108. Band Heft 3, September 2006

Jahresbericht

der Deutschen Mathematiker-Vereinigung

3 – 2006

Herausgegeben von K. Hulek
unter Mitwirkung von
U. Gather, H.-Ch. Grunau, H. Lange,
J. Rambau, A. Schied, Th. Sonar

Teubner

Jahresbericht

der Deutschen Mathematiker-Vereinigung

Der „Jahresbericht“ ist das offizielle Veröffentlichungsorgan der Deutschen Mathematiker-Vereinigung, für dessen inhaltliche Gestaltung im Auftrag des Präsidiums der jeweilige Herausgeber zuständig ist. Im „Jahresbericht“ sollen vornehmlich Überblicksartikel über Teilgebiete der reinen und angewandten Mathematik, Nachrufe sowie historische Artikel, Berichte aus der Forschung und Buchbesprechungen veröffentlicht werden.

Manuskripte:

Alle für die Schriftleitung des Jahresberichts bestimmten Briefe und Manuskripte sind an *Prof. Dr. K. Hulek* zu richten. Für Buchbesprechungen ist *Prof. Dr. H. Lange* zuständig. Bücher, von denen eine Besprechung erfolgen soll, werden bei den Verlagen angefordert.

Die Autoren werden gebeten, für Manuskripte und Buchbesprechungen die **Standard-LATEX-Klasse article mit 10pt (default), \textwidth139mm, \textheight205mm** zu benutzen. Sollen Illustrationen in die Arbeiten integriert werden, können diese auch in das Satzsystem übernommen werden. Dazu ist es erforderlich, dass die Bilddaten der Abbildungen nochmals in separaten Dateien einzeln abgespeichert werden. Ein Foto des Autors sollte als Bilddatei in einem der gängigen Grafikformate (am unproblematischsten: TIF-Format; Graustufenbild mit einer Auflösung von mindestens 300 dpi) oder als normaler Papier-Fotoabzug zum Einscannen mitgeschickt werden. Als Datenträger sind ZIP-Disketten, CD-ROM bzw. Syquest (88 oder 200 MB) möglich.

Grundsätzlich sollen nur solche Manuskripte eingereicht werden, die nicht gleichzeitig an anderer Stelle zur Veröffentlichung eingereicht oder bereits veröffentlicht worden sind. Mit der Annahme zur Veröffentlichung erwirbt der Verlag das Verlagsrecht zur Vervielfältigung und Verbreitung sowie das Recht der Übersetzung in andere Sprachen.

Weitere Informationen zum „Jahresbericht“ finden Sie unter
http://www.mathematik.uni-bielefeld.de/DMV/jb/index.html

Verlag:

B. G. Teubner Verlag | GWV Fachverlage GmbH
Abraham-Lincoln-Straße 46
65189 Wiesbaden
http://www.teubner.de
http://www.gwv-fachverlage.de

Geschäftsführer: Andreas Kösters, Albrecht F. Schirmacher, Dr. Heinz Weinheimer
Gesamtleitung Anzeigen: Thomas Werner
Gesamtleitung Produktion: Ingo Eichel
Gesamtleitung Vertrieb: Gabriel Göttlinger

Marketing/Sonderdrucke:

Eva Brechtel-Wahl
Telefon: (06 11) 78 78-3 79, Fax: (06 11) 78 78-4 39, E-Mail: eva.brechtel-wahl@gwv-fachverlage.de

Abonnentenverwaltung:

(Änderungen von Adressen und Bankverbindung, Rückfragen zu Rechnungen oder Mahnung)
VVA-Zeitschriftenservice, Abt. D6F6 / Jahresbericht der Deutschen Mathematiker-Vereinigung, Postfach 7777, 33310 Gütersloh
Ursula Müller
Telefon: (0 52 41) 80-19 65, Fax: (0 52 41) 80-96 20, E-Mail: ursula.mueller@bertelsmann.de

Anzeigenleitung

Christian Kannenberg
Telefon: (06 11) 78 78-3 69, Fax: (06 11) 78 78-4 30, E-Mail: christian.kannenberg@gwv-fachverlage.de
www.gwv-anzeigen.de

Es gilt die Preisliste vom 01.01.2006.

Bezugsbedingungen:

Die Zeitschrift erscheint 4mal jährlich zum Jahresabonnementpreis von € 112,– (180,37 sF o. MwSt.) inkl. Versandkosten. Der Bezug von Einzelheften ist nicht möglich. Schriftliche Kündigung des Abonnements spätestens sechs Wochen vor Ablauf des Bezugsjahres.

Für persönliche Mitglieder der DMV, die den Jahresbericht zu beziehen wünschen, ist der zwischen DMV und Verlag vereinbarte Bezugspreis maßgebend, der im Rahmen des Mitgliedsbeitrags erhoben wird.

Satz: Fotosatz Behrens, D-68723 Oftersheim
Druck: Wilhelm & Adam, Heusenstamm

ISSN 0012-0456

Inhalt

Jahresbericht der Deutschen Mathematiker-Vereinigung, 108. Bd. 2006, Nr. 3

Jahresbericht der Deutschen Mathematiker-Vereinigung, 108. Bd. 2006, Nr. 3

In den nächsten Heften erscheinende Arbeiten

G.-M. Greuel, G. Pfister: Computeralgebra – Singular and Applications
W. Oberschelp: Nachruf auf Hans Hermes
F. Hirzebruch, U. Simon: Nachruf auf Shiing-Shen Chern

Anschriften der Herausgeber

Prof. Dr. K. Hulek, Institut für Algebraische Geometrie,
Gottfried Wilhelm Leibniz Universität Hannover,
Welfengarten 1, 30167 Hannover
E-Mail: hulek@math.uni-hannover.de

Prof. Dr. Ursula Gather, Lehrstuhl für Mathematische Statistik und industrielle Anwendungen, Universität Dortmund, 44221 Dortmund
E-Mail: gather@statistik.uni-dortmund.de

Prof. Dr. H.-Ch. Grunau, Institut für Analysis und Numerik, Otto-von-Guericke-Universität Magdeburg, Postfach 4120, 39016 Magdeburg
E-Mail: hans-christoph.grunau@mathematik.uni-magdeburg.de

Prof. Dr. Herbert Lange, Mathematisches Institut, Friedrich-Alexander-Universität Erlangen-Nürnberg, Bismarckstraße 1a, 91054 Erlangen
E-Mail: lange@mi.uni-erlangen.de

Prof. Dr. J. Rambau, Fakultät für Mathematik, Physik und Informatik, Universität Bayreuth, 95440 Bayreuth
E-Mail: Joerg.Rambau@uni-bayreuth.de

Prof. Dr. A. Schied, Institut für Mathematik, Technische Universität Berlin, Straße des 17. Juni 136, 10623 Berlin
E-Mail: schied@math.tu-berlin.de

Prof. Dr. Th. Sonar, Institut für Analysis, Technische Universität Braunschweig, Pockelsstraße 14, 38106 Braunschweig
E-Mail: t.sonar@tu-bs.de

Bezugshinweis

Früher erschienene Bände (ab Band 68) des „Jahresberichts der Deutschen Mathematiker-Vereinigung“ können durch den Buchhandel oder den Verlag bezogen werden.

Nachdruck der Bände 41 bis 67 liefert: Swets & Zeitlinger, Heereweg 347 b, POB 810, NL-2160 SZ Lisse/Holland

---

Jahresbericht der Deutschen Mathematiker-Vereinigung, 108. Bd. 2006, Nr. 3

Vorwort

In diesem Band finden Sie zwei Übersichtsartikel, die beide auf Plenarvorträgen der DMV/ÖMG Jahrestagung 2006 in Klagenfurt aufbauen.

G. Krummheuer behandelt in seinem Beitrag ein Thema, das besonders für Leserinnen und Leser mit didaktischem Interesse von Bedeutung ist, und zwar berichtet er über seinen Forschungsansatz, mit dem er die sozialen Bedingungen des Mathematiklernens untersucht. Dabei geht es ihm vor allem um „softskills", wie Kommunikations- und Teamfähigkeit, die für Lernende und Lehrende gleichermaßen von Bedeutung sind. Er untermauert seine Thesen an Hand empirisch gewonnener Beispiele des Mathematikunterrichts im Grundschulbereich. Am Ende seines Artikels zeigt er Folgerungen für die Ausbildung von „softskills" auf. Seine Schlussfolgerungen haben Auswirkungen sowohl im schulischen wie auch im universitären Ausbildungsbereich.

Im Gegensatz dazu wendet sich der Beitrag von M. Einsiedler in erster Linie an Mathematikerinnen und Mathematiker, deren Schwerpunkt in der Forschung liegt. Der Autor behandelt Ergebnisse von M. Ratner, der tief liegende Sätze über die Aktion von Lieschen Gruppen auf lokal homogenen Räumen bewiesen hat. Dabei geht es dem Verfasser nicht so sehr um die Darstellung möglichst allgemein formulierter Ergebnisse, vielmehr diskutiert er den Spezialfall der speziellen Gruppe der reellen Ebene. Nach einer motivierenden Einleitung gibt der Autor einen einfachen Beweis des Theorems von Ratner für diesen Fall. Dieser Beweis kann von fortgeschrittenen Studierenden, die bereit sind, die Grundlagen der Lietheorie und der Ergodentheorie zu lernen, verstanden werden.

Auch in diesem Band finden sich eine Reihe aktueller Buchbesprechungen, denen diesmal, im Vergleich zu den vorausgegangenen Heften, etwas mehr Platz eingeräumt wurde.

K. Hulek

Wie „soft“ sind die softskills des Mathematiklernens?

Götz Krummheuer

Abstract

- Mathematics Subject Classification: 97-02, 97C50, 97C60, 97C70, 97D10 und 97D70
- Keywords and Phrases: Argumentation, Argumentationsanalyse, kontextuelle Theorieentwicklung in der Mathematikdidaktik, Lehrerausbildung, Mathematikdidaktik (der Grundschule), Partizipation, Partizipationsanalyse, Softskills, soziale Interaktion – analysis of argumentation, analysis of participation, argumentation, contextual development of theories in mathematics education, participation, (primary) mathematics education, social interaction, softskills, teacher education

Mathematiklernen ist ein *realer* Vorgang, der empirisch verfolgt und analysiert werden kann, und ein *sozialer* Vorgang, der gefördert werden muss und nicht nur von einer mathematischen Begabung abhängt. In den Theoretisierungsbemühungen zu mathematischen Lehr-Lern-Prozessen wird ein Perspektivenwechsel nötig: Die Fokussierung auf den Einzelnen, gleichsam „einsam“ für sich lernenden Schüler oder Studenten ist unzureichend; er ist bei seinen Lernbemühungen eingebettet in eine sozial strukturierte Lernumgebung, die eigenen Gesetzmäßigkeiten unterliegt und in entscheidender Weise zu seinem Lernerfolg beiträgt. Wie sich in empirischen Analysen solcher Lernprozesse zeigt, werden dabei sowohl von den Lehrenden als auch von den Lernenden so genannte „softskills“, wie Kommunikations- und Teamfähigkeit, benötigt. An einem Beispiel aus dem frühen Mathematikunterricht der Grundschule werden die sozialen Bedingungen solcher Lernprozesse in institutionalisierten Bildungseinrichtungen exemplarisch beschrieben. Insbesondere wird an dem Phänomen des „Argumentierens“ der soziale Charakter mathematischen Lernens aufgezeigt. Folgerungen für die Ausformung von softskills sowohl im schulischen als auch im universitären Ausbildungsbereich schließen den Artikel ab.

Eingegangen: 28.03.2006 (überarbeitete Version)

Götz Krummheuer, Johann-Wolfgang-Goethe-Universität, Franfurt am Main

DMV
JAHRESBERICHT DER DMV

Einleitung: Ein Forschungsansatz zur Erhärtung der sozialen Dimension des Mathematiklernens

Vielfach hört man die Meinung, dass ein Mathematiklehrer vor allem Mathematik können sollte und dass sich der Lehr-Lern-Prozess zu einem mathematischen Inhalt am besten an seinem sachlogischen Aufbau orientieren sollte. Soziale Kompetenzen scheinen unwichtig zu sein. Ein Beispiel aus einer universitären Befragung mag schlaglichtartig auf die Geringschätzung solcher sozialen Aspekte für das Mathematiklernen hinweisen: Bei einer Befragung von Lehramtsstudierenden im Fach Mathematik sind die folgenden zwei Fragen mit am schlechtesten beantwortet worden.

Durch mein Studium wurde ich bis jetzt in folgenden Bereichen gefördert:	**N**	**M**	**SD**
Soziale Fähigkeiten, Umgang mit Menschen	97	2,98	0,89
Soziales Verantwortungsbewusstsein	97	2,97	0,78

Die Antwortskala umfasste: 1 = trifft zu (immer); 2 = trifft etwas zu (häufig); 3 = trifft kaum zu (selten); 4 = trifft nicht zu (nie).

Die ausgewählten zwei Fragen sind zwei der drei Fragen, welche die Studierenden als am wenigsten zutreffend einschätzen. Es sind zudem auch die Fragen mit relativ geringen Standardabweichungen: also auch relativ einheitliche Urteile unter den Studierenden (Langfeldt 2003, S. 198). Die Förderung von sozialen Fähigkeiten und sozialen Verantwortungsbewusstseins findet nach Einschätzung der Lehramtsstudierenden des Fachs Mathematik in ihrer Ausbildung an der Universität in diesem Fach am wenigsten statt. Dies sind die Bereiche, die sich auf die Kommunikations- und Teamfähigkeit auswirken. Diese Fähigkeiten werden gemeinhin als „softskills" bezeichnet.

Die aus konstruktiver Zusammenarbeit erwachsenen Kommunikations- und Teamfähigkeiten werden offenbar in der mathematischen Lehrerausbildung nicht sonderlich gefördert. Hier deutet sich ein unheilvoller Kreislauf an: Ein Mathematikstudium, das weitgehend auf einer Geringachtung sozialer Konstituenten für das Mathematiklernen beruht, lässt bei den Studierenden nur ein reduziertes Erfahrungssammeln mit solchen softskills zu. Auf dieser Basis organisieren dann diese Studierenden als spätere Lehrer ebenfalls schulische Lehr-Lern-Prozesse mit einer relativ großen Geringachtung dieser sozialen Bedingungen. Die mathematischen Lernprozesse der Schüler werden dadurch nicht optimal unterstützt. Die Schüler, die unter diesen Bedingungen dennoch einigermaßen erfolgreich in der Schule Mathematik lernen, entscheiden sich am ehesten für ein Mathematikstudium. Dort finden sie derartige suboptimale Lernbedingungen wieder, mit denen sie sich zurechtzufinden jedoch gelernt haben. Möglicherweise lässt sich dieser Kreislauf auch auf die Mathematikdidaktik erweitern.

Hier möchte ich nun tiefer einsteigen und Forschungsaktivitäten darstellen, die bereits im Grundschulbereich diesen unheilvollen Kreislauf zu durchbrechen helfen. Ich stelle Ergebnisse dar, die auf die konstitutive Bedeutung der sozialen Dimension für mathematische Lernprozesse hinweisen. Da Mathematiklernen ein *realer* Vorgang ist, kann er mit Hilfe empirischer Verfahren genauer untersucht werden. Die Mathematik fungiert hierbei jedoch nicht als eine erklärungsmächtige Theorie zur Analyse dieser Prozesse. Dies wäre die Situation bei Forschungen aus der Physik, Ökonomie, Biologie usw. Die Mathematik steht hier in einer ganz spezifischen Weise selbst zur Diskussion: es geht um die Frage ihrer Erlernbarkeit, von den ersten Anfängen im Kindesalter bis hin zu den Leistungskursen der gymnasialen Oberstufe, und um die Beschreibung der sozialen Bedingungen hierbei. Man könnte hier mit einigen Spezifikationen auch noch das Hochschulstudium der Mathematik ergänzen.

Schule ist in unseren Gesellschaften der institutionalisierte Ort, an dem das Lernen mathematischer Inhalte ermöglicht werden soll. Man findet dort Mathematikunterricht als eine soziale Realität vor und man kann auf der Basis theoretischer Annahmen die Prozesse, die diese Realität erzeugen, untersuchen. Auf eine solche Annahme gehe ich im Folgenden genauer ein: Mathematiklernen fußt auf argumentativen Prozessen, in denen mathematische Aussagen in Bezug auf ihre Gültigkeit verhandelt werden. Argumentieren ist nicht nur ein hochwertiges *Lernziel*, dem sich auch der Mathematikunterricht verpflichtet fühlen sollte. Es ist zugleich und vor allem eine *Bedingung* für das Mathematiklernen: Mathematik lernt man vor allem dadurch, dass man die Rationalität einer mathematischen Aussage zu ergründen versucht, indem man mit anderen gemeinsam nach Beweismöglichkeiten sucht, um sie streitet, und sie nachzuvollziehen versucht. Mathematiklernen ist also ein *argumentatives Lernen*.

Derartiges, argumentatives Lernen ist in seiner prinzipiellen Struktur nur als ein *kollektiver* Prozess denkbar (Miller 1986, S. 17; siehe auch Bruner 1990, Krummheuer 1992). Man argumentiert nicht nur im Inneren oder Stillen für sich, sondern auch nach außen gerichtet mit Wort und Tat mit anderen und gegen andere. Diese öffentlichen Auseinandersetzungen sind eine *Bedingung der Möglichkeit des Mathematiklernens*. Mit Blick auf Lernprozesse in späteren Lebensjahren oder in einem Gebiet, das dem Lernenden schon vertraut ist, mag sich eventuell diese Grundvoraussetzung der Eingebundenheit von mathematischem Lernen in soziale Prozesse interaktiver Aushandlungen ändern oder abmildern: nicht *jeder* Lernprozess ist an Prozesse kollektiven Argumentierens geknüpft. Insbesondere erwachsene Menschen können Literatur heranziehen, sich schriftliche Notizen machen und für sich dabei etwas klären. Auch hier können Lernprozesse stattfinden.

Wir halten diese dialogunabhängige Wissensaneignung jedoch für eine späte Phase der individuellen Aneignung eines Wissensgebietes, dem „fundamentale Lernprozesse" (Miller 1986, S. 13) auf diesem Gebiet voraus gegangen sind. Fundamentales Lernen bezieht sich auf die Entwicklung von Rationalität und rationalen Wissensstrukturen. Hierbei wird das bereits verfügbare Wissen eines Individuums systematisch überschritten. Es kann von der sich im Lernprozess befindlichen Person mit den ihr zuhandenen logischen Mitteln nicht selbst erschlossen werden. Wie man beispielsweise am Phänomen des Mutterspracherwerbs erkennt, sind Kinder bereits in sehr frühen Entwicklungsphasen zu äußerst komplexen und unausweichlich dialogisch strukturierten, fundamentalen Lernprozessen fähig. Erste Lernversuche auf einem Wissensgebiet sind sozial konstituiert und Lernprozesse in späteren Phasen der Wissensaneignung auf einem Gebiet, die Ableitung und/oder Anwendungen des fundamental Gelernten sind, können auch individuell, gleichsam „im stillen Kämmerlein", stattfinden.

Aber auch für dieses Lernen „im stillen Kämmerlein" muss man festhalten, dass es bei aller Kreativität und „Genialität", die man sich bei Mathematik lernenden Schülern und Studenten wünscht, bei den institutionalisierten Lehr-Lern-Prozessen von Schule und Universität vorwiegend um die Auseinandersetzung eines weitgehend kodifizierten Wissensbereiches geht, den wir als die Inhalte des Mathematikunterrichts verstehen. Für die fundamentalen Lernprozesse vor allem im Grundschulbereich ist die Unterrichtsrealisierung in Form von einsam, für sich lernenden Schülern, lerntheoretisch nicht optimal. Für diese Lernprozesse sind die erwähnten softskills von entscheidender Bedeutung: Ein Schüler oder Student muss sich in die Interaktion über einen Gegenstand einbringen können. Dies wird empirisch gesehen in unterschiedlichem Ausmaß und in unterschiedlicher Qualität geschehen. Selbst ein stiller Schüler muss über Kompetenzen verfügen, die ihn befähigen, das Unterrichtsgeschehen als einen Prozess interaktiver Verhandlungen in der Weise zu deuten, dass die mathematischen, „richtigen" Aussagen als solche auch erkannt werden.

Im Rahmen meiner Forschungen zur Unterrichtsinteraktion im Mathematikunterricht sind Einsichten und Erkenntnisse in die Strukturierungsprozesse dieser alltäglichen Unterrichtsabläufe erzielt worden, die eine Modellierung des mathematischen Unterrichtsalltags unter dem Gesichtspunkt der in ihm konstituierten sozialen Bedingung des fachlichen Lernens erlauben. Sie besteht aus fünf Dimensionen:

1. Thematisierung eines mathematischen Inhalts,
2. Rationalisierungspraxis,
3. Interaktionsstruktur,
4. Partizipationsform für tätig-werdende Schüler und
5. Partizipationsform für nicht-tätig-werdende Schüler .

Diese Dimensionen stellen gleichsam ein Minimalmodell zur Erfassung der Komplexität unterrichtsalltäglicher Interaktionsprozesse dar. Mit ihnen lassen sich gelungene und weniger gelungene Situationen des Mathematiklernens unter den Alltagsbedingungen von Schule und Unterricht beschreiben (Krummheuer & Brandt 2001).

Ich werde in diesem Artikel vor allem auf die zweite und vierte Dimension genauer eingehen. Hierzu beginne ich mit einem Beispiel aus dem Mathematikunterricht aus einem ersten Schuljahr zur Intervallschachtelung. Ich werde die Rationalisierungspraxis und die Partizipationsform für tätig-werdende Schüler in dieser Unterrichtsszene rekonstruieren. Es folgen dann einige theoretische Vertiefungen. Ich ende mit Ausführungen zu dem Charakter und Status von mathematikdidaktischen Theorien und der Rolle von empirischer Unterrichtsforschung bei ihrer Entwicklung.

1 Ein Beispiel: „Mister X“

Mit dem Beispiel möchte ich auf die Genese der Argumentation und auf die Partizipation von Schülern an ihr eingehen. Diese beiden Dimensionen spannen einen Unterraum für lerntheoretische Betrachtungen von sich aktiv beteiligenden Schülern auf. Sie werden mit der Argumentationsanalyse und der Partizipationsanalyse untersucht. Beide Analyseverfahren werde ich an einer Unterrichtsszene aus dem Mathematikunterricht einer ersten Klasse verdeutlichen:

Die Kinder sollen im Rechenspiel „Mister X“ zunächst eine Zahl zwischen 10 und 20 erraten, die ein Schüler auf der Rückseite der Tafel für die Klasse nicht einsehbar notiert hat. Zu jedem Zahlenvorschlag wird von diesem Schüler mitgeteilt, ob die zu erratende Zahl größer, kleiner oder gleich ist und dies an der Tafel notiert. Hierzu ist ein großes „X“ auf die Tafel gezeichnet worden. Links von X werden die vorgeschlagenen zu kleinen Zahlen und rechts die vorgeschlagenen zu großen Zahlen notiert.

Curricular lässt sich dieses Spiel der Entwicklung von Zahlvorstellungen zu den Zahlen im Zahlraum von 0 bis 20 in der Menge der Natürlichen Zahlen zuordnen. Die Schüler sollen Größenvorstellungen zu diesen Zahlen entwickeln und bezogen auf die Arithmetik die Größer/Kleiner-Beziehung zwischen den Zahlen aus diesem Zahlenraum anwenden können. Hierzu sollen sie in dem Beispiel durch Intervallschachtelung die Zahl 13 bestimmen.

Zu Beginn der Szene stehen die 10 und 12 links von X und u.a. die Zahlen 18 und 14 rechts von X auf der Tafel. Die gesuchte Zahl 13 steht unter dem X. Nachdem die richtige Zahl – 13 – genannt und an die Tafel geschrieben wurde, entwickelt sich folgende Sequenz[1]:

131	L	gibt es auch vielleicht n **Grund** weshalb ihr euch das gedacht habt \ warum **konn-**	
132		**te** es nachher nur die **Dreizehn** *zeigt auf die 13 an der Tafel* sein \ . ich glaub	
132.1		der **Aram** hat n bisschen **geraten ne** Aram / oder / . weshalb konnte es nur die	
132.2		Dreizehn sein \ Nicole \	
133	9:25h		
134	Nicole	weil **alle** Zahlen schon da drinne außer dreizehn	
135	L	nö / . **fünfzehn** zum Beispiel /	
136	Jarek	und sechsehn \	
137a	<L	gibt nen andern Grund \	gibt nen andern
137.1	<Jarek	sechsehn	
137b		Grund \ **David** \	
137.2		*Es herrscht allgemeine Unruhe in der Klasse. Es wird laut gehustet.*	
138	<L	weil vierzehn zu groß wa -David	

[1] Bedingt durch die zum Originaltranskript geänderten Formatierungsvorgaben müssen teilweise Zeilenumbrüche geändert werden. Bei Zeilen mit Transkriptnotation führt dies gelegentlich zu einer Aufteilung der Zeilen. Hier wird dann durch Ergänzung von einem „a“ oder „b“ bei der Zeilennummerierung auf diesen Umstand hingewiesen.

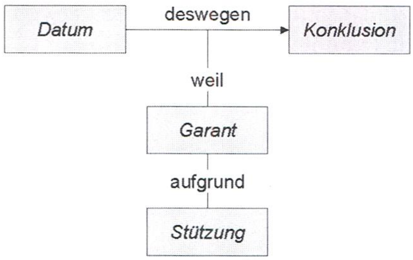
138.1	< S1	a b c d
138.2	<S2	man hör aauf
139	L	so **stop** \ das is jetzt **ganz** wichtig \ nochma \
139.1	Efrem	und hundert
140a	<David	weil vierzehn zu groß wa \ *legt seinen Oberkörper*
141a	<L	*zeigt auf die 14* ja \ . +
140b	>David	*auf den Tisch* +
141b	>L	und / *zeigt auf die 12*
142	David	die . zwölf war zu klein \
143		wieder**hol** + das ma Efrem \ **Efrem** \ . wiederhol das ma \ . der David hat was
144		**ganz Kluges** gesagt \ das könnt ihr euch **merken** \ wer kann das nochmal **wie-**
145		**derholen** was der **David** gesacht hat \ *leise* **Petra** \
146	9:26h	
147a	<Petra	weil weil die vierzehn zu **groß** war / un und die
147.1a	<L	*zeigt auf die 14* +
147b	>Petra	zwölf zu zu **klein** war \
147.2b	>L	*zeigt auf die 12*
148	L	und dazwischen gibt es nur noch **eine** / +
149	Petra	dreizehn \
150	L	*zeigt auf die 13* dreizehn \ +

1.1 Rekonstruktion der Rationalisierungspraxis

Im Folgenden geht es um die Rekonstruktion der kollektiven Argumentation, wie sie in der Situation von den am Unterrichtsgespräch Beteiligten hervorgebracht wird. Für die Argumentationsanalyse beziehe ich mich auf die Arbeiten von Toulmin (1969; s. a. Krummheuer und Fetzer 2005). Die Redebeiträge der Einzelnen werden dabei unabhängig von deren individueller Intention und Sinngebung in Hinblick auf ihre Funktion in einer gemeinsam erbrachten Argumentation betrachtet (s. a. Kopperschmidt 1989). Mit Hilfe einer funktionalen Argumentationsanalyse wird es möglich, diese Funktionen zu bestimmen. In welcher Beziehung der Sprechende zu seiner Äußerung zu sehen ist, wird in der nachfolgenden Partizipationsanalyse geklärt.

Die vier zentralen Kategorien einer Argumentation im Toulminschen Sinne sind das „Datum", die „Konklusion", der „Garant"[2] und die „Stützung". Toulmin 1969 hat diese funktionalen Argumentationskategorien grafisch in einem Layout wiedergegeben:

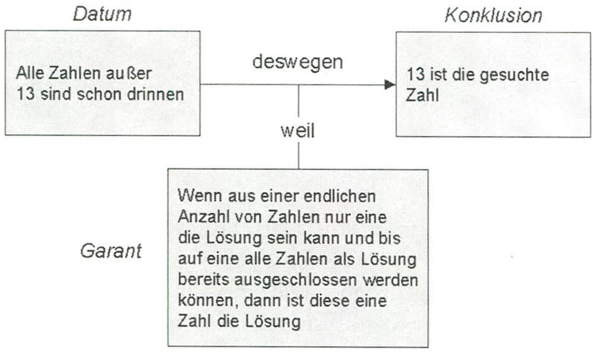
[2] „Garant" ist unsere Übersetzung des von Toulmin verwendeten englischen Wortes „warrant". In der deutschsprachigen Literatur wird hierfür auch häufiger das Wort „Schlussregel" verwendet (s. z. B. Kopperschmidt 1989. S. 124).



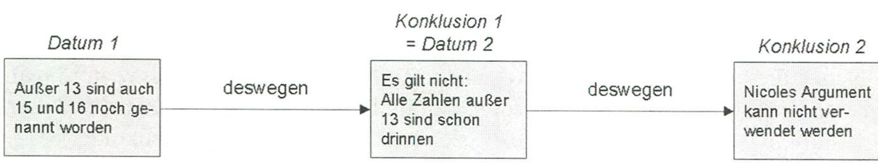
Die Konklusion ist die Aussage, die belegt werden soll. Das Datum ist eine unbestrittene Tatsache, ein Sachverhalt bzw. eine Information, auf die verwiesen werden kann, als Antwort auf die Frage: „Was nimmst du als gegeben?“ Die denkbar kürzeste Argumentation würde dann lauten: Datum, deswegen Konklusion. Sie ist in der obersten Zeile des Layouts wiedergegeben. Wir nennen diese Zeile auch den „Schluss“. Eine derart „erschlossene“ Konklusion kann im Weiteren dann als neues Datum herangezogen werden. Garanten sind allgemeine, hypothetische Aussagen, die als „Brücken“ dienen können und diese Art von Schlüssen legitimieren (Toulmin 1975, S. 89). Sie entsprechen laut Toulmin in der Regel einer erweiterten Möglichkeit zu argumentieren und können als Antwort auf die Frage: „Wie kommst du zu diesem Schluss?“ gedacht werden. Stützungen schließlich sind Überzeugungen, die zur Anwendbarkeit eines Garanten führen. Sie beantworten die Frage: „Warum soll der genannte Garant *allgemein* als zulässig akzeptiert werden?“ (vgl. ebenda S. 94).

Neben diesen vier Teilen einer Argumentation führt Toulmin noch weitere Kategorien ein, die hier nicht behandelt werden. Häufig kommt es vor, dass mehrere dieser Argumentationen aufeinander treffen bzw. sich ergänzen, z.B. wenn aufeinander bezogene Redebeiträge als sich widersprechende Konklusionen fungieren und entsprechend untermauert werden oder durch weitere Daten eine zusätzliche Begründung eingebracht wird (s. a. Krummheuer 1995). Ein solcher Fall liegt der ausgewählten Szene vor.

In unserem Beispiel ist eine Begründung für die Aussage: „Die Zahl 13 konnte nur noch die Lösung sein“, gefragt. Diese Aussage erscheint somit als Konklusion der Argumentation. Mit „warum“ werden hier Daten eingefordert. Die erste Argumentation von Nicole in <134> kann man so verstehen, dass 13 die gesuchte Zahl ist, weil alle anderen in Frage kommenden Zahlen bereits ausgeschlossen wurden. Das ist alles, was in diesem Abschnitt der Szene zu diesem Argument hervorgebracht wird. Wir können nicht die Explikation eines Garanten oder einer Stützung rekonstruieren. Aus argumentationstheoretischer Sicht ist es erst durch den Garanten möglich, die Zustimmung zu gegebenen Daten auf die Konklusion zu übertragen; dass heißt: erst durch den Garanten werden akzeptierte Aussagen zu den Daten einer Argumentation. Der Garant scheint im vorliegenden Fall wohl so evident zu sein, dass es nicht nötig erscheint, ihn zu thematisieren. Zur Klärung unseres eigenen Verständnisses zu Nicoles Argument könnte man den folgenden Garanten unterstellen: „Wenn aus einer endlichen Anzahl von Zahlen nur eine die Lösung sein kann und bis auf eine alle Zahlen als Lösung bereits ausgeschlossen werden konnte, dann ist diese eine Zahl die Lösung“. Es ist nicht anzunehmen, dass der Garant in dieser Explizitheit und dieser Formulierung von den Schülern dieser ersten Klasse ausgedrückt werden könnte.

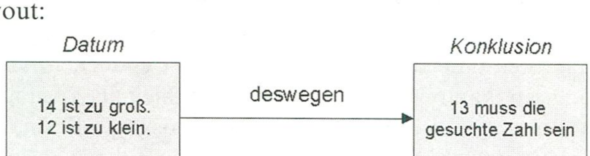


Man kann annehmen, dass diese Argumentationsfigur von den Erstklässlern in dieser Szene beherrscht wird. Zumindest wird in den unmittelbaren Folgeäußerungen <135 und 136> nicht die Legitimität eines solchen Schlusses *an sich* in Zweifel gezogen. Vielmehr wird das von Nicole in <134> formulierte *Datum* in Abrede gestellt. Die Argumentation könnte man sich auf der Ebene der Schlüsse wie folgt vorstellen.



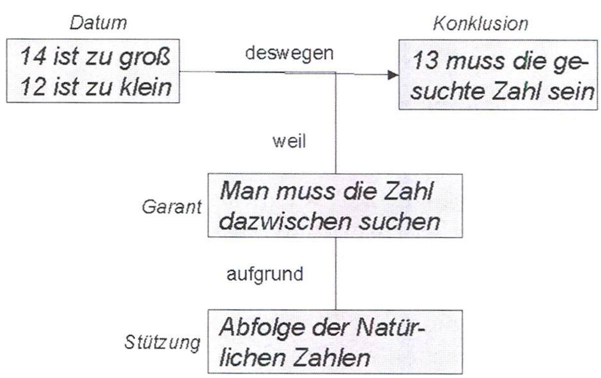
An dieser Stelle muss betont werden, dass sowohl Konklusion 1, bzw. Datum 2, als auch Konklusion 2 nicht explizit formuliert werden. Mit der Äußerung der Lehrerin in <137>, „es gibt noch nen andern Grund“, wird wohl auch von ihr unterstellt, dass Nicoles Argument hinreichend deutlich widerlegt worden ist und keiner weiteren Kommentierung bedarf. Es sei hier, mit Blick auf die später noch folgenden Ausführungen zur Partizipation der Schüler an Argumentationsprozessen, darauf hingewiesen, dass in diesem Argumentationszyklus Nicole, die Lehrerin und Jarek aktiv beteiligt sind, es sich also um eine kollektive Argumentation handelt.

Ab <138> entwickelt sich eine neue Argumentation. Sie ist in <138, 140 und 141> wiedergegeben. Das Argument kann man zusammenfassend wie folgt verstehen: 12 und 14 stehen als „zu groß“ bzw. „zu klein“ an der Tafel; auf sie kann als unbezweifelte Tatsache verwiesen werden. Die dazwischen liegende Zahl muss die gesuchte Zahl sein. Als Layout:



In <147 bis 148> kommen noch ein paar kurze Einwürfe vor, die Hinweise auf den Garanten und die Stützungen enthalten. So ist es nur durch die Verknüpfung „und“, die von der Lehrerin in <147.1> formuliert wird, möglich, aus den von David genannten Daten auf die Konklusion zu schließen. In dieser von der Lehrerin vorgenommenen Verknüpfung deutet sich somit der Garant an, der mit den folgenden Äußerungen weiter ausgeführt wird. Die Lösungszahl muss somit zwischen den bereits genannten zu großen Zahlen und zu kleinen Zahlen liegen.

Die Zulässigkeit des Garanten kann nach Toulmin (1969/1975) gegebenenfalls durch die Angabe fundamentaler Überzeugung Stützung erfahren. In der angeführten Argumentation lässt sich ein Hinweis auf eine zu unterstellende Stützung finden: Mit „nur noch die dreizehn“ wird auf die diskrete Abfolge der natürlichen Zahlen als fundamentale Eigenschaft verwiesen, die diesen Schluss rechtfertigt. Die mit der Eingangsäußerung der Lehrerin behauptete Eindeutigkeit der Lösung 13 wird somit durch die Abfolge der natürlichen Zahlen gestützt.



Auch bei dieser zweiten Argumentation handelt es sich um eine kollektive Argumentation. Blickt man auf die gesamte Argumentation zurück, so scheinen mir zwei Punkte erwähnenswert:

1. In der Szene werden zwei Argumentationen bzw. Argumentationszyklen hervorgebracht, die hinsichtlich der Toulminschen Kategorien äußerst unterschiedliche Explikationsgrade aufweisen. Die letzte Argumentation ist relativ komplett ausgearbeitet. Man erkennt, dass hier die Lehrerin – sicherlich didaktisch motiviert – gezielt dazu beiträgt. Wir haben in unseren Projekten häufiger rekonstruieren können, dass Schüler, gerade wenn sie unter sich selbstständig zusammenarbeiten, kollektive Argumentationen hervorbringen, die nur aus Daten und Konklusionen bestehen. Manchmal werden sogar nur das Datum oder nur die Konklusion expliziert. In gewisser Weise wird hier eine auch in Mathematikerkreisen geläufige Praxis gepflegt: man unterlässt eine Begründung mit dem Hinweis, dass diese „trivial“ sei. Durch den Verzicht auf die Explizierung von Garanten unterstellen die Schüler hierbei offensichtlich eine hochgradige Übereinstimmung in ihren Ansichten. Dies ist mitunter eine höchst problematische Unterstellung; in vielen Fällen mag sie aber auch zutreffen und dann sind die Argumentationen häufig narrativ strukturiert: Die Darstellung

des durchlaufenen Bearbeitungsweges zu einer Aufgabe fungiert zugleich als Begründung für die Richtigkeit der gefundenen Lösung. Logisch ist dies haltbar, wenn hierbei immer nur Äquivalenzumformungen vorgenommen werden. Dies ist aber in diesen Argumentationen zumeist nicht der Fall. Die Schüler zeigen vielmehr, was sie gemacht haben, um ein ungelöstes Problem auf bereits gelöste zurück zu führen.

2. Der Begriff der kollektiven Argumentation kann leicht in der Weise missverstanden werden, dass die an einem solchen Prozess Beteiligten gleichsam mit hoher Konzentration, hoher Aktivitätsbereitschaft und vielen eigenen Ideen dabei sind. Dies muss nicht der Fall sein. Freilich sind die generelle Bereitschaft und aktive Mitarbeit an der Herstellung einer argumentativ möglichst entwickelten Rationalisierungspraxis im Sinne einer hinreichenden Verfügbarkeit von geeigneten softskills im Hinblick auf die Herstellung optimaler Lernbedingungen als Bedingung solcher kollektiven Prozesse zu werten.

1.2 Die Partizipationsanalyse

Am Beispiel der zweiten Argumentation soll genauer besprochen werden, wie sich die Partizipation der an der Hervorbringung der Argumentation Beteiligten unterscheiden können. Hiermit wird ein anderer Aspekt der softskills thematisiert: Es geht um die Originalität und Zielgerichtetheit der Beiträge im Hinblick auf eine thematische Entwicklung im Mathematikunterricht. Mit Hilfe der Partizipationsanalyse klären wir, welche Originalität und Verantwortung einem Sprechenden für seine Äußerungen in einer Situation zugewiesen werden kann. Wir führen eine Partizipationsanalyse durch, die von der Goffmanschen Idee der „Dekomposition" der Handlung einer Äußerung in verschiedene Teilfunktionen ausgeht (s. Goffman 1974, 1981). Diese sind u. a.

- das syntaktische Gebilde mit einer bestimmten Wortwahl und Form (Formulierungsfunktion) und
- der inhaltsbezogene (semantische) Beitrag (Inhaltsfunktion).

Wir wenden diese Überlegungen auf Argumentationsprozesse an und identifizieren dabei die Inhaltsfunktion mit der argumentativen Funktion einer Äußerung.

Ein Sprechender kann mit seiner Äußerung nicht nur Verantwortung oder Originalität für beide Funktionen, sondern auch nur für eine von beiden und sogar für keine von beiden übernehmen bzw. beanspruchen. Es lassen sich vier Fälle unterscheiden: Ein Sprechender

- ist im vollen Umfang (syntaktisch und semantisch) verantwortlich für seine Äußerung: Einen in dieser Verantwortlichkeit Sprechenden nennen wir den „Kreator" bzw. die „Kreatorin" der Äußerung. Mit Kreator meinen wir eine Person, die eine eigene gedankliche Idee in eigenen Worten selbst sprachlich umsetzt.
- trägt weder für die syntaktische Form, noch für den semantischen Gehalt seiner Äußerungen eigene Verantwortung. Für seine Aussage kann er keine Originalität beanspruchen. Sprechende mit diesem Status nennen wir „Imitierer" bzw. „Imitiererin" einer Äußerung.

- übernimmt (fast) identisch die Formulierungen von Teilen einer vorangegangenen Äußerung und versucht damit eine eigene, neue Idee auszudrücken. Einen in dieser Verantwortlichkeit Sprechenden nennen wir einen „Traduzierer“ bzw. eine „Traduziererin“. Traduktion ist ein Begriff aus der klassischen Rhetorik und meint die „Wiederholung eines Wortes in veränderlicher Form oder mit anderem Sinn“ (Duden 1990, S. 786).
- übernimmt die Idee einer vorangegangenen Äußerung und versucht diese mit eigenen, neuen Formulierungen auszudrücken. Eine in diesem Status sprechende Person nennen wir einen „Paraphrasierer“ bzw. eine „Paraphrasiererin“. Unter einer Paraphrase versteht man die „Umschreibung eines sprachlichen Ausdrucks mit anderen Wörtern oder Ausdrücken ...“ (ebenda, S. 574).

In tabellarischer Form lassen sich diese Zusammenhänge in nachstehender Weise darstellen (s. hierzu Krummheuer und Brandt 2001):

	Verantwortung für den **Inhalt** einer Äußerung	Verantwortung für die **Formulierung** einer Äußerung
Kreator (author)	+	+
Imitierer (animator, relayer)	-	-
Traduzierer (ghostee)	+	-
Paraphrasierer (spokesman)	-	+

Betrachten wir nun die Formen der Beteiligung an der Interaktion zur zweiten Argumentation im Beispiel „Mister X“. Die Lehrerin eröffnet die Argumentation durch die Nennung der noch zu begründenden Konklusion. Davids Aussage weil vierzehn zu groß war <138> wird als erste Antwort akzeptiert. Er formuliert die Aussage als Begründung und bringt hier eigenverantwortlich ein Datum ein. Somit übernimmt er Verantwortung hinsichtlich der Formulierungs- und Inhaltsfunktionen für die Äußerung. Er fungiert als Kreator. Er wiederholt dieses Datum <140> nach Aufforderung der Lehrerin <139>. In dieser Wiederholung fungiert er als Imitierer, wobei die Verantwortlichkeit für die Wortwahl in seiner ersten Aussage zu sehen ist; er ‚imitiert' sich gleichsam selbst. Die Lehrerin begleitet ihn gestisch <141> und überträgt damit die Aussage in eine andere Form. Sie unterstützt Davids Idee als Paraphrasiererin. Die Lehrerin fordert ein weiteres Datum mit „und“ ein <141>. Das zweite Datum, die zwölf war zu klein <142>, wird von David erst genannt, nachdem die Lehrerin an der Tafel auf die 12 gezeigt hat <141>, die dort als „zu klein“ festgehalten ist. Somit bringt die *Lehrerin* die Idee dieses zweiten Datums in den Argumentationsprozess ein. David fasst die Geste, welche die Idee eines Datums enthält, in Worte. Er bringt somit als Paraphrasierer die Idee in einer neuen Wortwahl ein.

Petras Äußerung in <147> ist die Wiederholung von Davids Aussagen. Die Lehrerin hatte ihr diesen Auftrag erteilt <145,146>. Man kann sie hier in der Rolle als Imitiererin rekonstruieren. Die gestischen Verweise der Lehrerin auf die beiden auf der Tafel notierten Zahlen in <147.1> verstehen wir hier vor allem als eine Untermalung von Petras Äußerung und bewegen sich damit im Rahmen des Imitierungsaktes von Petra.

In <148> hebt die Lehrerin mit einer neuen Idee an. Sie fragt nach den Zahlen zwischen 12 und 14. Hier fungiert sie als Kreatorin und konstruiert damit Teile einer Stützung, die erst mit der Nennung der Zahl 13 durch Petra in <149> und die Lehrerin in <150> vollständig wird. Etwas schwieriger ist hier der Status von Petra bei ihrer Äußerung in <149> zu klassifizieren. Sie spricht eindeutig bevor die Lehrerin in <150> auf die dreizehn zeigt. Insofern „plappert" sie nicht einfach nach. Ihre Antwort ist mit dem Eintragen eines Wortes in einem Lückentext vergleichbar, bei dem es weitgehend klar ist, was in die Lücke eingesetzt werden muss. Zu bedenken ist ja hier, dass die Zahl 13 an der Tafel steht und in gewisser Weise nur noch abgelesen werden muss. Wir pflegen Sprechern von solchen Einwort-Antworten den Status eines Imitierers zuzuweisen.

Tabellarisch fassen wir die Analyseergebnisse wie folgt zusammen:

Sprechender: Funktion	Äußerung *Bezugnahme auf einen vorangehenden Sprecher*	Idee (argumentative Funktion der Äußerung)
Lehrerin: Kreatorin	warum konnte es nachher nur die dreizehn sein	Eindeutigkeit der Lösungszahl 13. (Konklusion)
David: Kreator	weil vierzehn zu groß wa –	14 war zu groß. (Datum)
David: Imitierer	weil vierzehn zu groß wa \ *David*	
Lehrerin: Paraphrasiererin	*zeigt auf die 14* ja \ *David*	14 war zu groß. (Datum)

Sprechender: Funktion	Äußerung *Bezugnahme auf einen vorangehenden Sprecher*	Idee (argumentative Funktion der Äußerung)
Lehrerin: Kreatorin	und	Verknüpfung mit noch zu erstellendem zweiten Datum (Garant)
Lehrerin: Kreatorin	*zeigt auf die 12*	12 war zu klein. (Datum)
David: Paraphrasierer	die . zwölf war zu klein *Lehrerin*	12 war zu klein. (Datum)
Petra: Imitierer	weil weil die vierzehn zu groß war / un und die zwölf zu zu klein war \ *David*	Obere und untere Grenze (Datum + Garant)
Lehrerin: Kreatorin	Und dazwischen gibt es nur noch eine /	Reihe der Natürlichen Zahlen (Stützung)
Petra: Imitierer	dreizehn *Lehrerin*	Reihe der Natürlichen Zahlen (Stützung)

1.3 Zusammenfassung der Ergebnisse von Argumentationsanalyse und Partizipationsanalyse

Die Dimensionen „Rationalisierungspraxis“ und „Partizipationform für tätig-werdende Schüler“ spannen einen Unterraum auf, der in besonderer Weise Lernermöglichungsbedingungen für sich aktiv beteiligende Schüler zu erfassen erlaubt. Im Prozess kollektiven Argumentierens wird ein Argument hervorgebracht, zu dessen Produktion der sich aktiv beteiligende Schüler in zweifacher Hinsicht beiträgt:

- er produziert Äußerungen, die sich bestimmten Toulmin-Kategorien zuweisen lassen, und
- er bringt sich hierdurch in eine spezifische Rolle des Sprechenden.

Für David und Petra kommt es hier zu recht unterschiedlichen Ergebnissen:

Für die Hervorbringung der, wegen der Nennung zweier Daten relativ komplexen, Argumentation wird David von der Lehrerin in einen Interaktionsprozess eingebunden, in dem er sowohl als Kreator als auch als Paraphrasierer auftritt. Man könnte mutmaßen, dass David das Datum der unteren Schranke, die Zahl 12, nicht ohne diese Einbindung in den Interaktionsprozess mit der Lehrerin erzeugt hätte. Es ist zudem nicht zu rekonstruieren, inwieweit David die *logische* Notwendigkeit der von der Lehrerin durch „und" vorgenommenen Verknüpfung der beiden Daten und somit den Garanten erfasst. Im Status eines Paraphrasierers agiert David dabei in einer von uns als relativ elaboriert eingeschätzten Form der Autonomie. Eine weniger elaborierte Form hätten wir darin gesehen, wenn er als Imitierer eine im Wesentlichen schon von der Lehrerin vorformulierte Antwort reproduziert hätte. Dies geschieht hier aber nicht.

Anders sieht es für Petra aus: Sie ist zwar bei der Produktion der Stützung mit dabei und in gewisser Weise würde man ihr an dieser Stelle ein tiefer gehendes Verständnis unterstellen können, aber ihre Äußerungen bringt sie im Status der Imitiererin hervor. Dies spricht nun dafür, dass kein solches tiefer gehendes Verständnis vorliegen muss und nicht so sehr die Logik der Sache sondern die der Interaktion dominiert. Petra macht gleichsam „gut funktionierend" mit und mag hierdurch mit dazu beitragen, dass für die stillen, rezipierenden Schüler eine einsichtige Argumentation präsentiert wird. Sie zeigt damit möglicherweise eine entwickelte Kommunikationsfähigkeit und „Teamgeist". Hier treten softskills in schillernder Weise zu Tage.

Allgemein wollen wir festhalten, dass es mit derartigen Partizipationsanalysen möglich wird, die Grade von Autonomie zu beschreiben. Schüler im paraphrasierenden und/oder traduzierenden Status werden als Lernende beschreibbar, die sich bereits auf den Weg zu mehr Handlungsautonomie gemacht haben. Brandt 2004 charakterisiert dabei den/die Paraphrasier/in als eine Rolle, die noch eher an einem Sicherheitsbedürfnis nach dem „Wiederfinden von Bekanntem" orientiert ist. Der/die Traduzierer/in wird von ihr dagegen als eine Rolle bezeichnet, in welcher der Lernende ein deutlicheres Autonomiebestreben zeigt und sich durch ein „Suchen nach Neuem" auszeichnet (S. 199 f). Paraphrasieren und Traduzieren sind Tätigkeiten, die das Lernpotenzial einer Unterrichtssituation verbessern. Durch sie werden Ideen bzw. Formulierungen von Schülern und/oder der Lehrerin in einen Bezug zum verhandelten mathematischen Thema gebracht.

Ich habe mich in diesem Beispiel auf einen spezifischen Unterraum des unterrichtlichen Interaktionsraums konzentriert. Ich möchte meine Ausführungen zu dieser Szene mit ein paar kurzen Bemerkungen zu den anderen Dimensionen des mathematischen Unterrichtsalltags beenden. Hinsichtlich der thematischen Entwicklung wäre es aufschlussreich genauer zu rekonstruieren, wie in dieser Szene der Zahlraum von 10 bis 20 und die Größer-Kleiner-Relationen zur Sprache kommen. Auch zu der Partizipationsform der nicht-tätig-werdenden Schüler habe ich nichts ausgeführt. Für den aufmerksamen Zuhörer mag im Sinne des expositorischen Lehrens eine durchaus luzide Argumentation vorgeführt worden sein, die auf ihn anders als vielleicht für Petra überaus lernförderlich wirken mag. Zur Interaktionsstruktur habe ich eher implizite Anmerkungen gemacht. Petras Beitrag zur Hervorbringung einer Stützung kann als eine Handlung im Rahmen eines Trichter-Musters verstanden werden (Bauersfeld 1978), in dem Antwortoptionen hochgradig eingeschränkt werden bzw. sind und der kognitive Aufwand äußerst gering ist.

2 Einige Bemerkungen zum Einsatz des Modells in der Lehrerausbildung: Gestalten durch Interpretieren

Kenntnisse über den dargestellten Phänomenbereich des (fachlichen) Unterrichtsalltags halte ich für zukünftige Mathematiklehrerinnen in der Grundschule für nötig. Denn er ist es, in dem sie mit ihren konkreten Handlungen bestehen müssen und dazu beitragen einen Unterrichtsalltag mit zu erzeugen, der auf die mathematischen Lernprozesse der Schüler förderlich wirkt. Soeffner 1989 hat diesen Gedanken folgendermaßen zusammengefasst:

Was aber die aktuellen Handlungen und Entscheidungen angeht, so behält der kognitive Stil der Praxis das letzte Wort (S. 43).

Mit „kognitiver Stil" meint er dabei den für das Bestehen und Mitwirken in einer Alltagssituation notwendigen Denkstil, der sich u. a. durch die Fähigkeit auszeichnet, unter Handlungsdruck Entscheidungen treffen zu können, die die Fortführung der Interaktion sichern bzw. in eine gewünschte Richtung lenken (s. a. Krummheuer 1997, Kap. 3).

Die vorgestellte Modellierung enthält die als unabdingbar anzusehenden Dimensionen zum hinreichenden Verstehen unterrichtsalltäglicher Komplexität. Die in mathematikdidaktischen Arbeiten häufig vorherrschende Beschränkung auf die Reflexion, ausschließlich der 1. Dimension (Thematisierung eines mathematischen Inhalts), verdeutlicht die Unzulänglichkeit derartiger Ansätze, wirksam und theoretisch hinreichend aufgeklärt auf Prozesse des Mathematiktreibens im Unterrichts*alltag* einzuwirken. Ebenso scheint es mir, dass auch allgemein schulpädagogische Forschungen in ihren vielfältigen Theoretisierungen des pädagogischen Verhältnisses zwischen Lehrer und Schüler vorwiegend Überlegungen zur 3. Dimension anbieten. In einer Kombination dieser schulpädagogischen und mathematikdidaktischen Theorien bleiben somit die 2., 4. und 5. Dimensionen weitgehend unberücksichtigt. Das für die universitäre Lehrerausbildung übliche fachliche und schulpädagogische Kombinationspaket ist somit zur hinreichenden Durchdringung des unterrichtlichen Interaktionsraumes theoretisch unterausgestattet. Hier ist ein breiterer Theorierahmen nötig, den zu entwickeln und zu repräsentieren sich die Vertreter von Mathematikdidaktik und Schulpädagogik gewöhnlich in ihrem disziplinären Selbstverständnis nicht zuständig sehen. Damit werden auf theoretischer Ebene die softskills zur Ermöglichung einsichtsvoller mathematischer Lernprozesse nicht evident.

Die fünf Dimensionen lassen sich alle mit Hilfe der von uns entwickelten Analyseverfahren untersuchen. Sie basieren auf Elementen der Konversationsanalyse und sind für die fachspezifische, argumentationstheoretische und partizipationstheoretische Dimension unterrichtlicher Aushandlungsprozesse entsprechend ausdifferenziert und weiterentwickelt worden. Dieses Verfahren setzen wir u. a. in der Lehrerausbildung ein, um Studierende mit dieser Modellierung vertraut zu machen, d. h. ihre Interpretationskompetenz für unterrichtsalltägliche Prozesse in entsprechender Weise zu erhöhen (s. a. Krummheuer 1999).

Dieser Ansatz betont den funktionalen Aspekt von sozialer Interaktion, wie z. B. die regelhafte Hervorbringung von Kooperationsformen, deren Konstituenten den Beteiligten als nicht weiter fragwürdig erscheinen. Diese von Lehrer und Schüler in der konkreten Unterrichtssituation dann nicht weiter kritisierten und als nicht weiter hinterfragbar betrachteten Regularitäten stellen u. a. ihren Unterrichtsalltag dar. Er erscheint für sie wie eine vorgegebene „Objektivität" (Grathoff 1995; Soeffner 1989), z. B. dass man Mathematik am besten alleine lernt.

Für Studierende, die aus ihrer eigenen Schulzeit in der Regel über äußerst entwickelte, stabile und eingeschränkte Interpretationen zum mathematischen Unterrichtsalltag verfügen, stellt sich in der universitären Ausbildungszeit dieser Alltag dann zumeist als eine solche unhinterfragbare Gegebenheit dar. Diese festgefahrene „Alltagspädagogik„ (zu diesem Begriff s. Bruner 1990; Naujok 2000) unserer Studierenden gilt es zu relativieren und konstruktiv zu verändern.

> Die 12–13jährige Sozialisation in der Schule von gestern ist stärker und wirksamer als die aufgesetzten 4–5 Jahre Lehrerausbildung für die Schule der Zukunft. Im Konfliktfall regrediert ein Lehrer eher auf seine eigene, als Schüler erlittene Schulerfahrung als auf das Prüfungswissen seiner Lehrerausbildung (Bauersfeld 2000, S. 138).

Aber – wie ausgeführt – trägt auch die universitäre Lehrerausbildung zu dieser handlungsverengenden Alltagspädagogik bei.

Aus hochschuldidaktischer Sicht ist die detaillierte Beschäftigung mit den Strukturierungen dieses Alltags vor allem deswegen angezeigt, weil man in der genaueren Rekonstruktion seiner interaktiven Entstehungsbedingungen einen Ansatzpunkt hat, diese scheinbare „Objektivität" bestehender Unterrichtsstrukturen in ihren Hervorbringungsprozessen zu analysieren und somit eine prinzipielle Veränderbarkeit aufzeigen zu können. Eigene Vorstellungen hierzu sind in jüngster Zeit mehrfach veröffentlicht worden (Krummheuer 2003, 2004 und ders. und Fetzer 2005). Der anfangs erwähnte unheilvolle Kreislauf kann durchbrochen werden.

3 Kontextuelle Theorieentwicklung – die Notwendigkeit mathematikdidaktischer Unterrichtsforschung

Science *probes*; it does not prove (Bateson 1979, S. 32).

Es gibt nicht viele Forschungsansätze, die sich in dieser Phänomennähe mit fachlichen Unterrichtswirklichkeiten auseinander setzen. Die „Verführung" – wie es Toulmin (1994) formuliert – unserer Forschungstradition liegt in dem Streben nach hoher Generalisierbarkeit von Theorien. Toulmin spricht in diesem Zusammenhang von einer „Dekontextualisierung". Dies geht gemeinhin mit einem hochgradigen Verlust an Wahrnehmungs- und Beschreibungsfähigkeit der Komplexität konkreter sozialer Wirklichkeiten einher. Der Grad von Dekontextualisierung, den wir gemeinhin in Theorien aus der Unterrichtsforschung kennen, ist m. E. so hoch, dass ein solcher Verlust zumeist eintritt.

Für fachdidaktische Forschung ist dies inakzeptabel. Es geht dabei nicht nur um die Ausschaltung des Faches in diesen Theorien, in denen es als austauschbare „Domäne" übergangen wird. Der Kontext, von dem aus meiner Sicht in der empirischen Unterrichtsforschung häufig zu leichtfertig abstrahiert wird, sind die Prozesse der Herstellung eines Interaktionsraums in den Unterrichtsstunden im Sinne der Praxis einer interaktiven Konstitution des Mathematisierens. Sie weisen ein gewisses Maß an Eigendynamik, Eigenständigkeit und Beständigkeit auf. Sie sind nicht nur als ein abgeleitetes Phänomen der sozialen Institution Schule, oder noch umfassender als makrosoziologische Organisationsformen, zu verstehen. Ebenso wenig sind sie auch nicht nur die Ergebnisse der mehr oder weniger erfolgreich verwirklichten umgesetzten Intentionen von im Unterricht Anwesenden. Auch ist der mathematische Unterrichtsalltag nicht durch die fachlich-methodisch strukturierte Präsentation des Unterrichtsstoffs bestimmt. Sicherlich ist der Interaktionsraum von diesen Einflussfaktoren nicht völlig unabhängig. Er ist jedoch nur schlüssig zu verstehen, wenn man ihn in seiner Besonderheit als einen weitgehend in seiner Entwicklung offenen, *situationell* emergierenden sozialen Prozess des Mathematisierens zu analysieren versucht.

Die Dekontextualisierung der Theorien von diesen Prozessen führt zu Forschungen, die unter dem Anspruch einer möglichst universellen Gültigkeit den „Unterrichtsalltag“ weitgehend als eine von den Beteiligten erzeugte, soziale Wirklichkeit zu abstrahieren versuchen. Solch eine Sicht der Forschung stuft den Unterrichtsalltag als unwesentlich und die Repräsentativität verzerrend ein. Derartige Ansätze mögen bestenfalls zu „‚klaren und deutlichen‘ Begriffen“ (Toulmin 1994, S. 318) führen. Für die Anleitung von professionellem Lehrerhandeln, zur Lehrerausbildung oder zur Einleitung von Unterrichtsinnovationen, reichen sie jedoch nicht aus. Das wissenschaftstheoretische Selbstverständnis der Mathematiker betont die Dekontextualisierung gegenüber der Kontextualisierung. Das meist gut bekannte Beispiel einer empirischen Forschung ist die Physik, deren Selbstverständnis in eine ähnliche Richtung weist. Das wissenschaftstheoretische Selbstverständnis der Mathematikdidaktik wird hier kaum wahrgenommen – vielleicht auch verursacht durch eine nicht entwickelte softskill-Kultur im Dialog zwischen Mathematik und Mathematikdidaktik.

Fachdidaktische Interaktionsforschung fokussiert auf das unmittelbar in der Interaktion Gestaltete, auf das situativ Reparierte oder auch auf das nicht-mehr-zu-retten-Gewesene – auf die Alltagspraxis von Fachunterricht. Diese Alltagspraxis wird u. a. durch Handlungen konstitutiert, die ihrerseits wieder aus an diese Praxis adaptierten Interpretationskompetenzen der Lehrpersonen hervorgehen. Erweitern sich die Interpretationskompetenzen, dann lassen sich auch erweiterte Handlungsmöglichkeiten erproben und gegebenenfalls stabilisieren. Hierdurch kommen dann auch andersartige Unterrichtsentwürfe und Innovationsvorschläge zustande: die Interpretationskompetenz von Lehrerinnen und Lehrern wie auch der Schülerinnen und Schüler sollte zu verbessern versucht werden, weil nur das, was wahrgenommen wird, die Basis für das weitere Handeln ist. Bauer und Rolf (1978) haben schon vor gut 25 Jahren dafür argumentiert, dass Unterrichtsinnovationen nur dann wirksam werden könnten, wenn Lehrer Unterricht *verändert wahrnehmen* würden. Der Ansatzpunkt ist, dass man den Unterrichtsalltag nicht als eine objektiv vorgegebene Realität versteht, sondern dass er als interaktiv erzeugter, in seiner je aktuellen Ausprägung davon abhängt, wie die Beteiligten selbst die Handlungen im Unterricht einschätzen und wie (kompetent) sie dann darauf reagieren können. Die hierzu benötigten Kompetenzen umfassen auch softskills. Sie erweisen sich für die Gestaltung und positive Veränderung von Mathematikunterricht als klare Voraussetzungen.

Hierzu kann die Forschung zur Unterrichtsinteraktion Wesentliches beitragen. Sie kann aber nur auf wenige Vorarbeiten zurückgreifen. Denn selbst fachdidaktische Arbeiten beschäftigen sich eher mit unterrichtsinitiierenden Vorschlägen als mit solchen, die den alltäglichen Unterrichtsvollzug gestalten. Sie entwickeln Ideen zur Impulssetzung, selbst wenn es ein stiller Impuls ist; sie erarbeiten Themenvorschläge und Aufgabensequenzen, die eine möglichst hohe intrinsische Motivation bei den Schülern erzeugen soll; usw. Wenn alle diese Impulse, Themen oder Aufgaben nur richtig gesetzt würden, dann – so die Denkfigur – müsste der Unterricht wie „geschmiert" gute Lernergebnisse bei den Schülern hervorbringen. Hier begegnet uns erneut die systematische Ausblendung einer dialogischen Unterrichtskultur. Einseitige und äußerst resistente Realisationen des unterrichtlichen Interaktionsraumes stehen solchen Unterrichtsinnovation von außen jedoch entgegen. Unterricht lässt sich nur von innen heraus verändern. An dieser Stelle sei auf das Soeffner-Zitat vom kognitiven Stil der Praxis hingewiesen. Hier bedarf es entwickelter Rationalisierungspraxen und ebenso entwickelter Gesprächskulturen im Hinblick auf paraphrasierende und traduzierende Aktivitäten.

Forschung zur Unterrichtsinteraktion sollte somit zur Entwicklung von Theorien mit lokalem Geltungsanspruch führen, zu Theorien von Mathematiklernen oder Deutschlernen in bestimmten Schulstufen usw. Die Konzentration auf die Entwicklung derartiger kontextueller Theorien und der prinzipielle Verzicht auf die Entwicklung einer, die Spezifität der Unterrichtssituation dekontextualisierenden Unterrichtstheorie, ist nicht gleichzusetzen mit dem Verzicht auf Wissenschaftlichkeit. Durch ihn wird vielmehr das Hauptgewicht empirischer Forschung auf die Entwicklung von empirisch gehaltvollen Theorien mit „mittlerer Reichweite" (Kelle 1994; Merton 1968) gelegt. Hierbei erfolgen Theorie- und Methoden- bzw. Analyseentwicklungen gegenstandsbezogen.

So wird eine Vielzahl konkurrierender und/oder sich ergänzender Erklärungsversuche zu Aspekten des Unterrichts entstehen. Es ist eine empirische Frage, wie nützlich interessierte Mitglieder unserer Gesellschaft die jeweiligen Theorien finden. Ausreichende Globalität ist bei derartiger Theoriekonstruktion erreicht, wenn sie für eine Vielzahl von Menschen, die sich dieser Theorie mit unterschiedlichsten Interessen zuwenden, eine überzeugende Argumentation darstellt. Dabei kann es sich um Grundschullehrer, Mathematiklehrer, Eltern, Pädagogen, empirische Sozialwissenschaftler, Erziehungswissenschaftler usw. handeln. Also auch auf dieser metatheoretischen Diskussionsebene benötigen wir eine entwickelte Argumentationskultur. Hier sind ebenfalls diskursfördernde softskills gefragt.

Unterrichtsforschung ist in diesem Sinne *selbst* ein Experiment und verwendet, nicht nur im methodologischen Sinne quantitativer Unterrichtsforschung, das Experiment zur Absicherung eines Geltungsanpruchs. Dies führt zu einem erprobenden und suchenden Umgang mit bereits vorhandenen Theorien und Methoden. Interpretative Unterrichtsforscher werden die Spannungen zwischen verschiedenen, und sich gegebenenfalls auch widersprechenden, kontextuellen Theorien zum Unterricht ertragen und dazu beitragen, dass es auch so bleibt. Denn:

> Better, perhaps, different coats to clothe the children well than a single splendid tent in which they all shiver (Goffman 1961. S. xiv).

4 Literatur

Bateson, G. (1979): *Mind and nature*. Toronto, New York, London: Bantam Books

Bauer, K.-O. und Rolf, H.-G. (1978): Vorarbeiten zu einer Theorie der Schulentwicklung. In: Dies.: *Innovation und Schulentwicklung*. Weinheim: Beltz

Bauersfeld, H. (1978): Kommunikationsmuster im Mathematikunterricht. In: ders. (Hrsg.). *Fallstudien und Analysen zum Mathematikunterricht*. Hannover: Schroedel

Bauersfeld, H. (2000): Radikaler Konstruktivismus, Interaktionismus und Mathematikunterricht. In: Begemann, E. (Hrsg): *Lernen verstehen – Verstehen lernen*. Frankfurt a. M. usw.: Peter Lang

Brandt, B. (2004): *Kinder als Lernende: Partizipationsspielräume und -profile im Klassenzimmer*. Frankfurt a. M.: Peter Lang

Bruner, J. (1983): Child's talk. Learning to use language. Oxford: Oxford University Press

Bruner, J. (1990): *Acts of Meaning*. Cambridge, MA; London: Harvard University Press

Goffman, E. (1961): *Asylums*. New York: Anchor Books

Goffman, E. (1974): *Frame analysis. An essay on the organisation of experience*. Cambridge, Mass.: Harvard University Press

Goffman, E. (1981): Footing. In: ders. (Hrsg): *Forms of talk*. Philadelphia: University of Philadelphia Press

Grathoff, R. (1995): *Milieu und Lebenswelt*. Frankfurt a. M.: Suhrkamp

Kelle, U. (1994): *Empirisch begründete Theoriebildung. Zur Logik und Methodologie interpretativer Sozialforschung*. Weinheim: Deutscher Studienverlag

Kopperschmidt, J. (1989): *Methodik der Argumentationsanalyse*. Stuttgart-Bad Cannstatt: Frommann-Holzboog

Krummheuer, G. (1992): *Lernen mit „Format“. Elemente einer interaktionistischen Lerntheorie. Diskutiert an Beispielen mathematischen Unterrichts*. Weinheim: Deutscher Studien Verlag

Krummheuer, G. (1995): The ethnography of argumentation. In: Cobb, P. & Bauersfeld, H. (Hrsg): *The emergence of mathematical meaning: interaction in classroom cultures*. Hillsdale, NJ: Lawrence Erlbaum

Krummheuer, G. (1997): *Narrativität und Lernen. Mikrosoziologische Studien zur sozialen Konstitution schulischen Lernens*. Weinheim: Deutscher Studien Verlag

Krummheuer, G. (1999): Die Analyse von Unterichtsepisoden im Rahmen von Grundschullehrerausbildung. In: Ohlhaver, F. & Wernet, A. (Hrsg.): *Schulforschung – Fallanalyse – Lehrerbildung*

Krummheuer, G. (2003): Wie wird Mathematiklernen im Unterricht der Grundschule zu ermöglichen versucht? – Strukturen des Argumentierens in alltäglichen Situationen des Mathematikunterrichts der Schule. In: *Journal für Mathematikdidaktik* 24(2), 122–138

Krummheuer, G. (2004): Wie kann man Mathematikunterricht verändern? – Innovation von Unterricht aus Sicht eines Ansatzes der Intepretativen Unterrichtsforschung. In: *Journal für Mathematikdidaktik* 25(2), 112–130

Krummheuer, G. und Brandt, B. (2001): *Paraphrase und Traduktion. Partizipationstheoretische Elemente einer Interaktionstheorie des Mathematiklernens in der Grundschule*. Weinheim: Beltz – Deutscher Studien Verlag

Krummheuer, G. und Fetzer, M. (2005): Der Alltag im Mathematikunterricht – Beobachten, Verstehen, Gestalten. Heidelberg: Elsevier Spektrum Akademischer Verlag

Langefeldt, H.-P. (2003): *Berichte und Materialien zur Frankfurter Evaluation der Lehramtsstudiengänge*; Teil I, Frankfurt am Main: Institut für Pädagogische Psychologie

Merton, R. K. (1968): *Social theory and social structure*. New York: The Free Press

Miller, M. (1986): *Kollektive Lernprozesse*. Frankfurt a. M.: Suhrkamp

Naujok, N. (2000): *Schülerkooperation im Rahmen von Wochenplanunterricht – Analyse von Unterrichtsausschnitten aus der Grundschule*. Weinheim: Beltz – Deutscher Studienverlag

Soeffner, H.-G. (1989): *Auslegung des Alltags – Der Alltag der Auslegung*. Frankfurt a. M.: Suhrkamp

Toulmin, S. E. (1969): *The uses of argument*. Cambridge: Cambridge University Press; dtsch. (1975): *Der Gebrauch von Argumenten*. Kronberg/Ts.: Scriptor

Toulmin, S. E. (1994): Kosmopolis. Die unerkannten Aufgaben der Moderne. Frankfurt a. M.: Suhrkamp

Anhang: Tranksriptionsregeln

1. Spalte

Hier ist die (fortlaufende) Zeilennummerierung vermerkt. Die Nummerierung verweist auf die Zeilen im Original-Transkript. Während des Arbeitsprozesses hat sich mitunter eine Erweiterung der Nummerierung ergeben, z. B. ist 29.1 eine Ergänzung, die auf die neunundzwanzigste Zeile der Erstfassung folgt. Teilweise wurden auch Zeilen gestrichen, z. B. wenn der Kommentar bzw. die Beschreibung der nonverbalen Aktivitäten Interpretationen enthielten. Dadurch ergeben sich Sprünge in der Zeilennummerierung.

2. Spalte

Hier sind die (geänderten) Namen der aktiv an der Interaktion Beteiligten verzeichnet, soweit diese den Videoaufzeichnungen zu entnehmen sind.

3. Spalte

Sie enthält

- die verbalen Äußerungen (Times normal) ohne Beachtung der Zeichensetzung; diese Äußerungen werden durch paraverbale Informationen, z. B. Betonung und Prosodie, ergänzt (s. u.). Nicht zweifelsfrei verständliche Äußerungen sind in Klammern gesetzt; gänzlich unverständliche Äußerungen sind durch *(unverständlich)* angegeben und
- die nonverbalen Aktivitäten der Beteiligten (*Times kursiv*). Das Ende einer derartigen Aktivität wird ggf. mit + angezeigt, z. B. zeigt Wayne während der fogenden Äußerung bis einschließlich siebzehn wiederholt auf die Kästchen des Arbeitsblattes:

452	Wayne	guck mal \ hier ist doch *auf die Kästchen zeigend* zwölf dreizehn vierzehn
453		fünfzehn sechzehn siebzehn + und hier / in diese Kästchen immer zehnsf

Paralinguistische Sonderzeichen

Durch die folgenden Sonderzeichen werden die paraverbale Informationen gekennzeichnet:

.	Pause (max. 1 sec.)
..	Pause (max. 2 sec.)
...	Pause (max. 3 sec.)
\	Senken der Stimme
-	Stimme bleibt in der Schwebe
/	Heben der Stimme

denn	fett für starke Betonung
j a a	gesperrt für gedehnte Aussprache

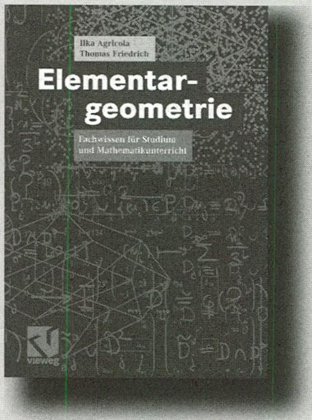
Schließt eine Äußerung unmittelbar an die vorhergehende an, so wird dies mit # markiert, z. B.:

40	Sabrina	Aja \ Aja \ #
42	*Aja steht noch hinter der Lehrerin, die mit einem anderem Kind beschäftigt*	
43	*ist. Auf Sabrinas Rufen dreht sie sich um und kommt zum Tisch zurück.*	
44	Patrick	# (Sabrina) hier kommt nicht **siebzehn** raus \ *radiert*

Bei einer Redeüberschneidung der Äußerungen ähnelt die Schreibweise der von Partituren in der Musik; die parallel zu lesenden Zeilen sind vor den Namen durch spitze Klammern („< “) gekennzeichnet, z. B.:

454	< Efrem	und diese Kästchen immer auch drei vier fünf sechs
455	< Wayne	ja \ ja \ *klopft mit seinem Stift auf den*

Klassische Geometrie in moderner Darstellung



Ilka Agricola, Thomas Friedrich

Elementargeometrie

Fachwissen für Studium und Mathematikunterricht

2005. X, 191 S. Br. EUR 24,90

ISBN 3-528-03221-9

INHALT

Elementargeometrische Figuren und ihre Eigenschaften (Gerade, Kreis, Dreieck, Kegelschnitte, Polyeder) - Symmetrien der Ebene und des Raumes (Abbildungsgeometrie, Symmetrien von Bordüren und Ornamenten) - Hyperbolische Geometrie - Sphärische Geometrie

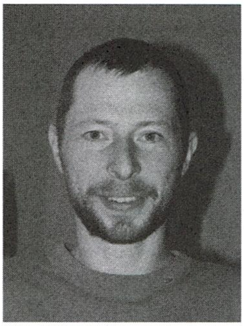
DAS BUCH

In diesem neuen Geometrie-Buch für das Lehramt Mathematik werden zunächst die elementargeometrischen Figuren der Ebene (Dreieck, Kreis, Kegelschnitte) samt ihrer markanten Eigenschaften behandelt. Die Beweise sind vollständig ausgeführt und wenden sich an Studierende mit Grundkenntnissen in Analysis und linearer Algebra. Dieses Buch eignet sich ideal zur Vorlesungsbegleitung und Prüfungsvorbereitung für Lehramtsstudenten (S II) und als kompaktes Nachschlagewerk für Lehrer im Beruf.

vieweg

Abraham-Lincoln-Straße 46
D-65189 Wiesbaden
Fax 0611.78 78-420

Änderungen vorbehalten.
Erhältlich beim Buchhandel oder beim Verlag.



Ratner's Theorem on SL(2, ℝ)-Invariant Measures

Manfred Einsiedler

Abstract

- Mathematics Subject Classification: 37 D 40, 37 A 17, 22 E 40
- Keywords and Phrases: Ratner's theorem, invariant measures, measure rigidity.
  The author acknowledges support of NSF Grant 0509350. This research was partially conducted while the author was employed by the Clay Mathematics Institute as a Research Scholar.

We give a relatively short and self contained proof of Ratner's theorem in the special case of $\mathrm{SL}(2, \mathbb{R})$-invariant measures on $\Gamma \backslash G$.

Eingegangen: 23. 03. 2006

Mathematics Department, The Ohio State University,
231 W. 18th Avenue, Columbus, Ohio 43210

DMV
JAHRESBERICHT
DER DMV

1 Introduction

M. Ratner proved in a series of papers [34, 33, 28, 29, 35] very strong results on invariant measures and orbit closures for certain subgroups H of a Lie group G – where H acts on the right of $X = \Gamma\backslash G$ and $\Gamma < G$ is a lattice. More concretely, H needs to be generated by one parameter unipotent subgroups, and the statements all are of the form that invariant measures and orbit closures are always algebraic as conjectured earlier by Raghunathan. Today these theorems are applied in many different areas of mathematics. We will motivate these questions and study some more concrete cases in Section 2.

While there are some very special cases for which the proof simplifies [36, 26], the general proof requires a deep understanding of the structure of Lie groups and ergodic theory. The aim of this paper is to give a self-contained more accessible proof of the classification of invariant and ergodic measures for subgroups H isomorphic to $\mathrm{SL}(2, \mathbb{R})$. While this is as well a special case of Ratner's theorem, it is a rich class since G can be much larger than H. Moreover, the proof for this class is more accessible in terms of its requirements. The methods used are not new, in particular most appear also in earlier work [32, 33] of Ratner, but it does not seem to be known that the following theorem allows also a relatively simple and short proof.

Theorem 1.1. *Let G be a Lie group, $\Gamma < G$ a discrete subgroup, and $H < G$ a subgroup isomorphic to* $\mathrm{SL}(2, \mathbb{R})$. *Then any H-invariant and ergodic probability measure μ on $X = \Gamma\backslash G$ is homogeneous, i.e. there exists a closed connected subgroup $L < G$ containing H such that μ is L-invariant and some $x_0 \in X$ such that the L-orbit x_0L is closed and supports μ. In other words μ is an L-invariant volume measure on x_0L.*

As we will see a graduate student, who started to learn or is willing to learn the very basics of Lie groups and ergodic theory, should be able to follow the argument (no knowledge of radicals or structure theory of Lie groups and no knowledge of entropy is necessary). We will discuss the requirements in Section 3. The initiated reader will notice that this approach generalizes without too much work to other semisimple groups $H < G$ without compact factors. However, to keep the idea simple and to avoid unnecessary technicalities we only treat the above case.

In the next section we give some motivation for the above and related questions. In particular, we will discuss an application of Ratner's theorems where the above special case is sufficient. This paper is best described as an introduction to Ratner's theorem on invariant measures, and is not a comprehensive survey of this area of research. The reader seeking such a survey is referred to [17] and for some more recent developments to [8].

The author would like to thank M. Ratner for comments on an earlier draft of this paper.

2 Motivation[1]

2.1 The geodesic flow and the horocycle flow on hyperbolic surfaces

The hyperbolic plane $\mathbb{H}$ is defined by the upper half plane $\{z = x + iy \in \mathbb{C} : \mathrm{Im}(z) = y > 0\}$ together with the hyperbolic metric. The latter is easiest described locally: An element $v \in T_z\mathbb{H}$ of the tangent plane of the hyperbolic plane at z is simply an element of $\mathbb{R}^2$. Two elements $v, w \in T_z\mathbb{H}$ with the same base point $z = x + iy$ are given an inner product $(v, w)_z = \frac{1}{y^2}(v \cdot w)$ that depends on the base point z (actually just on the imaginary part y of z). Using this inner product we can define the length of a tangent vector $\|v\|_z = \sqrt{(v, v)_z}$ as usual, and define the length of a (differentiably parameterized) curve by integration (of the length of the derivative over the parameter). Finally the hyperbolic distance between two points in the hyperbolic plane is then the infimum of the lengths of paths linking the two points.

To see the connection to Lie groups, we introduce an action of SL(2, $\mathbb{R}$) on $\mathbb{H}$. An element $g = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ acts on z by a linear fractional transformation $g.z = \frac{az+b}{cz+d}$, also called a Möbius transformation. Note that this expression is always defined since $cz + d \neq 0$ for $\mathrm{Im}(z) > 0$. Moreover, an easy calculation shows that g maps $\mathbb{H}$ to itself and that it really gives an action of SL(2, $\mathbb{R}$), i.e. that when we compose two such Möbius transformations we get the Möbius transformation for the product of the matrices. To understand the action better we ask what happens to the distance of two points in $\mathbb{H}$ when we apply g to both of them. However, distances of points we defined using the inner product on the tangent plane, so we should ask instead what happens to the inner product $(v, w)_z$ when we apply g. More precisely, we apply the derivative Dg to the tangent vectors v, w to get tangent vectors $Dg(v), Dg(w)$ that are based at the new point $g.z$. We claim that we actually have $(Dg(v), Dg(w))_{g.z} = (v, w)_z$, i.e. the inner product does not change (when we use the correct inner product at the points z and $g.z$) and g acts as an isometry on $\mathbb{H}$. This can be shown by a direct computation which can be simplified by studying only $\begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ and $\begin{pmatrix} 1 & b \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ for all $b \in \mathbb{R}$, that together generate SL(2, $\mathbb{R}$). (For the second type this is quite easy since the inner product only depends on y which is not changed by the corresponding transformation.)

The unit tangent bundle $T^1\mathbb{H}$ of the hyperbolic plane is defined as the collection of all vectors $v \in T_z\mathbb{H}$ of length one $\|v\|_z = 1$ for all possible base points $z \in \mathbb{H}$. By the above the derivative of the action of $g \in$ SL(2, $\mathbb{R}$) maps $T^1\mathbb{H}$ to itself, i.e. we have a new action of SL(2, $\mathbb{R}$) which extends the previous one. Even more is true, the action is transitive: This means that for any two vectors $v, v' \in T^1\mathbb{H}$ there exists a $g \in$ SL(2, $\mathbb{R}$) for which Dg maps v to v'. Note that v and v' might have different base points z and z' and the above g has to map z to $g.z = z'$. To see transitivity, one should first find for any z an element g with $g.i = z$ – where we have started to use somewhat arbitrary the point i as a reference point. (Let us note that it suffices to consider one fixed reference

[1] The motivated reader who is also familiar with the setup is welcome to skip this section.

point and one arbitrary point instead of two arbitrary points: If similarly $z' = g'.i$ then $z' = g'g^{-1}.z$.) We already saw above a one parameter family of matrices that just translate points to the left or right, and similarly one sees that diagonal matrices act by multiplication with a real number on $\mathbb{H}$. Together one can in fact reach any $z = g.i$ starting from i by using some $g \in \mathrm{SL}(2, \mathbb{R})$. To prove the original claim one has to be able to rotate a given vector based at i without moving the base point. And in fact one can verify that $\mathrm{SO}(2)$ maps i to i but rotates tangent vectors. To summarize, one can almost identify $T^1\mathbb{H}$ with $\mathrm{SL}(2, \mathbb{R})$ – only "almost" for two reasons: First one needs to pick somewhat arbitrary a reference vector in $T^1\mathbb{H}$ that will correspond to the identity in $\mathrm{SL}(2, \mathbb{R})$, we chose the unit vector pointing up at the base point i. Second the action of $\mathrm{SL}(2, \mathbb{R})$ has a kernel, the matrix $-\mathrm{I} = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$ acts as the identity on $T^1\mathbb{H}$ but this is the only such nontrivial element and we get an identification of $\mathrm{SL}(2, \mathbb{R})/\{\pm \mathrm{I}\}$ and $T^1\mathbb{H}$.

We can start to discuss the geodesic flow on $\mathbb{H}$. Let v be a unit vector based at a point z. Then the geodesic flow is defined by following the hyperbolic line – the geodesic – going through z in the direction of v for the given time t. Let us first consider our reference vector: the unit vector pointing upwards at i. For this vector the hyperbolic line is just the y-axis and applying the matrix $g_t = \begin{pmatrix} e^{t/2} & 0 \\ 0 & e^{-t/2} \end{pmatrix}$ moves the vector along the line at unit speed (again using the hyperbolic metric) – in other words we have the canonical parametrization of the geodesic line through our reference point, see Figure 1.

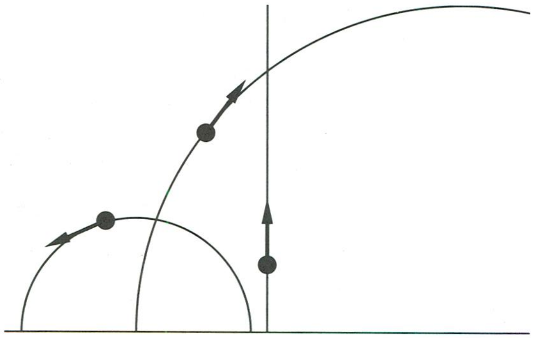


Figure 1: The geodesic lines determined by various vectors including the reference vector at i.

When we apply now elements $g \in \mathrm{SL}(2, \mathbb{R})$ to this curve we will get the parametrization of any other geodesic line, most of these look like half circles that hit the real line in a normal angle, see Figure 1. Since we apply the isometry corresponding to g after applying the parameterization g_t, the geodesic flow corresponds to right multiplication by g_t on $\mathrm{SL}(2, \mathbb{R})/\{\pm \mathrm{I}\}$.

The horocycle flow h_t, vaguely speaking, is defined by the property that applied to any given vector it gives new vectors that have almost the same future for the geodesic flow as the original point – in other words the horocycle flow describes the stable manifold for the geodesic flow. More concretely, let us consider our reference vector at i and another vector pointing upwards at $x+i$. Both of the geodesics going through these vectors are straight parallel lines. From the Euclidean perspective the base points seem to stay away from each other as we move along the geodesic – after all the lines are parallel, see Figure 2. However, in the hyperbolic metric the two base points approach each other since we divide the Euclidean inner product by the square of the y-coordinate of

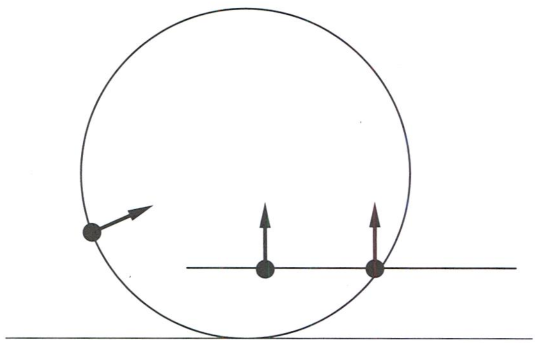


Figure 2: The two geodesics for two vectors pointing straight up approach each other in the hyperbolic metric. The horocycles are either lines parallel to the real axis or circles tangent to it.

the base points to get the hyperbolic inner product. In other words, the one-parameter subgroup consisting of the elements $h_s = \begin{pmatrix} 1 & s \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ produces the points of the stable manifold through the reference vector. By the same reasoning as above, right multiplication by h_s on $\mathrm{SL}(2,\mathbb{R})/\{\pm \mathrm{I}\}$ defines the horocycle flow.

Dynamically the two flows defined above on $T^1\mathbb{H}$ are rather dull: Every orbit is a closed manifold escaping to infinity. To get a more interesting picture we need to take quotients by a discrete group of isometries. This should be thought of as an analogue to how one gets the circle $\mathbb{R}/\mathbb{Z}$ from $\mathbb{R}$, or the two-dimensional torus $\mathbb{R}^2/\mathbb{Z}^2$ from $\mathbb{R}^2$ using the discrete group of integer translations. The most natural discrete subgroup of $\mathrm{SL}(2,\mathbb{R})$ is $\mathrm{SL}(2,\mathbb{Z})$ which gives us the quotient $\mathrm{SL}(2,\mathbb{Z})\backslash\mathbb{H}$ of the hyperbolic plane and as well the quotient $\mathrm{SL}(2,\mathbb{Z})\backslash\mathrm{SL}(2,\mathbb{R})$. The former is a hyperbolic surface called the modular surface, and the latter we can (almost correctly) think of as the unit tangent bundle of the modular surface. In Figure 3 we see the fundamental domain for this discrete subgroup acting on $\mathbb{H}$ – the two left sides are being identified by the isometry defined by $\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ and the bottom part is being folded up to itself by the isometry defined by $\begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$. The two flows we discussed before are still defined on the quotient $\mathrm{SL}(2,\mathbb{Z})\backslash\mathrm{SL}(2,\mathbb{R})$, in fact right multiplication by elements of $\mathrm{SL}(2,\mathbb{R})$ still makes sense on $\mathrm{SL}(2,\mathbb{Z})\backslash\mathrm{SL}(2,\mathbb{R})$. What we gained from this changed setup is that now we have interesting dynamics: The geodesics and horocycles of a given unit vector based at a point in the fundamental domain leave the fundamental domain. When this happens

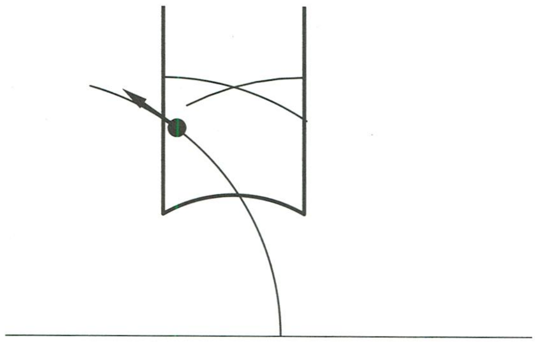


Figure 3: The fundamental domain of $\mathrm{SL}(2,\mathbb{R})$ acting on $\mathbb{H}$ (thick) is obtained from three bounding geodesics: two vertical lines at real part equal to $\pm 1/2$ and the unit circle. A typical geodesic produces a complicated picture if whenever it moves out of the fundamental domain we bring it back by one of the isometries from $\mathrm{SL}(2,\mathbb{Z})$.

we need to apply the corresponding isometry to get back to the fundamental domain – doing this over and over produces the geodesics and horocycles inside the surface. This time the dynamics is interesting: There are dense geodesics and non-dense ones, there are dense horocycles and non-dense ones. We will be discussing the possibilities of such orbits and related question below after introducing a more general framework.

2.2 A more general setup

Let G be a closed linear group, i.e. a closed subgroup of $\mathrm{GL}(\mathrm{n},\mathbb{R})$, e.g. $G = \mathrm{SL}(n,\mathbb{R})$. Let $\Gamma < G$ be a discrete subgroup, e.g. $\Gamma = \mathrm{SL}(n,\mathbb{Z})$, so that $X = \Gamma\backslash G$ is a locally compact space with a natural G-action:

for $g \in G, x \in X$ let $g.x = xg^{-1}$.

Now let $H < G$ be a closed subgroup and restrict the above action to the subgroup H. The question about the properties of the resulting H-action has many connections to various a priori non-dynamical mathematical problems, and is from that point of view but also in its own light highly interesting. As we have discussed above in the case of $G = \mathrm{SL}(2,\mathbb{R})$ two different subgroups H give rise to the geodesic flow and the horocycle flow.

The most basic question, vaguely formulated, is how H-orbits $H.x_0$ for various points $x_0 \in X$ look like. Here one can make restrictions on x_0 or not, and ask, more precisely, either about the distribution properties of the orbit or about the nature of the closure of the orbit.

If X carries a G-invariant probability measure m_X, which in many situations is the case, then m_X is called the *Haar measure* of X and Γ is by definition a *lattice*. The best example for such a lattice is $\mathrm{SL}(n,\mathbb{Z}) < \mathrm{SL}(n,\mathbb{R})$. For $n = 2$ one can verify that the fundamental domain of Figure 3 has finite hyperbolic volume which is the reason for $\mathrm{SL}(2,\mathbb{Z}) < \mathrm{SL}(2,\mathbb{R})$ being a lattice.

If Γ is a lattice one can restrict our questions on the H-orbits to m_X-typical points and by doing so one has entered the realm of ergodic theory. Rephrased the basic question is now whether m_X is H-ergodic. Recall that by definition m_X is H-ergodic if every measurable f that is H-invariant is constant a.e. with respect to m_X, or equivalently that every measurable H-invariant set must be trivial in the sense that the set has either measure zero or measure one. Note that while H-invariance of m_X is inherited from G-invariance, the same is not true for H-ergodicity. The characterization of H-ergodicity in this context has been given in varying degrees of generality by many authors mostly before 1980, see [17, Chpt. 2] for a detailed account. The power of this characterization is that often – unless there are obvious reasons for failure of ergodicity – the Haar measure turns out to be H-ergodic. For example any non-compact closed subgroup $H < \mathrm{SL}(n, \mathbb{R})$ acts ergodically on $\mathrm{SL}(n, \mathbb{Z})\backslash\mathrm{SL}(n, \mathbb{R})$, and in particular the geodesic flow and the horocycle flow on $\mathrm{SL}(2, \mathbb{Z})\backslash\mathrm{SL}(2, \mathbb{R})$ are ergodic. Moreover, assuming ergodicity one of the most basic theorems in abstract ergodic theory, the ergodic theorem, states that a.e. point equidistributes in X. (For the notion of equidistribution we need that H is an amenable subgroup. The fact that $\mathrm{SL}(2, \mathbb{R})$ is not amenable actually makes it harder to apply Theorem 1.1 – and is the reason why the proof simplifies.) In particular, a.e. H-orbit is dense. This can be seen as the first answer to our original question.

Let us assume from now on that Γ is a lattice (some of what follows holds more generally for any discrete Γ but not all). The above discussion around H-ergodicity is only the first step in understanding the structure of H-orbits. In general, there is no reason to believe that a similarly simple answer is possible for all points of X. This is especially true for general dynamical systems but as we will discuss also in the algebraic setting we consider here. More surprisingly, there are cases where we can understand **all** H-orbits respectively believe that it is possible to understand **all** H-orbits. To be able to describe this we need to recall a few notions: $u \in G$ is *unipotent* if 1 is the only eigenvalue of the matrix u, $a \in G$ is $\mathbb{R}$-*diagonalizable* if it is diagonalizable as a matrix over $\mathbb{R}$. A subgroup $U < G$ is a *one-parameter unipotent subgroup* if U is the image of a homomorphism $t \in \mathbb{R} \mapsto u_t \in U$ with u_t unipotent for all $t \in \mathbb{R}$ – the prime example for such a group is the subgroup we encountered in the discussion of the horocycle flow. Another example in $G = \mathrm{SL}(\mathrm{n}, \mathbb{R})$ is the subgroup

$$U = \begin{pmatrix} 1 & * & \cdots & * \\ 0 & 1 & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & * \\ 0 & \cdots & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

which contains only unipotent elements and is generated by one-parameter unipotent subgroups. A subgroup $A < G$ is $\mathbb{R}$- *diagonalizable* if for some $g \in \mathrm{GL}(\mathrm{n}, \mathbb{R})$ the conjugate gAg^{-1} is a subgroup of the diagonal subgroup. The prime example is the subgroup corresponding to the geodesic flow.

2.3 Unipotently generated subgroups and Oppenheim's conjecture

One case of subgroups we today understand quite well is when H is generated by one-parameter unipotent subgroups (as it is the case for $H = \mathrm{SL}(2,\mathbb{R})$). In the case of $G = \mathrm{SL}(2,\mathbb{R})$ we can think of the subgroup corresponding to the horocycle flow. As mentioned before we understand this case well thanks to the theorem of M. Ratner [29] which says that all H-orbits are well-behaved as conjectured by Raghunathan earlier. She proved that every H-orbit $H.x_0$ is dense in the closed orbit $L.x_0$ of a closed connected group $L > H$, and the latter orbit $L.x_0$ supports a finite L-invariant volume measure $m_{L.x_0}$. If H is itself a unipotent one-parameter subgroup the orbit $H.x_0$ is equidistributed with respect to this measure $m_{L.x_0}$. In the case of the horocycle flow on a compact quotient this result is due to Furstenberg [12] and says that all orbits are equidistributed with respect to the Haar measure of $\mathrm{SL}(2,\mathbb{R})$ and in particular that all horocycles are dense. More generally these theorems were later extended by Ratner [30] herself, as well as by Margulis and Tomanov [22] to the setting of products of linear algebraic groups over various local fields (S-algebraic groups).

A bit more technical is the following question: What are the H-invariant probability measures? Here it suffices to restrict to H-invariant and ergodic measures – the general theorem of the ergodic decomposition states that any H-invariant probability measure can be obtained by averaging H-invariant and ergodic measures. Therefore, if we understand the latter measures we understand all of them. Ratner showed that all H-invariant and ergodic probability measures are of the form $m_{L.x_0}$ as discussed above – Theorem 1.1 is a special case of this. The special case of the horocycle flow on e.g. $\mathrm{SL}(2,\mathbb{Z})\backslash \mathrm{SL}(2,\mathbb{R})$ is due to Dani [2]. As it turns out this question is crucial for the proof of the topological theorem regarding orbit closures mentioned above. Namely using her theorem on measure classification Ratner then proves first that the orbit of a unipotent group always equidistributes with respect to an ergodic measure, and finally uses this to prove her topological theorem – this is similar to the earlier discussion of m_X-typical points. However, these steps are quite involved: First of all it is not clear that a limit coming distribution from the orbit of a one-parameter unipotent subgroup is a probability measure since the space might not be compact. However, earlier work of Dani [1, 3, 4] (which extend work by Margulis [23]) shows precisely this. Then it is not clear why such a limit is ergodic and why it is independent of the times used in the converging subsequence – without going into details let us just say that the proof relies heavily on the structure of the ergodic measures and the properties of unipotent subgroup.

Before Ratner classified in her work all orbit closures Margulis used a special case of this to prove Oppenheim's conjecture, which by that time was a long standing open conjecture. This conjecture concerns the values of an indeterminate irrational quadratic form Q in n variables at the integer lattice $\mathbb{Z}^n$, and Margulis theorem [20] states that under these assumptions $Q(\mathbb{Z}^n)$ is dense in $\mathbb{R}$ if $n \geq 3$. (It is not hard to see that all of these assumptions including $n \geq 3$ are necessary for the density conclusion.) The proof consists of analyzing all possible orbits of $\mathrm{SO}(2,1)$ on $X_3 = \mathrm{SL}(3,\mathbb{Z})\backslash \mathrm{SL}(3,\mathbb{R})$. Even though $\mathrm{SO}(2,1)$ is essentially a quotient of $\mathrm{SL}(2,\mathbb{R})$ Theorem 1.1 does not imply immediately Oppenheim's conjecture since for the non-amenable group $\mathrm{SL}(2,\mathbb{R})$ it is not obvious how to find an invariant measure on the closure of an orbit.

2.4 Diagonalizable subgroups

The opposite extreme to unipotent elements are $\mathbb{R}$-diagonalizable elements, so it is natural to ask next about the case of a $\mathbb{R}$-diagonalizable subgroups $A < G$: What do the closures of A-orbits look like? What are the A-invariant and ergodic probability measures? As we will see this case is more difficult in various ways, in particular we do not have complete answers to these questions.

Rank one: Let $G = \mathrm{SL}(2,\mathbb{R})$, $\Gamma = \mathrm{SL}(2,\mathbb{Z})$, and set $X_2 = \Gamma\backslash G$. Let $A < \mathrm{SL}(2,\mathbb{R})$ be the diagonal subgroup. As discussed above the action of A on X_2 can also be described as the geodesic flow on the unit tangent bundle of the modular surface. Up to the fact that the underlying space X_2 is not compact this is a very good example of an Anosov flow. The corresponding theory can be used to show that there is a huge variety of orbit closures and A-invariant ergodic probability measures. So the answer is in that case that there is no simple answer to our questions – but at least we know that.

Higher rank: We replace '2' by '3' and encounter very different behaviour. Let $G = \mathrm{SL}(3,\mathbb{R})$, $\Gamma = \mathrm{SL}(3,\mathbb{Z})$, and set $X_3 = \Gamma\backslash G$. Let $A < \mathrm{SL}(3,\mathbb{R})$ be the diagonal subgroup, which this time up to finite index is isomorphic to $\mathbb{R}^2$. Margulis, Furstenberg, Katok, and Spatzier conjectured that for the action of A on X_3 there are very few A-invariant and ergodic probability measures, in particular that they again are all of the type $m_{L.x_0}$ for some $L > A$ and $x_0 \in X_3$ with closed orbit $L.x_0$. One motivation for that conjecture is Furstenberg's theorem [11] on $\times 2$, $\times 3$-invariant closed subsets of $\mathbb{R}/\mathbb{Z}$ which states that all such sets are either finite unions of rational points or the whole space. This can be seen as an abelian and topological analogue to the above problem.

For orbit closures the situation is a bit more complicated: G contains an isomorphic copy L of the subgroup $\mathrm{GL}(2,\mathbb{R})$ embedded into the upper left 2-by-2 block (where the lower right entry is used to fix the determinant). Now ΓL is a closed orbit of L and the A-action inside this orbit consists of the rank one action discussed above and one extra direction which moves everything towards infinity. (This behaviour of the L-orbit and the A-orbits needs of course justification, which in this case can be done algebraically.) Therefore, in terms of orbit closures the situation for A-orbits inside this L-orbit is as bad as for the corresponding action on X_2. However, it is possible to avoid this issue and to formulate a meaningful topological conjecture: Margulis conjectured that all bounded A-orbits on X_3 are compact, i.e. the only bounded orbits are periodic orbits for the A-action (which in fact all arise from a number theoretic construction).

Margulis [21] also noted that the question regarding orbits in this setting is related to a long standing conjecture by Littlewood. Littlewood conjectured around 1930 that for any two real numbers $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ the vector (α, β) is well approximable by rational vectors in the following multiplicative manner:

$$\varliminf_{n\to\infty} n\|n\alpha\|\|n\beta\| = 0,$$

where $\|u\|$ denotes the distance of a real number $u \in \mathbb{R}$ to $\mathbb{Z}$. Here n is the common denominator of the components of the rational vector that approximates (α, β), and instead of taking the maximum of the differences along the x-axis and the y-axis we instead measure the quality of approximation by taking the product of the differences.

The corresponding dynamical conjecture states that certain points (defined in terms of the vectors (α, β)) all have unbounded orbit (where actually only a quarter of the acting group A is used).

Building on earlier work of E. Lindenstrauss [18] and a joint work of the author with A. Katok [5] we have obtained together [7] a partial answer to the conjecture on A-invariant and ergodic probability measures: If the measure has in addition positive entropy for some element of the action, then it must be the Haar measure m_{X_3} – this generalizes earlier work of Katok, Spatzier, and Kalinin [15, 16, 14], and related work by Lyons [19], Rudolph [37], and Johnson [13] in the abelian setting of $\times 2, \times 3$. For Littlewood's conjecture we show also in [7] that the exceptions form at most a set of Hausdorff dimension zero. Roughly speaking the classification of all A-invariant probability measures with positive entropy can be used to show that very few A-orbits can stay within a compact subset of X_3, which by the mentioned dynamical formulation of Littlewood's conjecture is what is needed.

Most of the proof of this theorem consists in showing that positive entropy implies invariance of the measure μ under some subgroup $H < \mathrm{SL}(3, \mathbb{R})$ that is generated by one-parameter unipotent subgroups. Then one can apply Ratner's classification of invariant measures to the H-ergodic components of μ. However, in this case (unless we are in the easy case of $H = \mathrm{SL}(3, \mathbb{R})$) the subgroup H is actually isomorphic to $\mathrm{SL}(2, \mathbb{R})$. Therefore, Theorem 1.1 is sufficient to analyze the H-ergodic components.

The more general case of the maximal diagonal subgroup A acting on X_n for $n \geq 3$ is also treated in [7] (always assuming positive entropy). Even more generally one can ask about any $\mathbb{R}$-diagonalizable subgroup of an (algebraic) linear group. However, here there are unsolved technical difficulties that prevent so far a complete generalization. Joint ongoing work [9] of the author with E. Lindenstrauss solves these problems for maximally $\mathbb{R}$-diagonalizable subgroups (more technically speaking, for maximal $\mathbb{R}$-split tori A in algebraic groups G over $\mathbb{R}$ and similarly also for S-algebraic groups). This approach uses results from [6] and [10]. For a more complete overview of these results and related applications see the survey [8].

3 Ingredients of the proof

We list the facts and notions needed for the proof of Theorem 1.1, all of which, except for the last one, can be found in any introduction to Lie groups resp. ergodic theory.

3.1 The Lie group and its Lie algebra

The Lie algebra $\mathfrak{g}$ of G is the tangent space to G at the identity element $e \in G$. The exponential map $\exp : \mathfrak{g} \to G$ and the locally defined inverse, the logarithm map, give local isomorphisms between $\mathfrak{g}$ and G. For any $g \in G$ the derivative of the conjugation map is the adjoint transformation $\mathrm{Ad}_g : \mathfrak{g} \to \mathfrak{g}$ and satisfies $\exp \mathrm{Ad}_g(v) = g \exp(v) g^{-1}$ for $g \in G$ and $v \in \mathfrak{g}$. For linear groups this could not be easier, the Lie algebra is a linear subspace of the space of matrices, $\exp(\cdot)$ and $\log(\cdot)$ are defined as usual by power series, and the adjoint transformation Ad_g is still conjugation by g.

Closed subgroups $L < G$ are almost completely described by their respective Lie algebras $\mathfrak{l}$ inside $\mathfrak{g}$ as follows. Let L° be the connected component of L (that contains the identity e). Then the Lie algebra $\mathfrak{l}$ of L (and L°) uniquely determines L° – L° is the subgroup generated by $\exp(\mathfrak{l})$. (Moreover, any element $\ell \in L$ sufficiently close to e is actually in L° and equals $\ell = \exp(v)$ for some small $v \in \mathfrak{l}$.)

Using an inner product on $\mathfrak{g}$ we can define a left invariant Riemannian metric $d(\cdot,\cdot)$ on G. We will be using the restriction of $d(\cdot,\cdot)$ to subgroups $L < G$ and denote by B_r^L the r-ball in L around $e \in L$.

If $\Gamma < G$ is a discrete subgroup, then $X = \Gamma\backslash G$ has a natural topology and in fact a metric defined by $d(\Gamma g, \Gamma h) = \min_{\gamma\in\Gamma} d(g, \gamma h)$ for any $g, h \in G$ (which uses left invariance of $d(\cdot,\cdot)$). With this metric and topology X can locally be described by G as follows. For any $x \in X$ there is an $r > 0$ such that the map $\imath : g \mapsto xg$ is an homeomorphism between B_r^G and a neighborhood of y. Moreover, if r is small enough $\imath : B_r^G \to X$ is in fact an isometric embedding. For a given x a number $r > 0$ with these properties we call an *injectivity radius at x*.

3.2 Complete reducibility and the irreducible representations of SL(2, IR)

The first property of $\mathrm{SL}(2,\mathbb{R})$ we will need is the following standard fact. Let V be a finite dimensional real vector space and suppose $\mathrm{SL}(2,\mathbb{R})$ acts on V. Then any $\mathrm{SL}(2,\mathbb{R})$-invariant subspace $W < V$ has an $\mathrm{SL}(2,\mathbb{R})$-invariant complement $W' < V$ with $V = W \oplus W'$.

The above implies that all finite dimensional representations of $\mathrm{SL}(2,\mathbb{R})$ can be written as a direct sum of irreducible representations. The second fact we need is the description of these irreducible representations. Let $A = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ and $B = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ denotes the standard basis of $\mathbb{R}^2$ so that $\begin{pmatrix} 1 & t \\ 0 & 1 \end{pmatrix} A = A$ and $\begin{pmatrix} 1 & t \\ 0 & 1 \end{pmatrix} B = B + tA$. Any irreducible representation is obtained as a symmetric tensor product $\mathrm{Sym}^n(\mathbb{R}^2)$ of the standard representation on $\mathbb{R}^2$ for some n. $\mathrm{Sym}^n(\mathbb{R}^2)$ has $A^n, A^{n-1}B, \ldots, B^n$ as a basis, and every element we can view as a homogeneous polynomial $p(A, B)$ of degree n. The action of $\begin{pmatrix} 1 & t \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ can now be described by substitution, $p(A, B)$ is mapped to $p(A, B + tA)$. More concretely, $p(A, B) = c_0 A^n + c_1 A^{n-1} B + \cdots + c_n B^n$ is mapped to

$$\begin{aligned} p(A, B + tA) = &(c_0 + c_1 t + \cdots + c_n t^n) A^n + \\ &(c_1 + \cdots + c_n n t^{n-1}) A^{n-1} B + \\ &\cdots + c_n B^n, \end{aligned}$$

where the coefficients in front of the various powers of t are the original components of the vector $p(A, B)$ multiplied by binomial coefficients. Notice that all components of $p(A, B)$ appear in the image vector in the component corresponding to A^n. Moreover, for any component of $p(A, B)$ the highest power of t it gets multiplied by appears in the resulting component corresponding to A^n. For that reason, when t grows (and say

$p(A, B)$ is not just a multiple of A^n) the image of $p(A, B)$ under $\begin{pmatrix} 1 & t \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ will always grow fastest in the direction of A^n when $t \to \infty$.

3.3 Recurrence and the ergodic theorem

Let (X, μ) be a probability space, and let $T : X \to X$ be measure preserving. Then for any set $B \subset X$ of positive measure and a.e. $x \in B$ there are infinitely many n with $T^n x \in B$ by Poincaré recurrence.

Now suppose $u_t : X \to X$ for $t \in \mathbb{R}$ is a one parameter flow acting on X such that μ is $u_{\mathbb{R}}$-invariant and ergodic. Then for any $f \in L^1(X, \mu)$ and μ-a.e. $x \in X$ we have

$$\frac{1}{T}\int_0^T f(u_t(x))\mathrm{d}t \to \int_X f\,\mathrm{d}\mu \text{ for } T \to \infty$$

This is Birkhoff's pointwise ergodic theorem for flows.

3.4 Mautner's phenomenon for SL(2, $\mathbb{R}$)

To be able to apply the ergodic theorem as stated in the last section in the proof of Theorem 1.1 we will need to know that the $\mathrm{SL}(2, \mathbb{R})$-invariant and ergodic probability measure is also ergodic under a one-parameter flow. The corresponding fact is best formulated in terms of unitary representations and is due to Moore [25] and is known as the *Mautner phenomenon*. For completeness we prove the special case needed.

Proposition 3.1. *Let $\mathfrak{H}$ be a Hilbert space, and suppose $\phi : \mathrm{SL}(2, \mathbb{R}) \to \mathrm{U}(\mathfrak{H})$ is a continuous unitary representation on $\mathfrak{H}$. In other words, ϕ is a homomorphism into the group of unitary automorphisms $\mathbb{U}(\mathfrak{H})$ of $\mathfrak{H}$ such that for every $v \in \mathfrak{H}$ the vector $\phi(g)(v) \in \mathfrak{H}$ depends continuously on $g \in \mathrm{SL}(2, \mathbb{R})$. Then any vector $v \in \mathfrak{H}$ that is invariant under the upper unipotent matrix group $U = \left\{\begin{pmatrix} 1 & * \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\right\}$ is in fact invariant under* $\mathrm{SL}(2, \mathbb{R})$.

Since any measure preserving action on (X, μ) gives rise to a continuous unitary representation on $\mathfrak{H} = L^2(X, \mu)$ the above gives immediately what we need (see also [33, Prop. 5.2] for another elementary treatment):

Corollary 3.2. *Let μ be an H-invariant and ergodic probability measure on $X = \Gamma\backslash G$ with $\Gamma < G$ discrete, and $H < G$ isomorphic to* $\mathrm{SL}(2, \mathbb{R})$. *Then μ is also ergodic with respect to the one-parameter unipotent subgroup U of H corresponding to the upper unipotent subgroup in* $\mathrm{SL}(2, \mathbb{R})$.

In fact, an invariant function $f \in L^2(X, \mu)$ that is invariant under U must be invariant under $\mathrm{SL}(2, \mathbb{R})$ by Proposition 3.1. Since the latter group is assumed to be ergodic, the function must be constant as required. (We leave it to the reader to check the continuity requirement.)

Proof of Proposition 3.1. Following Margulis [24] we define the auxiliary function $p(g) = (\phi(g)v, v)$. Notice first that the function $p(\cdot)$ characterizes invariance in the sense that $p(g) = (v, v)$ implies $\phi(g)v = v$. By continuity of the representation $p(\cdot)$ is also continuous. Moreover, by our assumption on v the map $p(\cdot)$ is bi-U-invariant since

$$p(ugu') = (\phi(u)\phi(g)\phi(u')v, v) = (\phi(g)v, \phi(u^{-1})v) = p(g).$$

Let $\epsilon, r, s \in \mathbb{R}$ and calculate

$$\begin{pmatrix} 1 & r \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ \epsilon & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & s \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1+r\epsilon & r+s+rs\epsilon \\ \epsilon & 1+s\epsilon \end{pmatrix}.$$

Now fix some $t \in \mathbb{R}$, let ϵ be close to zero but nonzero, choose $r = \frac{e^t-1}{\epsilon}$ and $s = \frac{-r}{1+r\epsilon}$. Then the above matrix simplifies to

$$\begin{pmatrix} e^t & 0 \\ \epsilon & e^{-t} \end{pmatrix}$$

In particular, this shows that

$$p\left(\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ \epsilon & 1 \end{pmatrix}\right) = p\left(\begin{pmatrix} e^t & 0 \\ \epsilon & e^{-t} \end{pmatrix}\right)$$

is both close to $p(e)$ and to

$$p\left(\begin{pmatrix} e^t & 0 \\ 0 & e^{-t} \end{pmatrix}\right).$$

Therefore, the latter equals (v, v) which implies that v is invariant under $\begin{pmatrix} e^t & 0 \\ 0 & e^{-t} \end{pmatrix}$ as mentioned before.

The above implies now that $p(\cdot)$ is bi-invariant under the diagonal subgroup. Using this and the above argument once more, it follows that v is also invariant under $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ s & 1 \end{pmatrix}$ for all $s \in \mathbb{R}$. □

4 The proof of Theorem 1.1

In this section we prove Theorem 1.1 using the prerequisites discussed in the last section. Let us mention again that the general outline of the proof is very similar to the strategy M. Ratner [33] used to prove her theorems.

From now on let μ be an H-invariant and ergodic probability measure on $X = \Gamma\backslash G$.

4.1 The goal and the first steps

It is easy to check that

$$\mathrm{Stab}(\mu) = \{g \in G : \text{ right multiplication with } g \text{ on } X \text{ preserves } \mu\}$$

is a closed subgroup of G. Let $L = \mathrm{Stab}(\mu)^\circ$ be the connected component. Then as discussed any element of $\mathrm{Stab}(\mu)$ sufficiently close to e belongs to L. Also since $\mathrm{SL}(2, \mathbb{R})$ is connected we have $H < L$.

We will show that μ is concentrated on **a single orbit** of L, i.e. that there is some L-orbit $L.x_0$ of measure one $\mu(L.x_0) = 1$. Then by L-invariance of μ and uniqueness of Haar measure, μ would have to be the L-invariant volume form on this orbit $L.x_0$. However, since μ is assumed to be a probability measure this also implies that the orbit $L.x_0$ is closed as seen in the next lemma.

Lemma 4.1. *If μ is concentrated on a single L-orbit $L.x_0$ and is L-invariant, then $L.x_0$ is closed and μ is supported on $L.x_0$.*

In the course of the proof we will recall a few facts about Haar measures and also prove that a Lie group which admits a lattice is unimodular, i.e. satisfies that the Haar measure is left and right invariant. For a more comprehensive treatment of the relationship between lattices and Haar measures see [27].

Proof. Suppose $x_i \in \ell_i.x_0 \in L.x_0$ converges to y. We have to show that $y \in L.x_0$. Now either $x_i \in \overline{B_1^L}.y$ for some i – i.e. the convergence is along L and the lemma follows – or $x_i \notin \overline{B_1^L}.y$ for all i. In the latter case we may choose a subsequence so that $x_i \notin \overline{B_1^L}.x_j$ for $i \neq j$. Now let $r < 1$ be an injectivity radius of X at y. Then $x_i \in B_{r/2}.y$ for large enough i, say for $i \geq i_0$. It follows that the sets $B_{r/2}^L.x_i \subset X$ are disjoint for $i \geq i_0$. Since $x_i = \ell_i.x_0$ it follows that these sets are all of the form $B_{r/2}^L(\ell_i).x_0$. We claim that the existence of the finite volume orbit implies that L is unimodular. If this is so, then we see that the sets $B_{r/2}^L.x_i$ all have the same measure, which contradicts the finite volume assumption.

It remains to show that L is unimodular if the L-orbit of $x_0 = \Gamma g_0$ has finite L-invariant volume, or equivalently if $\Gamma_L = g_0^{-1}\Gamma g_0 \cap L < L$ is a lattice. So suppose μ is an L-invariant probability measure on $\Gamma_L \backslash L$, where L is acting on the right. Then the following gives the relationship between μ and a right Haar measure m_L on L. Let f be a compactly supported continuous function on L, then

$$\int f \, \mathrm{d}m_L = \int \sum_{\gamma \in \Gamma_L} f(\gamma\ell) \, \mathrm{d}\mu.$$

Here note first that the sum $F(\ell)$ inside the integral on the right is finite for every ℓ, satisfies $F(\gamma\ell) = F(\ell)$, and so defines a function on $\Gamma_L \backslash L$ which is also compactly supported and continuous. Therefore, the right integral is well-defined. Using invariance of μ and the uniqueness of the right Haar measure on L, the equation follows (after possibly rescaling m_L).

The above formula immediately implies that m_L is left-invariant under Γ_L. We use Poincaré recurrence to extend this to all of L. Let $K \subset L$ be a compact subset of positive measure. Let $\ell \in L$ be arbitrary and consider the map $T : \Gamma_L \backslash L \to \Gamma_L \backslash L$ defined by left multiplication by ℓ^{-1}. By assumption this preserves the probability measure μ, therefore there exists some fixed $k \in K$, infinitely many n_i, and $\gamma_i \in \Gamma_L$ such that $\gamma_i k \ell^{-n_i} \in K$. In other words there exist infinitely many $k_i \in K$ with $\ell^{n_i} = k_i^{-1}\gamma_i k$. The measure obtained by left multiplication by ℓ from a right Haar measure m_L it again a right Haar measure and so must be a multiple $c(\ell)m_L$. The constant $c(\ell) \in \mathbb{R}^\times$ defines a character, i.e. a continuous homomorphism $c : L \to \mathbb{R}^\times$. It follows that $c(\ell)^{n_i} = c(k_i)c(\gamma_i)c(k) = c(k_i)c(k)$ remains bounded as $n_i \to \infty$. Therefore, $c(\ell) = 1$. Since ℓ was arbitrary this proves the claim and the lemma. □

The main argument will be to show that if μ is not concentrated on a single orbit of L, then there are other elements of $\mathrm{Stab}(\mu)$ close to e. This shows that we should have started with a bigger subgroup L'. If we repeat the argument with this bigger L', we will either achieve our goal or make L' even bigger. We start by giving a local condition for a measure μ to be concentrated on a single orbit.

Lemma 4.2. *Suppose $x_0 \in X$ has the property that $\mu(B^L_\delta.x_0) > 0$ for some $\delta > 0$, then μ is concentrated on $L.x_0$. So either the conclusion of Theorem 1.1 holds for L and x_0, or for every x_0 we have $\mu(B^L_\delta.x_0) = 0$.*

Proof. This follows immediately from the definition of ergodicity of μ and the fact that $L.x_0$ is an H-invariant measurable set. □

We will be achieving the assumption to the last lemma by studying large sets $X' \subset X$ of points with good properties. Let $x_0 \in X'$ be such that all balls around x_0 have positive measure. Suppose X' has the property that points x' close to x_0 that also belong to X' give `rise to additional invariance' of μ unless x and x' are locally on the same L-orbit (i.e. $x' = \ell.x$ for some $\ell \in L$ close to e). Then either L can be made bigger or $B^L_\delta.x \cap X' \subset B^L_\delta.x_0$ for some $\delta > 0$ and therefore the latter has positive measure. However, to carry that argument through requires a lot more work. We start by a less ambitious statement where two close by points in a special position from each other give 'rise to invariance' of μ. Recall that $U = \left\{\begin{pmatrix} 1 & * \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\right\}$.

Proposition 4.3. *There is a set $X' \subset X$ of μ-measure one such that if $x, x' \in X'$ and $x' = c.x$ with*

$$c \in C_G(U) = \{g \in G : gu = ug \text{ for all } u \in U\},$$

then c preserves μ.

The set X' in the above proposition we define to be the set of μ-generic points (for the one paramenter subgroup defined by U). A point $x \in X$ is *μ-generic* if

$$\frac{1}{T}\int_0^T f(u_t.x)\mathrm{d}t \to \int f\mathrm{d}\mu \text{ for } T \to \infty$$

for all compactly supported, continuous functions $f : X \to \mathbb{R}$. Recall that by the Mautner phenomenon μ is U-ergodic. Now the ergodic theorem implies that the set X' of all μ-generic points has measure one. (Here one first applies the ergodic theorem for a countable dense set of compactly supported, continuous functions and then extends the statement to all such functions by approximation.)

Proof. For $c \in C_G(U)$ and a compactly supported, continuous function $f : X \to \mathbb{R}$ define the function $f_c(x) = f(c.x)$ of the same type. Now assume $x, x' = c.x \in X'$ are μ-generic. Since $u_t c = c u_t$ we have $f(u_t.x') = f(cu_t.x) = f_c(u_t.x)$ and so the limits

$$\frac{1}{T}\int_0^T f(u_t.x')\mathrm{d}t \to \int f \,\mathrm{d}\mu \text{ and}$$
$$\frac{1}{T}\int_0^T f_c(u_t.x)\mathrm{d}t \to \int f_c \,\mathrm{d}\mu$$

are equal. However, the last integral equals $\int f_c \mathrm{d}\mu = \int f \mathrm{d}c_*\mu$ were $c_*\mu$ is the push forward of μ under c. Since f was any compactly supported, continuous function, $\mu = c_*\mu$ as claimed. □

4.2 Outline of the H-principle

In Proposition 4.3 we derived invariance of μ but only if we have two points $x, x' \in X'$ that are in a very special relationship to each other. On the other hand if μ is not supported on the single L-orbit, then we know that we can find many $y, y' \in X'$ that are close together but are not on the same L-leaf locally by Lemma 4.2. Without too much work we will see that we can assume

$$y' = \exp(v).y \text{ with } v \in \mathfrak{l}'$$

where $\mathfrak{l}'$ is an $\mathrm{SL}(2, \mathbb{R})$-invariant complement in $\mathfrak{g}$ of the Lie algebra $\mathfrak{l}$ of L, see Lemma 4.5. What we are going to describe is a version of the so-called H-principle as introduced by Ratner [31, 32] and generalized by Witte [38], see also [26].

By applying the same unipotent matrix $u \in U$ to y and y' we get

$$u.y' = (u\exp(v)u^{-1}).(u.y) = \exp(\mathrm{Ad}_u(v)).(u.y).$$

In other words, the divergence of the orbits through y and y' can be described by conjugation in G – or even by the adjoint representation on $\mathfrak{g}$. Since H is assumed to be isomorphic to $\mathrm{SL}(2, \mathbb{R})$ we will be able to use the theory on representations as in Section 3.2. In particular, recall that the fastest divergence is happening along a direction which is stabilized by U. Since all points on the orbit of a μ-generic point are also μ-generic, one could hope to flow along U until the two points $x = u.y, x' = u.x'$ differ significantly but not yet to much. Then $y' = u.x' = h.(u.x) = h.y$ with h almost in $C_G(U)$. To fix the 'almost' in this statement we will consider points that are even closer to each other, flow along U for a longer time, and get a sequence of pairs of μ-generic points that differ more and more by some element of $C_G(U)$. In the limit we hope to get two points that differ precisely by some element of $C_G(U)$ which is not in L.

The main problem is that limits of μ-generic points need not be μ-generic (even for actions of unipotent groups). Therefore, we need to introduce quite early in the argument a compact subset $K \subset X'$ of almost full measure that consists entirely of μ-generic points. When constructing $u.x', u.x$ we will make sure that they belong to K – this way we will be able to go to the limit and get μ-generic points that differ by some element of $C_G(U)$.

We are now ready to proceed more rigorously.

4.3 Formal preparations, the sets K, X_1, and X_2

Let X' be the sets of μ-generic points as above, and let $K \subset X'$ be compact with $\mu(K) > 0.9$. By the ergodic theorem

$$\frac{1}{T}\int_0^T 1_K(u_t.y)\mathrm{d}t \to \mu(K)$$

for μ-a.e. $y \in X$. In particular, we must have for a.e. $y \in X$

$$\frac{1}{T}\int_0^T 1_K(u_t.y)\mathrm{d}t > 0.8 \text{ for large enough } T.$$

Here T may depend on y but by choosing T_0 large enough we may assume that the set

$$X_1 = \left\{y \in X : \frac{1}{T}\int_0^T 1_K(u_t.y)\mathrm{d}t > 0.8 \text{ for all } T \geq T_0\right\}$$

has measure $\mu(X_1) > 0.99$. By definition points in X_1 visit K often enough so that we will be able to find for any $y, y' \in X_1$ many common values of t with $u_t.y, u_t.y' \in K$.

The last preparation we need will allow us to find $y, y' \in X_1$ that differ by some $\exp(v)$ with $v \in \mathfrak{l}'$. For this we define

$$X_2 = \left\{z \in X : \frac{1}{m_L(B_1^L)}\int_{B_1^L} 1_{X_1}(\ell.z)\mathrm{d}m_L(\ell) > 0.9\right\}$$

where m_L is a Haar measure on L. (Any other smooth measure would do here as well.)

Lemma 4.4 $\mu(X_2) > 0.9$.

Proof. Define $Y = X \times B_1^L$ and consider the product measure $\nu = \frac{1}{m_L(B_1^L)}\mu \times m_L$ on Y. The function $f(z,\ell) = 1_{X_1}(\ell.z)$ integrated over z gives independently of ℓ allways $\mu(X_1)$ since μ is L-invariant. By integrating over ℓ first we get therefore the function

$$g(z) = \frac{1}{m_L(B_1^L)}\int_{B_1^L} 1_{X_1}(\ell.z)\mathrm{d}m_L(\ell)$$

whose integral satisfies $\int g\mathrm{d}\mu = \mu(X_1)$. Since $g(z) \in [0,1]$ for all z

$$0.99 < \int_{X_2} g\mathrm{d}\mu + \int_{X\setminus X_2} g\mathrm{d}\mu \leq \mu(X_2) + 0.9\mu(X\setminus X_2) = 0.1\mu(X_2) + 0.9$$

which implies the lemma. □

Let as before $\mathfrak{l} \subset \mathfrak{g}$ be the Lie algebra of $L < G$ and let $\mathfrak{l}' \subset \mathfrak{g}$ be an SL(2, $\mathbb{R}$)-invariant complement of $\mathfrak{l}$ in $\mathfrak{g}$. Then the map $\phi : \mathfrak{l}' \times \mathfrak{l} \to G$ defined by $\phi(v,w) =$

$\exp(v)\exp(w)$ is C^∞ and its derivative at $(0,0)$ is the embedding of $\mathfrak{l}' \times \mathfrak{l}$ into $\mathfrak{g}$. Therefore, ϕ is locally invertible so that every $g \in G$ close to e is a unique product $g = \exp(v)\ell$ for some $\ell \in L$ close to e and some small $v \in \mathfrak{l}'$. We define $\pi_L(g) = \ell$. For simplicity of notation we assume that this map is defined on an open set containing $\overline{B_1^L}$ (if necessary we rescale the metric).

Lemma 4.5 *For any $\epsilon > 0$ there exists $\delta > 0$ such that for $g \in B_\delta^G$, and $z, z' = g.z \in X_2$ there are $\ell_2 \in B_1^L$ and $\ell_1 \in B_\epsilon^L(\ell_2)$ with $\ell_1.z, \ell_2.z' \in X_1$ and $\ell_2 g \ell_1^{-1} = \exp(v)$ for some $v \in B_\epsilon^{\mathfrak{l}'}(0)$.*

Proof. Let $g \in B_\delta^G$ and consider the C^∞-function $\psi(\ell) = \pi_L(\ell g)$. If $g = e$ then ψ is the identity, therefore if δ is small enough the derivative of ψ is close to the identity and its Jacobian is close to one. In particular, we can ensure that $m_L(\psi(E')) > 0.9 m_L(E')$ for any measurable subset $E' \subset B_1^L$. Moreover, for δ small enough we have $\psi(\ell) \in B_\epsilon^L(\ell)$ for any $\ell \in B_1^L$ and so $\psi(B_1^L) \subset B_{1+\epsilon}^L$.

Now define the sets $E = \{\ell \in B_1^L : \ell.z \in X_1\}$ and $E' = \{\ell \in B_1^L : \ell.z' \in X_1\}$ which satisfy $m_L(E) > 0.9 m_L(B_1^L)$ and $m_L(E') > 0.9 m_L(B_1^L)$ by definition of X_2. We may assume that ϵ is small enough so that $m_L(B_{1+\epsilon}^L) < 1.1 m_L(B_1^L)$. Together with the above estimate we now have $m_L(\psi(E')) > 0.5 m_L(B_{1+\epsilon}^L)$ and $m_L(E) > 0.5 m_L(B_{1+\epsilon}^L)$. Therefore, there exists some $\ell_2 \in E'$ with $\ell_1 = \psi(\ell_2) \in E$. By definition of E, E' we have $\ell_1.y, \ell_2.y' \in X_1$. Finally, by definition of π_L

$$\ell_2 g \ell_1^{-1} = \ell_2 g \pi_L(\ell_2 g)^{-1} = \exp(v)$$

for some $v \in \mathfrak{l}'$. Again for sufficiently small δ we will have $v \in B_\epsilon^{\mathfrak{l}'}(0)$.

4.4 H-principle for SL(2, ℝ)

Let $x_0 \in X_2 \cap \operatorname{supp} \mu|_{X_2}$ so that

$$\mu\big((B_\delta^G.x_0) \cap X_2\big) > 0 \text{ for all } \delta > 0.$$

Now one of the following two statements must hold:

(1) there exists some $\delta > 0$ such that $B_\delta^G.x_0 \cap X_2 \subset B_\delta^L.x_0$, or
(2) for all $\delta > 0$ we have $B_\delta^G.x_0 \cap X_2 \not\subset B_\delta^L.x_0$.

We claim that actually only (1) above is possible if L is really the connected component of $\operatorname{Stab}(\mu)$. Assuming this has been shown, then we have $\mu(B_\delta^L.x_0) > 0$ which was the assumption to Lemma 4.2. Therefore, $\mu(L.x_0) = 1$ and by Lemma 4.1 $L.x_0 \subset X$ is closed – Theorem 1.1 follows. So what we really have to show is that (2) implies that μ is invariant under a one parameter subgroup that does not belong to L.

Lemma 4.6 *Assuming (2) there are for every $\epsilon > 0$ two points $y, y' \in X_1$ with $d(y, y') < \epsilon$ and $y' = \exp(v).y$ for some nonzero $v \in B_\epsilon^{\mathfrak{l}'}(0)$.*

Proof. Let $z = x_0$. By (2) there exists a point $z' \in X_2$ with $d(z, z') < \delta$ and $z' \notin B^L_\delta.z$. Let $g \in B^G_\delta$ be such that $z' = g.z$ and $g \notin L$. Applying Lemma 4.5 the statement follows since $g \notin L$ and so $v \neq 0$ by our choice of z'. □

Using $y, y' \in X_1$ and $v \in \mathfrak{l}'$ for all $\epsilon > 0$ as in the above lemma we will show that μ is invariant under a one-parameter subgroup that does not belong to L. For this it is enough to show the following:

Claim: For any $\eta > 0$ there exists a nonzero $w \in B^{\mathfrak{l}'}_\eta(0)$ such that μ is invariant under $\exp(w)$.

To see that this is the remaining assertion, notice that we then also have invariance of μ under the subgroup $\exp(\mathbb{Z}w)$. While this subgroup could still be discrete, when $\eta \to 0$ we find by compactness of the unit ball in $\mathfrak{l}'$ a limiting one parameter subgroup $\exp(\mathbb{R}w)$ that leaves μ invariant.

We start proving the claim. Let $\eta > 0$ be fixed, and let $\epsilon > 0$, $y, y' \in X_1$, and $v \in B^{\mathfrak{l}'}_\epsilon(0)$ as above. We will think of ϵ as much smaller than η since we will below let ϵ shrink to zero while not changing η. Let $\mathrm{Sym}^n(\mathbb{R}^2)$ be an irreducible representation as in Section 3.2, and let $p = p(A, B) \in \mathrm{Sym}^n(\mathbb{R}^2)$. Recall that $u_t = \begin{pmatrix} 1 & t \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ applied to $p(A, B)$ gives $p(A, B + tA)$. We define

$$T_p = \frac{\eta}{\max(|c_1|, \ldots, |c_n|^{1/n})}$$

and set $T_p = \infty$ if the expression on the right is not defined. The significance of T_p is that for $t = T_p$ at least one term in the sum $(c_0 + c_1 t + \cdots + c_n t^n)$ is of absolute value one while all others are less than that – recall that this sum is the coefficient of A^n in $p(A, B + tA)$. To extend this definition to $\mathfrak{l}'$ which is not necessarily irreducible we split $\mathfrak{l}'$ into irreducible representations $\mathfrak{l}' = \bigoplus_{j=1}^k V_j$ and define for $v = (p_j)_{j=1,\ldots,k}$

$$T_v = \min_j T_{p_j}.$$

Lemma 4.7. *There exists constants $n > 0$ and $C > 0$ that only depend on $\mathfrak{l}'$ such that for $v \in B^{\mathfrak{l}'}_\epsilon(0)$ and $t \in [0, T_v]$ we have*

$$\mathrm{Ad}_{u_t}(v) = w + O(\epsilon^{1/n})$$

where $w = w(t) \in B^{\mathfrak{l}'}_{C\eta}(0)$ is fixed under the subgroup $U = u_{\mathbb{R}}$. Here we write $O(\epsilon^{1/n})$ to indicate a vector in $\mathfrak{l}'$ of norm less than $C\epsilon^{1/n}$.

Proof. We first show the statement for irreducible representations $\mathrm{Sym}^n(\mathbb{R}^2)$ inside $\mathfrak{l}'$. There any multiple of A^n is fixed under U. Similar to the earlier discussion the coefficient $(c_0 + c_1 t + \cdots + c_n t^n)$ is for $t \in [0, T_p]$ bounded by $n\eta$. For the other coefficients note first that these are sums of terms of the form $c_i t^j$ for $j < i$. Since $t < \eta |c_i|^{-1/i}$ we have that each such term is bounded by $|c_i t^j| \le |c_i| |c_i|^{-j/i} \le |c_i|^{1/i} \ll \epsilon^{1/n}$ where the implied constant only depends on the norm on $\mathfrak{l}'$ and the way we split $\mathfrak{l}'$ into irreducibles (and we assumed $\eta < 1$). This proves the lemma for irreducible representations.

The general case is now straightforward. If $t < T_v = \min_j T_{p_j}$ then since $\mathrm{Ad}_{u_t}(p_j)$ is of the required form for $j = 1, \ldots, k$ the lemma follows by taking sums. □

If v is already fixed by U then $T_v = \infty$ (and other way around) and the above statement is rather trivial since $w = v$. Moreover, by definition of X_1 we have $\frac{1}{T}\int_0^T 1_K(u_t x_i)\mathrm{d}t > 0.8$ for $i = 1, 2$. From this it follows that there is some $t \in [0, T_0]$ with $u_t.x_1, u_t.x_2 \in K$. Since $K \subset X'$ Lemma 4.3 proves (assuming $\epsilon < \eta$) the claim in that case and we may from now on assume that v is not fixed under the action of U and so $T_v < \infty$.

Lemma 4.8 *There exists a constant $c > 0$ that only depends on $\mathfrak{l}'$ such that the decomposition $\mathrm{Ad}_{u_t}(v) = w + O(\epsilon^{1/n})$ as above satisfies $\|w\| > c\eta$ for $t \in E_v$ where $E_v \subset [0, T_v]$ has Lebesgue measure at least $0.9T_v$.*

Proof. We only have to look at the irreducible representations $V_j = \mathrm{Sym}^n(\mathbb{R}^2)$ in $\mathfrak{l}'$ with $T_v = T_{p_j}$. The size of the corresponding component of w is determined by the value of the polynomial $c_0 + c_1 t + \cdots + c_n t^n$. We change our variable by setting $s = \frac{t}{T_v}$ and get the polynomial $q(s) = c_0 + \frac{c_1}{T_v}s + \cdots + \frac{c_n}{T_v^n}s^n$. By definition of T_v the polynomial $q(s)$ has at least one coefficient of absolute value one while the others are in absolute value less or equal than one. Therefore, we have reduced the problem to finding a constant c such that for every such polynomial we have that $E_1 = \{s \in [0, 1] : |q(s)| \geq c\}$ has measure bigger than 0.9.

This can be done in various ways – we will use the following property of polynomials for the proof. Every polynomial of degree n is determined by $n + 1$ values (by the standard interpolation procedure). Moreover, we can give an upper bound on the coefficients in terms of these values unless the values of s used for the data points are very close together. (The determinant of the Vandermonde determinant is the product of the differences of the values of s used in the interpolation.) Suppose $s_0 \in [0, 1] \setminus E_1$, then all points close to s_0 give unsuprisingly also small values. So we now look for $s_1 \in [0, 1] \setminus (E_1 \cup [s_n - \frac{1}{20n}, s_n + \frac{1}{20n}])$ – if there is no such point then E_1 is as big as required. We repeat this search until we have found $n + 1$ points $s_0, \ldots, s_n \in [0, 1] \setminus E_1$ that are all separated from each other by at least $\frac{1}{20n}$. Again if we are not able to find these points, then E_1 is sufficiently big. However, as discussed the coefficients of q are due to $|q(s_0)|, \ldots, |q(s_n)| < c$ bounded by a multiple of c (that also involves some power of the degree n). If c is small enough compared to that coefficient we get a contradiction to the assumption that q has at least one coefficient of absolute value one. It follows that for that choice of c we can find at most n points in the above search and so E_1 has Lebesgue measure at least $1 - n\frac{2}{20n} = 0.9$. □

Recall that case (1) from the beginning of this section implies Theorem 1.1 and that we are assuming case (2). Moreover, recall that this implies for all $\epsilon > 0$ the existence of $y, y' \in X_1$ with $y' = \exp(v).y$ for some nonzero $v \in B_\epsilon^{\mathfrak{l}'}(0)$ by Lemma 4.6. By definition of X_1 the sets

$$E_T = \{t \in [0, T] : u_t.y \in K\} \text{ and}$$
$$E'_T = \{t \in [0, T] : u_t.y' \in K\}$$

have Lebesgue measure bigger than $0.8T$ whenever $T \geq T_0$. From the definition it is easy to see that $T_v \geq T_0$ once ϵ and therefore v are sufficiently small, so we can set to $T = T_v$. Moreover, let E_v be as in Lemma 4.8. Then the union of the complements of these three sets in $[0, T_v]$ has Lebesgue measure less than $0.5T_v$. Therefore, there exists some $t \in E_{T_v} \cap E'_{T_v} \cap E_v$. We set $x = u_t.y$, $x' = u_t.y'$ which both belong to K by definition of E_{T_v} and E'_{T_v}. Moreover, $x' = \exp(w + O(\epsilon^{1/n})).X$ where $w \in \mathfrak{l}'$ is stabilized by U and satisfies $c\eta \leq \|w\| \leq C\eta$ by Lemma 4.7– 4.8. We let $\epsilon \to 0$ and choose converging subsequences for x, x', and w. This shows the existence of $x, x' = \exp(w).x \in K$ and $w \in \mathfrak{l}'$ with $c\eta \leq \|w\| \leq C\eta$ which is stabilized by U. This is in effect our earlier claim which as we have shown implies that μ is invariant under a oneparameter subgroup not belong into L. This concludes the proof of Theorem 1.1.

References

[1] S. G. Dani. On invariant measures, minimal sets and a lemma of Margulis. *Invent. Math.*, 51(3):239–260, 1979.

[2] S. G. Dani. On uniformly distributed orbits of certain horocycle flows. *Ergodic Theory Dynamical Systems*, 2(2): 139–158, 1982 (1983).

[3] S. G. Dani. On orbits of unipotent flows on homogeneous spaces. *Ergodic Theory Dynam. Systems*, 4(1):25–34, 1984.

[4] S. G. Dani. On orbits of unipotent flows on homogeneous spaces. II. *Ergodic Theory Dynam. Systems*, 6(2):167–182, 1986.

[5] M. Einsiedler and A. Katok. Invariant measures on G/Γ for split simple Lie-groups G. *Comm. Pure Appl. Math.*, 56(8):1184–1221, 2003.

[6] M. Einsiedler and A. Katok. Rigidity of measures–the high entropy case and non-commuting foliations. *Israel J. Math.*, 148:169–238, 2005. Probability in mathematics.

[7] M. Einsiedler, A. Katok, and E. Lindenstrauss. Invariant measures and the set of exceptions to Littlewood's conjecture. to appear in Ann. of Math.

[8] M. Einsiedler and E. Lindenstrauss. Diagonalizable flows on locally homogeneous spaces and number theory. to appear in Proc. ICM 2006.

[9] M. Einsiedler and E. Lindenstrauss. On measures invariant under maximal split tori for semisimple S-algebraic groups. in preparation 2006.

[10] M. Einsiedler and E. Lindenstrauss. Rigidity of measures invariant under a diagonalizable group – the general low entropy method. in preparation 2006.

[11] H. Furstenberg. Disjointness in ergodic theory, minimal sets, and a problem in Diophantine approximation. *Math. Systems Theory*, 1:1–49, 1967.

[12] H. Furstenberg. The unique ergodicity of the horocycle flow. *Recent advances in topological dynamics (Proc. Conf., Yale Univ., New Haven, Conn., 1972; in honor of Gustav Arnold Hedlund)*, 95–115. Lecture Notes in Math., Vol. 318, Springer, Berlin, 1973.

[13] A. Johnson. Measures on the circle invariant under multiplication by a nonlacunary subsemigroup of the integers. *Israel J. Math.*, 77(1-2):211–240, 1992.

[14] Boris Kalinin and Ralf Spatzier. Rigidity of the measurable structure for algebraic actions of higher-rank Abelian groups. *Ergodic Theory Dynam. Systems*, 25(1):175–200, 2005.

[15] A. Katok and R. Spatzier. Invariant measures for higher-rank hyperbolic abelian actions. *Ergodic Theory Dynam. Systems*, 16(4):751–778, 1996.

[16] A. Katok and R. Spatzier. Corrections to: "Invariant measures for higher-rank hyperbolic abelian actions" [Ergodic Theory Dynam. Systems **16** (1996), no. 4, 751–778]. *Ergodic Theory Dynam. Systems*, 18(2):503–507, 1998.

[17] Dmitry Kleinbock, Nimish Shah, and Alexander Starkov. Dynamics of subgroup actions on homogeneous spaces of Lie groups and applications to number theory. In *Handbook of dynamical systems, Vol. 1A*, pages 813–930. North-Holland, Amsterdam, 2002.

[18] E. Lindenstrauss. Invariant measures and arithmetic quantum unique ergodicity. To appear in Ann. of Math.

[19] R. Lyons. On measures simultaneously 2- and 3-invariant. *Israel J. Math.*, 61(2):219–224, 1988.

[20] G. Margulis. Discrete subgroups and ergodic theory. In *Number theory, trace formulas and discrete groups (Oslo, 1987)*, pages 377–398. Academic Press, Boston, MA, 1989.

[21] G. Margulis. Oppenheim conjecture. In *Fields Medallists' lectures*, volume 5 of *World Sci. Ser. 20th Century Math.*, pages 272–327. World Sci. Publishing, River Edge, NJ, 1997.

[22] G. Margulis and G. Tomanov. Invariant measures for actions of unipotent groups over local fields on homogeneous spaces. *Invent. Math.*, 116(1-3):347–392, 1994.

[23] G. A. Margulis. On the action of unipotent groups in the space of lattices. In *Lie groups and their representations (Proc. Summer School, Bolyai, Janos Math. Soc., Budapest, 1971)*, pages 365–370. Halsted, New York, 1975.

[24] Grigorii A. Margulis. Dynamical and ergodic properties of subgroup actions on homogeneous spaces with applications to number theory. In *Proceedings of the International Congress of Mathematicians, Vol. I, II (Kyoto, 1990)*, pages 193–215, Tokyo, 1991. Math. Soc. Japan.

[25] Calvin C. Moore. The Mautner phenomenon for general unitary representations. *Pacific J. Math.*, 86(1):155–169, 1980.

[26] Dave Witte Morris. *Ratner's theorems on unipotent flows*. Chicago Lectures in Mathematics. University of Chicago Press, Chicago, IL, 2005.

[27] M. S. Raghunathan. *Discrete subgroups of Lie groups*. Springer-Verlag, New York, 1972. Ergebnisse der Mathematik und ihrer Grenzgebiete, Band 68.

[28] M. Ratner. On Raghunathan's measure conjecture. *Ann. of Math. (2)*, 134(3):545–607, 1991.

[29 M. Ratner. Raghunathan's topological conjecture and distributions of unipotent flows. *Duke Math. J.*, 63(1):235–280, 1991.

[30] M. Ratner. Raghunathan's conjectures for Cartesian products of real and p-adic Lie groups. *Duke Math. J.*, 77(2):275–382, 1995.

[31] Marina Ratner. Factors of horocycle flows. *Ergodic Theory Dynam. Systems*, 2(3-4):465–489 (1983), 1982.

[32] Marina Ratner. Horocycle flows, joinings and rigidity of products. *Ann. of Math. (2)*, 118(2):277–313, 1983.

[33] Marina Ratner. On measure rigidity of unipotent subgroups of semisimple groups. *Acta Math.*, 165(3-4):229–309, 1990.

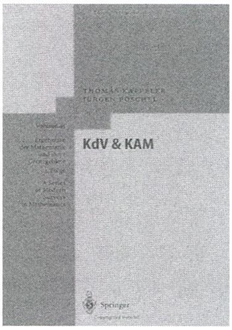
[34] Marina Ratner. Strict measure rigidity for unipotent subgroups of solvable groups. *Invent. Math.*, 101(2):449–482, 1990.

[35] Marina Ratner. Distribution rigidity for unipotent actions on homogeneous spaces. *Bull. Amer. Math. Soc. (N.S.)*, 24(2):321–325, 1991.

[36] Marina Ratner. Raghunathan's conjectures for SL(2, R). *Israel J. Math.*, 80(1-2):1–31, 1992.

[37] D. Rudolph. $\times 2$ and $\times 3$ invariant measures and entropy. *Ergodic Theory Dynam. Systems*, 10(2):395–406, 1990.

[38] Dave Witte. Rigidity of some translations on homogeneous spaces. *Bull. Amer. Math. Soc. (N.S.)*, 12(1):117–119, 1985.



Th. Kappeler, J. Pöschel
KdV & KAM

Berlin u. a., Springer, 2003, 279 S., € 99,95

This book deals with the problem of describing the qualitative behaviour of the solutions of the Korteweg de Vries equation (KdV) and of its small perturbations. The point of view is that of dynamical systems. In particular the KdV equation is viewed as an infinite dimensional integrable system and its perturbations are studied using KAM (Kolmogorov Arnold Moser) theory.

The KdV equation

$$u_t + u_{xxx} - 6uu_x = 0$$

was introduced in the 19 th century in order to describe the propagation of water waves in shallow water channels. It was immediately remarked that such an equation admits solitons, namely non interacting travelling waves. More relevant for the approach of the book is the discovery that the KdV equation is an infinite dimensional analogue of an integrable Hamiltonian system. Indeed it is a Hamiltonian system and moreover it posses infinitely many integrals of motion. Lax in particular showed that if $u(x, t)$ is a solution of the KdV equation then the spectrum of the Schrödinger operator

$$(1) \quad -\partial_{xx} + u$$

is independent of time and provides a complete set of integrals of motion of the KdV. Moreover, it was subsequently recognized that all the dynamics can be constructed studying the spectral theory of (1). This achivment was the result of the activity of a large number of mathematicians and the corresponding theory is one of the most beautiful of the last decades.

The first part of the book is devoted to the integration of the KdV equation subjected to space periodic boundary conditions. The method used by the authors consists in exploiting deeply the fact that KdV is an integrable Hamiltonian system. To this end they extend to the case of the KdV equation Liouville-Arnold-Jost theorem on the existece of action angle variables, namely symplectic smooth variables $(\phi, I) \in T^n \times \mathbf{R}^n$ with the property that the dynamics consits simply of a linear shift of the angles ϕ.

The authors follow Arnold Jost construction using as a starting point the eigenvalues of the operator (1). It turns out that the action variables thus constructed are singular at a dense set of the phase space and therefore the construction has to be modified. The authors remark that the singularities of the actions are of the same type as the singularity of the polar coordinates at the origin, thus they introduce a sort of cartesian coordinates and prove, by a deep analysis involving a very precise study of the Sturm Liouville operator (1), that such cartesian coordinates are analytic. The so obtained cartesian coordiantes are called *Birkhoff coordinates*. In Birkhoff coordinates the dynamics of the KdV equation turns out to be trivial, namely it is the superposition of infinitely many periodic oscillations. In particular one obtains that all solutions of the KdV equation with periodic boundary conditions are periodic, quasiperiodic or almost periodic in time.

Then the authors use KAM theory to study the solutions of small Hamiltonian perturbations of the KdV. Precisely to study the dynamics of the equation

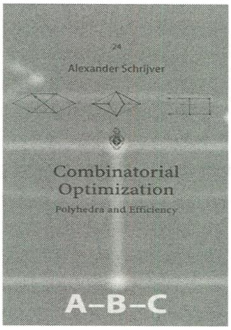
$$u_t = -u_{xxx} + uu_x + \partial_x(f(u)) \ .$$

The standard tool used in dynamical system to perform this kind of studies is KAM theory. Its finite dimensional version, originallly devlopped by Kolmogorov Arnold an Moser, ensures that most of the invariant tori on which the phase space of an integrable system is foliated, persist under perturbation. In the infinite dimensional case dealt with in the book the situation is much more complicated. During the last fifteen years a lot of work has been done in order to obtain an extension of KAM theory to PDEs. Up to now the only quite general result available is a theorem by Kuksin that applyes to perturbations of integrable equations in one space dimensions. Such a theorem ensures persistence of finite dimensional tori filled by quasiperiodic solutions. In the second part of the book the authors prove a KAM type theorem taylored for the KdV equation. Thus they obtain that most of the quasiperiodic solutions of the KdV equation are only slightely modified by the presence of a Hamiltonian perturbation. The KAM type theorem proved in the book is a variant of Kuksin's theorem and besides KdV equation it applies to a very general class of semilinear equations in one space dimensions.

The book contains full proofs of all the results presented. This is a quite remarkable fact since previously the interested scientist had to look at many different places in order to get a full application of KAM theory to the KdV, the first and more natural model problem for infinite dimensional extensions of Hamiltonian perturbation theory. Furthermore, the proves presented in the book are original and much simpler than the orginal ones.

The tools used in the book range from (direct and inverse) Sturm Liouville theory to the theory of integrable systems and to the most sophisticated arguments of pertubation theory. Everything is presented starting from the beginning so that the book turns out to be accessible to a graduate student.

Milano D. Bambusi



A. Schrijver
Combinatorical Optimization
Polyhedra and Efficiency
3 volumes

Berlin u. a., Springer, 2003, 648 S., 570 S., 664 S., € 89,95; 63,–; 79,95

Kombinatorische Optimierung ist eine der großen Erfolgsgeschichten der Mathematik, und zwar eine der neuesten Zeit. Die ersten Maximum-Minimum Sätze von König und Menger wurden zwar vor 1930 bewiesen, aber richtig beginnt die Geschichte erst mit Linearer Optimierung und dem Simplexalgorithmus von Dantzig 1947. Und genau wie bei der Graphentheorie ist auch der Aufstieg der Kombinatorischen Optimierung untrennbar mit der Entwicklung der ersten schnellen Rechner verbunden – in der Praxis wie in der Theorie. In der Praxis, weil nun große Probleme mit Hunderten von Nebenbedingungen angegangen werden konnten, und in der Theorie, weil die Begriffe effizient, polynomiell, NP-vollständig, die in den 60er und 70er Jahren entstanden, ihre Beispiele zu einem großen Teil aus der Kombinatorischen Optimierung bezogen (Kürzeste Wege, Travelling Salesman), und umgekehrt diese Beispiele der Polyedertheorie und Linearen Optimierung eine algorithmische Richtung gaben. Diese gemeinsame Klammer wurde vielleicht erstmals in den grundlegenden Arbeiten von Jack Edmonds aus den 60er Jahren herausgestellt, in denen er stets die enge Verbindung von effizienten Lösungsstrategien und guten polyedrischen Charakterisierungen eines gegebenen Problems betonte.

Diese zwei Themen „Effiziente Algorithmen" und „Kombinatorik der Polyeder" bilden das Grundmotiv und den roten Faden durch das monumentale Werk von Lex Schrijver. Vergleicht man sein Opus mit dem ersten zu diesem Thema erschienenen Buch von Lawler 1976, so bekommt man eine Ahnung, mit welchem Tempo sich dieses Gebiet in die Tiefe (und vor allem in die Breite) entwickelt hat, und welcher Anstrengung es bedurfte, alle diese neuen und neuesten Ergebnisse zu sichten, zu ordnen und zu gewichten. Wie soll man also gut 50 Jahre nach dem Simplexalgorithmus ein Buch über ein Gebiet schreiben, in dem aus der Praxis ununterbrochen neue Optimierungsfragen auftauchen – und entweder effizient gelöst werden, oder in die NP-Vollständigkeit verwiesen und anschließend Randomisierungen oder Approximierungen zugeführt werden? Strikte Beschränkung auf die zentralen Ideen, in ihrer historischen Genese dargestellt, oder ein Algorithmen-„tool-kit" für Anwender? Lex Schrijver hat sich für einen dritten Weg entschieden: Er setzt die wesentlichen Sätze aus der Polyedertheorie und anderen Gebieten wie Matroide voraus, oder lässt sie kurz Revue passieren, und hält sich auch im Algorithmenteil merklich zurück. Stattdessen teilt er sein Buch (oder besser gesagt seine drei Bücher) in acht große Teile ein, in denen polyedrische Ideen und Methoden erfolgreich waren, und diskutiert die daraus entstandenen Gebiete mit einer Akribie bis in das kleinste Detail, die ihresgleichen sucht. Das schränkt natürlich den Leserkreis erheblich ein: Für ein erstes Hineinlernen in Kombinatorische Optimierung ist das Buch in jedem Sinn zu gewichtig, aber für den schon einigermaßen Informierten oder Experten ersetzt es eine ganze Bibliothek!

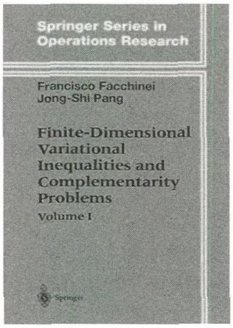
Bei einem Buch von fast 1900 Seiten, davon 300 (!) Seiten Literatur, den Inhalt kurz zu umreißen, geht natürlich nicht, also will ich mich auf die Angabe der acht großen Teile beschränken, und einige Bemerkungen zu Technik und Stil des Autors machen. Diese Teile tragen die Titel:

I. Paths and Flows
II. Bipartite Matching and Covering
III. Nonbipartite Matching and Covering
IV. Matroids and Submodular Functions
V. Trees, Branchings, and Connectors
VI. Cliques, Stable Sets, and Colouring
VII. Multiflows and Disjoint Paths
VIII. Hypergraphs

Als Beispiel will ich aus Teil I die Kapitel 7 bis 8 über das Kürzeste Wege Problem herausgreifen. Das Problem wird knapp vorgestellt samt gewichteter Version, und dann Dijkstra's berühmter Algorithmus in wenigen Zeilen abgehandelt. An dieser Stelle sind die meisten Bücher zu Ende (vielleicht mit ein paar Bemerkungen über offensichtliche Varianten), bei Schrijver geht es jetzt aber erst richtig los. Er bespricht Verbesserungen (k-heaps, Fibonacci heaps), beschreibt in zwei Tabellen mit annähernd 60 Literaturangaben die Entwicklung der Laufzeiten der schnellsten Algorithmen für das ursprüngliche Problem wie auch für das all-pairs Problem, und widmet sich dann in Kapitel 8 der allgemeinen Situation, wenn auch negative Längen erlaubt sind: Bellman-Ford, all-pairs Problem, minimale mittlere Länge, wiederum Tabellen mit einer vollständigen Liste von Laufzeiten, und weitere Varianten. Kapitel 8 schließt mit Notizen und zusätzlicher Literatur und wird abgerundet von einer Tour d'horizon durch die Geschichte des Kürzeste Wege Problems, beginnend bei Wiener 1873 und Lucas 1882 und diversen Originalzitaten (mein Favorit ist ein Zitat von Moore auf Seite 124 anlässlich einer Tagung in Harvard 1957: „The methods given in this paper require no foresight or ingenuity, and hence deserve to be called algorithms.") bis zur großen Zeit der Optimierung nach 1950, in der alle Pioniere von Dantzig, Minty bis Bellman und Ford zu Wort kommen.

Dieser Stil wird durch alle drei Bände durchgehalten: Sehr knappe Einführungen in das jeweilige Thema, ein paar einfache erste Resultate in wenigen Zeilen, und dann eine enzykoplädische Durchsicht der Methoden, Ideen, Varianten, Laufzeiten, mit einer überaus detaillierten Literaturliste und historischen Zusammenfassung. Hier gibt es keine lockeren Zwischenbemerkungen, praktisch keine Abbildungen, keine sanfte Einführung in ein Thema, und keine Übungen. Alles wird nüchtern und mit einem sympathischen Understatement dargeboten – dramatische Verweise auf die große Bedeutung dieses Gebietes, inner- und außermathematisch, wird man hier vergeblich suchen. Man blättert das Buch durch, liest sich hier und dort fest, sinniert über die schiere Menge von mathematischen Publikationen und erkennt mit Respekt und Staunen, dass der Autor alles, aber auch wirklich alles durchgearbeitet hat – eine große Leistung. Er breitet ein mathematisches Panorama aus, das vielleicht über den Horizont dessen, was man davon wissen möchte, hinausreicht, aber es ist eben alles da: ein Monolith der reinen Wissenschaftlichkeit. Ich kenne kein vergleichbares neueres Werk – am nächsten kommt ihm vielleicht Donald Knuth's unvollendete „Art of Computer Programming", das aber bei aller Detailbesessenheit deutlich leserfreundlicher abgefasst ist. Für diese Generation hat Schrijver das definitive Buch über Kombinatorische Optimierung geschrieben, ob es auch danach noch aktuell sein wird, wird sich weisen.

Berlin M. Aigner



F. Facchinei, J.-S. Pang
Finite-Dimensional Variational Inequalities and Complementarity Problems
Vol. I and II

Berlin u. a., Springer, 2003, 728 und 704 S., € 109,95 und € 109,95

Noch vor ca. 25 Jahren konnte Lüthi in einem Lecture Notes-Band auf weniger als 150 Seiten das endlich-dimensionale Komplementaritätsproblem abhandeln. Danach folgten die Monographien von Murty 1988 und von Cottle, Pang und Stone 1992 für lineare Komplementaritätsprobleme. Jetzt umfasst die vorliegende Monographie von Facchinei und Pang mehr als 1400 Seiten. Das mag am Anfang einer Würdigung des Werkes beider Autoren stehen, denen es gelungen ist, die ganze Breite und den aktuellen Stand der Analysis und der Numerik der Variationsungleichungen und der Komplementaritätsprobleme in endlicher Dimension darzustellen. Auch dem Fachmann wird es bei dieser Gelegenheit wieder so recht bewusst, welch enormes Wachstum das Gebiet der Variationsungleichungen und allgemein die Variationelle Analysis und Numerik inzwischen erreicht hat.

Die behandelten Aufgabenstellungen lassen sich rasch präzisieren. Gegeben sei eine abgeschlossene (meist konvexe) Teilmenge K des $\mathbb{R}^n$ und eine auf einer offenen Obermenge von K stetigen Abbildung F in den $\mathbb{R}^n$. Dann versteht man unter einer „Variationsungleichung" (VI) die Aufgabe ein $x \in K$ zu finden, das für alle $y \in K$ die Ungleichung $(y-x)^T F(x) \geq 0$ erfüllt. Ist K ein Kegel, so wird hieraus ein „Komplementaritätsproblem" (CP), nämlich ein $x \in K$ zu finden, was $F(x) \in K^*$ (= Dualkegel zu K) und der Orthogonalität $x \perp F(x)$ genügt. Mit K als Orthanten $\{x \in \mathbb{R}^n : x \geq 0\}$ erhält man das klassische Komplementaritätsproblem: $x \geq 0, F(x) \geq 0$ und $x \perp F(x)$. Die Orthogonalität $x \perp F(x)$ lässt sich auch mit der vektoriellen Minimumfunktion als $\min(x, F(x)) = 0$ fassen. Dies knüpft die Verbindung zur Analysis und Numerik nichtglatter Gleichungssysteme.

Eine Zwischenstellung nehmen die Variationsungleichungen auf polyedrischen Mengen ein. Ist etwa K gegeben durch $\{x : Ax \leq b, Cx = d\}$ mit geeigneten Matrizen A und C, den Vektoren b und d, dann ist dank des Dualitätssatzes der linearen Optimierung die Variationsungleichung auf K

äquivalent zu dem „gemischten" Komplementaritätsproblem: Finde (x, λ, μ) derart, dass

$$0 = F(x) + C^T \mu + A^T \lambda$$
$$0 = d - C x$$
$$0 \leq \lambda \perp b - A x \geq 0.$$

Um die Fülle des Stoffes zu umreißen, wird der Inhalt der auf zwei Bände verteilten 12 Kapitel im Folgenden vorgestellt.

1. Kapitel Introduction: Begonnen wird mit der formalen Definition und Klassifikation der zentralen Aufgabenstellungen VI und CP. Daran anschließend werden Bezüge zur klassischen Nichtlinearen Optimierung aufgezeigt. Dann wird auf 50 Seiten ein breites Spektrum von konkreten VI und CP Aufgabenstellungen aus Ökonomie, Mechanik und Finanzwirtschaft aufgefächert; zu nennen sind insbesondere das Nash-Cournot Produktions- und Verteilungsproblem, Verkehrsgleichgewichtsmodelle in Netzwerken unter dem Wardropschen Gleichgewichtsprinzip, diskrete einseitige Kontaktprobleme mit Signorini-Bedingungen und verallgemeinerten Coulombschen Reibungsgesetzen unter dem Prinzip maximaler Dissipation, elastoplastische Strukturanalyse für diskrete halbstarre Strukturen, das Preisproblem amerikanischer Finanzoptionen nach einer Diskretisierung der Zeit. Dazu kommen verschiedene Umformulierungen von VI/CP als Systeme glatter, bzw. nichtglatter Optimierungsprobleme, die der Entwicklung der Theorie und der Algorithmen in den nachfolgenden Kapiteln dienen.

2. Kapitel Solution Analysis I: Hier dringen die Verfasser tief in die Nichtlineare Analysis ein. Die endlichdimensionale Theorie des Abbildungsgrades, deren vollständiger Aufbau in der zitierten Monographie von K. Deimling (Nonlinear Functional Analysis) geliefert wird, kommt zum Einsatz, um erste Existenzresultate für VI und CP herzuleiten. Diese Existenzaussagen sind weitreichender, insbesondere unter dem Aspekt der Stabilität und Sensitivität (dem ein eigenes Kapitel gewidmet ist), als die Ergebnisse, die sich mittels des konzeptionell einfacheren Zugangs über Fixpunktargumente erhalten lassen. Weiterhin werden in diesem Kapitel wichtige strukturelle Eigenschaften der Lösungsmenge von VI/CP untersucht, wie Eindeutigkeit, Konvexität, Kompaktheit und Zusammenhang. Zudem illustriert ein vereinfachtes Kontaktproblem mit vorgegebenem Reibungskoeffizienten die entwickelte Existenztheorie.

3. Kapitel Solution Analysis II: Als Werkzeuge der nichtglatten Analysis werden Bouligand-differenzierbare Funktionen (lokal Lipschitzstetige Funktionen, die klassische Richtungs-Ableitungen besitzen), Constraint Qualifications (CQ) der Optimierungstheorie und die Hoffmansche Fehlerschranke für Polyeder herangezogen zur Untersuchung lokaler Eindeutigkeit der Lösung von VI/CP. Zerfällt die definierende Menge K einer VI in ein kartesisches Produkt von Mengen niedriger Dimension, wird gezeigt, wie die Lösungstheorie weiter verfeinert werden kann, insbesondere mit einem Ergebnis über den Zusammenhang der Lösungsmenge im nichtmonotonen Fall.

4. Kapitel The Euclidean Projector and Piecewise Functions: Wie bereits im 1. Kapitel gesehen, spielt in der Gleichungs- und Fixpunktformulierung von VI auf konvexe, abgeschlossene K die Euklidische Projektion π_K auf K eine zentrale Rolle. Daher wird jetzt, um die Sensitivitätsanalyse im nächsten Kapitel vorzubereiten, die Differenzierbarkeit dieser Lipschitzstetigen Abbildung eingehend untersucht. Dies ist eine nichttriviale Fragenstellung; belegt doch ein dreidimensionales Beispiel, dass die Projektion i.a. keine einseitigen Richtungsableitungen in einem Punkt außerhalb von K besitzt. Um hier weiterzukommen, werden also strukturelle Voraussetzungen an K benötigt. Ist K ein Polyeder in $\mathbb{R}^n$, ist π_K Bouligand-differenzierbar auf ganz $\mathbb{R}^n$ mit expliziter Formel für die Richtungsableitung. Ist die konvexe Menge K endlich darstellbar, d. h.

$$K = \{x \in \mathbb{R}^n : h(x) = 0, g(x) \leq 0\}$$

mit h affin, sowie g C^1 und konvex, so lässt sich unter einer geeigneten CQ für g und h

beweisen, dass π_K stückweise C^1 ist. Diese wichtige Klasse nichtglatter Funktionen wird sodann tiefer analysiert mit dem Ziel eines lokalen Homeomorphismus-Resultates, das den Schlüssel zu der im nächsten Kapitel entwickelten „starken" Stabilitätstheorie liefert. Ebenfalls im Vorgriff wird die stückweise C^1-Differenzierbarkeit auf die parametrische Projektion $\pi_{K(p)}$ ausgedehnt, wobei

$$K(p) = \{x \in \mathbb{R}^n : g(x,p) \leq 0\}$$

von $p \in P \subset \mathbb{R}^d$ abhängt und geeignete CQ-Voraussetzungen an die C^2-Funktion g gestellt werden.

5. Kapitel Sensitivity and Stability: Hier steigen die Verfasser in eine „isolierte" Sensitivitätsanalyse ein. D. h. ausgegangen wird von einer isolierten Lösung x^* einer VI zu den Daten K, F und zu folgenden Fragen werden Antworten gesucht: Hat die gestörte VI zu den gestörten Daten L und G eine Lösung nahe zu x^*, ist diese ebenfalls isoliert? Wenn (L, G) gegen (K, F) konvergiert, wird die (möglicherweise nichteindeutige) Lösung der gestörten VI, die nahe zu x^* liegt, gegen x^* konvergieren? Dies schließt die parametrische Analyse ein, wo wie oben skizziert $K = K(p)$ und auch F von p abhängt. Hinzu treten hier die Fragen nach Stetigkeit und „Differenzierbarkeit" der Lösungstrajektorie in p nahe p^*. Wie zu erwarten, ist die isolierte Sensitivitätsanalyse bereits gut ausgebaut im Falle einer gestörten Funktion bei fixiertem K. Insgesamt ist die isolierte Sensitivitätsanalyse weiter fortgeschritten als die „totale" Sensitivitätsanalyse, die sich mit der Untersuchung der ganzen Lösungsmenge in Abhängigkeit von Störungen in (K, F) befasst.

6. Kapitel Theory of Error Bounds: Der Leser betritt hier die ganz andere weitläufige Welt der Fehlerschranken, d. h. der Abschätzungen des Abstands zur Lösungsmenge von VI/CP in Gestalt berechenbarer Residuumsfunktionen – punktweise und lokal, bzw. global, u. a. für monotone affine VI, für subanalytische Funktionen und Mengen basierend auf der Ungleichung von Lojasiewicz. Dazu gibt es mannigfache Anwendungen in der Numerik und Bezüge, vor allem zur Identifikation aktiver Nebenbedingungen und zum Prinzip exakter Straffunktionen in der restringierten Optimierung.

Der zweite Band befasst sich mit den Lösungsverfahren für VI/CP. Im Einzelnen

7. Kapitel Local Methods für Nonsmooth Equations: Nach einem Abriss über den Clarkeschen Differenzierbarkeitskalkül werden lokalkonvergente Methoden vom Newton-Typ, die ein nichtglattes Gleichungssystem mit lokal Lipschitzstetiger Funktion lösen, hinsichtlich Konvergenz und Konvergenzrate untersucht.

8. Kapitel Global Methods for Nonsmooth Equations: Die vorstehenden Methoden werden globalisiert, d. h. man befreit sich von der nichtpraktikablen Voraussetzung der hinlänglichen Nähe des Startpunktes zur gesuchten Nullstelle. Dies gelingt über die Einführung geeigneter Gütefunktionen (merit functions) mit Pfadverfolgungsmethoden, bzw. mit Liniensuche und mit anderen Verfahren (insbesondere trust region methods) der restringierten Optimierung.

9. Kapitel Equation-Based Algorithms for CPs: Die Entwicklungen in den beiden vorgegangenen Kapiteln werden auf die Lösung von CP, auch gemischten CP und VI mit einfachen Box-Nebenbedingungen (K ist ein Quader) umgesetzt. Es versteht sich, dass nicht alle möglichen Algorithmen vorgeführt werden, sondern die Analysis beschränkt wird auf einige wenige typische Prototypen, z. B. in der Auswahl der Gütefunktion und damit einhergehend mit der Gleichungsformulierung des CP.

10. Kapitel Algorithms for VIs: Die zuvor präsentierten Lösungsmethoden werden auf VI-Probleme erweitert. Sie sind insbesondere anwendbar auf nichtmonotone Probleme.

11. Kapitel Interior and Smoothing Methods: Nachdem Karmarkar den Durchbruch zu praktikablen effizienten Lösungsmethoden mit polynomial beschränkter Komplexität in der Linearen Optimierung mit seinem Inneren-Punkt-Verfahren (IP-Verfahren) geschaffen hatte, ist inzwischen

eine immense Literatur zu IP-Verfahren zur Lösung linearer und nichtlinearer Optimierungsaufgaben entstanden. Die hier angegebene Darstellung der IP-Verfahren zielt ab auf eine tiefgehende umfassende Theorie, in der ein grundlegendes IP-Verfahren definiert werden kann zur Lösung von allgemeinen restringierten Gleichungssystemen. Diese Theorie – sie ist der Zusammenarbeit von R.D.C. Monteiro und J.S. Pang zu verdanken – stützt sich ihrerseits auf die Theorie der eigentlichen lokalen Homeomorphismen, der Monographie von Ambrosetti und Prodi (A Primer of Nonlinear Analysis) folgend. Dieser Zugang eröffnet die Anwendung von IP-Verfahren, ursprünglich für glatte Optimierungsprobleme entworfen, auf die nichtglatten CP-Probleme. Damit ordnen sich die IP-Verfahren in die große Familie der Glättungsverfahren zur Lösung von CP-Problemen ein.

12. Kapitel Methods for Monotone Problems: Hier findet der Leser eine Sammlung verschiedener Lösungsmethoden zur alleinigen Lösung von monotonen VI. Hierzu zählen die konzeptionell einfachen Projektionsverfahren, Tychonov-Regularisierung, Proximale Punktmethoden, Splitting-Algorithmen; dies sind Methoden, die die gestellte VI durch eine Folge besser gearteter VI ersetzen und so einer Lösung zuführen. Hinzu treten Methoden, die die gestellte VI durch eine Folge im Wesentlichen unrestringierter glatter Gleichungssysteme approximieren; dazu gehören insbesondere iterative Methoden unter Verwendung von Bregman-Funktionen.

Der Referent hat bereits in seiner Inhaltsangabe seine Begeisterung für dieses großartige Werk anklingen lassen. Man spürt an vielen Stellen, dass die Verfasser maßgeblichen Anteil an der Grundlegung der Theorie als auch der Entwicklung der Algorithmen tragen. Vorbildlich ist die Organisation des Stoffes: am Anfang ein Kurzüberblick über das behandelte Gebiet und über das Werk, jedes Kapitel mit einer Einleitung beginnend, die klar die abgehandelten Themen benennt, ausreichend Motivation vor der Ausbreitung der Theorie, heuristische Überlegungen vor der Formulierung der Algorithmen, überschaubare Beispiele zur Eingrenzung der Theorie, mehrere Illustrationen, die dem geometrischen Verständnis analytischer Konstruktionen helfen, weiterhin zu jedem Kapitel ein Aufgabenteil, sowie zu jedem Kapitel abschließend ein Abschnitt „Notes and Comments", der den Stoff einordnet und die Quellen zu den wichtigsten Ergebnissen nennt, der aber auch einen spannend geschriebenen Abriss über die Historie bis hin zu offenen Fragestellungen liefert. Dies alles wird ergänzt – dank moderner Textverarbeitung – um eine Liste der verwendeten Akronyme und Bezeichnungskürzel, ein Index der Definitionen, der wesentlichen Ergebnisse und Algorithmen, sowie um ein 12 Seiten starkes Schlagwortregister.

So spricht dieses Werk nicht nur den Fachmann an. Es ist gleichermaßen bestens für fortgeschrittene Studenten, einschließlich Doktoranden, nach einem Kurs über Theorie und Numerik der mathematischen Optimierung geeignet; Neulinge können sich die wenigen benötigten Vorkenntnisse (Kuhn-Tucker-Theorie, Alternativsätze) etwa aus dem Lehrbuchklassiker von Mangasarian (Nonlinear Programming) besorgen.

Die Bibliographie umfasst für den 1. Band mehr als 650 Einträge, bzw. für den 2. Band sogar mehr als 900 Einträge. Sie ist nicht immer ausgewogen. So werden zum Thema der Tribologie als ein Beispiel eines nichtlinearen CP gleich fünf Arbeiten aus der Ingenieurliteratur aus den Jahren 1984–1986 genannt. Inzwischen hat sich die Angewandte Mathematik dieser Fragestellung angenommen; die Arbeiten von G. Bayada und Koautoren zu dieser Klasse freier Randwertaufgaben blieben jedoch hier unberücksichtigt. Wie die Verfasser darlegen, lassen sich viele iterativen Methoden des 12. Kapitels zur Lösung von monotonen VI in natürlicher Weise im unendlichdimensionalen Hilbertraum fassen. Daher finden sich viele Literaturhinweise zu Originalarbeiten in diesem Rahmen; jedoch fehlt die Monographie von Kaplan und Tichatschke [2] mit ihren Ausführungen zur

Prox-Regularisierung. Wer Motivation aus der Anwendung auf einseitige Kontakt-Reibungsprobleme schöpfen will, ohne sich mit aufwendigen Indizierungen in diskreter Darstellung abzugeben, wird eine kontinuummechanische Formulierung vorziehen und zum Klassiker von Kikuchi und Oden [3] greifen. Inzwischen sind die verwandten Monographien und Abhandlungen von Han und Reddy [1] zur Plasitzität, Krejci [4] zu Hysterese und Marques [50] zu Kontakt und Stoß erschienen.

Die obigen Ergänzungen sollen das Bild nicht trüben. Es ist ein großartiges Werk, das sich über längere Zeit hinweg zur Standardreferenz etablieren wird.

Literatur

[1] Han, W.; Reddy, B.D.: *Plasticity. Mathematical theory and numerical analysis.* Interdisciplinary Applied Mathematics. 9. New York, NY: Springer, 1999.

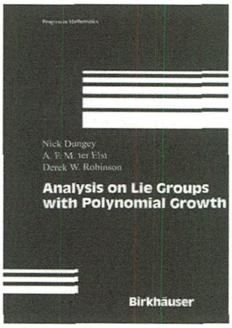
[2] Kaplan, A.; Tichatschke, R.: *Stable methods for ill-posed variational problems: Prox regularization of elliptic variational inequalities and semi-infinite problems.* Mathematical Topics. 3. Berlin: Akademie Verlag, 1994.

[3] Kikuchi, N.; Oden, J.T.: *Contact problems in elasticity: A study of variational inequalities and finite element methods.* SIAM Studies in Applied Mathematics, 9. Philadelphia, PA: SIAM, 1988.

[4] Krejci, P.: *Evolution variational inequalities and multidimensional hysteresis operators.* In: Pavel Drabek et al. (ed.): *Nonlinear differential equations*, Res. Notes Math. Boca Raton, FL, USA: Chapman & Hall/CRC., 47 – 110, 1999.

[5] Monteiro Marques, M.D.P.: *Differential Inclusions in Nonsmooth Mechanical Problems: Shocks and Dry Friction.* Basel, Boston, Birkhäuser, 1993.

München J. Gwinner



N. Dungey, A.F.M. ter Elst, D.W. Robinson
Analysis on Lie Groups with Polynomial Growth
Progr. in Math. 24

Basel u. a., Birkhäuser, 2003, 328 S., € 98,–

Thema dieses Buches sind weitreichende Verallgemeinerungen der Lösungstheorie der Wärmeleitungsgleichung auf $\mathbb{R}^n$. Die Verallgemeinerungen bestehen einerseits darin, daß der zugrundeliegende Raum nicht mehr der $\mathbb{R}^n$ sein muß, sondern eine Lie-Gruppe G von polynomialem Wachstum, und andererseits der Differentialoperator zu einer deutlich allgemeineren Klasse von linearen Differentialoperatoren zweiter Ordnung gehören darf, den sogenannten subelliptischen Operatoren. In diesem allgemeineren Kontext wird untersucht, unter welchen Bedingungen so ein Operator H analog zum Wärmeleitungsoperator eine Einparameterhalbgruppe S_t von Operatoren auf L_p-Räumen erzeugt und wann S_t als Faltungshalbgruppe durch einen Kern K_t gegeben ist. Die Hauptresultate des Buches beziehen sich dann auf das Verhalten von K_t für sehr kleine und sehr große t.

Wir beschreiben den mathematischen Rahmen des Buches etwas genauer: Das *polynomiale Wachstum* der betrachteten Lie-Gruppen bezieht sich auf das Wachstum des Volumens (Haarmaß) einer Kugel (bzgl. einer (rechts)invarianten Metrik) in Abhängigkeit von ihrem Radius. Polynomiales Wachstum stellt eine starke Einschränkung dar. Alle Lie-Gruppen von polynomialem Wachstum sind unimodular, d. h. linksinvariante Maße sind automatisch auch rechtsinvariant. Andererseits kann eine halbeinfache Lie-Gruppe nur von polynomialem

Wachstum sein, wenn sie kompakt, also von endlichem Volumen ist. Typischerweise ist eine Lie-Gruppe von polynomialem Wachstum aus einer auflösbaren und einer kompakten Gruppe zusammengebaut und der auflösbare Teil ist nicht sehr weit davon entfernt nilpotent zu sein. Die mathematisch präzise Fassung dieser letzten, sehr schwammigen, Aussage ist die Konstruktion des *Nilschattens* einer Lie-Gruppe von polynomialem Wachstum. Der Nilschatten spielt in der Analysis auf Lie-Gruppen von polynomialemWachstum eine zentrale Rolle, da er es erlaubt, bekannte Techniken der Analysis auf nilpotenten Gruppen für diese allgemeinere Situation nutzbar zu machen.

Die oben schon angesprochenen *subelliptischen Operatoren* bekommt man über die reguläre Darstellung (d. h. Translationen im Argument) der Lie-Gruppe auf Räumen von Funktionen auf G. Diese Darstellungen leitet man mithilfe der Exponentialfunktion zu einer Darstellung der Lie-Algebra $\mathfrak{g}$ von G durch Differentialoperatoren ab und wählt dann ein endliches Erzeugendensystem $a_1, \ldots, a_d$ für $\mathfrak{g}$. Sind die a_j linear unabhängig, spricht man auch von einer *algebraischen Basis* (auch wenn $\mathfrak{g}$ nicht frei ist). Schreibt man A_j für den Operator, durch den a_j dargestellt wird, dann sind die subelliptischen Operatoren von der Form

$$H = \sum_{i,j=1}^{d} c_{ij} A_i A_j,$$

wobei die c_{ij} eine komplexe Matrix C bilden, deren Realteil $\Re(C)$ positiv definit mit $\Re(C) > \mu I$ mit $\mu > 0$ ist. Dabei ist zu beachten, daß d in der Regel sehr viel kleiner als die Dimension des Vektoraums $\mathfrak{g}$ ist,was das *sub* in subelliptisch und die zusätzlich auftretenden technischen Schwierigkeiten erklärt.

Zu jeder algebraischen Basis findet man eine subelliptische Distanzfunktion (über Längen von Wegen, deren Ableitung fast überall im Spann der algebraischen Basis liegt) und dementsprechend subelliptische Kugeln, deren Volumen V' zusammen mit der subelliptischen Distanz $|g|'$ vom Einselement zu subelliptischen Gauß-Funktionen

$$G_{b,t}(g) := V'(t)^{-1/2} e^{-b(|g|')^2 t^{-1}}$$

führen. Ein wesentlicher Punkt des vorliegenden Buches ist die Angabe von Bedingungen dafür, daß ein subelliptischer Operator H eine Einparameterhalbgruppe erzeugt, die durch einen Faltungskern $K_t(g)$gegeben ist, der glatt ist und dessen partielle Ableitungen (in Multiindex-Schreibweise aus den A_j gebildet) sich durch subelliptische Gauß-Funktionen in der Form

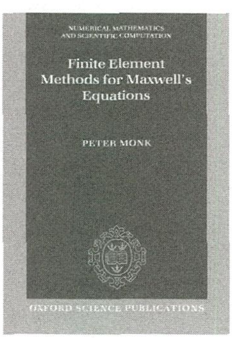
$$|A^\alpha K_t(g)| \leq c t^{-|\alpha|/2} e^{\omega t} G_{b,t}(g)$$

abschätzen lassen. Solche Abschätzungen sind wegen des $e^{\omega t}$-Faktors nur für kleine t aussagekräftig. Brauchbare Abschätzungen durch Gauß-Funktionen für große t erhält man durch Kombination mit L_2-Abschätzungen der Einparameterhalbgruppe und ihren Ableitungen. Technisches Hilfsmittel sind hier Dilatationen, wie man sie aus dem Studium homogener nilpotenter Lie-Gruppen kennt. Nutzbar werden sie durch Übertragung der Situation in den Nilschatten, wobei man sich variable statt konstanter Koeffizienten (bzgl. der zu betrachtenden algebraischen Basis) einhandelt, was zu weiteren technischen Komplikationen führt.

Das behandelte Thema ist in seinen Details ausgesprochen technisch. Dies gilt sowohl für die strukturtheoretischen Aspekte (das Kapitel über die Konstruktion des Nilschattens ist 60 Seiten lang und macht damit fast ein Viertel des Haupttextes aus) als auch für die analytischen Aspekte. Die Autoren geben sich aber die allergrößte Mühe, dem Leser zu helfen die Übersicht zu bewahren. Die Sätze sind sehr sorgfältig mit allen Voraussetzungen formuliert, wo Generalvoraussetzungen gemacht werden, werden sie in den jeweiligen Einleitungen herausgehoben. Die Liste der verwendeten Notationen ist extrem hilfreich und nicht bewiesene Resultate werden präzise zitiert. Dies macht zum Beispiel das Kapitel II *General Formalism* zu einer hilfreichen Einführung in die einschlägigen Methoden, die wesentliche Ideen herausarbeitet und nicht mit technischen Beweisen überfrachtet ist.

Das Buch ist als Monographie zu verstehen, nicht als Lehrbuch. Eine Reihe von Resultaten über subelliptische Operatoren mit reellen Koeffizienten sind schon anderswo dargestellt worden, speziell in dem Band *Elliptic Operators and Lie Groups* von D.W. Robinson, das immer wieder als Referenz für grundlegende Eigenschaften dient. Aus meiner Sicht ist der Versuch der Autoren, ihre Forschungsergebnisse aus den letzten zehn Jahren für eine interessierte Leserschaft leichter verfügbar zu machen, sehr gut gelungen. Das Buch wird, ebenso wie der erwähnte Vorgängerband von D.W. Robinson, sicher ein Standardwerk für alle, die im Bereich Analysis von Differentialoperatoren auf Lie-Gruppen arbeiten wollen.

Paderborn J. Hilgert



P. Monk
Finite Element Methods for Maxwell's Equations

Oxford University Press, 2003, 450 S., £ 59,95

Wie in vielen anderen Bereichen der Ingenieur-, Natur- und Wirtschaftswisenschaften besteht auch an der numerischen Simulation komplexer elektromagnetischer Phänomene ein starkes und immer wichtiger werdendes Interesse. Dies drückt sich aus in einer Vielzahl von Publikationen, Lehrbüchern und Programmbibliotheken, die sich allerdings in der Mehrzahl an Physiker und Elektroingenieure richten. Die durch die Anwendung numerischer Verfahen, wie Finite-Differenzen-, Finite Element- oder Finite-Volumen-Verfahren auftretenden Fragestellungen haben auch auf mathematischer Seite dem Studium der Maxwellschen Gleichungen neue Impulse verliehen. Wie der Autor in der Einleitung schreibt, ist es ein Anliegen dieser Monographie, die für das Verständnis der Finite-Element-Methoden notwendige grundlegende Theorie der Maxwellschen Gleichungen zu beschreiben.

Das Buch wendet sich sowohl an Mathematiker, die an Anwendungen und numerischer Simulation von Wellenausbreitungsphänomenen interessiert sind, als auch an Ingenieure und Physiker, die ihre Kenntnisse über die mathematischen Grundlagen der Maxwellschen Gleichungen (im Frequenzbereich) und die Theorie der Finite-Element-Verfahren vertiefen wollen.

Der Autor legt den Schwerpunkt auf die analytischen Aspekte wie die Formulierungen der Variationsgleichungen in geeigneten Sobolevräumen, der Herleitung von Konvergenzaussagen und asymptotischen Fehlerordnungen. Auf die Behandlung der diskreten, endlich dimensionalen Probleme mit modernen Methoden wie den Multipol- oder Panel-Clustering-Verfahren wird bewusst verzichtet.

In Kapitel 1 werden Rand- und Streuprobleme für die zeitharmonischen Maxwellgleichungen formuliert, sowie die Materialgleichungen, die Stetigkeitsbedingungen an Grenzflächen sowie die Silver-Müller-Ausstrahlungsbedingung.

Im ersten Teil von Kapitel 2 werden die grundlegenden funktionalanalytischen Hilfsmittel wie der (verallgemeinerte) Satz von Lax-Milgram oder die Fredholmsche Alternative ohne Beweis zusammengestellt. Im zweiten Teil werden Konvergenzaussagen für eine abstrakte Diskretisierungstheorie bewiesen, die insbesondere auf gemischte Probleme zugeschnitten ist. Cea's Lemma und die Bedeutung der Babuška-Brezzi Bedingung für Existenz- und Konvergenzaussagen werden ausführlich erläutert.

Neben einer kurzen Wiederholung der klassischen Sobolevräume und der Regularitätstheorie für skalare elliptische Randwertprobleme werden in Kapitel 3 die für die Maxwellschen Gleichungen relevanten Sobolevräume vektorwertiger Funktionen eingeführt, Charakterisierungen, Einbettungs- und Spursätze, sowie die Helmholtzzerlegung bewiesen.

Kapitel 4 beschäftigt sich mit Randwertproblemen für die Maxwellschen Gleichungen in beschränkten Gebieten unter Impedanzrandbedingungen. Der Lösungsraum ergibt sich als unkonventioneller Unterraum von $H(\mathrm{curl};\Omega)$.

Die Sobolevräume $H^1(\Omega)$, $H(\mathrm{curl};\Omega)$, $H(\mathrm{div};\Omega)$ sowie der $L^2(\Omega)$ bilden über den Gradienten, die Rotation und die Divergenz ein Rham-Diagramm. Die Konstruktion endlich dimensionaler Teilräume dieser Funktionenräume und der zugehörigen Interpolationsoperatoren sollte diskrete Rham-Diagramme liefern, die mit dem kontinuierlichen Diagramm kommutieren. Dies führt auf spezielle konforme Finite Elemente, deren Konstruktionen und Approximationseigenschaften auf Tetraeder in Kapitel 5 und auf Hexaeder in Kapitel 6 ausführlich dargestellt werden.

In Kapitel 7 werden die in den vorhergehenden Abschnitten entwickelten Konzepte kombiniert. Fehlerabschätzungen stehen im Mittelpunkt dieses Kapitels, wobei die Zugänge über die Dualität und die Theorie kollektiv kompakter Operatoren ausführlich dargestellt werden.

Die Alternativen und Ergänzungen von Kapitel 8 runden die Behandlung der Randwertprobleme für die Maxwellschen Gleichungen in beschränkten Gebieten ab.

In Kapitel 9 werden klassische Streuprobleme für die Maxwellschen Gleichungen formuliert, welche auf Randwertprobleme in Außengebieten führen. Der Fall der elektrisch leitenden Kugel wird explizit über die Entwicklung nach vektorwertigen Wellenfunktionen diskutiert.

In Kapitel 10 werden die Streuprobleme (oder auch allgemeinere Randwertprobleme in Außengebieten) durch die Einführung der Calderon-Abbildung auf Randwertprobleme in beschränkten Gebieten zurückgeführt, wobei auf dem äußeren Rand nichtlokale Randbedingungen auftreten.

Als alternativer Zugang wird in Kapitel 11 eine Gebietszerlegungsmethode analysiert, die als Multiplikatorenmethode interpretiert werden kann und nach der Diskretisierung direkt auf ein endliches System linearer Gleichungen führt.

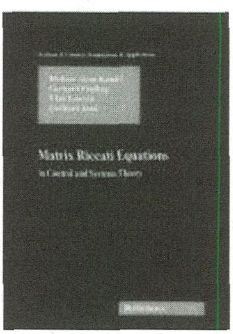
Bei den bisher studierten Streuproblemen wird ein homogenes isotropes Hintergrundmedium angenommen. Anwendungen, etwa auf geophysikalische Explorationsprobleme, erfordern die Berücksichtigung von geschichteten Hintergrundmedien, womit sich Kapitel 12 ausführlich beschäftigt. Besondere Aufmerksamkeit wird der Konstruktion des Greenschen Tensors gewidmet, der für die Darstellung des Feldes außerhalb des Streukörpers über die Stratton-Chu Formel benötigt wird. Die „overlapping method" wird zunächst am einfachen Fall des homogenen isotropen Medium beschrieben und anschließend auf den 2-Schicht-Fall übertragen.

Kapitel 13 spricht einige algorithmische Aspekte an. Die Diskretisierung der Streuprobleme über Finite Elemente führt auf lineare Gleichungssysteme mit komplexwertigen, dünn besetzten, aber nicht hermiteschen Matrizen. Im Gegensatz zum Fall der skalaren Helmholtzgleichung sind die Matrizen auch für kleine Wellenzahlen nicht positiv definit. Iterative Lösungsmethoden werden in Abschnitt 13.2 diskutiert, auf die Abhängigkeit der Fehlerabschätzung von der Wellenzahl, a posteriori Fehlerschätzer und die Methoden der absorbierenden Randbedingungen wird in den Abschnitten 13.3, 13.4 und 13.5 eingegangen.

Das letzte Kapitel 14 führt in die Theorie inverser Streuprobleme ein. Da solche Fragestellungen in der zerstörungsfreien Materialprüfung, der medizinischen Diagnostik und vielen anderen Bereichen auftreten, hält der Autor (und ebenso der Rezensent) eine Einführung in diese Problematik auch in einer Monographie über Finite Elemente durchaus für angemessen – zumal sich Fragestellungen und Methoden bei „direkten" und „inversen" Streuproblemen gegenseitig befruchten.

Die Monographie ist gut zu lesen, klar strukturiert und benutzt die in der mathematischen Community üblichen Notationen. Es liefert einen wertvollen Beitrag für das Gebiet der mathematischen Theorie der Maxwellschen Gleichungen und der Finiten Elemente und ergänzt die wenigen Monographien, die es hier bisher gibt, insbesondere die von Cessenat (*Mathematical Methods in Electromagnetism*), Colton und Kress (*Inverse Acoustic and Electromagnetic Scattering Theory*) und Nédélec (*Acoustic and Electromagnetic Equations*).

Karlsruhe A. Kirsch



H. Abou-Kandil, G. Freiling, V. Ionescu, G. Jank
Matrix Riccati Equations in Control and Systems Theory

Basel u. a., Birkhäuser, 2003, 592 S., € 108,–

Die Matrix-Riccati-Gleichungen spielen in der Regelungs- und Systemtheorie eine große Rolle. Bekannte Anwendungen sind die lineare optimale Regelung und Filterung mit quadratischem Gütefunktional, die robuste Regelung linearer Systeme (H^∞-Regelung), die Lösung linear-quadratischer Differentialspiele oder die Bestimmung linear-quadratischer stochastischer Optimalregelungen. Seit ca. 1960 sind daher intensive Untersuchungen über die verschiedenen Matrix-Riccati-Gleichungen durchgeführt worden. Im Vordergrund stand dabei die symmetrische algebraische Matrix-Riccati-Gleichung für zeitkontinuierliche und zeitdiskrete Systeme. Einen Überblick gibt hierüber das Buch [1]. Eine frühe Übersicht über Matrix-Riccati-Differentialgleichungen wurde schon 1972 von Reid [2] veröffentlicht. Ein neuer Zugang zu den Matrix-Riccati-Gleichungen ergab sich schließlich im Zusammenhang mit der Verallgemeinerung der Kalman-Popov-Yakubovich-Theorie für den Entwurf robuster Regelungssysteme [3].

Das hier betrachtete Buch fasst alle diese Ergebnisse zusammen. Symmetrische und nicht-symmetrische Matrix-Riccati-Gleichungen in algebraischer Form oder als Differential- oder Differenzengleichungen werden vereinheitlicht untersucht. Existenz, Eindeutigkeit, Lösungseigenschaften, Vergleichs- und Monotonie-Resultate werden diskutiert. Im Hinblick auf die Anwendungen steht dabei besonders die Frage nach der Existenz und Eindeutigkeit einer positiv (semi-) definiten Lösung, die z. B. eine stabilisierende Regelung erzeugt, im Vordergrund. Das Buch bietet hierzu eine Fülle von Ergebnissen, die auf der aktuellen Literatur (bis ca. 2002) und auf vielen eigenen Untersuchungen der Autoren beruhen. Ergänzend zu den offiziellen vier Verfassern sind noch zwei Autoren zu nennen: R. Stefan und C. Oara, die nach dem überraschenden Tod von V. Ionescu im Mai 2000 dessen Buchteil überarbeiteten und vervollständigten.

Der umfangreiche Inhalt kann nur kurz durch Stichworte des Inhaltsverzeichnisses gekennzeichnet werden. Nach einem einführenden Überblick über lineare Differentialgleichungen, Sylvester-, Lyapunov- und Stein-Gleichungen beinhaltet das 2. Kapitel über Hamilton-Matrizen und algebraische Riccati-Gleichungen sehr detaillierte Ergebnisse über die Lösung symmetrischer und nicht-symmetrischer, zeitkontinuierlicher und zeitdiskreter Matrix-Riccati-Gleichungen (68 Seiten). Das 3. Kapitel enthält allgemeine Aspekte der Riccati-Differential- und Differenzengleichungen im Falle konstanter, periodischer und allgemein zeitveränderlicher Koeffizienten (92 Seiten). Symmetrische (bzw. allgemeiner: Hermitesche) Riccati-Differentialgleichungen werden in Kapitel 4 betrachtet. Vergleichsergebnisse und Monotonieeigenschaften sowie die Parameterabhängigkeit der Lösungen stehen im Mittelpunkt der Untersuchungen (77 Seiten). Den periodischen Riccati-Differentialgleichungen ist das Kapitel 5 gewidmet (43 Seiten). Das 6. Kapitel enthält eine Reihe von Verallgemeinerungen entsprechend den unterschiedlichen Anwendungen bei Differentialspielen (Nash, Stackelberg), in der optimalen stochastischen Regelung und bei Markovschen Sprungsstemen (111 Seiten).

Die Kapitel 7–9 folgen den Ergebnissen aus [3] und erweitern diese. Trotz des Versuchs einer einheitlichen Gesamtdarstellung der Theorie der Riccati-Gleichungen findet hier ein Einschnitt statt, und grundsätzlich könnten diese Kapitel auch unabhängig von den vorhergehenden sechs präsentiert werden. Man erkennt dies auch z. B. an der erneuten Behandlung von Nash- und Stackelberg-Spielen im 9. Kapitel. Jedoch stellt der neue operatorbasierte Lösungsansatz ein wichtiges Verfahren für die Untersuchung von Riccati-Gleichungen dar und ist daher zu Recht in dieses Buch aufgenommen worden. Kapitel 7 führt das sogenannte Popov-Triplet ein und stellt die Verbindung zur Kalman-Popov-Yakubovich-Theorie her. Auch werden Riccati-Differentialungleichungen betrachtet, was den Anschluss an die Theorie der Linear Matrix Inequalities erlaubt (56 Seiten). Auf dieser Grundlage werden in Kapitel 8 Fragen der robusten Regelung behandelt: Nehari-Probleme und Störgrößenunterdrückung werden diskutiert (29 Seiten). Wie schon erwähnt, wendet man sich im 9. Kapitel erneut den Differentialspielen zu und entwickelt mit der neuen Theorie einen modifizierten Ansatz zur Lösung der auftretenden nichtsymmetrischen Riccati-Gleichungen (32 Seiten).

Das Buch stellt den aktuellen Stand über analytische Resultate für die verschiedenen Matrix-Riccati-Gleichungen dar. Dagegen werden numerische Aspekte nur an wenigen Stellen angesprochen. Das Buch dient zweifellos als wichtiges Nachschlagwerk, wobei man sich jedoch ein wesentlich umfangreicheres Sachverzeichnis gewünscht hätte. Auch die Liste der Abkürzungen bzw. Akronyme ist nicht vollständig. Diese kleineren formalen Mängel beeinträchtigen jedoch die Substanz des Buches in keiner Weise. Das Buch eignet sich auch als Lehrbuch insbesondere in der Angewandten Mathematik. Alle Ergebnisse werden explizit bewiesen und können dadurch nachvollzogen werden, ohne auf andere Literatur zurückgreifen zu müssen. Insgesamt kann das Buch als das neue wichtige Standardwerk über Matrix-Riccati-Gleichungen empfohlen werden.

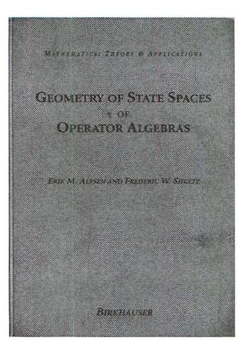
Literatur

[1] P. Lancaster, L. Rodman: Algebraic Riccati Equations. Oxford Science Publications, New York, 1995.

[2] W. T. Reid: Riccati Differential Equations. Academic Press, New York-London, 1972.

[3] V. Ionescu, C. Oara, M. Weiss: Generalized Riccati Theory and Robust Control. John Wiley & Sons, Chichester, 1999.

Wuppertal P. C. Müller



E. M. Alfsen, F. W. Shultz

Geometry of State Spaces of Operator Algebras

Basel, Birkhäuser, 2003, 480 S., € 98,–

The quantum mechanical formalism is based on the duality between *states* and *observables*. For systems with finitely many degrees of freedom, the states are (unit) vectors ψ in a complex Hilbert space H and the observables are (in general unbounded) self-adjoint operators T on H. The pairing (measurement process) is given by

(1) $\psi, T \mapsto \omega_\psi(T) := (\psi | T\psi)$

where $(\,|\,)$ denotes the inner product. Viewed as a linear functional in T, ω_ψ is called the "vector state" associated with ψ. More general "mixed" states have the form

(2) $T \mapsto tr\,(\Psi T)$

where Ψ is a positive trace-class operator on H called a "density matrix", normalized by $tr\,\Psi = 1$.

For systems with infinitely many degrees of freedom, arising in quantum statistical mechanics and quantum field theory, it is not natural to consider a specific Hilbert space as the state space. One reason is that the infinite dimensional Heisenberg group admits many inequivalent representations, unlike the finite-dimensional case where the Stone-von Neumann uniqueness theorem holds. On the other hand there is still a universal C^*-*algebra* generated by the "canonical commutation relations" (CCR). The same is true for the "canonical anti-commutation relations" (CAR) in the fermionic setting. Accordingly, the observables are modelled on an (abstract) C^*-algebra A (i.e., a complex Banach $*$-algebra satisfying $\|a^* a\| = \|a\|^2$ for all $a \in A$), more precisely its self-adjoint part

(3) $A_h := \{a \in A : a^* = a\}$.

The dual object "state" is defined as a (normalized) linear functional $\varphi : A \to \mathbb{C}$ satisfying the positivity condition

(4) $\varphi(a^* a) \geq 0$

for all $a \in A$. The connection to Hilbert spaces and vector states is not lost in this setting since the well-known Gelfand-Naimark-Segal (GNS) construction associates to each state φ a $*$-representation π_φ of A on a complex Hilbert space H_φ making φ into a vector state.

The "observable space" A_h is not closed under the associative product (unless A is commutative) but the (non-associative) *anti-commutator*

(5) $a, b \mapsto a \circ b := \frac{1}{2}\,(ab + ba)$

is a bilinear operation on A_h satisfying the "Jordan identity"

(6) $a^2 \circ (a \circ b) = a \circ (a^2 \circ b)$.

A real vector space J endowed with a commutative product $a \circ b$ satisfying (6) is called a *Jordan algebra*. Finite dimensional examples are the self-adjoint $(r \times r)$-matrices

(7) $\mathcal{H}_r(\mathbb{K}) = \{x = (x_{ij}) \in \mathbb{K}^{r \times r} : x_{ij}^* = x_{ji}\}$

over the real division $*$-algebras $\mathbb{K} = \mathbb{R}, \mathbb{C}, \mathbb{H}$ (quaternions). For $r = 3$ the (non-associative) octonions $\mathbb{O}$ (Cayley numbers) still yield a Jordan algebra, the so-called *exceptional* Jordan algebra $\mathcal{H}_3(\mathbb{O})$ of dimension 27 – a major discovery, comparable (and closely related) to Killing's discovery of the exceptional Lie groups. For $r = 2$, one may define $\mathcal{H}_2(\mathbb{K})$ for any euclidean vector space $\mathbb{K} \neq 0$, identifying x^* with the linear form corresponding to $x \in \mathbb{K}$. This leads to the so-called *spin factors*, which generate the CAR-relations.

Infinite-dimensional Jordan algebras were poorly understood until the influential paper [ASS] which introduced the *JB-algebras* as a generalization of the (finite-dimensional) formally-real Jordan algebras classified in [JNW]. A real Banach space J endowed with a Jordan algebra product $a \circ b$ is called a *JB*-algebra if

(8) $\|a^2 + b^2\| \geq \|a\|^2$

for all $a, b \in J$. The self-adjoint part of a C^*-algebra is a *JB*-algebra, and the class of *JB*-algebras (among all order-unit vector spaces) shares many properties with C^*-algebras, such as spectral calculus for "commutative" subalgebras and uniqueness of predual. A *state* of a *JB*-algebra J is a (normalized) linear functional $\varphi : J \to \mathbb{R}$ satisfying

(9) $\varphi(a^2) \geq 0$

for all $a \in J$. Thus a JB-algebra J and its state space $S(J)$ are models for a quantum pairing, more general than the C^*-algebra models $(A_h,\ S(A))$. Regarding states as the primary notion, it becomes an important problem to find geometric axioms, having some quantum physical interpretation, which characterize

(i) the state spaces $S(J)$ of JB-algebras J, among all compact convex sets, and

(ii) the state spaces $S(A)$ of C^*-algebras A, among all JB-algebra state spaces.

The book under review presents the complete solution of these problems, along with all necessary background in Jordan algebra theory and convexity. It is the culmination of the authors' long-time collaboration and in a sense all the results previously obtained, such as the Gelfand-Naimark type embedding theorem [ASS], the spectral calculus for ordered Banach spaces [AS] and the fine structure of Jordan operator algebras [S] seem to fit in perfectly towards the geometric characterization of state spaces.

For the Jordan algebraic part (Problem (i)) one of the crucial axioms is the *Hilbert ball property*:

Each pair of extreme points generates a face which is a norm exposed Hilbert ball (of arbitrary dimension).

This axiom is closely related to the spin factors $\mathcal{H}_2(\mathbb{K})$ of rank 2. For C^*-algebra state spaces the "3-ball property" ($\mathbb{K} = \mathbb{C}$) is required. In addition, the passage from Jordan algebras to C^*-algebras (Problem (ii)) involves the crucial notion of "orientability", using A. Connes' theory of "facial" derivations of Hilbert space cones, generalized to the Jordan setting in [BI]. The book contains also geometric conditions applying to *pure states*, and the "weakly closed" observable algebras (W^*-algebras and JBW-algebras) and their normal state spaces are also discussed in full detail.

In summary, the book is much more than the elaborate solution of problems (i) and (ii). It gives an up-to-date and pedagogical account of the structure theory of Banach Jordan algebras, of the spectral calculus in the setting of order-unit Banach spaces and of all aspects of convexity theory, in particular the facial structure. With this book, the theory of C^*- and Jordan algebras and their state spaces becomes a "classical" part of theoretical quantum mechanics. One open problem, however, remains: The exceptional Jordan algebra $\mathcal{H}_3(\mathbb{O})$ does not play any distinguished role in this quantum setting, due to the lack of Hilbert space representations. Its role in physics may lie instead in the classical notion of space-time (with its higher dimensions in string theory) and related moduli spaces.

References

[BI] J. Bellissard, B. Iochum: *Homogeneous self-dual cones versus Jordan algebras. The Theory revisited.* Ann. Inst. Fourier (Grenoble) **28** (1978), 27–67.

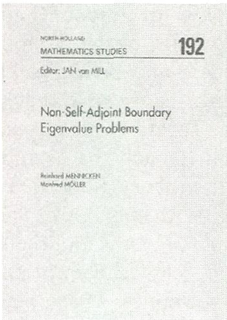
[AS] E.M. Alfsen, F.W. Shultz: *Non-commutative spectral theory for affine function spaces on convex sets.* Mem. Amer. Math. Soc. **172** (1976).

[ASS] E.M. Alfsen, F.W. Shultz, E. Størmer: *A Gelfand-Neumark theorem for Jordan algebras.* Adv. Math. **28** (1978), 11–56.

[JNW] P. Jordan, J. v. Neumann, E. Wigner: *On an algebraic generalization of the quantum mechanical formalism.* Ann. Math. **36** (1934), 29–64.

[S] E. Størmer: *Irreducible Jordan algebras of self-adjoint operators.* Trans. Amer. Math. Soc. **130** (1968), 153–166.

Marburg H. Upmeier



R. Mennicken, M. Möller
Non-Self-Adjoint Boundary Eigenvalue Problems
North-Holland
Math. Studies 192

Amsterdam, Elsevier, 2003, 520 S., € 105

Es ist wohlbekannt, dass zahlreiche Probleme aus den Naturwissenschaften und der Technik zu der Aufgabe führen, Eigenwerte und Eigenfunktionen von linearen Differentialoperatoren zu bestimmen sowie eine oder mehrere gegebene Funktionen und evtl. auch deren Ableitungen (simultan) nach den Eigenfunktionen zu entwickeln. So stößt man beispielsweise immer auf derartige Probleme, sobald man die Fouriersche Methode anwendet, um die Lösungen von Anfangs-Randwert-Problemen bei linearen partiellen Differentialgleichungen zu bestimmen; deshalb hat man den linearen Differentialoperatoren im 20. Jahrhundert große Beachtung geschenkt.

Während die Spektraltheorie selbstadjungierter Differentialoperatoren in vielen Lehrbüchern dargestellt wurde, gibt es über nichtselbstadjungierte gewöhnliche Differentialoperatoren seit dem richtungsweisenden Lehrbuch Neumarks kein Lehrbuch, in dem die zahlreichen tiefliegenden Fortschritte, die im Bereich der Spektraltheorie nichtselbstadjungierter Differentialoperatoren in den letzten 50 Jahren erzielt wurden, in angemessener Weise aufgearbeitet worden sind.

Das hier besprochene Buch von Mennicken und Möller stellt einen gelungenen Versuch dar, die o. g. Lücke zu schließen.

Die Autoren betrachten im ersten Teil ihrer Monographie Systeme linearer Differentialgleichungen der Form

$$y' = [\lambda A_1(x) + A_0(x)]y, \quad x \in [a,b],$$

mit allgemeinen (Mehrpunkt-Integral-) Randbedingungen

$$\sum_{j=0}^{\infty} W^{(j)}(\lambda)\, y(a_j) + \int_a^b W(x,\lambda) y(x) dx = 0,$$

wobei $a_0 = a$, $a_1 = b$ und $a_j \in (a,b)$ für $j \geq 2$. Die $n \times n$ Matrizen $W^{(j)}(\lambda)$ und $W(x,\lambda)$ hängen polynomial vom Eigenwertparameter λ ab.

Im zweiten Teil der Monographie werden Rand-Eigenwertprobleme betrachtet, die von linearen Differentialgleichungen

$$y^{(n)} + \sum_{i=0}^{n-1} p_i(x,\lambda) y^{(i)} = 0$$

und λ-abhängigen Randbedingungen erzeugt werden; hierbei sei $p_i(x,\lambda)$, $0 \leq i \leq n$, jeweils ein Polynom in λ. Weil sich die letzteren Probleme auch als Eigenwertprobleme für Systeme umschreiben lassen, wird die allgemeine Theorie in dem Buch zunächst für Systeme entwickelt und dann auf Gleichungen n-ter Ordnung (unter Berücksichtigung der vorliegenden speziellen Struktur) angewandt; die historische Entwicklung verlief gerade umgekehrt.

Hauptziel des Lehrbuchs ist der Beweis von Entwicklungssätzen von gegebenen Funktionen nach den Eigenfunktionen des betrachteten Eigenwertproblems. Um dieses Ziel zu erreichen kombinieren die Autoren einen von Keldysh (1951) initiierten funktionalanalytischen Ansatz mit der klassischen Konturintegrations-Methode.

Zunächst wird dem Rand-Eigenwertproblem die operatorwertige Funktion

$$T(\lambda) = \begin{pmatrix} T^D(\lambda) \\ T^R(\lambda) \end{pmatrix} : (H_1(a,b))^n \to (L_2(a,b))^n \times \mathbb{C}^n$$

zugeordnet. Hierbei ist $H_1(a,b)$ der Sobolevraum erster Ordnung und

$$T^D(\lambda)y = (\lambda A_1 + A_0)y$$

$$T^R(\lambda)y = \sum_{j=0}^{\infty} W^{(j)}(\lambda)y(a_j) + \int_a^b W(x,\lambda)y(x)dx.$$

Weil $T(\lambda)$ ein beschränkter Fredholm-Operator auf $(H_1(a,b))^n$ ist, der holomorph von λ abhängt, stehen die wohlbekannten Instrumente der Spektraltheorie zur Verfügung. Insbesondere sind für $T(\lambda)$ (und analog für $T^*(\lambda)$) die Begriffe Resolventenmenge, Spektrum, (verallgemeinerter) Eigenvektor etc. wohldefiniert. Die betrachteten Operatoren haben ein diskretes Spektrum und der Hauptteil der Laurententwicklung von $T(\lambda)^{-1}$ läßt sich in der Umgebung eines Eigenwerts λ_0 durch ein kanonisches Biorthogonalsystem von Eigen- und Hauptvektoren von $T(\lambda)$ und $T^*(\lambda)$ für $\lambda = \lambda_0$ darstellen (vgl. Kapitel 1). Diese Darstellung, die für Zweipunkt-Randwertprobleme für Differentialgleichungen n-ter Ordnung bereits von Birkhoff und Tamarkin benutzt wurde (vgl. Neumarks Buch), bildet die Grundlage für die sogenannte Konturintegrations-Methode, weil sie erlaubt, die Partialsummen der Entwicklung einer gegebenen Funktion nach den verallgemeinerten Eigenfunktionen (-vektoren) unter Verwendung eines Konturintegrals darzustellen.

Im Spezialfall $T(\lambda) = T_0 + \lambda T_1$ folgt z. B. aus

$$\frac{1}{\lambda} f = T^{-1}(\lambda) T_1 f + \frac{1}{\lambda} T^{-1}(\lambda) T_0 f$$

durch Integration

$$f = \sum_{|\mu|<r} \operatorname{res}_{\lambda=\mu} (T^{-1}(\lambda) T_1 f) + R_r(f)$$

mit

$$R_r(f) = \frac{1}{2\pi i} \int_{|\lambda|=r} \frac{1}{\lambda} T^{-1}(\lambda)\ T_0 f d\lambda.$$

Dies zeigt, dass f durch die verallgemeinerte Fourierreihe (Birkhoff-Reihe)

$$\sum_{\mu\in C} \operatorname{res}_{\lambda=\mu} T^{-1}(\lambda) T_1 f$$

dargestellt wird, falls f zum Definitionsbereich D_T von $T(\lambda)$ gehört und $\lim_{r\to\infty} R_r(f) = 0$ ist. Gleichzeitig erkennt man, welche Bedeutung einer möglichst präzisen asymptotischen Abschätzung von $T^{-1}(\lambda)$ (und somit der Greenschen Funktion) beim Beweis von Konvergenzaussagen von verallgemeinerten Fourierentwicklungen zukommt.

Zur Analyse von $T^{-1}(\lambda)$ wird (vgl. Kapitel 2) eine Fundamentalmatrix der Differentialgleichung

$$y' = [\lambda A_1(x) + A_0(x) + \frac{1}{\lambda} A_0(x,\lambda)]y$$

(unter der Voraussetzung, dass $A_1(x)$ diagonalisierbar und $A_0(x,\lambda)$ beschränkt ist) asymptotisch abgeschätzt; damit kann anschließend die charakteristische Determinante und – für geeignete Teilklassen – die Resolvente mit der gewünschten Genauigkeit asymptotisch abgeschätzt werden.

Man unterscheidet in diesem Kontext in der Literatur im wesentlichen drei Klassen von Eigenwertproblemen:

1) *Birkhoff-reguläre* und *Stone-reguläre Probleme*, für die auf einer Folge von Kreisen $|\lambda| = r_\nu$ mit $\lim_{\nu\to\infty} r_\nu = \infty$ die Abschätzung $\|T^{-1}(\lambda)\| = O\left(|\lambda|^{s-a}\right)$ gilt, wobei $a > 0$ maximal ist und vom betrachteten Problem abhängt und entweder $s = 0$ (Birkhoff-regulär) oder $s \in [0,\infty)$ (Stone-regulär) gilt.
Diese Problemklassen werden im vorliegenden Buch ausführlich behandelt, und es werden Bedingungen dafür hergeleitet, dass $\lim_{\nu\to\infty} R_{r_\nu}(f) = 0$ gilt. Vereinfacht ausgedrückt kann gesagt werden, dass hierzu f umso glatter sein und umso mehr Randbedingungen erfüllen muß je größer die o. g. Zahl s ist. Insbesondere genügt es z. B. zu fordern, dass $T(\lambda)^{K(s)} f$ im Definitionsbereich von $T(\lambda)$ liegt, wobei K monoton von s abhängt mit $K(0) = 0$ (G. Freiling, Proc. Royal Soc. Edinburgh **108 A**, 45–56, 1988).

2) Probleme, die nicht Stone-regulär sind, für die jedoch auf hinreichend vielen von 0 ausgehenden Strahlen (deren Anzahl von der Ordnung von $T(\lambda)$ abhängt) $\|T^{-1}(\lambda)\| = O(|\lambda|^{s-a})$ mit $s \in (0,\infty)$ gilt, heißen *normal* und besitzen ein in $(L_2(a,b))^n$ vollständiges System von verallgemeinerten Eigenvektoren (vgl. A. Shkalikov, J. Soviet Math. 33, 1311–1342, 1986).

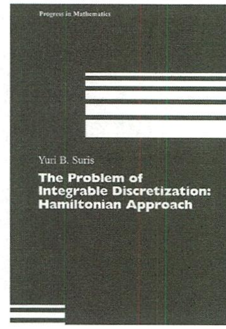
3) Probleme mit diskretem Spektrum, die nicht Stone-regulär oder normal sind, heißen *irregulär*; dann darf $T(\lambda)$ auf allen Strahlen der λ-Ebene für $|\lambda| \to \infty$ exponentiell wachsen. In diesem Fall zeigen die Entwicklungen nach Eigenfunktionen potenzreihenartiges Konvergenzverhalten (vgl. G. Freiling, Proc. Royal Soc. Edinburgh **88 A**, 235–246, 1981, und die darin zitierten grundlegenden Arbeiten von A. Hromov und W. Eberhard zu diesem Themenkreis).

Zusammenfassend halte ich die Monographie von R. Mennicken und M. Möller für eine wesentliche und notwendige Bereicherung der Spektraltheorie nichtselbstadjungierter Differentialoperatoren. Das Buch enthält eine moderne, systematische und in den wesentlichen Bereichen vollständige Darstellung der Theorie Birkhoff- und Stone-regulärer Rand-Eigenwertprobleme (ohne Singularitäten und Umkehrpunkte). Die einzigen Fragestellungen hierzu, die nicht behandelt wurden, sind Aussagen zur punktweisen Konvergenz von Birkhoff-Reihen, wie man sie für Differentialgleichungen n-ter Ordnung bei Wermuth, Kaufmann und Freiling/Ryklov findet sowie Untersuchungen zu den Basiseigenschaften des Systems der verallgemeinerten Eigenvektoren, wie sie von Shkalikov und in allgemeinerer Form von Shkalikov/Tretter bewiesen wurden.

Es soll nicht verschwiegen werden, dass die Darstellung der Resultate für nichtselbstadjungierte Eigenwertprobleme einen hohen technischen Aufwand erfordert, der das erste Lesen des Buches erschwert – dieser Aufwand ist aber unvermeidbar und liegt in der Tiefe und Allgemeinheit der dargestellten Ergebnisse begründet.

Ich halte die Monographie von Mennicken und Möller für ein zeitloses Werk, das sowohl Studierenden, die sich in dieses Gebiet einarbeiten wollen, als auch Wissenschaftlern mit Nachruck empfohlen werden kann.

Duisburg G. Freiling



Y. B. Suris
The Problem of Integrable Discretization: Hamiltonian Approach
PM 219

Basel u. a., Birkhäuser, 2003, 1070 S., € 158,36

Bei der Diskretisierung dynamischer Systeme ist es in zunehmenden Maße notwendig geworden qualitative Aspekte des jeweils betrachteten Systems bei der Diskretisierung zu erhalten. Dies zeigt sich beispielsweise bei der numerischen Behandlung von dynamischen Systemen auf Langzeitintervallen. Hier führen sorgsam gewählte Diskretisierungen, die besonders viele qualitative Eigenschaften eines dynamischen Systems erhalten, zu sehr hoher numerischer Stabilität. Mögliche qualitative Aspekte sind beispielsweise die symplektische und hamiltonische Struktur von Systemen. Dieser Zugang wird beispielsweise auch in dem Buch von Sanz-Serna „Symplectic integrators for Hamiltonian problems: an overview" berücksichtigt. Eine systematische Herleitung einer „kanonischen" Diskretisierung eines gegebenen dynamischen Systems gibt es in der Regel jedoch nicht.

Ein besonderer Zweig der dynamischen Systeme sind integrable Systeme. Diese Systeme weisen eine sehr gut verstandene hamiltonische Struktur auf, welches nicht nur in Hinblick auf die exakte Lösbarkeit der Systeme hilfreich ist, sondern auch in Hinblick auf deren Diskretisierung. In seinem Buch beschreibt Y. Suris einen von ihm mitentwickelten systematischen Zugang, der eine entsprechend stabile Diskretisierung von endlich dimensionalen integrablen dynamischen Systemen erlaubt. Er betrachtet hierbei Systeme, die auf gewöhnlichen Differentialgleichungen beruhen, unter Ausnahme nichtautonomer Differentialgleichungen, wie etwa der Painlevegleichungen. Die Behandlung von endlichdimensionalen Differential-Differenzen Systemen, wie z. B. dem Todagitter zeigt jedoch auch Bezüge zur Diskretisierung von integrablen partiellen Differentialgleichungen auf.

Y. Suris beschreibt sein Buch selbst als eine Mischung aus Monograph und Handbuch. Die Absicht des Autors war es ein Handbuch zu verfassen, welches einen gründlichen Überblick über die Diskretisierung der oben erwähnten integrablen Systeme gibt, als auch ein in sich geschlossenes Werk zu schaffen, welches sich zum Studium eignet. Dies ist ihm hervorragend gelungen.

Entsprechend dieser Vorgabe ist das Buch folgendermassen aufgebaut: Teil I die „General theory" beschäftigt sich mit den wichtigsten Begriffen aus der hamiltonischen Theorie der Poisonmannigfaltigkeiten und der R-matrix-Theorie. Weiterhin wird der systematische Zugang zur oben erwähnten Diskretisierung in einer Art „Rezept" beschrieben. Teil I ermöglicht Studierenden im Hauptstudium das Studium des weiteren Buchs ohne große Hinzunahme von weiteren Referenzen. Zusätzlich ist ein sehr ausführliche Bibliographie beigefügt, die ein Vertiefen des Stoffes einfach macht.

Teil II „Lattice Systems" und Teil III „Systems of classical mechanics" widmen sich der detaillierten Darstellung einer großen Zahl von Klassen endlich-dimensionaler integrabler Systeme; allen voran das Toda System in seinen vielen Spielarten.

Jedes Kapitel behandelt eine Klasse, die zu dem System derselben Genealogie gehören. Jedes Kapitel beginnt mit einer Einleitung in der die wichtigsten Gleichungen, die in dem Kapitel studiert werden zusammengestellt sind. Diese Einleitung dient dem Leser, der das Buch im „Handbuch-Modus" benutzen möchte und sich so ein Durchblättern des Hauptteils ersparen kann. Der Hauptteil des Kapitels beschäftigt sich mit der hamiltonischen und R-Matrix Interpretation der betrachteten Systeme und deren Diskretisierung unter Hinzunahme des in Teil I entwickelten „Rezepts". Eine sehr ausführliche Bibliographie am Schluss des Kapitels erlaubt nicht nur ein weiterführendes Studium sondern gibt auch einen sehr guten Überblick über die in diesem Feld geleisteten Arbeiten.

In Y. Suris Buch werden selten Hinweise darauf gegeben, wo die behandelten Systeme in der Physik oder beispielsweise der Geometrie vorkommen. So erwähnt er im Kapitel 26 („Integrable Cases of Rigid Body Dynamics") die Euler und Lagrange Kreisel und bezieht sich im folgenden auch immer wieder auf die Herkunft der Gleichungen, als vom Kreisel, bzw. vom starren Körper herkommend. Solche Bezüge sind nützlich, jedoch für die systematische Behandlung der Diskretisierungen nicht wesentlich. Eine ausführlichere Behandlung solcher Zusammenhänge auch bei anderen Systemen hätte wohl den Rahmen des Buches gesprengt.

Benutzt man das Buch im „Handbuch-Modus" so ist es bisweilen mühsam zu einer Gleichung die benutzten Symbole aus dem jeweiligen Kapitel zusammen zu tragen. Hier hilft der Notationsindex, der nach Kapiteln unterteilt ist: Auch wenn Y. Suris um Konsistenz bemüht ist, kommt es doch vor, das Symbole in verschiedenen Kapiteln unterschiedliche Bedeutungen haben. Das ist bei der schieren Anzahl an Systemen auch nicht verwunderlich.

Das Buch von Y. Suris ist besonders hilfreich die Lücke zwischen abstrakter hamiltonischer und symplektischer Theorie und konkreter Anwendung zu schließen. Eine ähnliche Motivation hatte beispielsweise auch das Buch von Faddeev und Takhtajan: Hamiltonian Methods in the Theory of Solitons, das Suris auch in der Einleitung ans Herz legt. Bei der abstrakten Behandlung der hamiltonischen Systeme sind oft die konkreten Erscheinungsformen der involvierten Gleichungen völlig uninteressant. Gleichsam ist bei der numerischen Behandlung von physikalischen Systemen oftmals die reiche mathematische Struktur des jeweiligen Systems nur unzureichend bekannt und dementsprechend werden Diskretisierungen benutzt, die man unter Kenntnis der obigen Methoden schlichtweg als ungeeignet bezeichnen kann. Durch die sorgfältige Behandlung der zugrundeliegenden Theorie und einer gleichzeitig sehr ausführlichen Auflistung (das Buch hat 1070 Seiten) der verschiedenen Erscheinungsformen der jeweiligen Systeme werden in Y. Suris Buch diese so dringend benötigten fehlenden Verbindungen hergestellt.

Aus diesem Grunde sollte das Buch zu einem Standardwerk in der Theorie der dynamischen Systeme werden.

München T. Hoffmann

Springer
the language of science

springer.com

Yesterday and Long Ago

V. I. Arnold, Steklov Mathematical Institute, Moscow, Russia

This charming book by one of the leading mathematicians of our day, Vladimir Igorevich Arnold, is a rambling collection of his memories from early childhood up to recent days. Some marvellous historical and geographical stories occupy a large part of the book. Their characteristic lively style draws the reader into the past as though it were happening today.

2006. Approx. 239 p. Hardcover
ISBN 3-540-28734-5
► **€ 29,95 | £23.00**

Deformations of Algebraic Schemes

E. Sernesi, Università Roma Tre, Rome, Italy

This account of deformation theory in classical algebraic geometry over an algebraically closed field presents for the first time some results previously scattered in the literature, with proofs that are relatively little known, yet relevant to algebraic geometers. Many examples are provided. Most of the algebraic results needed are proved.

2006. XI, 339 p. (Grundlehren der mathematischen Wissenschaften, Vol. 334) Hardcover
ISBN 3-540-30608-0
► € **89,95 | £69.00**

The Random-Cluster Model

G. Grimmett, University of Cambridge, UK

The random-cluster model has emerged as a key tool in the mathematical study of ferromagnetism. It may be viewed as an extension of percolation to include Ising and Potts models, and its analysis is a mix of arguments from probability and geometry. This study contains accounts of the subcritical and supercritical phases, together with clear statements of important open problems. It includes treatment of the first-order (discontinuous) phase transition.

2006. XIII, 377 p. 37 illus. (Grundlehren der mathematischen Wissenschaften, Vol. 333) Hardcover
ISBN 3-540-32890-4
► **€ 89,95 | £69,00**

Triangulations and Applications

Ø. Hjelle, Simula Research Laboratory, Lysaker, Norway; **M. Dæhlen**, University of Oslo, Norway

This book is entirely about triangulations. With emphasis on computational issues, the basic theory necessary to construct and manipulate triangulations is presented. In particular, a tour through the theory behind the Delaunay triangulation, including algorithms and software issues, is given.

2006. XIV, 234 p. (Mathematics and Visualization) Hardcover
ISBN 3-540-33260-X
► € **49,95 | £38.50**

Scientific Computing with MATLAB and Octave

A. Quarteroni, Ecole Polytechnique Fédérale de Lausanne, Switzerland; **F. Saleri**, Politecnico di Milano, Italy

From the reviews of the 1st edition

► *... Scientific Computing with MATLAB is written in a clear and concise style, figures, tables and formula boxes complement the explanations... The whole book is an invitation, if not a request, of the authors to the reader to play with MATLAB, apply its powerful menagerie of functions to solve the given (or own) problems ...* ► **Anselm A.C. Horn**, Journal of Molecular Modeling 2004

2nd ed. 2006. XII, 324 p. (Texts in Computational Science and Engineering, Vol. 2) Hardcover
ISBN 3-540-32612-X
► € **39,95 | £30.50**

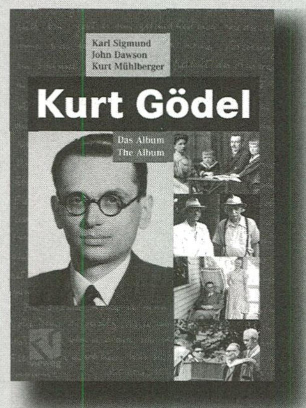
Mathematical Survey Lectures 1943-2004

B. Eckmann, ETH Zurich, Switzerland

This collection of survey lectures in mathematics traces the career of Beno Eckmann, whose work ranges across a broad spectrum of mathematical concepts from topology through homological algebra to group theory.

2006. VIII, 265 Hardcover
ISBN 3-540-33790-3
► **€ 29,95 | £23.00**

Das Buch zum Gödel Jahr



Karl Sigmund, John Dawson,
Kurt Mühlberger

Kurt Gödel

Das Album - The Album
Mit einem Geleitwort von
Hans Magnus Enzensberger
In deutscher und englischer Sprache

2006. 225 S. mit 200 Abb. Geb.
EUR 29,90
ISBN 3-8348-0173-9

INHALT

Gödels Leben - Gödels Umfeld - Gödels Werk (Hilberts Programm, Cantors Kontinuum, Einsteins Universen, Platos Schatten)
Gödel's Life - Gödel's Surroundings - Gödel's Work (Hilbert's Program, Cantor's Continuum - Einstein's Universes - Plato's Shadow)

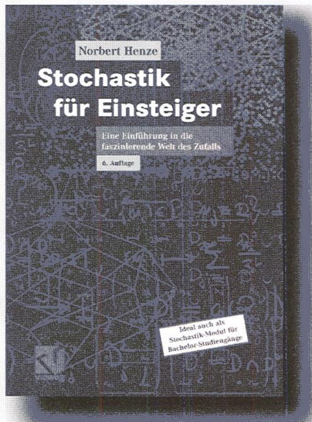
DAS BUCH

Dieses Buch ist eine leichtverdauliche, einfache und anschauliche Einführung in Gödels Leben und Werk, gedacht für jene, die sich für die menschlichen und kulturellen Aspekte der Wissenschaft interessieren. Ausgangspunkt des Buches waren die Vorbereitungen zu einer Ausstellung über Kurt Gödel aus Anlass seines hundertsten Geburtstags. Eine Ausstellung hat etwas von einem Spaziergang an sich, und gerade das wollen wir bieten: einen Spaziergang mit Gödel. Albert Einstein genoss solche Spaziergänge sehr. Man kann also Gödel genießen.

vieweg

Abraham-Lincoln-Straße 46
D-65189 Wiesbaden
Fax 0611.78 78-420

Ideal auch als Stochastik-Modul für Bachelor-Studiengänge



Norbert Henze

Stochastik für Einsteiger

Eine Einführung in die faszinierende Welt des Zufalls

6., überarb. u. erw. Aufl. 2006.
IX, 291 S. mit 60 Abb. u. 23 Tab.
Br. EUR 19,90
ISBN 3-8348-0091-0

INHALT

Zufallsexperimente - Ereignisse - Zufallsvariablen - Relative Häufigkeit - deskriptive Statistik - endliche Wahrscheinlichkeitsräume - Erwartungswert - hypergeometrische Verteilung - Pólyasches Urnenschema - Bedingte Wahrscheinlichkeiten - Binomial- und Multinomialverteilung - Pseudozufallszahlen - Varianz - Kovarianz - Korrelation - Diskrete Wahrscheinlichkeitsräume - Wartezeitprobleme - Poisson-Verteilung - Gesetz großer Zahlen - Zentraler Grenzwertsatz - Schätzprobleme - statistische Tests - Lösungen

DAS BUCH

Eine elementare, gut lesbare und spannende Einführung in die Grundbegriffe, Grundtechniken und Denkweisen der Stochastik. Gegenüber der fünften Auflage wurde der Stoff um die Themen Variationskoeffizient, Stimmzettelproblem, Sterbetafeln, Spieler-Ruin-Problem und Monte-Carlo-Tests erweitert. Außerdem wurden weitere Graphiken und Übungsaufgaben mit Lösungen aufgenommen.

vieweg
Abraham-Lincoln-Straße 46
D-65189 Wiesbaden
Fax 0611.78 78-420

Änderungen vorbehalten.
Erhältlich beim Buchhandel oder beim Verlag.

ISSN 0012-0456