kommentare bei der Neuausgabe von F. Klein, Vorlesungen über das Ikosaeder, Birkhäuser, 1993, S. vii–xxvii und 263–343.
[S19] (mit F. Hirzebruch) Elliptic genera, involutions and homogeneous spin-manifolds, Geom. Dedic. 35 (1990), 309–343
[S20] (mit R. W. Richardson) Minimum vectors for real reductive groups, J. London Math. Soc. 42 (1990), 409–428
[S21] A new ADE-classification (after A. Capelli, C. Itzykson, J. B. Zuber), Bayreuther Math, Schr. Nr. 33 (1990), 197–213
[S22] On the signature of homogeneous spaces, Geom. Dedic. 43 (1992), 109–120
[S23] (mit C. und J. Daboul) The hydrogen algebra as centerless twisted Kac-Moody algebra, Phys. Rev. Letters B 317 (1993), 321–328
[S24] Groups and special singularities, in: Singularity Theory, S. 731–799, World Sci. Publ., River Edge N.J. (1995)
[S25] (mit C. und J. Daboul) The dynamical algebra of the hydrogen atom as a twisted loop algebra, in: Group theor. methods in Physics, S. 175–178, World Sci. Publ., River Edge N.J. (1995)
[S26] Algebraic groups and resolutions of Kleinian singularities, 80 S., Preprint Nr. 1068, RIMS, Kyoto U niversity (1996)
[S27] Two notes on a finiteness problem in the representation theory of finite groups, in: Algebraic groups and Lie groups, Australian Math. Soc. Lect. Ser. Nr. 9, S. 331–346 (1997)
[S28] (mit. H. Cassens) On Kleinian singularities and quivers, in: Singularity theory, S. 263–283, Progr. in Math. Nr. 162, Birkhäuser (1998)
[S29] On the algebraic geometry of Kac-Moody groups, in: Topological field theory and related topics (japanisch), RIMS Kokyoroku 1086, S. 71–87, Kyoto University (1999)
[S30] The early development of the representation theory of semisimple Lie groups: A. Hurwitz, I. Schur, H. Weyl, Jahresber. DMV 101 (1999), 97–115
[S31] (mit S. Helmke) Loop groups, principal bundles over elliptic curves and elliptic singularities, Annual meeting Math. Soc. Japan, Hiroshima, Abstracts S. 67–77 (1999)
[S32] Simple singularities and complex reflections, in: New developments in singularity theory, S. 329–348, Kluwer (2001)
[S33] (mit S. Helmke) On unstable principal bundles over elliptic curves, Publ. RIMS 37 (2001), 349–395
[S34] (mit J. Rauschning) An aspect of icosahedral symmetry, Can. Math. Bull. 45 (2002), 686–689

[S35] (mit S. Helmke) Loop groups, elliptic singularities and principal bundles over elliptic curves, in: Geometry and topology of caustics '02, S. 87–99, Banach Center Publ. Nr. 62, Inst. of Math. Polish Acad. of Sc., Warszawa, 2004

Von P. Slodowy betreute Promotionen

[1] Stefan Helmke: Über nilpotente Bahnen, einfache Singularitäten und modular invariante Partitionsfunktionen. Hamburg 1993
[2] Heiko Cassens: Lineare Modifikation algebraischer Quotienten, Darstellungen des McKay-Köchers und Kleinsche Singularitäten. Hamburg 1994
[3] Gerd Brüchert: Steinberg-Querschnitte und Spurklassenelemente in Kac-Moody-Gruppen. Hamburg 1995
[4] Claus Mokler: Die Monoidvervollständigung einer Kac-Moody-Gruppe. Hamburg 1996
[5] Christian Adler: Adjungierte Bahnen, parabolische und konforme Feldtheorie. Hamburg 1999
[6] Claudia Daboul: Deformationen und Degenerationen von Liealgebren und Liegruppen. Hamburg 1999
[7] Stephan Mohrdieck: Conjugacy Classes of Non-Connected Semisimple Algebraic Groups. Hamburg 2000
[8] Robert Wendt: Orbitale Integrale für Schleifenalgebren. Hamburg 2000

Lineare Algebra mit vielen spannenden Anwendungen



Bertram Huppert,
Wolfgang Willems
Lineare Algebra
2006. XIV, 548 S. Br.
EUR 25,90
ISBN 3-8351-0089-0

Inhalt

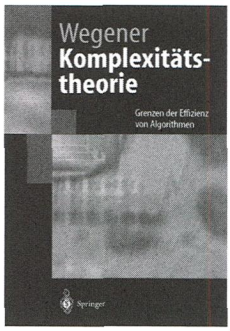
Mengen und Abbildungen - Vektorräume - Lineare Abbildungen und Matrizen - Determinanten - Normalformen von Matrizen - Normierte Vektorräume und Algebren - Vektorräume mit Skalarprodukt - Hilberträume und ihre Abbildungen - Euklidische Vektorräume und orthogonale Abbildungen

Das Buch

Das Lehrbuch erarbeitet die Lineare Algebra aus der Sicht der Anwendungen, die Erstsemester häufig in der Vorlesung vermissen. Es motiviert durch viele verschiedenartige Beispiele aus der Praxis, vermittelt Rechentechniken und führt so zu einem tieferen Verständnis der abstrakten Theorie. Anwenden heißt Verstehen. In diesem Sinn ist das Buch geschrieben.

Teubner

Abraham-Lincoln-Str. 46
65189 Wiesbaden
Fax 0611.7878-420
www.teubner.de



I. Wegener
Komplexitätstheorie, Grenzen der Effizienz von Algorithmen

Berlin u. a., Springer, 2003, 321 S., € 29,95

Das vorliegende Buch „Komplexitätstheorie" von Ingo Wegener ist ein einführendes Lehrbuch in eines der Kerngebiete der Informatik. Dabei verfolgt es u.a. das Ziel, neben klassischen Teilen der Komplexitätstheorie auch wesentliche neuere Entwicklungen zu integrieren.

Das Buch ist in 4 größere Teile eingeteilt; nach einer Darstellung der Grundlagen der Komplexitätstheorie in den ersten 9 Kapiteln folgen 3 Teile geringeren Umfangs. Kapitel 10, 13 und 14 behandeln Fragen der strukturellen Komplexitätstheorie wie die Polynomzeithierarchie, Platzschranken, randomisierte Komplexitätsklassen sowie nichtuniforme Modelle (Schaltkreise). Die Kapitel 11 und 12 beschäftigen sich mit interaktiven Beweissystemen sowie Approximationsproblemen und geben einen Einblick in das PCP-Theorem. Die letzten 3 Kapitel (15–17) sind der Komplexitätsanalyse Boolescher Funktionen gewidmet. Schließlich vermittelt ein kurzer Anhang Grundlagen der $\mathcal{O}$-Notation und der (diskreten) Wahrscheinlichkeitsrechnung.

Es folgt eine detailliertere Inhaltsangabe:

Das einleitende Kapitel führt in die wesentlichen Problemstellungen der Komplexitätstheorie ein und motiviert ihre Bedeutung für die Informatik. Die didaktischen Konzepte des Buchs werden erläutert; Hauptaspekte hierbei sind ein algorithmisch geprägter Zugang sowie die Darstellung des Konzepts des Nichtdeterminismus als spezielle Art von Randomisierung.

Kapitel 2 präzisiert die wesentlichen Begriffe, die zur Entwicklung einer Komplexitätstheorie notwendig sind. Dazu gehören die Fragen, was überhaupt ein algorithmisches Problem ist, was unter einem Algorithmus verstanden werden soll und wie die Komplexität eines Algorithmus definiert ist. Das Modell der Turingmaschine wird vorgestellt und seine Bedeutung für Komplexitätsaussagen motiviert. Dies führt zur Definition der algorithmischen Komplexität eines Problems. Schließlich werden zehn Beispielprobleme eingeführt, an denen im weiteren Verlauf des Buchs die verschiedenen Konzepte erläutert werden. Dazu gehören Rundreiseprobleme, Rucksackprobleme, Erfüllbarkeitsprobleme, Probleme der Graphentheorie, Optimierungsprobleme oder auch Meisterschaftsprobleme für Sportligen.

Das folgende Kapitel führt in die grundlegenden Komplexitätsklassen ein. Es wird die besondere Bedeutung polynomieller Laufzeiten diskutiert. Hieran knüpft sich die Definition randomisierter Algorithmen mitsamt der Untersuchung der wichtigsten randomisierten Komplexitätsklassen für Entscheidungsprobleme an. Die Klasse NP wird als Klasse aller Entscheidungsprobleme, die mit einseitigem hohen Fehler (Wahrscheinlichkeit < 1) in Polynomialzeit lösbar sind, eingeführt.

Reduktionen zwischen Problemen bilden den Gegenstand von Kapitel 4. Dabei wird zunächst Turingreduzierbarkeit studiert und anhand zahlreicher Beispiele erläutert.

Ein Teil der betrachteten Reduktionen leitet dann zum Begriff der polynomiellen Reduktion und damit unmittelbar zur NP-Vollständigkeit und zur zentralen Frage der Komplexitätstheorie: „Ist P = NP?" über (Kapitel 5, 6). Hauptteil von Kapitel 5 ist ein Beweis des Satzes von Cook. Kapitel 6 behandelt die zehn eingangs definierten Beispielprobleme im Hinblick auf ihre effiziente Lösbarkeit bzw. ihre NP-Vollständigkeit.

Kapitel 7 lotet anhand einiger zentraler Beispiele die Grenze zwischen einfachen und schwierigen Varianten eines Problems aus.

Dies betrifft zum einen die Beschränkung relevanter Problemparameter, zum anderen Probleme auf großen Zahlen.

Ist ein Problem als NP-vollständig oder NP-schwierig erkannt und vertraut man der allgemeinen Vermutung, daß P$\neq$ NP ist, so findet sich kein effizienter Lösungsalgorithmus. Dies gilt speziell für solche Optimierungsprobleme, deren Entscheidungsvarianten NP-vollständig sind. Damit ist ein derartiges Problem natürlich nicht abschließend behandelt. Will man trotzdem in polynomieller Zeit etwas Sinnvolles über die Lösung erfahren, so muß man daher Abstriche an der Qualität des Resultats zugestehen. Eine Möglichkeit hierzu ist das Zulassen von Fehlern bei einigen Rechnungen (wie bei der Randomisierung von Algorithmen erlaubt); eine weitere Möglichkeit bei der Behandlung von Optimierungsproblemen ist die Approximation von Optimalwerten. Ein erstes einleitendes Kapitel zu verschiedenen Approximationskonzepten ist Kapitel 8. Neben der Einführung der wichtigsten Approximationsklassen (APX, PTAS, FPTAS) wird die zentrale Lückentechnik vorgestellt, mit deren Hilfe eine Reihe negativer Approximationsresultate (falls P $\neq$ NP gilt) ausgeführt werden. Ein kurzer Abschnitt behandelt Reduktionsbegriffe für Approximationsprobleme sowie ein erstes Vollständigkeitsresultat für die Klasse NPO (Klasse aller betrachteten Optimierungsprobleme) unter PTAS-Reduktionen.

Das nächste Kapitel befaßt sich mit Black-Box Optierung. Dabei geht es um Fragestellungen, bei denen Probleminstanzen nicht vollständig bekannt sind. Typische Beispiele sind Untersuchungen von Funktionen, über die man lediglich durch Funktionsauswertungen (Black-Box Anfragen) Informationen erhält. Man sucht dann Algorithmen, die eine minimale Worst-Case Komplexität liefern. Dieses Szenario führt in natürlicher Weise auf Min-Max Probleme. Daher wird Yaos Min-Max Prinzip beschrieben und zur Ableitung unterer Schranken für randomisierte Suchheuristiken angewandt.

Fundamentale weitere Resultate der strukturellen Komplexitätstheorie folgen in Kapitel 10. Neben Fragen zum Verhältnis von NP zu co-NP wird die Polynomzeithierarchie (über Verwendung von Orakelberechnungen) eingeführt sowie anschließend logisch charakterisiert. Letzteres führt auch zum Existenznachweis vollständiger Probleme der einzelnen Level der Hierarchie. Sodann wird BPP $\subseteq \Sigma_2 \cap \Pi_2$ bewiesen.

Nach Einführung interaktiver Beweissysteme sowie der zugehörigen Komplexitätsklassen $IP(k)$ steht das Graphenisomorphieproblem im Mittelpunkt von Kapitel 11. Für seine komplementäre Variante $\overline{GI}$ (d.h. entscheide für zwei Graphen, ob sie nicht isomorph sind) wird zunächst $\overline{GI} \in IP(2)$ und dann $\overline{GI} \in BP(NP) \subseteq IP(2)$ bewiesen. Damit kann die Vermutung gestützt werden, daß GI sehr wahrscheinlich nicht NP-vollständig ist. Eine kurze Behandlung von zero-knowledge Beweisen beendet das Kapitel.

Eines der wichtigsten Resultate der letzten Jahre innerhalb der theoretischen Informatik ist das PCP-Theorem von Arora, Lund, Motwani, Sudan und Szegedy von 1992. Kapitel 12 widmet sich dem ersten Teil auf dem Weg zu diesem Resultat, nämlich der Aussage NP $\subseteq PCP(n^3, 1)$. Sodann wird einigen der wichtigen Beziehungen des PCP-Satzes zu negativen Approximationsresultaten sowie diversen Vollständigkeitsresultaten nachgegangen.

Kapitel 13 kehrt nochmals zur strukturellen Komplexitätstheorie zurück. Platzklassen und PSPACE-Vollständigkeit werden studiert. Daneben stehen die Sätze von Savitch und Immerman/Szelepcsényi. Zwei kürzere Abschnitte widmen sich Platzklassen innerhalb von P sowie Zählproblemen.

Es folgt die Analyse nicht-uniformer Rechenmodelle. Neben Simulationsresultaten von Schaltkreisfamilien durch (nicht-uniforme) Turingmaschinen (und umgekehrt) und der Einführung von Branchingprogrammen (auch binary decision diagrams BDD) samt verwandten Simulationsresultaten wird bewiesen, daß BPP nicht-uniforme polynomielle Komplexität hat. Eine Diskussion

über die (Un-) Wahrscheinlichkeit der Existenz polynomieller Schaltkreise für NP beendet das Kapitel.

Ein weiteres Komplexitätsmaß, die Kommunikationskomplexität, wird in Kapitel 15 vorgestellt. Grundlage ist die Messung der Anzahl der zwischen zwei Parteien ausgetauschten Bits, die nötig sind, um eine Funktion f in (a, b) auszuwerten; dabei ist jeder Partei nur einer der beiden Teile a, b der Eingabe bekannt. Das Modell ist insbesondere für den Nachweis unterer Schranken hilfreich. Verschiedene Arten von Kommunikationsprotokollen werden untersucht und für diese werden Beispiele von untere-Schranke Ergebnissen abgeleitet. Letzteres wird ebenfalls für die Mindestlaufzeit von Turingalgorithmen ausgenutzt.

Das abschließende Kapitel studiert die Schaltkreiskomplexität Boolescher Funktionsfamilien, deren zugehörige Entscheidungsprobleme in NP liegen. Untere Schranken für eine Reihe diverser solcher Familien folgen. Diese betreffen u.a. als Komplexitätsmaße die Schaltkreisgröße, die Schaltkreistiefe, die Formelgröße einer Booleschen Funktion und die Kommunikationskomplexität. Ebenso werden verschiedene Schaltkreistypen (u.a. alternierende Schaltkreise, verschiedene Gattertypen, Thresholdschaltkreise) sowie erneut untere Schranken für die Größe von Branchingprogrammen untersucht. Unter den behandelten Funktionen, für die Schranken in einigen dieser Modelle nachgewiesen werden, befinden sich die Paritätsfunktion, die Majoritätsfunktion, die Innere-Produkt-Funktion, die Maskenvariante des Gleichheitstests und die Berechnung des mittleren Bits des Ergebnisses einer Multiplikation.

In meinen Augen hat Wegener ein hervorragendes Buch geschrieben, dem man an vielen Stellen anmerkt, daß sich der Autor große Mühe im Hinblick auf die Umsetzung didaktischer Aspekte gegeben hat. Dies betrifft zunächst die Stoffauswahl. Neben der angestrebten algorithmischen Orientierung ist speziell die Hinzunahme wichtiger jüngerer Resultate zu loben. Hier steht an vorderster Stelle die Behandlung des PCP-Theorems. Die Entscheidung, lediglich die Beziehung NP $\subseteq PCP(n^3, 1)$ zu behandeln, stellt dabei m.E. einen guten Kompromiss zwischen der Bedeutung des PCP-Satzes und der Länge der existierenden Beweise dar. Zudem spielt das obige Teilresultat eine zentrale Rolle im gesamten Beweis und vermittelt in jedem Fall bereits eine grundlegende Vorstellung davon, wie probabilistisch verifizierbare Beweise und die Klasse NP zusammenhängen. Weitere Gebiete, die nicht zwingend Gegenstand in anderen Lehrbüchern sind, sind interaktive Beweise, Kommunikationskomplexität sowie die Komplexität Boolescher Funktionen. Natürlich ist eine solche Stoffauswahl immer subjektiv und geht auf Kosten längerer Darstellungen anderer Teilbereiche (im vorliegenden Fall speziell der strukturellen und abstrakten Komplexitätstheorie). Das ist aber jedenfalls vertretbar, will man aktuelle Trends aufgreifen.

Ein weiterer positiver Aspekt ist die abwechslungsreiche Präsentation des Stoffs und die gut lesbare Darstellung. Jedes Kapitel wird durch einen längeren Text eingeleitet, der die grundlegenden Fragestellungen und Ideen zu ihrer Lösung ausleuchtet. Darüberhinaus werden Hauptfragestellungen und -ergebnisse nochmals (kursiv in wenigen Zeilen vom sonstigen Text abgehoben) prägnant zusammengefaßt. Auch die Auswahl der behandelten Musterprobleme ist gut geeignet, die Präsentation aufzulockern. So dürfte jeder Fussballfan (und hoffentlich auch -journalist) die zentrale Bedeutung des Meisterschaftsproblems einsehen (auch wenn der Rezensent als langjähriger Anhänger Borussia Mönchengladbachs wehmütig feststellen muß, daß ihm die algorithmische Schwierigkeit des Problems, egal an welchem Spieltag, nicht einleuchtet).

Einige kleinere Vorschläge:

- Für die Klasse der polynomiell berechenbaren Funktionen scheint die Bezeichnung FP sinnvoll.
- Eventuell hilfreich wäre für den Studenten zumindest ein ausführliches Beispiel eines konkreten Turingprogramms. Dies könn-

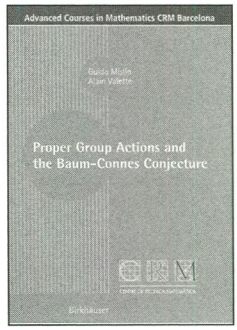
te speziell das Verständnis der Beweise zu Lemma 5.4.2 und Satz 5.4.3 erleichtern.
- Bei der Darstellung der Analyse von Black-Box Problemen (Kapitel 9) wäre m.E. für den mathematisch interessierten Leser ein Hinweis angebracht, daß derartige Fragestellungen seit langem bei der Untersuchung wichtiger Aufgaben wie der (numerischen) Berechnung bestimmter Integrale, der Nullstellensuche stetiger Funktionen etc. auftreten. Komplexitätstheoretische Aspekte solcher (und weiterer) Probleme wurden und werden im Bereich des IBC (Information Based Complexity) intensiv behandelt (s. die Monographie [TWW]).
- Der Satz „Die Komplexitätstheorie reagiert auf alle neuen algorithmischen Konzepte"auf der Rückseite des Buchs könnte etwas irreführen, da das Buch nicht zum Inhalt hat, auf mehrere solche Konzepte näher einzugehen (etwa Quantenrechner, analoge Modelle, neuronale Netze, algebraische Modelle).

Insgesamt ist hier ein sehr schönes Buch entstanden, das ohne Zweifel eine gute Alternative zu vorhandenen Lehrbüchern darstellt. Zudem ist der Preis auch für Studenten angemessen. Das Buch sei daher allen sich für Komplexitätstheorie interessierenden Personen wärmstens empfohlen.

Literatur

J. F. Traub, G. W. Wasilkowski, H. Woźniakowski. Information-based complexity. Academic Press (1988).

Odense K. Meer



G. Mislin, A. Valette
Proper Group Actions and the Baum-Connes Conjecture

Basel u. a., Birkhäuser, 2003, 160 S., € 28,–

Das vorliegende Buch ist eine Ausarbeitung von zwei Vortragsreihen, die Guido Mislin und Alain Valette im Rahmen eines „Advanced Course" zur Baum-Connes Vermutung im September 2001 am *Centre de Recerca Matemàtica* in Barcelona gehalten haben. Es ist das Ziel des Buches, dem Leser einen Einblick in Formulierungen und Anwendungen der Baum-Connes Vermutung zu geben, und zwar sowohl aus der Sicht der Topologie (im ersten Teil), als auch aus Sicht der Operatoralgebren (im zweiten Teil).

Ist G eine lokalkompakte Gruppe, so bezeichnet $C_r^*(G)$ die *reduzierte* C^*-Gruppenalgebra von G, also den Abschluss der Faltungsalgebra $L^1(G) \subseteq B(L^2(G))$. In der Sprache der nichtkommutativen Topologie/Geometrie „repräsentiert" $C_r^*(G)$ den (im allgemeinen sehr singulären) temperierten Dualraum $\widehat{G}_r$ bestehend aus den Äquivalenzklassen irreduzibler unitärer Darstellungen von G, die in der regulären Darstellung $\lambda : G \to U(L^2(G))$ schwach enthalten sind. Wegen der allgemein schlechten topologischen Eigenschaften des Raumes $\widehat{G}_r$, ist es in der Regel nicht möglich, diesen Raum mit Hilfe der klassischen Methoden der Topologie bzw. Geometrie zu untersuchen. Allerdings besitzen viele Methoden der klassischen Topologie und Geometrie Analoga in der Welt der C^*-Algebren, so dass diese zu einer Untersuchung der Algebra $C_r^*(G)$ herangezogen werden können. Besonders gut

funktioniert dies für die topologische K-Theorie, die eine kanonische Fortsetzung auf die Kategorie der C^*-Algebren besitzt.

Die Baum-Connes Vermutung behauptet, dass für jede lokalkompakte Gruppe G die K-Theorie von $C_r^*(G)$ in natürlicher Weise isomorph zur G-äquivarianten K-Homologie $K_*^G(\underline{EG})$ eines universellen eigentlichen G-Raums $\underline{EG}$ ist. Zumindest im Falle diskreter Gruppen lassen sich diese Gruppen sehr häufig mit den Methoden der algebraischen Topologie bestimmen – ist etwa G diskret und torsionsfrei, so ist $K_*^G(\underline{EG})$ gerade die klassische K-Homologie des klassifizierenden Raums BG der Gruppe G. Besonders spannend wird das Studium der Baum-Connes Vermutung vor allem durch die Tatsache, dass ihre Verifizierung für eine gegebene Gruppe G eine ganze Palette von weiteren Vermutungen über G aus unterschiedlichen Bereichen der Mathematik impliziert. Prominente Beispiele sind unter anderen die Idempotenten Vermutung von Kaplansky, die besagt, dass der Gruppenring $\mathbb{C}G$ einer torsionsfreien Gruppe keine nichttrivialen Idempotenten enthält, sowie die Novikov Vermutung, die behauptet, dass die höheren Signaturen einer geschlossenen Mannigfaltigkeit M mit Fundamentalgruppe G orientierte Homotopieinvarianten sind. Im vorliegenden Buch werden viele weitere Vermutungen vorgestellt, die direkt oder indirekt mit der Baum-Connes Vermutung in Verbindung stehen. Die Baum-Connes Vermutung konnte inzwischen für eine große Klasse von Gruppen nachgewiesen werden (siehe z. B. [3]) und es ist bis jetzt kein Gegenbeispiel bekannt.

Die präzise Formulierung der Vermutung hat im Spezialfall diskreter Gruppen neben der ursprünglichen analytischen Variante nach Baum, Connes und Higson ([1]), die die Baum-Connes Abbildung als Indexabbildung von verallgemeinerten G-äquivarianten elliptischen Operatoren beschreibt, auch eine auf Davis und Lück ([2]) zurückgehende rein topologische Variante, in der die äquivariante K-Homologie $K_*^G(\underline{EG})$ und die Baum-Connes Abbildung mit Hilfe von Spektren über Orbit-Kategorien beschrieben werden. Die topologische Variante hat den Vorteil, dass sie in ihrer Methodik sehr verwandt zu anderen Isomorphismus-Vermutungen in der algebraischen Topologie ist (etwa der Farrel-Jones Vermutung in der algebraischen K- und L-Theorie), und somit häufig eine simultane Betrachtung dieser verschiedenen Theorien erlaubt. Auf der anderen Seite erlaubt die analytische Version neben der Betrachtung von allgemeinen lokalkompakten Gruppen auch eine relativ einfache Formulierung der Baum-Connes Vermutung „mit Koeffizienten". Ebenso benutzen nahezu alle bisher gegebenen Beweise der Baum-Connes Vermutung den analytischen Zugang und entsprechende Methoden aus dem Bereich der Operatoralgebren.

Die Autoren des vorliegenden Buches möchten dem Leser sowohl die topologische als auch die analytische Variante der Baum-Connes Vermutung zugänglich machen und ihm einen Einblick in die vielfältigen Anwendungen der Vermutung geben. So startet Mislin im ersten Teil mit einer Einführung in die Theorie eigentlicher G-Räume und er beschreibt die notwendigen topologischen Begriffe (G-CW-Komplexe, Bredon-Kohomologie, Spektren über Orbit-Kategorien, etc.) um dann die topologische Variante der Baum-Connes Vermutung zu erklären. Darüber hinaus gibt er eine relativ ausführliche Diskussion über den Stand der Vermutung und endet schließlich mit einer sehr nützlichen und umfangreichen Diskussion zu den Anwendungen der Baum-Connes Vermutung auf andere offene Probeme der Mathematik. Obwohl alle benötigten topologischen Begriffe im wesentlichen erklärt werden, benötigt man zum Verständnis des ersten Teils des Buches eine gewisse Praxis in den Methoden der algebraischen Topologie.

Im zweiten Teil gibt Valette eine sehr genaue und in allen Details ausgearbeitete Beschreibung der analytischen Baum-Connes Abbildung. Ein wichtiges Hilfsmittel ist hierbei die bivariante K-Theorie von Kasparov, die den richtigen Begriff von verallgemeinerten elliptischen Operatoren liefert. Zumin-

dest für Studenten mit funktionalanalytischem Hintergrund ist dies die zur Zeit verständlichste Beschreibung der Baum-Connes Vermutung. Darüber hinaus diskutiert Valette einige funktorielle Eigenschaften der Baum-Connes Abbildung und gibt einen Beweis der Vermutung für den Fall $G = \mathbb{Z}$.

Im Ganzen handelt es sich bei dem vorliegenden Buch um eine sehr nützliche Lektüre, die insbesondere die große Vielfalt des Gebietes sichtbar macht. Das Hauptgewicht liegt auf den Formulierungen und Anwendungen der Baum-Connes Vermutung und es werden, außer für den Fall $G = \mathbb{Z}$, keine Beweise der Vermutung vorgestellt. Dies würde den gewählten Rahmen des Buches auch sicher sprengen. Kritisieren möchte ich aber, dass es den Autoren nicht wirklich gelungen ist, die topologische und die analytische Sichtweise zusammenzuführen. So werden im ersten Teil viele Ergebnisse aus der Literatur benutzt, die dort nur in der analytischen Variante formuliert und bewiesen werden, ohne dass dem Leser erklärt wird, wie diese unterschiedlichen Sichtweisen zusammen hängen. Nur im zweiten Teil des Buches habe ich in einer Bemerkung einen Hinweis auf die Arbeit [4] gefunden, in der gezeigt wird, dass beide Formulierungen der Baum-Connes Vermutung tatsächlich äquivalent sind. Eine etwas ausführlichere Diskussion hierüber wäre sicher nützlich gewesen, da der Zusammenhang der beiden Bilder nicht offensichtlich ist.

Zum Abschluss möchte ich auf weitere Übersichts-Literatur zur Baum-Connes Vermutung hinweisen. Grundlegend ist der Artikel [1] von Baum, Connes und Higson, in dem auch erstmals die heute aktuelle Form der Baum-Connes Vermutung (in der analytischen Fassung) formuliert wird. Unter [7] findet man ein weiteres kleines Buch von Valette zur Baum-Connes Vermutung (mit einem Appendix von Mislin) in dem mehr als im vorliegenden Buch auf die Beweismethoden in den bekannten Fällen eingegangen wird (allerdings werden auch hier keine vollständigen Beweise gegeben). Die zur Zeit umfangreichste Übersicht über Formulierungen, Konsequenzen und den aktuellen Stand im Fall diskreter Gruppen ist im gerade fertiggestellten Preprint [6] von Wolfgang Lück und Holger Reich zu finden. Eine Übersicht zum Stand der Vermutung für allgemeine lokalkompakte Gruppen findet man im ICM-Artikel [5] von Vincent Lafforgue.

Literatur

[1] P. Baum, A. Connes und N. Higson, *Classifying space for proper actions and K-theory of group C^*-algebras.* In: R. S. Doran (ed.), C^*-Algebras: 1943–1993. A fifty year celebration. Contemp. Math. 167, 241–291 (1994).

[2] J. F. Davis und W. Lück, *Spaces over a category and assembly maps in isomorphism conjectures in K- and L-theory.* K-Theory **15**, 201–252 (1998).

[3] N. Higson und G. Kasparov, *E-theory and KK-theory for groups which act properly and isometrically on Hilbert space.* Invent. Math. **144**, 23–74 (2001).

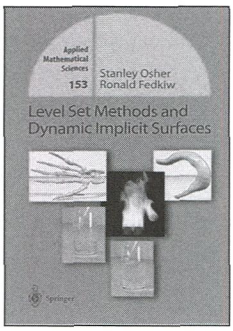
[4] I. Hambleton und E. K. Pedersen, *Identifying assembly maps in K- and L-theory.* Math. Annalen **328**, 27–57 (2004).

[5] V. Lafforgue, *Banach KK-theory and Baum-Connes conjecture.* Ta Tsien Li (ed.) et al., Proceedings of the international congress of mathematicians, ICM 2002, Beijing, China, August 20–28, 2002. Vol. II: Invited lectures. Beijing: Higher Education Press. 795–812 (2002).

[6] W. Lück und H. Reich, *The Baum-Connes and the Farrel-Jones conjecture in K- and L-Theory.* Preprint des SFB 478, Heft 324, Münster 2004.

[7] A. Valette, Introduction to the Baum-Connes conjecture. With notes taken by Indira Chatterji. With an appendix by Guido Mislin. Lectures in Mathematics, ETH Zürich. Basel: Birkhäuser 2002.

Münster S. Echterhoff



S. Osher, R. Fedkiv

Level Set Methods and Dynamic Implicit Surfaces

Berlin u. a., Springer, 2003, 273 S., € 79,95

Die mathematische Untersuchung von Grenzflächen ist ein Gebiet, auf dem seit einiger Zeit aufgrund seiner vielfältigen Anwendungen sehr intensiv geforscht wird. Beispiele für Grenzflächen sind etwa eine sich ausbreitende Flammenfront, die Phasengrenze fest/flüssig beim Kristallwachstum oder eine Kontur in einem Bild. Die analytische und numerische Behandlung solcher Probleme erfordert eine mathematische Beschreibung der Fronten, wofür im wesentlichen zwei Zugänge zur Verfügung stehen: die eine Möglichkeit besteht darin, die vorkommenden Flächen zu parametrisieren, während diese beim zweiten Ansatz als Niveauflächen (Level Sets) einer Hilfsfunktion erscheinen. Zwar erfordert der letztgenannte Zugang einen höheren numerischen Aufwand, dafür gestattet er jedoch die Beschreibung topologischer Änderungen. Die numerische Approximation sich bewegender Fronten mit Hilfe von Level Sets wurde Ende der achtziger Jahre von Stanley Osher und James Sethian ([1]) begründet und in der Folgezeit von diesen sowie einer großen Zahl anderer Autoren weiterentwickelt. Das vorliegende Buch von Osher und Fedkiw bietet (ähnlich wie die früher erschienene Monographie [2] von Sethian) eine Einführung in die Level Set Methode sowie die zugehörigen numerischen Techniken und gibt eine Fülle von Anwendungsbeispielen.

Das Buch besteht aus 23 Kapiteln, die zu vier Teilen zusammengefaßt sind und deren Inhalt wir im folgenden grob skizzieren.

Teil I beschäftigt sich mit der Niveauflächenbeschreibung, insbesondere mit der Darstellung durch die signierte Distanzfunktion.

Teil II behandelt die Beschreibung und numerische Approximation sich bewegender Fronten mit Hilfe der Level Set Methode. Die betrachteten Bewegungsgesetze sind typischerweise von der Form

$$V_n = f(x, t, n, \nabla_\Gamma n) \qquad \text{auf } \Gamma(t),$$

wobei $\Gamma(t)$ die Front zum Zeitpunkt t, n die Normale an $\Gamma(t)$ und V_n die Normalengeschwindigkeit bezeichnen. Für verschiedene Klassen von f (Konvektionsgleichungen, Hamilton-Jacobi-Gleichungen, Krümmungsflüsse) werden die partiellen Differentialgleichugen, welche die Level Set Funktion zu erfüllen hat, hergeleitet und anschließend jeweils mit Hilfe von finiten Differenzen diskretisiert. Neben wichtigen Überlegungen zur Konsistenz und Stabilität solcher Diskretisierungen enthält dieser Teil auch Ideen zur Konstruktion signierter Distanzfunktionen.

Teil III des Buches beschäftigt sich mit Anwendungen der Level Set-Techniken im Bereich der Bildverarbeitung und geometrischen Modellierung. Dazu gehören die Behandlung unscharfer oder verrauschter Bilder, die Bildsegmentierung sowie die Rekonstruktion von Flächen aus gegebenen Datensätzen. Das prinzipielle Vorgehen besteht darin, für das jeweilige Problem in sinnvoller Weise eine Energie einzuführen, welche es zu minimieren gilt. Der zugehörige Gradientenfluß führt dann auf eine partielle Differentialgleichung, deren Lösung mit den Methoden aus Teil II approximiert werden kann.

Teil IV schließlich befasst sich mit Anwendungen in der Strömungslehre. Die mathematischen Modelle für die Strömung kompressibler und inkompressibler Strömungen werden vorgestellt und diskretisiert. Level Set Techniken lassen sich hier insbesondere

bei der Behandlung von Zwei-Phasen-Strömungen einsetzen, wobei die sich bewegende Front zwischen den beiden Phasen als Niveaufläche dargestellt wird. Eine weitere Anwendung betrifft die Approximation von Lösungen von Stefan Problemen, die abschließend beschrieben wird.

Das Werk enthält eine große Zahl von Abbildungen (darunter 24 farbige im Mittelteil des Buches), welche die Ergebnisse numerischer Simulationen mit Hilfe der Level Set Methode illustrieren. Das Literaturverzeichnis hat 177 Einträge, wobei unverständlicherweise das Zitat [2] fehlt.

Das Buch ist empfehlenswert, wenn man sich relativ schnell einen gut motivierten Überblick über die wesentlichen Ideen und Techniken der Level Set Methode verschaffen möchte, ohne allzu sehr in die Tiefe zu gehen. Ein Nachteil dieses Zugangs besteht darin, daß der Leser zwar zügig mit Diskretisierungstechniken für schwierige partielle Differentialgleichungen bekannt gemacht wird, er aber sehr wenig über die theoretische Behandlung und die dort auftretenden Schwierigkeiten (wie z. B. den zu verwendenden Lösungsbegriff) erfährt. Während die Beschreibung der numerischen Verfahren in den sehr elementar gehaltenenen Teilen I und II relativ gut nachvollziehbar ist, trifft dies für die Anwendungsteile III und IV nicht mehr ohne weiteres zu. Die Darstellung der numerischen Techniken ist des öfteren nicht präzise und detailliert genug, so daß ein Anfänger ohne zusätzliches Studium der Originalarbeiten oder anderer Quellen sicher nicht auskommen wird. Andererseits wird jemand, der mit dem Gegenstand schon besser vertraut ist, hier sicher interessante Anregungen finden.

Literatur

[1] Osher, S., Sethian, J.A.: *Fronts propagating with curvature dependent speed: algorithms based on Hamilton–Jacobi formulations.* J. Comp. Phys. **79**, 12–49 (1988).

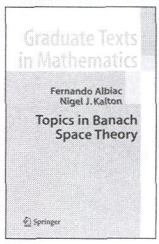
[2] Sethian, J.A.: *Level set methods and fast marching methods. Evolving interfaces in computational geometry, fluid mechanics, computer vision, and materials science.* Cambridge Monographs on Applied and Computational Mathematics **3**. Cambridge University Press, 1999.

Magdeburg K. Deckelnick

Springer
the language of science

springer.com

New Textbooks from Springer



Topics in Banach Space Theory

F. Albiac, N. J. Kalton, University of Missouri, Columbia, MO, USA

The geometry of Banach spaces is a rich, beautiful, and rewarding subject. In this book the authors emphasize the isomorphic theory of Banach spaces and techniques using the unifying viewpoint of basic sequences.

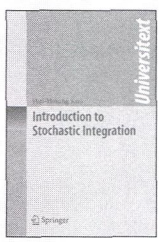
2006. XI, 373 p. (Graduate Texts in Mathematics, Vol. 233) Hardcover
ISBN 0-387-28141-X ► **€ 56,95 | £44.00**

Graph Theory

R. Diestel, University of Hamburg, Germany

From the reviews of the first two editions (1997, 2000)
► *. . . like listening to someone explain mathematics.*
► Bulletin of the AMS

3rd ed. 2006. XVI, 415 p. (Graduate Texts in Mathematics, Vol. 173) Softcover
ISBN 3-540-26183-4 ► **€ 39,95 | £30.50**



Introduction to Stochastic Integration

H.-H. Kuo, Louisiana State University, Baton Rouge, LA, USA

This textbook provides a concise introduction to the Ito calculus, and covers such topics as: Brownian motion; Stochastic integrals for Brownian motion and martingales; and applications to finance, filtering theory, and electric circuits. Chapter-ending exercises help the reader grasp the material.

2006. XIII, 279 p. (Universitext) Softcover
ISBN 0-387-28720-5 ► **€ 42,95 | £33.00**

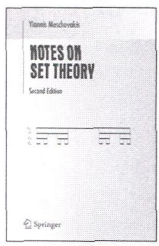
Algebra

Volume I: Fields and Galois Theory

F. Lorenz, University of Münster, Germany

From Reviews of the German version ► *This is a charming textbook, introducing the reader to the classical parts of algebra. The exposition is admirably clear and lucidly written…* ► Stefan Porubsky, Mathematical Reviews

2006. VIII, 296 p. (Universitext) Softcover
ISBN 0-387-28930-5 ► **€ 42,95 | £33.00**



Notes on Set Theory

Y. Moschovakis, University of California, Los Angeles, CA, USA

About the First Edition ► *This is an excellent introduction to axiomatic set theory, viewed both as a foundation of mathematics and as a branch of mathematics with its own subject matter, basic results, open problems.*
► Achille C. Varzi, History and Philosophy of Logic

2nd ed. 2006. XII,. 276 p. 48 illus. (Undergraduate Texts in Mathematics) Hardcover
ISBN 0-387-28722-1 ► **€ 66,95 | £51.50**
Softcover
ISBN 0-387-28723-X ► **€ 42,95 | £29.95**

Galois Theory

S. H. Weintraub, Lehigh University, Bethlehem, PA, USA

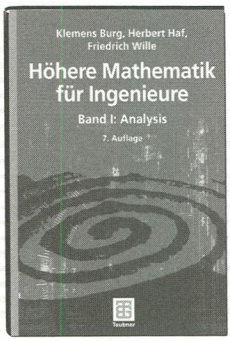
Classical Galois theory is a subject generally acknowledged to be one of the most central and beautiful areas in pure mathematics. This text develops the subject systematically and from the beginning, requiring of the reader only basic facts about polynomials and a good knowledge of linear algebra.

2006. XIII, 190 p. (Universitext) Softcover
ISBN 0-387-28725-6 ► **€ 42,95 | £ 33.00**

Easy Ways to Order for the Americas ► **Write:** Springer Order Department, PO Box 2485, Secaucus, NJ 07096-2485, USA ► **Call: (toll free)** 1-800-SPRINGER ► **Fax:** +1(201)348-4505 ► **Email:** orders-ny@springer.com or
for outside the Americas ► **Write:** Springer Distribution Center GmbH, Haberstrasse 7, 69126 Heidelberg, Germany ► **Call:** +49 (0) 6221-345-4301 ► **Fax :** +49 (0) 6221-345-4229 ► **Email:** SDC-bookorder@springer.com ► Prices are subject to change without notice. All prices are net prices.

012370x

Mathematik
in Beispiel, Theorie und Anwendung



Klemens Burg, Herbert Haf, Friedrich Wille

Höhere Mathematik für Ingenieure Band I: Analysis

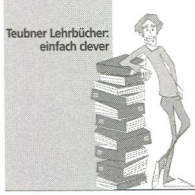
Unter Mitarbeit von Andreas Meister
7., überarb. u. erw. Aufl. 2006. XVIII, 604 S. mit 230 Abb. u. 7 Tab. Br.
EUR 39,90
ISBN 3-8351-0045-9

Inhalt

Grundlagen: Reelle Zahlen; Elementare Kombinatorik; Funktionen; Unendliche Folgen reeller Zahlen; Unendliche Reihen reeller Zahlen; Stetige Funktionen - Elementare Funktionen - Differentialrechnung einer reellen Variablen - Integralrechnung einer reellen Variablen - Folgen und Reihen von Funktionen - Differentialrechnung mehrerer reeller Variabler - Integralrechnung mehrerer reeller Variabler

Das Buch

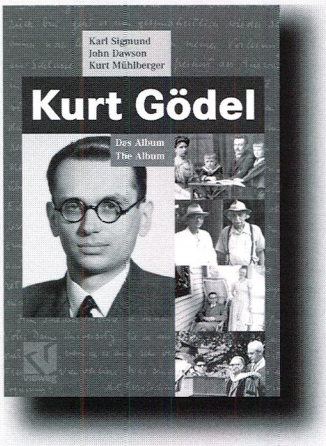
Ein praxisnahes Werk über die Mathematik, die Ingenieurstudenten benötigen.
Die für die Anwendungen wichtige Theorie wird einprägsam und anschaulich dargestellt. Der Stoff wird an eindrucksvollen Beispielen erläutert.
Die neue Auflage wurde um weitere moderne Anwendungen erweitert.



Teubner

Abraham-Lincoln-Str. 46
65189 Wiesbaden
Fax 0611.7878-420
www.teubner.de

Das Buch zum Gödel Jahr



Karl Sigmund, John Dawson,
Kurt Mühlberger

Kurt Gödel

Das Album - The Album
Mit einem Geleitwort von
Hans Magnus Enzensberger
In deutscher und englischer Sprache

2006. 225 S. mit 200 Abb. Geb.
EUR 29,90
ISBN 3-8348-0173-9

INHALT

Gödels Leben - Gödels Umfeld - Gödels Werk (Hilberts Programm, Cantors Kontinuum, Einsteins Universen, Platos Schatten)
Gödel's Life - Gödel's Surroundings - Gödel's Work (Hilbert's Program, Cantor's Continuum - Einstein's Universes - Plato's Shadow)

DAS BUCH

Dieses Buch ist eine leichtverdauliche, einfache und anschauliche Einführung in Gödels Leben und Werk, gedacht für jene, die sich für die menschlichen und kulturellen Aspekte der Wissenschaft interessieren. Ausgangspunkt des Buches waren die Vorbereitungen zu einer Ausstellung über Kurt Gödel aus Anlass seines hundertsten Geburtstags. Eine Ausstellung hat etwas von einem Spaziergang an sich, und gerade das wollen wir bieten: einen Spaziergang mit Gödel. Albert Einstein genoss solche Spaziergänge sehr. Man kann also Gödel genießen.

vieweg
Abraham-Lincoln-Straße 46
D-65189 Wiesbaden
Fax 0611.78 78-420

Änderungen vorbehalten.
Erhältlich beim Buchhandel oder beim Verlag.

ISSN 0012-0456