110. Band Heft 3, September 2008 D 20577

Jahresbericht

der Deutschen Mathematiker-Vereinigung

3 – 2008

Herausgegeben von K. Hulek
unter Mitwirkung von
U. Gather, H.-Ch. Grunau, H. Lange,
J. Rambau, A. Schied, Th. Sonar

VIEWEG+
TEUBNER

Jahresbericht
der Deutschen Mathematiker-Vereinigung

Der „Jahresbericht" ist das offizielle Veröffentlichungsorgan der Deutschen Mathematiker-Vereinigung, für dessen inhaltliche Gestaltung im Auftrag des Präsidiums der jeweilige Herausgeber zuständig ist. Im „Jahresbericht" sollen vornehmlich Überblicksartikel über Teilgebiete der reinen und angewandten Mathematik, Nachrufe sowie historische Artikel, Berichte aus der Forschung und Buchbesprechungen veröffentlicht werden.

Manuskripte:

Alle für die Schriftleitung des Jahresberichts bestimmten Briefe und Manuskripte sind an *Prof. Dr. K. Hulek* zu richten. Für Buchbesprechungen ist *Prof. Dr. H. Lange* zuständig. Bücher, von denen eine Besprechung erfolgen soll, werden bei den Verlagen angefordert.

Die Autoren werden gebeten, für Manuskripte und Buchbesprechungen die **Standard-LATEX-Klasse article mit 10pt (default), \textwidth139mm, \textheight205mm** zu benutzen. Sollen Illustrationen in die Arbeiten integriert werden, können diese auch in das Satzsystem übernommen werden. Dazu ist es erforderlich, dass die Bilddaten der Abbildungen nochmals in separaten Dateien einzeln abgespeichert werden. Ein Foto des Autors sollte als Bilddatei in einem der gängigen Grafikformate (am unproblematischsten: TIF-Format; Graustufenbild mit einer Auflösung von mindestens 300 dpi) oder als normaler Papier-Fotoabzug zum Einscannen mitgeschickt werden. Als Datenträger sind ZIP-Disketten, CD-ROM bzw. Syquest (88 oder 200 MB) möglich.

Grundsätzlich sollen nur solche Manuskripte eingereicht werden, die nicht gleichzeitig an anderer Stelle zur Veröffentlichung eingereicht oder bereits veröffentlicht worden sind. Mit der Annahme zur Veröffentlichung erwirbt der Verlag das Verlagsrecht zur Vervielfältigung und Verbreitung sowie das Recht der Übersetzung in andere Sprachen.

Weitere Informationen zum „Jahresbericht" finden Sie unter
http://www.dmv.mathematik.de/publikationen/jahresbericht

Verlag:

Vieweg+Teubner | GWV Fachverlage GmbH
Abraham-Lincoln-Straße 46
65189 Wiesbaden
http://www.viewegteubner.de
http://www.gwv-fachverlage.de

Geschäftsführer: Dr. Ralf Birkelbach (Vors.),
Albrecht F. Schirmacher
Gesamtleitung Anzeigen: Thomas Werner
Gesamtleitung Produktion: Ingo Eichel
Gesamtleitung Vertrieb: Gabriel Göttlinger

Marketing/Sonderdrucke:

Melanie Engelhard-Gökalp
Telefon: (06 11) 78 78-3 15, Fax: (06 11) 78 78-4 40, E-Mail: melanie.engelhard-goekalp@viewegteubner.de

Abonnentenverwaltung:

(Änderungen von Adressen und Bankverbindung, Rückfragen zu Rechnungen oder Mahnung)
VVA-Zeitschriftenservice, Abt. D6F6 / Jahresbericht der Deutschen Mathematiker-Vereinigung, Postfach 7777, 33310 Gütersloh
Ursula Müller
Telefon: (0 52 41) 80-19 65, Fax: (0 52 41) 80-96 20, E-Mail: ursula.mueller@bertelsmann.de

Anzeigenleitung

Christian Kannenberg
Telefon: (06 11) 78 78-3 69, Fax: (06 11) 78 78-4 30, E-Mail: christian.kannenberg@gwv-media.de
www.gwv-anzeigen.de

Es gilt die Preisliste vom 01.01.2008.

Bezugsbedingungen:

Die Zeitschrift erscheint 4mal jährlich zum Jahresabonnementpreis von € 124,– inkl. Versandkosten. Der Bezug von Einzelheften ist nicht möglich. Schriftliche Kündigung des Abonnements spätestens sechs Wochen vor Ablauf des Bezugsjahres.

Für persönliche Mitglieder der DMV, die den Jahresbericht zu beziehen wünschen, ist der zwischen DMV und Verlag vereinbarte Bezugspreis maßgebend, der im Rahmen des Mitgliedsbeitrags erhoben wird.

Satz: Fotosatz Behrens, D-68723 Oftersheim
Druck: Krips b.v., Meppel, Printed in the Netherlands

ISSN 0012-0456

Inhalt

Jahresbericht der Deutschen Mathematiker-Vereinigung, 110. Bd. 2008, Nr. 3

Vorwort 115

Übersichtsartikel	Historische Beiträge	Berichte aus der Forschung	Buchbesprechungen

Heat Equations in Geometry and Topology
K. Ecker 117

Zur Mathematiklehrpersonenausbildung fürs Gymnasium an der ETH Zürich
U. Kirchgraber 143

Übersichtsartikel	Historische Beiträge	Berichte aus der Forschung	Buchbesprechungen

A. Kanel-Belov and L. Halle Rowen: Computational Aspects of Polynomial Identities
A. Giambruno *15*

A.C.C. Coolen, R. Kühn, P. Sollich: Theory of Neural Information Processing Systems
A. Bovier *16*

Ch. Kanzow: Numerik linearer Gleichungssysteme: Direkte und iterative Verfahren
P. Benner *18*

G. I. Arkhipov, V. N. Chubikarov, A. A. Karatsuba: Review of Trigonometric Sums in Number Theory and Analysis
S. J. Patterson *23*

E. Lieb, R. Seiringer, J.P. Solovej und J. Yngvason: The Mathematics of the Bose Gas and its Condensation
W. König *24*

W. Benz: Classical Geometries in Modern Contexts, Geometries of Real Inner Product Spaces
K. Strambach *27*

J. P. Dufour, N. T. Zung: Poisson Structures and Their Normal Forms
J. Huebschmann *28*

P. Deuflhard: Newton Methods for Nonlinear Problems
E. Bänsch *29*

D. E. Edmunds, W. D. Evans: Hardy Operators, Function Spaces and Embeddings
A. Kufner *30*

S. D. Eidelman, S. D. Ivasyshen, A. N. Kochubei: Analytic Methods in the Theory of Differential and Pseudo-Differential Equations of Parabolic Type
E. Schrohe *31*

Jahresbericht der Deutschen Mathematiker-Vereinigung, 110. Bd. 2008, Nr. 3

In den nächsten Heften erscheinende Arbeiten

P. Deuflhard, B. Lutz-Westphal, U. Nowak: Bessel'scher Irrgarten – Rundungsfehler müssen nicht klein sein
O. Deiser: In der Unvollkommenheit des ersten Conceptes – Die Entdeckung der Überabzählbarkeit der reellen Zahlen

---

Anschriften der Herausgeber

Prof. Dr. K. Hulek, Institut für Algebraische Geometrie, Gottfried Wilhelm Leibniz Universität Hannover, Welfengarten 1, 30167 Hannover
E-Mail: hulek@math.uni-hannover.de

Prof. Dr. Ursula Gather, Lehrstuhl für Mathematische Statistik und industrielle Anwendungen, Universität Dortmund, 44221 Dortmund
E-Mail: gather@statistik.uni-dortmund.de

Prof. Dr. H.-Ch. Grunau, Institut für Analysis und Numerik, Otto-von-Guericke-Universität Magdeburg, Postfach 4120, 39016 Magdeburg
E-Mail: hans-christoph.grunau@mathematik.uni-magdeburg.de

Prof. Dr. Herbert Lange, Mathematisches Institut, Friedrich-Alexander-Universität Erlangen-Nürnberg, Bismarckstraße 1a, 91054 Erlangen
E-Mail: lange@mi.uni-erlangen.de

Prof. Dr. J. Rambau, Fakultät für Mathematik, Physik und Informatik, Universität Bayreuth, 95440 Bayreuth
E-Mail: Joerg.Rambau@uni-bayreuth.de

Prof. Dr. A. Schied, School of Operations Research and Information Engineering, Cornell University, 232 Rhodes Hall, Ithaca, NY 14850, U.S.A.
E-Mail: schied@cornell.edu

Prof. Dr. Th. Sonar, Institut für Analysis, Technische Universität Braunschweig, Pockelsstraße 14, 38106 Braunschweig
E-Mail: t.sonar@tu-bs.de

Bezugshinweis

Früher erschienene Bände (ab Band 68) des „Jahresberichts der Deutschen Mathematiker-Vereinigung“ können durch den Buchhandel oder den Verlag bezogen werden.

Nachdruck der Bände 41 bis 67 liefert: Swets & Zeitlinger, Heereweg 347b, POB 810, NL-2160 SZ Lisse/Holland

Jahresbericht der Deutschen Mathematiker-Vereinigung, 110. Bd. 2008, Nr. 3

Vorwort

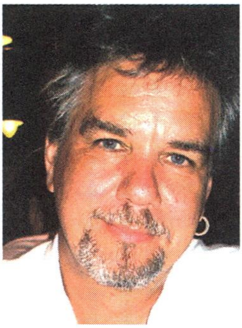
Dieses Heft enthält einen Übersichtsartikel aus dem Bereich Geometrie und Topologie und einen Aufsatz, der sich mit der Ausbildung der Gymnasiallehrkräfte in Zürich beschäftigt.

K. Ecker berichtet in seinem Artikel über eine der wichtigsten Entwicklungen in der Mathematik der letzten Jahre, nämlich über Flüsse in der Differentialgeometrie. Insbesondere der von Hamilton eingeführte Ricci-Fluss ermöglichte es, weitgehende Resultate zu beweisen. Der Höhepunkt sind die Arbeiten von Perelman, deren Ziel es ist, die Geometrisierungsvermutung von Thurston zu beweisen. Eine Konsequenz der Ergebnisse von Perelman ist ein Beweis der Poincaré-Vermutung – eines der sieben Millennium-Probleme, wie sie von der Clay Foundation formuliert wurden. Ich danke dem Verlag Vieweg+Teubner dafür, dass die Illustrationen zu diesem Artikel farbig gedruckt werden konnten.

Der Artikel von Herrn Kirchgraber, ebenso wie weitere Arbeiten, die in den folgenden Heften erscheinen werden, geht zurück auf Vorträge, die auf der gemeinsamen Tagung von DMV und GDM im März 2007 in Berlin gehalten wurden. Genauer handelt es sich um „Schnittstellenvorträge", also Vorträge an der Schnittstelle von Mathematik und ihrer Didaktik. Das Ziel dieser Vorträge – und ihrer Veröffentlichung im Jahresbericht der DMV – ist es, das Gespräch zwischen „Fach"mathematikern und Vertretern der Didaktik zu intensivieren. In seinem Beitrag berichtet U. Kirchgraber über die Neugestaltung der Ausbildung der Gymnasiallehrkräfte in Zürich, die sich stark von dem deutschen Konzept unterscheidet. Damit liefert er einen Beitrag zu den seit Jahren stattfindenden Diskussionen um die Reform der Lehrerausbildung in Deutschland.

In diesem Heft konnten wir auch den aktuellen Buchbesprechungen wieder mehr Raum einräumen.

K. Hulek



Heat Equations in Geometry and Topology

Klaus Ecker

Abstract

- Mathematics Subject Classification: 53C44, 53C21
- Keywords and Phrases: geometric analysis, 3-manifold topology, geometric evolution equations

Eingegangen: 21.01.2008

Institut für Mathematik, Freie Universität Berlin, Arnimallee 3,
D-14195 Berlin, ecker@math.fu-berlin.de

DMV
JAHRESBERICHT
DER DMV

1 Introduction

Non-linear heat equations have played an important role in differential geometry and topology over the last decades. Generally speaking, a geometric quantity or structure on a manifold is evolved in a canonical way towards an optimal one.

Examples are the harmonic map flow due to Eells and Sampson [ES] which finds *harmonic* maps, that is local minima of the energy functional. The *curve-shortening flow* [GH], [Gr] and its higher dimensional analogue, the *mean curvature flow* [Hu1], deform a curve (hypersurface) in the direction of its normal vector at every point, with speed equal to the curvature (mean curvature) at that point.

In 1982, Hamilton [Ha1] introduced the *Ricci flow* which deforms an initial metric in the direction of its Ricci tensor. This flow tends to improve the manifold to one with locally homogeneous geometry (as will be explained later). Hamilton used this to prove a number of topological classification results for manifolds with conditions on their curvature, such as for instance closed 3-manifolds with positive Ricci curvature and closed 4-manifolds with positive curvature operator (see [CLN] for a description of his work and a complete list of references). In 2003, Perelman [P1], [P2], [P3] completed Hamilton's Ricci flow programme [Ha3] which had the aim of settling Thurston's geometrization conjecture for closed 3-manifolds [Th1]. This conjecture had predicted such manifolds to be decomposable into pieces with locally homogeneous geometry.

In this article, we will present some of the main ideas starting in Section 2 with linear heat diffusion on a closed manifold and its interaction with the underlying geometry. In Section 3, we will show how the curve-shortening-flow can be used to prove the isoperimetric inequality in the plane. Section 4 focusses on a heat flow proof of the uniformization theorem for closed surfaces. Section 5 explains the Poincaré conjecture [Po] and Thurston's more general geometrization conjecture as well as Hamilton's programme for settling them via the Ricci flow. In Section 6, we present one of Perelman's main ideas leading to the final resolution of these conjectures.

2 Heat diffusion on closed manifolds

We consider a smooth closed (compact and without boundary) n-dimensional Riemannian manifold (M, g). The metric g is given by a (smoothly varying) symmetric, positive definite $n \times n$-matrix (g_{ij}) at every point of M.

Let $f_0 : M \to \mathbb{R}$ be a smooth function. For the purpose of this exposition, one should think of f_0 as a temperature distribution on M. We now evolve f_0 by the *heat equation* which means that we consider a time-dependent function $f : M \times (0, T) \to \mathbb{R}$ which solves the partial differential equation

$$\left(\frac{\partial}{\partial t} - \Delta\right) f = 0$$

with initial condition $f(0) \equiv f(\cdot, 0) = f_0 : M \to \mathbb{R}$. Again, one should think of $f(t) \equiv f(\cdot, t)$ as the temperature distribution on M at time t.

The Laplace-Beltrami operator on (M,g) is defined by

$$\Delta f = \nabla^i \nabla_i f = g^{ij}\Big(\partial_i\partial_j f - \Gamma^k_{ij}\partial_k f\Big)$$

where (g^{ij}) denotes the inverse of the metric $g = (g_{ij})$, ∂_i stands for coordinate derivatives and ∇_j for covariant (coordinate system independent) derivatives of vector fields, in this case of the gradient vector field ∇f defined by $\nabla^i f \equiv g^{ij}\partial_j f$. The covariant derivatives involve both the ∂_i and the Christoffel symbols Γ^k_{ij}. We sum over repeated indices. If $M = \mathbb{R}^n$ with the standard metric this reduces to the well-known Laplace operator given by

$$\Delta f = \sum_{i=1}^{n} \partial_i\partial_i f.$$

In this paper, we shall need the *integration by parts formula* for manifolds without boundary

$$-\int_M \langle \nabla h, \nabla f\rangle \, d\mu = \int_M h\Delta f \, d\mu \tag{1}$$

of which the identity

$$\int_M \Delta f \, d\mu = 0 \tag{2}$$

is a special case. Here $d\mu$ denotes the volume element of (M,g) and the bracket $\langle\cdot,\cdot\rangle$ expresses the metric acting on vector fields.

The *average* of $f(t)$ over M (describing the average temperature of M at time t) is defined by

$$\bar{f}(t) = \frac{1}{vol(M)}\int_M f(t)\, d\mu.$$

Our first observation is that this average remains unchanged under the heat equation. Indeed, one calculates

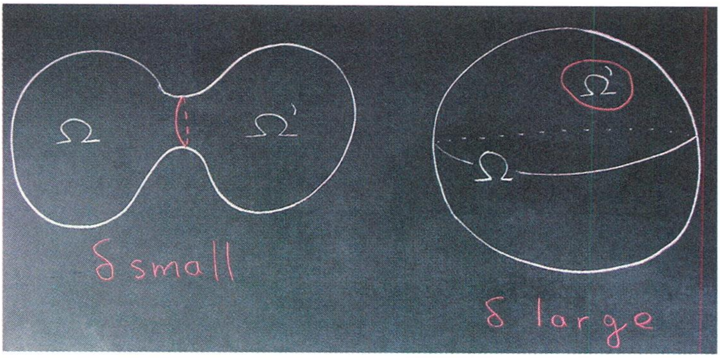
$$\frac{d}{dt}\bar{f}(t) = \frac{1}{vol(M)}\int_M \frac{\partial f}{\partial t}(t)\, d\mu = \frac{1}{vol(M)}\int_M \Delta f(t)\, d\mu = 0.$$

The last identity follows from (2). We therefore conclude that $\bar{f}(t) = \bar{f}(0) = \bar{f}_0$ for all $t \geq 0$.

We shall now see that heat diffusion takes place for $t \to \infty$ in the sense that over a large time period the temperature almost evens out. More precisely, $f(t) \to \bar{f}_0$ for $t \to \infty$ in the sense of smooth convergence. Here, we only establish the convergence in an integral sense. This can be derived reasonably easily from a geometric property of the manifold (M,g), the validity of the Poincaré inequality. The latter states that there is a constant $\delta > 0$ which only depends on (M,g) such that

$$\delta\int_M (u-\bar{u})^2\, d\mu \leq \int_M |\nabla u|^2\, d\mu$$

holds for all $u \in C^1(M)$. The geometric interpretation of this inequality is displayed in the following figure.



On a surface M, the constant δ must be small if two large regions, Ω and Ω', can be separated by a short loop as depicted in the left drawing. In the right picture, every small loop can only separate a small region from a large one. In particular, one can find a region for which the boundary length and enclosed area are 'in proportion to each other'. There are many examples of non-compact manifolds which do not admit a Poincaré inequality (such as for example the catenoid minimal surface).

Consider now the expression

$$\int_M (f(t) - \bar{f}_0)^2 \, d\mu$$

which measures the average deviation of the temperature at time t from the constant average temperature $\bar{f}_0$. We want to show, using the geometric information contained in the Poincaré inequality, that this integral tends to zero in the infinite future. To this effect, we calculate

$$\frac{d}{dt} \int_M (f(t) - \bar{f}_0)^2 \, d\mu = 2 \int_M (f(t) - \bar{f}_0) \frac{\partial f}{\partial t}(t) \, d\mu.$$

Inserting the heat equation and integrating by parts leads to

$$2 \int_M (f(t) - \bar{f}_0) \, \Delta f(t) \, d\mu = -2 \int_M \langle \nabla(f(t) - \bar{f}_0), \nabla f(t) \rangle \, d\mu$$

on the right hand side. Since $\bar{f}_0$ is a constant we obtain the identity

$$\frac{d}{dt} \int_M (f(t) - \bar{f}_0)^2 \, d\mu = -2 \int_M |\nabla f(t)|^2 \, d\mu.$$

The Poincaré inequality applied to $u = f(t)$ now yields

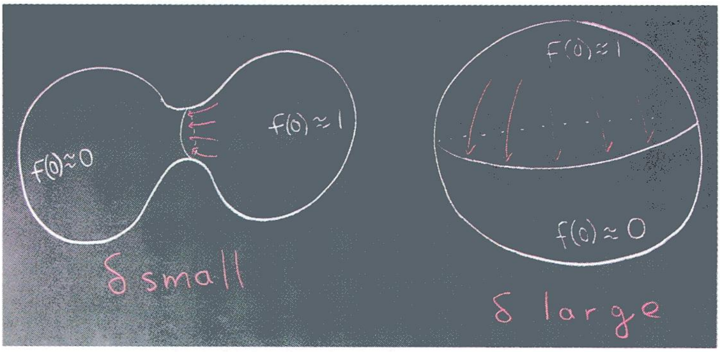
$$\frac{d}{dt} \int_M (f(t) - \bar{f}_0)^2 \, d\mu \leq -2\delta \int_M (f(t) - \bar{f}_0)^2 \, d\mu$$

where we replaced $\bar{f}(t)$ by $\bar{f}_0$. Integrating, we finally conclude an exponential decay rate in time, that is

$$\int_M (f(t) - \bar{f}_0)^2 \, d\mu \le e^{-2\delta t} \int_M (f_0 - \bar{f}_0)^2 \, d\mu \to 0$$

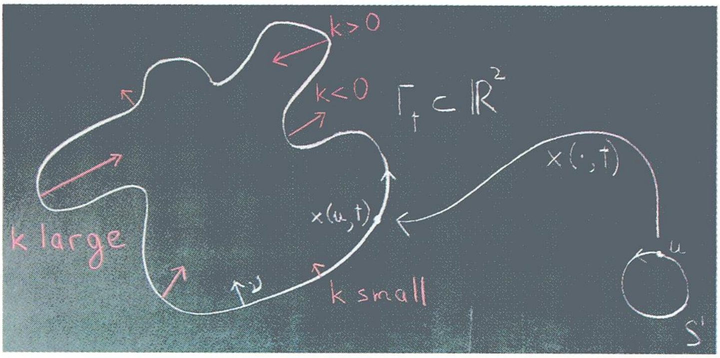
for $t \to \infty$.

The following figure suggests that the smaller δ is (such as on closed manifolds with tight necks), the more slowly diffusion of heat takes place. In this sense, optimal diffusion happens on spheres, albeit still in infinite time (at least for mathematicians). In fact, we could have defined the optimal δ in the Poincaré inequality solely in terms of the diffusion rate for the heat equation on M.



We could have also used Fourier series to derive this result. The optimal δ in the Poincaré inequality is then proportional to the lowest Fourier mode which in turn is given in terms of the smallest eigenvalue of the negative Laplace-Beltrami operator on M (with respect to our sign convention).

3 Curve-shortening and the isoperimetric inequality



The figure displays one member of a family of closed, embedded curves Γ_t given by maps $x(\cdot, t) : S^1 \to \mathbb{R}^2$ which evolve by the law of motion

$$\frac{\partial x}{\partial t} = k\nu \tag{3}$$

called *curve-shortening flow*. Here ν is the inward pointing normal, k the curvature function of Γ_t and x is short for $x(u, t)$. We can express the equation also in terms of the arc length parameter $s = s(u, t)$ of the evolving curve. Using one of the definitions of curvature, the equation then reads as

$$\frac{\partial x}{\partial t} = \frac{\partial^2 x}{\partial s^2}.$$

This looks deceptively like a linear heat equation for x (actually a system of two equations in our case), however the non-linearity is hidden inside s which depends on products of the spatial derivatives of x. If, for instance, we express the evolving curve locally in terms of a function $h : (a, b) \times (0, T) \to \mathbb{R}$ with variables z and t then the equation

$$h_t = \frac{h_{zz}}{1 + h_z^2}$$

results.

From equation (3), the evolution of any other geometric quantity on the curve can be computed [GH]. The curvature, for instance, satisfies

$$\frac{\partial k}{\partial t} = \frac{\partial^2 k}{\partial s^2} + k^3 \tag{4}$$

which is a so-called *reaction-diffusion equation.*

If we only considered the diffusion part

$$\frac{\partial k}{\partial t} = \frac{\partial^2 k}{\partial s^2},$$

the curvature function $k(t)$ on Γ_t would tend to a constant for $t \to \infty$ as we have seen earlier for our temperature f. The curve would slowly turn into a circle. The reaction part of the equation,

$$\frac{\partial k}{\partial t} = k^3,$$

with positive $k(0)$, has the explicit solution

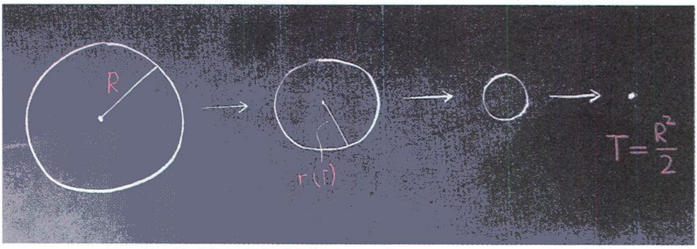
$$k(t) = \frac{1}{\sqrt{\frac{1}{k(0)^2} - 2t}}$$

so that the *blow-up* time is given by

$$T = \frac{1}{2k(0)^2}.$$

In the equation (4) for the curvature function of Γ_t, these two effects are competing. It is an extremely difficult analytic problem to understand this interaction for a general initial curve. Fortunately, the geometric nature of the equation comes to the aid of the analysis (see [GH], [Gr], [Hu2]).

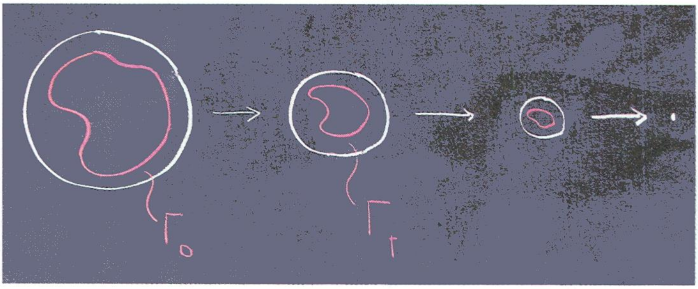
An example of a curve exhibiting the 'reaction behaviour' is the round circle.



The radius of the circle at time t is $r(t) = \sqrt{R^2 - 2t}$ which vanishes at time $T = R^2/2$.

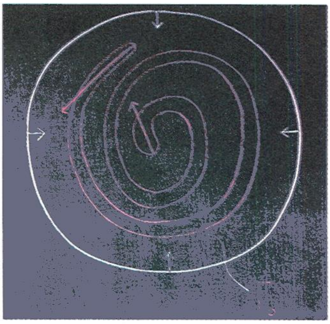
One of the most important features of the curve-shortening flow which it shares (after appropriate reformulation) with many other heat type equations is the

Comparison principle *Initially disjoint embedded closed curves stay disjoint during the curve-shortening flow.*

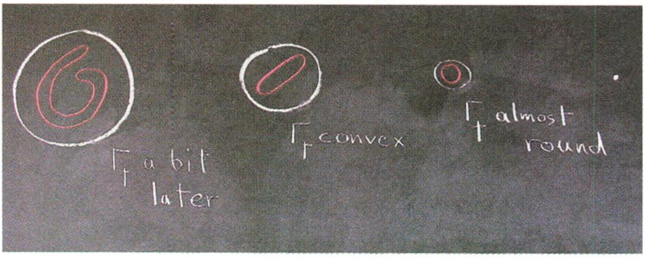


The picture shows that, by comparison with a shrinking circle, every closed curve can only exist for a finite time. This is one of the reaction effects.

Consider now the following initial situation (borrowed from a beautiful survey article by Brian White [Wh]):

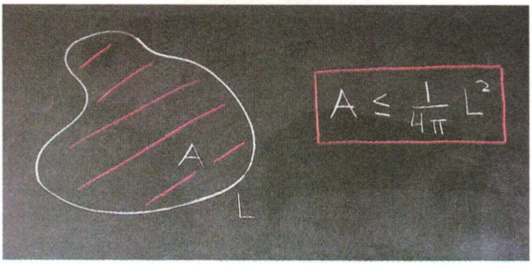


Any enclosing circle will squash the spiral-like curve down to a point in finite time. On the other hand, the high curvature at the tips is expected to uncoil the curve (which one should consider as a diffusion effect). The movie shows several stages of what happens.

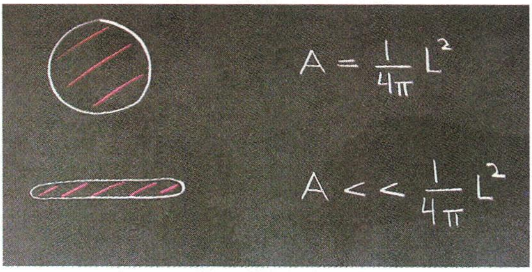


In fact, it follows from Grayson's work in 1987 [Gr], (see [Hu2] for an easier proof) that the curve will stay smooth and embedded and will become convex before its extinction time. Then, by a result of Gage and Hamilton in 1984 [GH], it will become asymptotically round in a smooth fashion. More precisely, after rescaling the evolving curve so as to keep for instance the enclosed area fixed (which results in a slightly different flow), it converges smoothly to a round circle. This is a consequence of the diffusion term: The diffusion cannot stop the formation of a singularity but it is strong enough to preserve embeddedness of the curve and produce a very 'symmetric singularity'.

We will now show how a geometric property of the plane (which is actually related to, albeit stronger than, the Poincaré inequality) can be derived using curve-shortening flow. This property is the famous *isoperimetric inequality* stated below.



Extreme cases are circular disks for which equality holds and regions with tiny areas surrounded by long curves.



The isoperimetric inequality can also be viewed as a

Variational principle *Among all open and bounded subsets of the plane with equal perimeter, circular disks have the largest area.*

The word ‘perimeter’ here refers to the measure for a very general class of boundary contours which of course includes all smooth ones. An elementary and very elegant outline of the proof can be found in [HT].

In this article, however, we would like to derive the inequality using the curve-shortening flow (this argument was first brought to our attention by Ben Andrews, see also [To]). We start with an arbitrary initial curve $\Gamma = \Gamma_0$ with enclosed area $A = A(0)$ and length $L = L(0)$. Using the formulas for the change of length and area

$$\frac{d}{dt}L(t) = -\int_{\Gamma_t} k^2\,ds \qquad (<0)$$

(which justifies the term *curve-shortening*) and

$$\frac{d}{dt}A(t) = -\int_{\Gamma_t} k\,ds$$

we infer that

$$\frac{d}{dt}\Big(L(t)^2 - 4\pi A(t)\Big) = -2L(t)\int_{\Gamma_t} k^2\,ds + 4\pi\int_{\Gamma_t} k\,ds.$$

Since our curve is closed and embedded, the winding number theorem implies for all t

$$\int_{\Gamma_t} k\,ds = 2\pi,$$

so that, also using the Cauchy-Schwarz inequality for integrals, we can estimate the second term by

$$4\pi\int_{\Gamma_t} k\,ds = 2\left(\int_{\Gamma_t} k\,ds\right)^2 \le 2L(t)\int_{\Gamma_t} k^2\,ds.$$

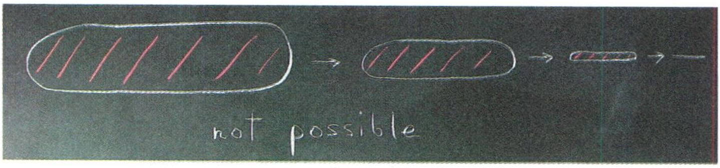
Hence we arrive at the relation

$$\frac{d}{dt}\Big(L(t)^2 - 4\pi A(t)\Big) \le 0.$$

Gage-Hamilton’s and Grayson’s theorems imply

$$L(t)^2 - 4\pi A(t) \to 0$$

for $t \to T < \infty$. The most difficult step in proving this statement consists in showing that area and length vanish *at the same time*. In particular, the following evolution is not possible under curve-shortening.



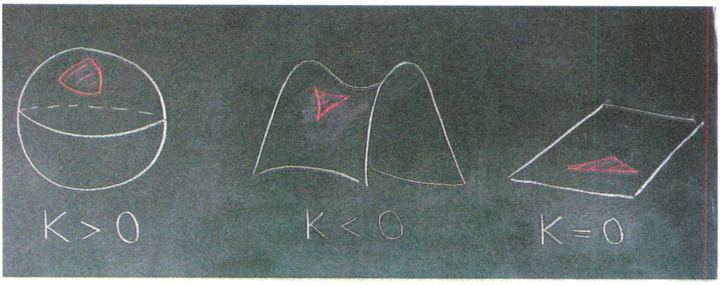
Because our quantity is also non-increasing we conclude that it must have initially been non-negative, that is

$$A(0) \leq \frac{1}{4\pi} L(0)^2.$$

Since $\Gamma = \Gamma_0$ and hence $A = A(0)$ and $L = L(0)$ were arbitrary, this proves the isoperimetric inequality for all smooth, closed and embedded curves.

4 Geometric classification of surfaces

The picture below shows surfaces of positive, negative and zero curvature.



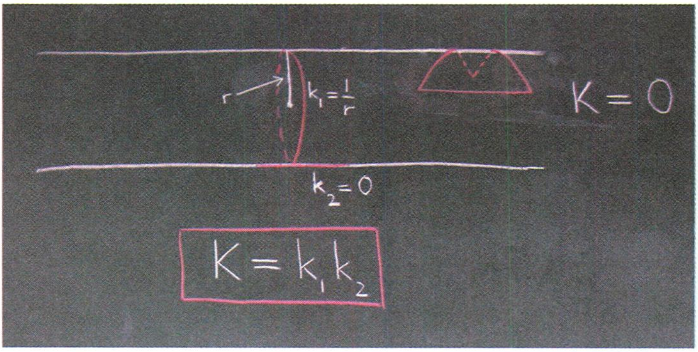
In the case where the curvatures are one, negative one or zero, the corresponding geometries (metrics) are called *spherical, hyperbolic* and *Euclidean* (or *flat*).

The term curvature here refers to the Gauß curvature, an intrinsic quantity, that is one which can be computed from within the surface, for example by measuring the deviation of the angle sum of geodesic triangles from π. On positive curvature surfaces such as the sphere, the angle sum within a triangle with geodesic segments (great circle arcs on S^2) as sides is larger than π, on a saddle surface less than π. The (appropriately defined) 'infinitesimal' angle sum deviation from π at a point is called the Gauß curvature of the surface at this point.

For a surface S embedded in $\mathbb{R}^3$, Gauß' famous *theorema egregium* states that his curvature at a given point p on S can be alternatively defined as the product of the principal curvatures at p. To compute the principal curvatures at p one first considers the curve segment within S obtained by intersecting S with a plane containing a normal vector to S at p. One computes the curvature of this curve segment at p (in the usual way) and then varies over all directions of planes normal to S through p. The minimum and maximum curvatures thus obtained are called *principal curvatures* at p. The sign of these depends on the choice of unit normal to S, so may vary by a factor of -1. The Gauß curvature however, being the product of these, does not.

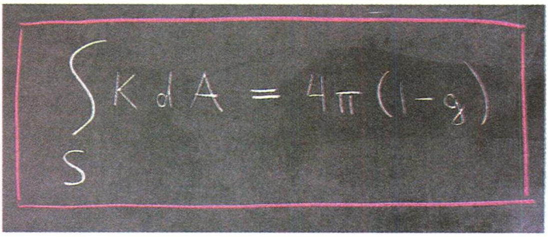
On S^2_r, the sphere of radius r, both principal curvatures equal $1/r$ everywhere, since they are the curvatures of great circle segments.

Therefore, S^2_r has Gauß curvature equal to $1/r^2$. On a surface with $K < 0$, the two principal curvatures must have opposite signs everywhere. The surface therefore looks saddle-shaped near every point.



Note that the cylinder $S^1_r \times \mathbb{R}$ depicted above can be obtained by rolling up a strip in $\mathbb{R}^2$. In the plane, all triangles have an angle sum equal to π and rolling up a piece of paper does not cause any distortions in the direction perpendicular to the rolling process. Therefore the angle sum of geodesic triangles on the cylinder is also equal to π as the above work of art attempts to convey. Therefore, the cylinder is (intrinsically) flat. As the reader can easily check, one of the principal curvatures equals zero as it occurs when we look in the direction of the cylinder axis. This proves Gauß' theorem (for cylinders).

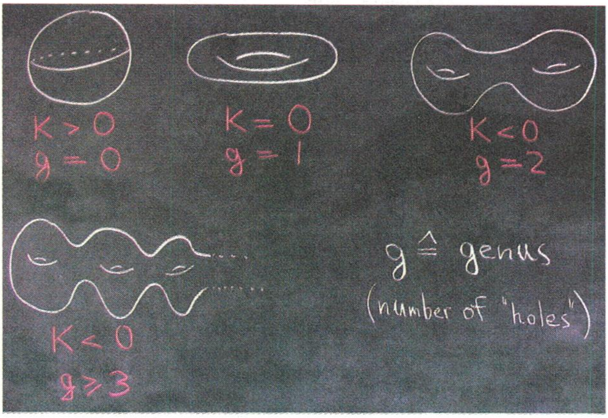
The Gauß-Bonnet theorem for a closed surface S of genus g (number of handles or 'holes') states that



This theorem is the prime example of a link between geometric and topological properties of surfaces. In particular, it gives obstructions to the existence of certain geometries on certain surfaces.

For instance, a torus can neither admit a geometric structure (metric) with everywhere positive curvature (spherical geometry) nor one with everywhere negative curvature (hyperbolic geometry), while surfaces with more than one handle could admit hyperbolic geometry (the latter is initially a bit hard to visualize; we refer the reader to the book by Weeks [We] where hyperbolic structures on surfaces of genus greater than or equal to two are constructed in an intuitive way). That a torus may admit flat geometry is easier to see by first rolling up a square to form a piece of cylinder in $\mathbb{R}^3$ and then rolling up this cylinder piece in a fourth direction (which ensures that the angle sum in triangles does not change). The result is an embedding of a flat torus in $\mathbb{R}^4$.

There is a topological classification of closed (compact and without boundary) orientable surfaces S via their genus g (see [We] for a lucid exposition).



The *uniformization theorem* states that all closed orientable surfaces admit metrics of Gauß curvature equal to either one, zero or negative one. Hence genus zero surfaces admit spherical geometry, tori flat geometry and all surfaces with more than one handle hyperbolic geometry.

In fact, the precise statement is even stronger in the sense that every given metric on a closed orientable surface is *conformal* to a metric of constant curvature (that is a constant curvature metric multiplied by a smooth positive function on the surface). This was first proved using complex analytic methods.

Hamilton [Ha2] (and Chow [Ch] for part of the positive curvature case) established a canonical method for finding constant curvature metrics in a given conformal class. Their approach still uses the uniformization theorem at some stage (in the positive curvature case) but the necessity for this has been removed in more recent work, see [CLT].

Hamilton employed heat diffusion in the form of his *volume normalized Ricci flow* for surfaces [Ha2]: Here a family of metrics $(g(t))$ on a surface S (symmetric, positive 2×2-matrices at every point of S) evolves by the equation

$$\frac{\partial g}{\partial t} = -(K - \bar{K})g$$

where

$$\bar{K} = \frac{1}{Area_t(S)} \int_S K\, dA_t = \frac{4\pi(1-g)}{Area_t(S)}$$

is the average curvature of S and dA_t is the area element of $(S, g(t))$.

It can easily be shown that this flow keeps the area of S fixed so that by the Gauß-Bonnet formula the average curvature also does not change. Since constant curvature metrics obviously remain unchanged, this process is therefore a good candidate for the task of deforming an arbitrary initial metric into one with constant curvature.

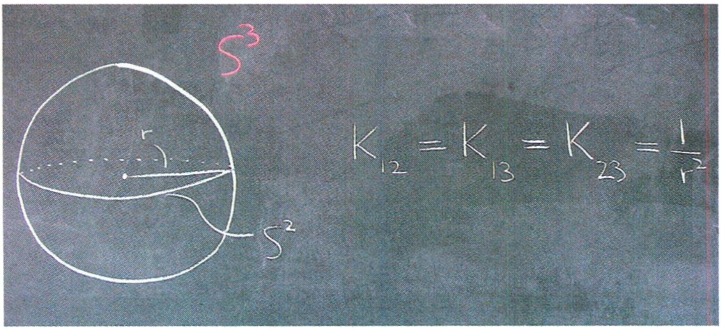
If we start with an initial metric $g(0)$ and consider only metrics conformal to it, that is of the form

$$g(t) = e^{u(t)} g(0)$$

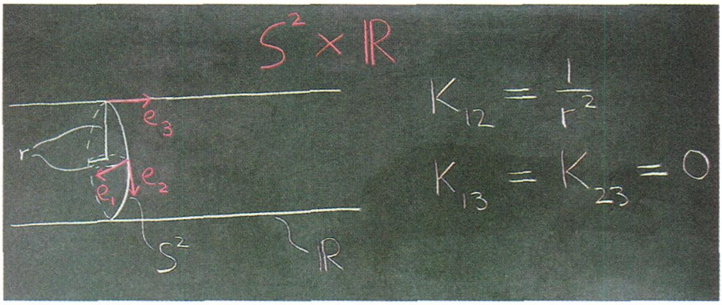
for some smooth function $u(\cdot, t)$ on S, then u has to satisfy a certain non-linear heat equation which we will not spell out here. Using this differential equation, Hamilton [Ha2] and Chow [Ch] (in the positive curvature case) showed that $g(t)$ converges smoothly as $t \to \infty$ to a limiting metric $g(\infty) = e^{u_\infty} g(0)$ with constant curvature.

5 Ricci flow and the geometric classification of 3-manifolds

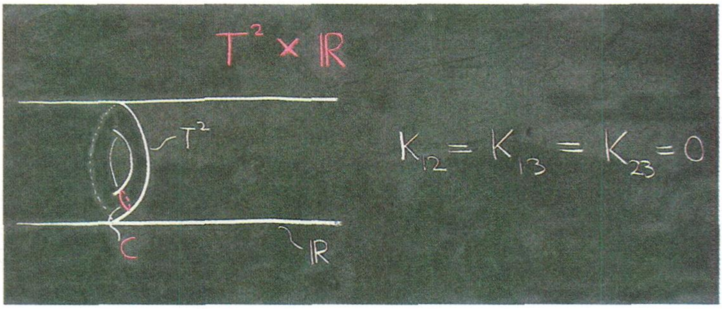
On a three-dimensional Riemannian manifold (M, g) one can think of sectional curvatures roughly in the following way: At a point p in M we consider a plane Π inside the tangent space of M at p. One now locally chooses a suitable surface S in M containing p with $T_pS = \Pi$, somewhat like a 2-dimensional local cross-section of M near p. The sectional curvature of M at p with respect to Π is defined as the Gauß curvature of S at p. For an orthonormal basis e_1, e_2, e_3 of T_pM on a 3-manifold there are three canonical choices of planes. We denote the sectional curvatures with respect to these by K_{12}, K_{13} and K_{23}. A 3-manifold for which the three sectional curvatures are independent of the particular point is called *homogeneous*. If in addition the curvatures are also independent of the plane directions at each point, we call it *isotropic*. Below, we show some examples.



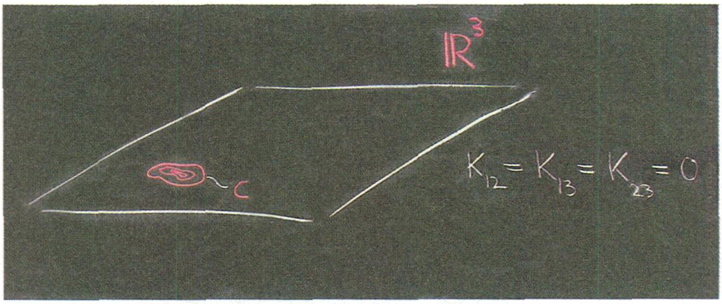
S^3 is *isotropic* so in particular *homogeneous* and $S^2 \times \mathbb{R}$ is *homogeneous* but not *isotropic*.



The manifold $T^2 \times \mathbb{R}$ is flat but not simply connected, that is a loop through the hole of the torus cannot be contracted to a point inside M,



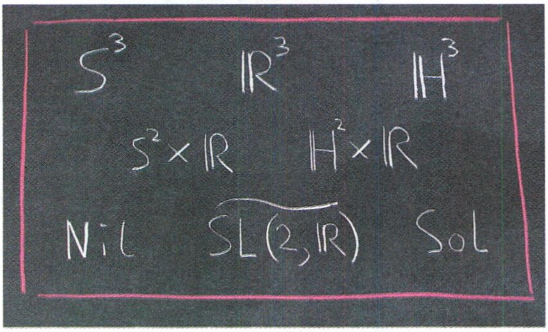
but Euclidean space $\mathbb{R}^3$



is flat and simply connected.

There are three homogeneous spaces which serve as geometric models for surfaces: the sphere, hyperbolic space and Euclidean space. In three dimensions, their analogues S^3, $\mathbb{H}^3$ and $\mathbb{R}^3$ are not the only possibilities as we have already seen above.

Thurston formulated some natural conditions, apart from homogeneity, which a three-dimensional model geometry should satisfy. Among these are simple connectedness, maximal symmetry and the existence of at least one compact manifold modelled by it. For example the torus T^3 which is compact carries the same geometry as $\mathbb{R}^3$. Another condition requires that the symmetry group has a compact point stabilizer which in two dimensions would rule out surfaces with only helicoidal symmetry. Thurston came up with a complete list of eight such geometries which, as he conjectured, would form the building blocks for all closed (compact without boundary) orientable 3-manifolds:



The first five of these are self-explanatory. The 3-manifolds listed in the last row are so-called unimodular Lie groups (we refer the reader to the excellent book by Thurston [Th2] for details). Roughly speaking, *Nil*, also called the Heisenberg group, is a twisted version of $\mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}$. The manifold $\widetilde{SL(2,\mathbb{R})}$ is the universal cover of the symmetry group of $\mathbb{H}^2$ which one can think of as a twisted version of $\mathbb{H}^2 \times \mathbb{R}$. The last 3-manifold is a particular type of torus bundle over the circle (but not as simple as $T^2 \times S^1$; there must be a certain distortion of the geometry of the T^2 fibres, see [Th2] for details and [We] for additional intuitive descriptions).

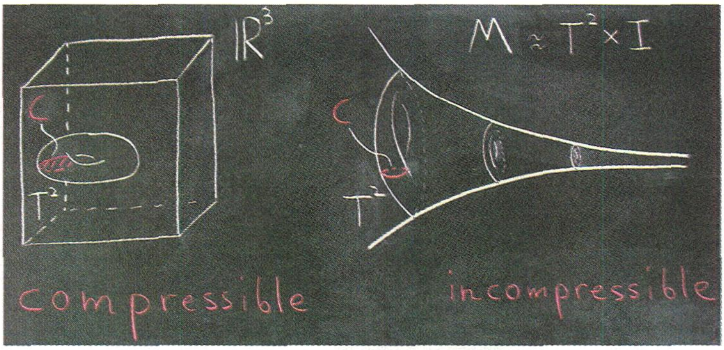
Geometrization conjecture ([Th1]) *Every closed, orientable* 3*-manifold can be decomposed along* 2*-spheres and incompressible* 2*-tori and then capped off along the* 2*-spheres by* 3*-balls in such a way that the resulting finitely many pieces each admit one of the above eight geometries.*

More precisely, they locally look like one of these eight, possibly up to discrete group actions. For instance, $S^2 \times S^1$ is modelled by $S^2 \times \mathbb{R}$ and T^3 by $\mathbb{R}^3$.

The above manifolds are all non-compact, except S^3. All are simply connected. After some additional thought, one concludes that the geometrization conjecture implies the famous

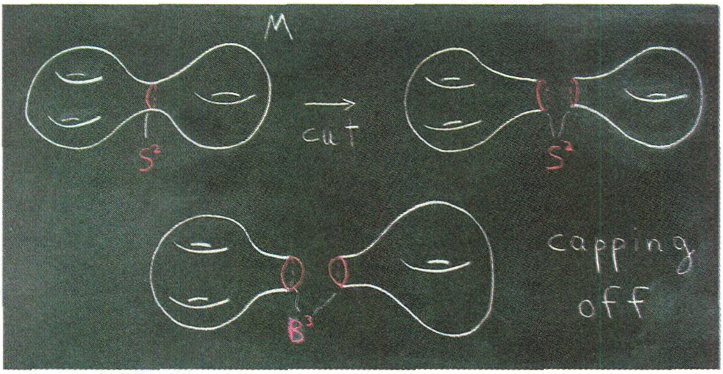
Poincaré conjecture ([Po]) *Every closed and simply connected* 3*-manifold is homeomorphic to* S^3.

The following picture gives an intuitive idea of the term *incompressible torus.*



In the left picture, the circle through the hole of the torus can be contracted in $\mathbb{R}^3$ but not on T^2. In the right picture, the torus in some sense 'represents' the topology of M, so the circle cannot be contracted, neither on T^2 nor in M.

The terms *decomposing* or *'cutting'* and *'capping off'* are depicted below. The two operations combined are often referred to as *surgery*, the reverse process is called *forming a connected sum.*

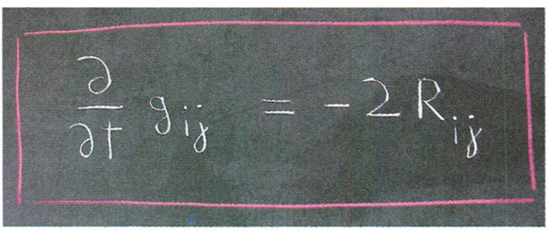


Thurston himself [Th3],[Th4],[Th5] contributed to the resolution of his conjecture by classifying 3-manifolds satisfying additional conditions which included all hyperbolic manifolds. However, the final resolution was based on results of Hamilton's **Ricci flow programme** [Ha3] which was completed around five years ago in the work of Perelman [P1], [P2] and [P3].

Let us explain some of the basic ideas of this programme. The three *Ricci curvatures* of a 3-manifold are averages of the sectional curvatures in the directions of the vectors of a 3 - frame $\{e_1, e_2, e_3\}$ as follows:

$$R_{11} = Ric(e_1, e_1) = K_{12} + K_{13}$$
$$R_{22} = Ric(e_2, e_2) = K_{12} + K_{23}$$
$$R_{33} = Ric(e_3, e_3) = K_{13} + K_{23}$$

Of course one can analogously define sectional and Ricci curvatures in higher dimensions but there the Ricci curvatures, being averages, contain less geometric information than the sectional curvatures. It is a special feature of three dimensions that the R_{ii} completely determine the K_{ij} as one can easily see from the definitions. One should think of the *Ricci tensor* (R_{ij}) as a symmetric 3×3-matrix at every point of the manifold whose eigenvalues are the Ricci curvatures. Of course, the metric $g = (g_{ij})$ on a 3-manifold is also given by a 3×3-matrix field which is symmetric and in addition positive definite. Hamilton's Ricci flow for a 'time-dependent' family of metrics $g(t)$ on a 3-manifold M is defined by the evolution law



where we start with some metric $g(0) = g_0$. The definition also makes sense in arbitrary dimensions. In two dimensions, there is only one sectional curvature. Therefore the Ricci flow reduces to the equation considered in the previous section on surfaces (without the average curvature term).

In suitable (so-called *harmonic*) coordinates for the manifold, the Ricci tensor looks like

$$-2R_{ij} = \Delta g_{ij} + O(\partial g_{ij}).$$

The Laplacian here acts on the components of the metric tensor and the last term is non-linear in the coordinate derivatives of the metric. This immediately suggests that the Ricci flow system is a type of non-linear heat equation for the metric. It turns out that the equation for the metric is not as frequently used (except in the proof of short-time existence of a solution of Ricci flow for given initial metrics) as the evolution equation for the *curvature operator* $\mathcal{R}$ of the metric. The curvature operator in three dimensions is a symmetric 2-tensor whose eigenvalues are the sectional curvatures. It satisfies the equation

$$\left(\frac{\partial}{\partial t} - \Delta\right)\mathcal{R} = \mathcal{R}^2 + \mathcal{R}^{\#}.$$

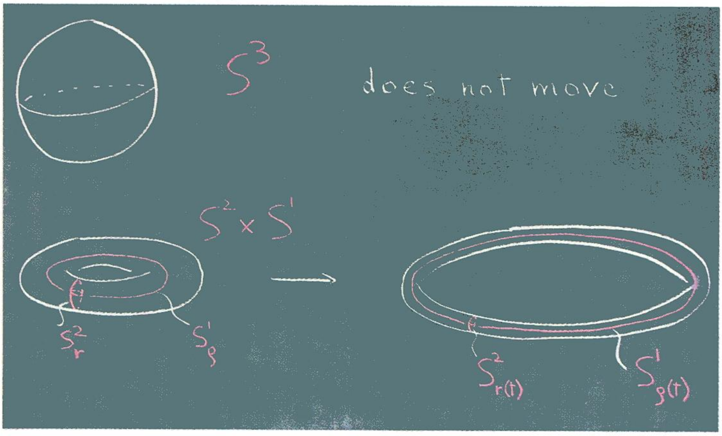
Let us abbreviate the sectional curvatures by $\lambda \leq \mu \leq \nu$ (the order is preserved by the Ricci flow). The tensor $\mathcal{R}^{\#}$ which is symmetric and quadratic in $\mathcal{R}$ is given in diagonalized form by its eigenvalues $\mu\nu, \lambda\nu, \mu\nu$. The curvature therefore satisfies a reaction-diffusion equation just as for the curve-shortening flow except this one has a quadratic rather than a cubic non-linearity which is due to the fact that intrinsic curvature scales like the product of extrinsic curvatures (see the theorema egregium).

The reaction term can cause singularities in finite time for certain initial metrics. For example, a round S^3 and some 3-manifolds close to it 'contract' in finite time T. In this case, the curvature explodes like $(T-t)^{-1}$. To understand what is happening asymptotically to the geometry one considers instead the *volume normalized Ricci flow* for manifolds with finite volume (such as closed ones). In three dimensions, this flow is defined by

$$\frac{\partial}{\partial t} g_{ij} = -2\left(R_{ij} - \frac{\bar{R}}{3} g_{ij}\right)$$

where $\bar{R}$ denotes the average of the scalar curvature function given by $R = R_{11} + R_{22} + R_{33}$. In the case of surfaces, the flow reduces to the one discussed in the previous section. It keeps the volume of the evolving manifold fixed such that for example S^3 and all other closed 3-manifolds carrying isotropic geometry (for instance T^3 or $T^2 \times S^1$) remain unchanged.

In fact, under the normalized flow, none of the closed quotients of the eight model geometries develop singularities except those for $S^2 \times \mathbb{R}$. For instance, $S^2 \times S^1$ expands to infinity in finite time while simultaneously thinning out in order to maintain its volume. The latter causes the curvatures to tend to infinity in finite time, as in the following figure.



For certain manifolds, the diffusive effect of the Ricci flow dominates after normalization. In fact, Hamilton's first breakthrough in 1982 which established the Ricci flow as a valuable tool for the study of the relation between geometry and topology of 3-manifolds was the following

Theorem (Hamilton 1982 [Ha1]) *If (M^3, g_0) is closed, orientable and simply connected and has positive Ricci curvatures then the solution $(M^3, g(t))$ of the normalized Ricci flow on M^3 which starts from g_0 smoothly converges to the standard metric on S^3 as $t \to \infty$.*

This implies in particular that any 3-manifold with positive Ricci curvatures has to be diffeomorphic to a sphere.

For a general initial metric, singularities may develop in finite time under the Ricci flow [Si], in infinite time after normalization, except for $S^2 \times S^1$ which we discussed above. Such singularities are detected by considering $|\mathcal{R}(t)|$, the square root of the sum of the squares of the sectional curvatures, which tends to infinity near the singularity as the singular time is approached.

To be able to study the solution near the singularity, one rescales the metric so as to keep the curvatures bounded, that is one considers

$$g_k(t) = \lambda_k \, g\left(\frac{t}{\lambda_k} + t_k\right)$$

where the λ_k are approximately the maxima of $|\mathcal{R}(t_k)|$ for a sequence of times t_k tending to the singular time, i.e. $\lambda_k \to \infty$. This increases distances but does not effect the Ricci curvatures which correspond to the speed. Rescaling also in time is therefore necessary because the solution takes longer to cover the larger distances.

If we also translate in time so as to set the singular time equal to zero, the rescaled solution will extend its existence further and further into the past. It has been a difficult problem to ensure that this rescaling process converges again to a solution of Ricci flow, at least for a subsequence of times. This problem was ultimately overcome by Perelman.

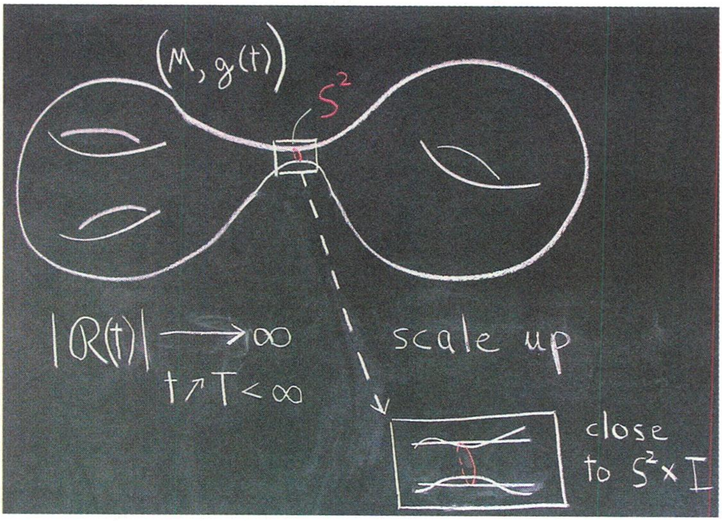
Since the rescaling limit has existed infinitely long (we call such a solution *ancient*), the diffusion term in the equation for the curvature operator has had enough time to improve the solution so we expect it to have nicer properties than the original one. Indeed, it follows from work of Hamilton [Ha3] and Ivey [I] that the lowest of the sectional curvatures becomes less and less negative during the rescaling process so that the rescaling limit has non-negative sectional curvatures. The latter follows by studying the dynamical behaviour of the system of ordinary differential equations

$$\frac{\partial}{\partial t}\mathcal{R} = \mathcal{R}^2 + \mathcal{R}^\#$$

which in diagonal form reads as

$$\frac{d}{dt}\begin{pmatrix}\lambda\\ \mu\\ \nu\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}\lambda^2+\mu\nu\\ \mu^2+\lambda\nu\\ \nu^2+\lambda\mu\end{pmatrix}.$$

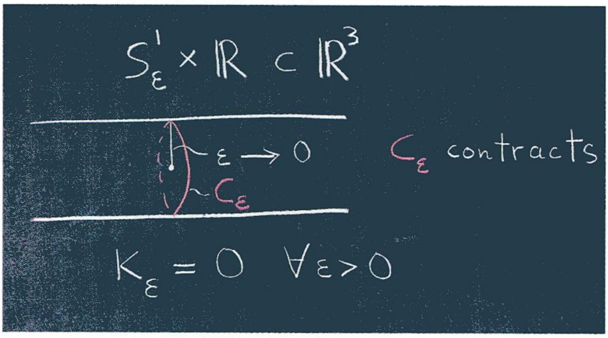
This information about the rescaling limit (in some sense this limit describes the structure of the original solution near the singularity) rules out a large number of possible geometries. The only remaining possibilities are S^3, $S^2 \times \mathbb{R}$ as well as certain 'undesirable' structures which we will discuss later. In the case of S^3, we are essentially in the situation already covered by Hamilton in 1982, so we know what happens. If we see $S^2 \times \mathbb{R}$ geometry we could for instance be sitting on a topological $S^2 \times S^1$ contracting to a circle. Alternatively, our unscaled evolving metric could get closer and closer to a 'round neck' $S^2 \times I$ near the singularity, where I is an interval, as in the picture below.



In this situation, a careful quantitative version of the surgery procedure of the kind explained earlier can be applied, that is the solution can be decomposed along an S^2 (as forecast in the geometrization conjecture) by removing an almost cylindrical piece and then capping off the resulting two pieces by two 3-balls. Here, the capping off has to be carried out carefully so that the resulting manifold has positive curvature near the caps which ensures that the two pieces initially 'move away from each other' in this region. In the case of the 'undesirable' rescaling limit, surgery as above is not possible. In fact, in this situation one cannot even make proper sense of the term 'rescaling limit'. This had been one of the main technical problems for two decades. Showing that for a closed (compact without boundary) solution this undesirable behaviour cannot occur after *finite time* was one of Perelman's contributions [P1]. We will explain this issue a little later.

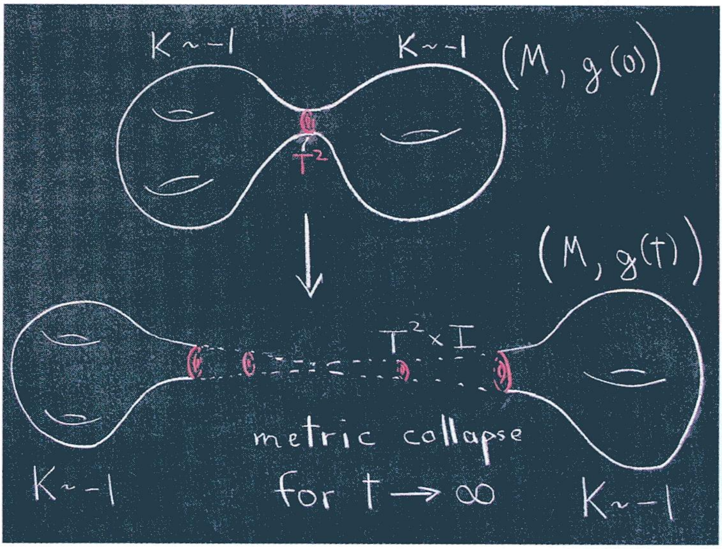
Hamilton [Ha4] also studied the behaviour of *non-singular* closed 3-manifold solutions of the *volume normalized Ricci flow* for time tending to infinity. By non-singular we mean that there is a curvature bound for the solution which is independent of time. This is something one might hope to obtain after no more singularities form. Hamilton showed that two of the possibilities could be smooth convergence to one of the isotropic (constant sectional curvature) geometries or metric collapse of the solution.

Metric collapse refers to a situation where on a family of manifolds with *uniformly bounded curvatures* (as our normalized Ricci flow solution) some shortest geodesics shrink away, as in the following picture of a collapsing sequence of cylinders in $\mathbb{R}^3$.



In this case, the curvatures are even zero. A more sophisticated (and three-dimensional) example is given by the Berger spheres (see [Th2])).

A typical example of the third possible behaviour one could observe for non-singular solutions as time tends to infinity is shown below (this example has been borrowed from [Ha3] where also further details can be found).



Under normalized Ricci flow the 'ends' of the manifold which are almost hyperbolic (that is K which describes the (almost identical) sectional curvatures is close to negative one) will hardly move while the 'middle' part which is almost Euclidean (with $T^2 \times I$ topology) stretches (as the volume has to stay constant) with resulting metric collapse.

The 'thick' parts at the ends will become hyperbolic in the limit. The geometric structure of the collapsing parts of the manifold is well-understood [CG1], [CG2]. They are so-called Seifert fibred spaces (which satisfy the prediction of the geometrization conjecture). The collapsing parts are connected to the hyperbolic ends by pieces which typically have the structure of $T^2 \times I$ that is correspond to the predicted incompressible tori. In effect, the Ricci flow provides a canonical way of finding a *thick-thin decomposition* of our manifold, as the latter is termed by 3-manifold topologists (see [Th2]).

Let us summarize **Hamilton's programme** for establishing the geometrization conjecture:

One starts with an arbitrary metric on a closed orientable 3-manifold. Under the evolution by the Ricci flow, it will develop singularities in finite time. If the volume of the manifold disappears at the first singular time, one obtains an S^3 or an $S^2 \times S^1$ after rescaling.

If not (and *assuming* that the 'undesirable' rescaling limits mentioned before do not occur in finite time) an $S^2 \times I$ neck will form on which one then performs surgery in the way described earlier. Letting the resulting pieces evolve separately, the procedure will repeat itself. If this happens only finitely often, for example if all surgery components vanish under the flow in finite time (*extinction time*), one ends up with a connected sum of finitely many S^3 quotients and $S^2 \times S^1$ components. If the initial manifold was simply connected we obtain only S^3's and hence the Poincaré conjecture is confirmed. Perelman [P3] and Colding-Minicozzi [CM] could show that for simply connected 3-manifolds the extinction time is indeed finite.

If after finite time we are in the lucky situation of having a non-singular solution of the volume normalized Ricci flow, then the above three possibilities for non-singular solutions will occur, all of which confirm geometrization. Perelman [P2] could show that even if the formation of singularities persists forever, Hamilton's arguments could be suitably modified and augmented to confirm the geometrization conjecture.

6 Ricci flow and a Poincaré type inequality

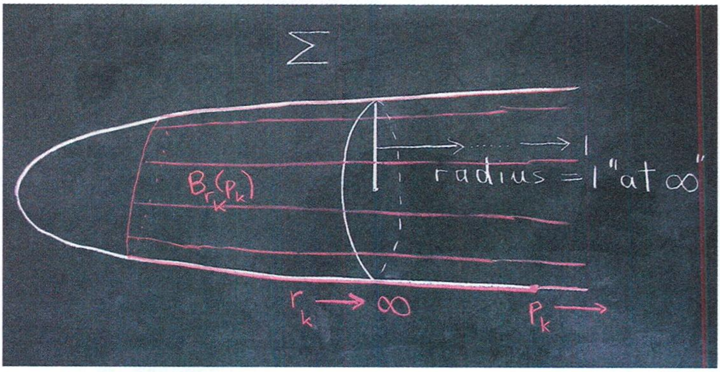
Let us last focus on one of Perelman's major contributions which was among the ingredients of the resolution of the geometrization conjecture.

Prior to Perelman's breakthrough, for many years the holy grail in Ricci flow theory had been to find a way of ruling out the 'undesirable' rescaling limit we have mentioned several times. Remember that rescaling limits describe the local geometry (and topology) of the Ricci flow solution near a singularity.

An example of such a solution is constructed as follows. In two dimensions, one considers the manifold $\Sigma = (\mathbb{R}^2, ds^2)$ where

$$ds^2 = \frac{dx^2 + dy^2}{1 + x^2 + y^2}.$$

This so-called *cigar soliton* solution of the two-dimensional Ricci flow found by Hamilton exists for all time (*eternal* solution). Furthermore, it evolves only by diffeomorphisms, that is points are moved around on the manifold but there is no change in its geometry. Embedded in $\mathbb{R}^3$ it would look like the next picture.

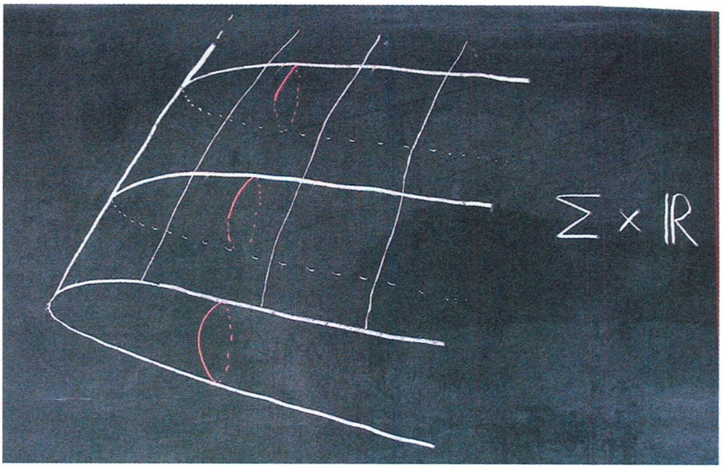


A special feature of this manifold is that as seen from infinity it looks like a half-line rather than a two-dimensional object in the sense that it dimensionally collapses at large radii in the following way:

$$\frac{Vol(B^2_{r_k}(p_k))}{r_k^2} \sim \frac{r_k}{r_k^2} \to 0$$

for a suitably chosen sequence of geodesic balls in Σ with radii r_k tending to infinity.

In three dimensions, we consider $\Sigma \times \mathbb{R}$



which for some sequence of geodesic balls satisfies

$$\frac{Vol(B^3_{r_k}(p_k))}{r_k^3} \sim \frac{r_k^2}{r_k^3} \to 0.$$

The picture suggests that as seen from infinity $\Sigma \times \mathbb{R}$ looks like a half-plane rather than a three-dimensional object. If our Ricci flow solution is geometrically close to $\Sigma \times \mathbb{R}$ near the singularity, then in small balls around the singularity it will deteriorate dimensionally. Perelman proved that this cannot happen in *finite time* in the evolution of closed manifolds.

Theorem (Perelman 2002 [P1]) *Let $(M^n, g(t))$ be a closed solution of the Ricci flow for $0 < t < T < \infty$ with initial metric $g(0)$. Then there exists a constant $\kappa > 0$ which only depends on n, T and the initial metric $g(0)$ such that*

$$\frac{Vol_t(B_r^t(p))}{r^n} \geq \kappa$$

for all $t < T$ and $r \leq \sqrt{T}$ in balls $B_r^t(p)$ (with respect to $g(t)$) in which the curvature $|\mathcal{R}(t)|$ is controlled by $1/r^2$. In particular, any rescaling limit $(M, g'(s))$ of $(M, g(t))$ satisfies

$$\frac{Vol_s(B_r^s(p))}{r^n} \geq \kappa$$

for all $0 < s < \infty$ with the same κ as above but this time for all $r < \infty$ in balls $B_r^s(p)$ where $|\mathcal{R}'(s)| \leq 1$. Here $\mathcal{R}'(s)$ denotes the curvature operator with respect to $g'(s)$.

This rules out $\Sigma \times \mathbb{R}$ as a limit. To explain the analysis behind this in detail would go beyond the scope of this exposition. However, let us mention that the proof of the above lower volume ratio bound is a consequence of the preservation of a functional inequality (like a logarithmic Sobolev inequality) on $(M, g(t))$ during the evolution which in turn is related to preserving ordinary Sobolev inequalities, isoperimetric inequalities and the Poincaré inequality for finite time as long as the curvatures are under control.

As we saw in the first section, this kind of information also controls the diffusion rate of solutions of the heat equation. Therefore one can consider this another more involved situation where analysis (heat diffusion) and geometry interact.

References

[CG1] J. Cheeger, M. Gromov, Collapsing Riemannian manifolds while keeping their curvature bounded, I, J. Differ. Geom. **23** (1986), 309–346

[CG2] J. Cheeger, M. Gromov, Collapsing Riemannian manifolds while keeping their curvature bounded, II, J. Differ. Geom. **32** (1990), 269–298

[Ch] B. Chow, The Ricci flow on the 2-sphere, J. Differ. Geom. **33** (1991), 325–334

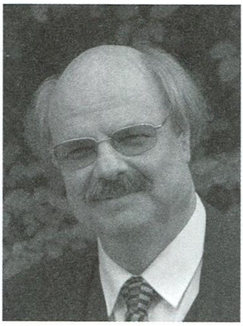
[CLN] B. Chow, P. Lu, L. Ni, *Hamilton's Ricci flow*, Graduate Studies in Mathematics, Volume **77**, AMS (2006)

[CLT] X. Chen, P. Lu, G. Tian, A note on uniformization of Riemann surfaces by the Ricci flow, arXiv:math.DG/0505163

[CM] T.H. Colding, W.P. Minicozzi, Estimates for the extinction time for the Ricci flow on certain three-manifolds and a question of Perelman, Journal of the AMS, **318** (2005), 561–569

[ES] J. Eells, J.H. Sampson, Harmonic mappings of Riemannian manifolds, Amer. J. Math. **86** (1964), 109–160

[GH] M. Gage and R. S. Hamilton, The heat equation shrinking convex plane curves, J. Differ. Geom. **23**, 417–491 (1986)
[Gr] M. Grayson, The heat equation shrinks embedded plane curves to round points, J.Differ. Geom. **31**, 285–314 (1987)
[Ha1] R.S. Hamilton, Three-manifolds with positive Ricci curvature, J. Differ. Geom. **17** (1982), no. 2, 255–306
[Ha2] R.S. Hamilton, The Ricci flow on surfaces, Contemp. Math. **71**, Amer. Math. Soc., Providence RI, 1988
[Ha3] R.S. Hamilton, The formation of singularities in the Ricci flow, Surveys in Differential Geometry, Vol II, (1995) Cambridge MA, 1995, 7–136
[Ha4] R.S. Hamilton, Non-singular solutions to the Ricci flow on three-manifolds, Comm. Anal. Geom. **7** (1999), 695–729
[Hu1] G. Huisken, Flow by mean curvature of convex surfaces into spheres, J. Diff. Geom. **20**, 237–266 (1984)
[Hu2] G. Huisken, A distance comparison principle for evolving curves, Asian J. Math. **2**, 127–134 (1998)
[HT] S. Hildebrandt, A. Tromba, *The parsimonious universe*, Springer Verlag 1996
[I] T. Ivey, Ricci solitons on compact three-manifolds, Diff. Geom. Appl. **3** (1993), 301–307
[P1] G. Perelman, The entropy formula for the Ricci flow and its geometric applications, arXiv: math.DG/0211159v1 11Nov2002
[P2] G. Perelman, Ricci flow with surgery on three-manifolds, axXiv:math.DG/0303109
[P3] G. Perelman, Finite extinction time for solutions to the Ricci flow on certain three-manifolds, arXiv:math.DG/0307245
[Po] H. Poincaré, Analysis Situs, Cinquième complément à l'analysis Situs, Rend. Circ. mat. Palerma **18** (1904), 45–110
[Si] M. Simon, A class of Riemannian manifolds that pinch when evolved by Ricci flow, Manuscripta Math **101** (2001), 89-114
[Th1] W.P. Thurston, Three-dimensional manifolds, Kleinian groups, and hyperbolic geometry, Bull. Amer. Math. Soc. **6** (1982), 357–381
[Th2] W.P. Thurston, *Three-dimensional Geometry and Topology*, Volume 1, Princeton University Press, Princeton, New Jersey, 1997
[Th3] W.P. Thurston, Hyperbolic structures on 3-manifolds, I: Deformation of acylindrical manifolds, Ann. of Math. (2) **124** (1986), 203–246
[Th4] W.P. Thurston, Hyperbolic structures on 3-manifolds, II: Surface groups and 3-manifolds which fiber over the circle , axXiv:math.GT/9801045
[Th5] W.P. Thurston, Hyperbolic structures on 3-manifolds, III: Deformations of 3-manifolds with incompressible boundary axXiv:math.GT/9801058
[To] P. Topping, Mean curvature flow and geometric inequalities, J. Reine Angew. Math. **503** (1998), 47–61
[We] J.B. Weeks, *The shape of space*, Marcel Dekker Inc. New York, Basel 2002
[Wh] B. White, Some recent developments in Differential Geometry, Math. Intelligencer Vol 11, No 4. Springer 1989



Zur Mathematiklehrpersonen-ausbildung fürs Gymnasium an der ETH Zürich*

U. Kirchgraber

Abstract

- Mathematics Subject Classification: 97 B 40, 97 B 50, 97 D 30
- Keywords and Phrases: Fachwissenschaftliche Vertiefung mit pädagogischem Fokus in Mathematik, Längsschnittkoherenz, Elementarisieren, Exaktifizieren, Genese von Begriffen, Mathematik würdigen

Der Artikel gliedert sich in vier Teile. Zuerst werden ein paar allgemeine Bemerkungen zur Ausbildung von Gymasiallehrpersonen in Zürich und insbesondere an der ETH gemacht. Dann wird ein kurzer Blick auf neuere Ergebnisse in der Lehr- und Lernforschung geworfen. Der dritte und ausführlichste Teil befasst sich mit einem neuen Ausbildungsbereich in der Zürcher Gymnasiallehrpersonenausbildung. Zum Schluss folgen ein paar Bemerkungen zum gymnasialen Mathematikcurriculum.

* Überarbeitete Fassung eines an der 2007 von DMV und GDM gemeinsam durchgeführten Jahrestagung gehaltenen Vortrags.

Eingegangen: 17. 04. 2007

Departement Mathematik der ETH Zürich und Zürcher Hochschulinstitut für Schulpädagogik und Fachdidaktik von Pädagogischer Hochschule Zürich, Universität Zürich und ETH Zürich, Kirchgra@math.ethz.ch

DMV
JAHRESBERICHT DER DMV

Inhaltsübersicht

1 Zur Gymnasiallehrpersonenausbildung in Zürich und insbesondere an der ETH
2 Kurzer Blick auf neuere Ergebnisse in der Lehr- und Lernforschung
3 Was ist und was will die Fachwissenschaftliche Vertiefung mit pädagogischem Fokus?
4 Gymnasialer Mathematikunterricht: Mit welcher Wolle soll was gestrickt werden?

1 Zur Gymnasiallehrpersonenausbildung in Zürich und insbesondere an der ETH

Es mag überraschen, dass die Mathematik und die Naturwissenschaften an der ETH einst im Hinblick auf die gymnasiale Lehrpersonenausbildung eingeführt wurden!

Bis zum Beginn des WS 06/07 konnten die ETH-Studierenden in den Fächern Biologie, Chemie, Geografie, Mathematik, Physik und Sport in Form eines Zusatzstudiums im Umfang von etwa 30 Kreditpunkten in der Bologna-Währung den sogenannten *Didaktischen Ausweis* erwerben, der für das Unterrichten im entsprechenden Fach am Gymnasium qualifizierte. Neu müssen Mindestanforderungen der „schweizerischen KMK", die hier EDK – für Erziehungsdirektorenkonferenz – heißt, erfüllt werden.

Ende der 90er Jahre beschloss der Kanton Zürich die Gründung einer Pädagogischen Hochschule, primär für die Ausbildung der Lehrkräfte für die Grundschule und die Sekundarstufe I, die bis dahin an sogenannten Seminarien stattfand.

In Zürich wollte man in der Gymnasiallehrpersonenausbildung keine Trennung von fachwissenschaftlicher und pädagogisch-berufspraktischer Ausbildung und es schien überdies sinnvoll, die Gymnasiallehrpersonenausbildung der ETH einzubeziehen und auf dem Platz Zürich zusammen zu arbeiten. So beschlossen die drei Zürcher Hochschulen 2002 die Gründung eines gemeinsamen Instituts. Es entstand das „Zürcher Hochschulinstitut für Schulpädagogik und Fachdidaktik von Pädagogischer Hochschule Zürich, Universität Zürich und ETH Zürich", kurz ZHSF genannt. Der primäre Auftrag des ZHSF ist, Lehre, Forschung und Entwicklung, sowie Dienstleistung rund um die Gymnasiallehrpersonenaus- und weiterbildung zu betreiben.

Die erste Aufgabe, der sich das junge Institut zu widmen hatte, bestand darin, die Ausbildungsgänge für zukünftige Gymnasiallehrpersonen unter Berücksichtigung der EDK-Vorgaben zu reformieren und die Kooperation einzuleiten. Die EDK-Vorgaben verlangen von einer Gymnasiallehrperson einen fachwissenschaftlichen Masterabschluss im zukünftigen Unterrichtsfach und eine pädagogisch-berufspraktische Ausbildung von mindestens 60 Kreditpunkten[1]. Von den 60 Punkten müssen der erziehungswissenschaftliche und der berufspraktische Anteil je mindestens 15 Punkte ausmachen.

Die ursprüngliche EDK-Forderung, die Ausbildung müsse für zwei Unterrichtsfächer qualifizieren, wurde schließlich wieder fallen gelassen. Dass 30 Kreditpunkte dem erziehungswissenschaftlich-berufspraktischen Bereich angehören sollen, hat mit einer seit langem erhobenen Forderung aus bildungspolitischen Kreisen zu tun, obwohl diese nicht unangefochten ist.

In einem sehr lesenswerten Artikel unter dem Titel „Gymnasiallehrkräfte – eine aussterbende Spezies?“[2] äußert sich der an der Universität Bern lehrende Pädagogikprofessor F. Osterwalder kritisch zur Bedeutung der berufsbezogenen Wissenschaften in der Ausbildung der Gymnasiallehrpersonen und warnt vor übertriebenen Hoffnungen. Er glaubt nicht, *„dass die Probleme des gymnasialen Unterrichts, denen die künftigen Lehrpersonen begegnen werden, in der Ausbildung durch die berufsbezogenen Wissenschaften beliebig vorweggenommen und für die Zukunft befriedigend gelöst werden können“.*

Der erziehungswissenschaftlichen Ausbildung für angehende Gymnasiallehrpersonen traut er höchstens zu, dass sie diesen *„eine Distanz zum praktischen Feld vermitteln, in der sie Zugang zu historisch oder empirisch gesicherten Kenntnissen über unterschiedliche bildungspolitische, institutionelle, didaktische und methodische Möglichkeiten der Erfüllung der spezifischen Aufgaben im Gymnasium gewinnen und lernen, diese reflektive Distanz zum Handlungsfeld auch systematisch zu pflegen“.*

Das Ausbildungskonzept, nach dem an der ETH Zürich seit WS 06/07 studiert wird, sieht 5 *Ausbildungsbereiche* in dem jeweils angegebenen Umfang vor:

- Erziehungswissenschaften (15 Kreditpunkte)
- Fachdidaktik (12 Kreditpunkte)
- Fachwissenschaftliche Vertiefung mit pädagogischen Fokus (12 Kreditpunkte)
- Berufspraktische Ausbildung (15 Kreditpunkte)
- Wahlpflicht (6 Kreditpunkte)

Die Ausbildung führt zum Master of Advanced Studies in Secondary and Higher Education im jeweiligen Fach.

2 Kurzer Blick auf neuere Ergebnisse in der Lehr- und Lernforschung oder messen was messbar ist

Die Frage, was *guter Unterricht* sei oder schlichter, *was im Unterricht was bewirkt*, ist gewiss nicht neu. Vermutungen und Behauptungen darüber gibt es reichlich. Seit einigen Jahren wird dieser Frage systematischer und mit mehr Rationalität nachgegangen. Es sind hauptsächlich empirische Fallstudien, die hinsichtlich Umfang und Komplexität allerdings stark variieren. Die gute Verfügbarkeit von einschlägiger Soft- und Hardware erleichtert die Datenerfassung und -bearbeitung.

Für eine einfachere Studie kann zum Beispiel eine Komponente in einem Unterrichtsdesign variiert werden und der Effekt mit einem Test erhoben und statistisch ausgewertet werden. So haben *Stern*, *Aprea* und *Ebner*[3] zum Beispiel untersucht, wie Studierende mit unterschiedlichem akademischen Hintergrund lineare Graphen zur Lösung von Fragestellungen in Kontexten nutzen, die ihnen - je nach Probandengruppe - ganz, teilweise oder gar nicht vertraut sind. Die Variation im Design bestand darin, wie vor dem Test das Konzept „linearer Graph“ reaktiviert wurde: ob *passiv* (durch Lektüre eines Texts, in dem ein Graph benutzt wurde) oder *aktiv* (indem die Probanden selbst einen Graphen zeichnen mussten). Interessanterweise schnitten in den Populationen „Studierende der Ökonomie“ bzw. „Mathematik- und Computer-Science-Studierende“ diejenigen Teilgruppen besser ab, die in der Vorbereitung einen Graphen konstruieren mussten. Das ist deshalb eine Überraschung, weil man annehmen würde, dass diese Gruppen von Studierenden ausreichend mit linearen Graphen vertraut sind.

Schule und Unterricht ist anerkanntermaßen ein komplexes Unternehmen, bei dem eine Vielzahl von Faktoren auf die eine oder andere Art eine Rolle spielen.

Einige Faktoren sind *Schüler-bezogen*: Intelligenz, bisher erbrachte Mathematikleistung, Geschlecht, ethnischer Hintergrund, sozioökonomischer Status der Familie. Einige Faktoren sind *Lehrer-bezogen*: fachliche Kompetenz, fachdidaktische Kompetenz, pädagogische Kompetenz, Einstellungen, Lehrerfahrung. Einige Faktoren sind *Institutionen-bezogen*: Schultyp oder Profil, effektive Unterrichtszeit und viele andere mehr.

Da offenbar nicht nur die Naturwissenschaften, sondern mehr und mehr auch die Lehr/Lernforschung unter dem Verdikt von *Lord Kelvin* steht[4], wird versucht, diese Faktoren messbar zu machen. Mit Items wie „Kinder lernen Mathemtik am besten, indem sie selber herausfinden, wie sie zu Antworten auf einfache Textaufgaben kommen“ bzw. „Ein guter Lehrer führt vor, auf welche Weise man eine Textaufgabe am besten löst“[5], denen Befragte mehr oder minder zustimmen können, wird versucht zu bestimmen, ob eine (Grundschul-)lehrkraft eher eine sogenannte *konstruktivistische* oder aber *instruktionistische* Auffassung von Lehren und Lernen hat. Ein solcher Fragebogen führt zu einer Zahl, mit der das *Merkmal*, das erfasst werden soll, kodiert wird. Er ist ein *Messinstrument* für das Merkmal.

Interessanterweise konnten *Staub* und *Stern*[6] unter Benutzung der Daten aus der sogenannten Münchner Scholastik-Studie nachweisen, dass der jährliche Lernzuwachs von Drittklässlern beim Lösen von mathematischen Textaufgaben statistisch signifikant höher ist, wenn die Lehrperson eine konstruktivistische Auffassung von Lernen und Lehren hat.

Eine für die Lehrpersonenausbildung hoch interessante Frage an die empirische Lern- und Lehrforschung ist die nach dem Einfluss der mathematischen und mathematikdidaktischen Kompetenz von Lehrkräften auf das Lernen von Mathematik, und die nach dem Einfluss der mathematischen auf die mathematikdidaktische Kompetenz.

Tatsächlich gibt es zu diesen Fragen erste Antworten. Zuerst sei auf eine Untersuchung von *Hill, Rowan und Ball*[7] hingewiesen. Sie benutzt ein Instrument, mit dem bei Grundschullehrpersonen eine Kombination von fachwissenschaftlicher und fachdidaktischer Kompetenz in den Bereichen Zahlkonzept, Grundoperationen, Zahlmuster, Funktionsbegriff, Elemente der Algebra erhoben wird. Die Autoren nennen diese Variable „teachers' mathematical knowledge for teaching“. Die Daten, auf denen die Studie beruht, beziehen sich auf etwa 1200 Erst- und 1800 Drittklässler und ihre Lehrerinnen und Lehrer. Die Schulen liegen in 42 Distrikten, die auf 15 US-amerikanische Staaten verteilt sind.

Der wichtigste Befund ist, dass die von den Autoren verwendete Variable „teachers' mathematical knowledge for teaching“ sich als statistisch signifikanter Prädiktor für den beobachteten Lernzuwachs erwiesen hat. Die Größenordnung des Effekts ist bei den untersuchten Drittklässlern ungefähr vergleichbar mit dem Einfluss, den der sozioökonomische Status der Eltern hat. Eine Zunahme um eine Standardabweichung in dieser Variablen entspricht etwa 2–3 Wochen zusätzlichen Unterrichts pro Jahr.

Weiter soll kurz das DFG-Projekt COACTIV angesprochen werden, an dem *Baumert, Krauss, Kunter* und weitere Personen vom MPI für Bildungsforschung in Berlin, und seitens der Mathematikdidaktik *Blum* und *Neubrand* mitwirken[8]. Sie verwenden zur Erfassung von Lehrer-bezogenen Merkmalen unter anderen je eine Variable zur Erfassung des mathematischen Fachwissens und des mathematikdidaktischen Wissens.

Für die Messung der Variablen mathematisches Fachwissen und mathematikdidaktisches Wissen haben sie Instrumente entwickelt, wobei letztere Items zu den drei Kategorien Aufgaben, Schülerkognitionen und Instruktion enthalten. Die Daten stammen von mehreren hundert Lehrpersonen, die in bundesdeutschen Klassen der Jahrgangsstufen 9 und 10 unterrichteten, wobei alle Schultypen repräsentiert sind. Es sei nur ein Ergebnis herausgegriffen: Die Korrelation zwischen den Variablen mathematisches Fachwissen und mathematikdidaktisches Wissen beträgt 0.8 und ist auf dem 5 Prozent Niveau signifikant. Dieses Ergebnis kann als Hinweis gedeutet werden, dass die mathematische Kompetenz einen bedeutenden Einfluss auf die mathematikdidaktische Kompetenz hat.

Man kann im übrigen vermuten, dass die mathematische Kompetenz einer Lehrperson auf der Gymnasialstufe einerseits einen direkten, und andererseits einen indirekten Einfluss – via mathematikdidaktische Kompetenz – auf den Lernzuwachs ihrer Schülerinnen und Schüler hat.

Zum Abschluss dieses Abschnitts sei in Anlehnung an einen Vortrag von E. Stern[9] schlagwortartig auf einige neuere Erkenntnisse aus der pädagogischen Psychologie hingewiesen:

- Intelligenz- und Methodentraining führen nicht zu Transfereffekten auf Inhalte.
- Der Begriff „Schlüsselkompetenzen“ ist kaum mehr als eine Fiktion.
- Expertise bleibt bereichsspezifisch.
- Wenn Vorwissen eine Rolle spielt, können Intelligenzunterschiede an Bedeutung verlieren.

Alles in allem bedeutet das nach Meinung des Autors, dass der fachlichen Kompetenz einer Lehrperson eine sehr hohe Bedeutung zukommt, was in der Lehrpersonenausbildung angemessen berücksichtigt werden muss.

3 Was ist und was will die Fachwissenschaftliche Vertiefung mit pädagogischem Fokus?

Wie in Abschnitt 1 vermerkt, trägt einer der fünf Ausbildungsbereiche in der seit WS 06/07 laufenden neuen Gymnasiallehrpersonenausbildung auf dem Platz Zürich die Bezeichnung *Fachwissenschaftliche Vertiefung mit pädagogischem Fokus*. Die fachwissenschaftliche Vertiefung mit pädagogischem Fokus (kurz „FV“ genannt) hat ihren Ursprung in den bekannten *Vorlesungen über Elementarmathematik vom höheren Standpunkte* von *Felix Klein* zu Beginn des 20. Jahrhunderts. In der Ausbildung zum Mathematik-Diplom an der ETH gab es seit langem ein Wahlfach namens Elementarmathematik, das für Studierende, die die Zusatzausbildung zur Gymnasiallehrperson absolvieren wollten, obligatorisch war. Der Autor erinnert sich, dass er während seines Studiums selbst Vorlesungen über *Abbildungsgeometrie* und *Boole'sche Algebra* gehört hat. Tatsächlich bildeten diese Veranstaltungen *die* fachspezifische Mathematiklehrpersonenausbildung, bis der Autor Ende der 80er Jahre von M. Jeger die Leitung der Mathematiklerpersonenausbildung übernahm, mathematikdidaktische Veranstaltungen im engeren Sinne einführte und begann, der Elementarmathematik eine etwas andere Orientierung zu geben, auf die im Folgenden eingegangen wird.

Zuvor kurz die Bemerkung, dass mit Beginn der neuen Lehrpersonenausbildung in Zürich in *allen* gymnasialen Fächern (also auch in der Biologie, Chemie, Physik, usw., aber auch in den humanistischen Fächern, also etwa in der Germanistik, Anglistik, Romanistik, Altphilologie, usw.) in Form der Fachwissenschaftlichen Vertiefung mit pädagogischem Fokus eine Art Pendant zur Elementarmathematik im Umfang von 12 Kreditpunkten absolviert werden muss. Sie wird in jedem Fach von Fachwissenschaftern in Zusammenarbeit mit den für die Lehrpersonenausbildung Verantwortlichen gestaltet.

Es sei noch darauf hingewiesen, dass die Veranstaltungen aus der Fachwissenschaftlichen Vertiefung in der Regel auch im entsprechenden BSc/MSc-Studium angerechnet werden und das auch bei Studierenden, die nicht in der Gymnasiallehrpersonenausbildung sind.

Was ist und was will nun die Fachwissenschaftliche Vertiefung mit pädagogischem Fokus, insbesondere im Bereich Mathematik?

Generell gilt: Die Spezifizierung „mit pädagogischem Fokus“ bedeutet: „Ist von Bedeutung für die zukünftige Tätigkeit als Gymnasiallehrperson im entsprechenden Fach.“

Es gibt fächerübergreifende und mehr oder weniger fächerspezifische Aspekte.

In dem schon zitierten Artikel beschreibt F. Osterwalder das *Ziel* des Gymnasiums als *„Einführung in das wissenschaftliche und kulturelle Leben, bevor sich die Absolventinnen und Absolventen für ein spezifisches wissenschaftliches Studium und einen entsprechenden Beruf entscheiden“*. Bei allen Fächern spielt die Auswahl des wissenschaftspropädeutischen Kanons eine bedeutende Rolle. Eine übergreifende Zielsetzung der FV ist, dass die zukünftigen Gymnasiallehrkräfte dabei kompetent mitdiskutieren und die Auswahl gegenüber Schülerinnen und Schülern, Lehrerkollegen und Schulbehörden, sowie der Öffentlichkeit legitimieren können.

Ein anderer übergreifender Aspekt ist die *Verantwortung gegenüber anderen Fächern*, ganz besonders gegenüber denjenigen, die nicht explizit am Gymnasium unterrichtet werden.

Es sollen im Folgenden sechs Aspekte vorgestellt werden, die mathematikspezifisch sind. In der Konzeption der Fachwissenschaftlichen Vertiefung mit pädagogischem Fokus in Mathematik an der ETH spielt das Kleinsche Modell natürlich eine Rolle. Die Verknüpung von universitärem und gymnasialem Fach ist ein wichtiges Anliegen der

FV. Allerdings wird eine symmetrischere Sichtweise vertreten. Die Blickrichtung geht – metaphorisch gesprochen – nicht nur von oben nach unten, sondern auch von unten nach oben. Es wird demnach unterschieden zwischen

- Elementarmathematik vom höheren Standpunkt ähnlich wie bei Klein, und
- Mathematik vom elementaren Standpunkt.

Elementarmathematik meint hier die Mathematik bis und mit Sekundarstufe II.

3.1 Aspekt 1: Entwicklung von Längsschnittkohärenz

Unter Längsschnittkohärenz wird die Verknüpfung von Schul- und universitärer Mathematik verstanden. Vieles, was in der Schulmathematik geschieht, ist nicht singulär, sondern hat Modellcharakter. Umgekehrt kann die Auseinandersetzung mit den Gegenständen auf fortgeschrittenerem Niveau zur Entwicklung einer vorwärts kompatiblen Betrachtungsweise auf unterem Niveau verhelfen.

Betrachten Sie das Thema Gleichungen als Beispiel. In der Jahrgangstufe 9 ist die (rein) quadratische Gleichung $x^2 = 2$ Thema, zunächst im Rahmen der rationalen Zahlen $\mathbf{Q}$. In einem ersten Schritt erkennt man, dass diese Gleichung durch Zahlen aus $\mathbf{Q}$ beliebig genau, das heißt, bis auf einen beliebig kleinen Rest erfüllt werden kann. Dann folgt eine folgenreiche Erkenntnis: Man beweist, dass die Gleichung $x^2 = 2$ in $\mathbf{Q}$ jedoch unlösbar ist.

Soll man sich damit zufriedengeben? Die Antwort ist nein. Die Gründe bedürfen einer sorgfältigen Diskussion mit angehenden Lehrpersonen. Die Aufgabe besteht dann darin, einen *Rahmen zu erfinden, in dem die Gleichung lösbar wird*. Die reellen Zahlen bilden bekanntlich diesen Rahmen.

Das Bedeutsame: Die im Prinzip analoge Aufgabe stellt sich in der weiteren Entwicklung der Gleichungslehre in und jenseits der Schulmathematik immer wieder: Gleichungen werden durch Konstruktion eines geeigneten Rahmens lösbar gemacht!

Längsschnittkoherenz bedeutet, dass Lehrpersonen ein derartiges Paradigma anhand von Beispielen auf verschiedenen Niveaus kennen. Ein für eine FV-Veranstaltung gut geeignetes Beispiel ist die partielle Differentialgleichung

$$-\Delta u + u = f \quad \text{in} \quad \Omega \subset \mathbf{R}^n \tag{1}$$

mit Nullrandbedingung. *P. Werner*[10] hat einen Zugang vorgeschlagen, der funktionalanalytisch, also abstrakt und daher im Prinzip einfach ist. Er gestattet die Existenz einer schwachen Lösung unter Vermeidung der Lebesgueschen Maß- und Integrationstheorie mit erstaunlich geringem Aufwand nachzuweisen. Hier ist eine Skizze, einer Darstellung von *H. Haf*[11] folgend.

Man geht vom Raum $C_0(\Omega)$ der auf Ω stetigen Funktionen mit kompaktem Träger in Ω aus, den man mithilfe des Riemann'schen Integralbegriffs bezüglich der $||.||_2$-Norm zu einem Prä-Hilbertraum macht. Dann wird der Unterraum $C_0^\infty(\Omega)$ der beliebig oft stetig differenzierbaren Funktionen, und davon der Dualraum betrachtet, das heißt also der *Raum der beschränkten linearen Funktionale* auf $C_0^\infty(\Omega)$. Dieser Raum wird mit

$L_2(\Omega)$ bezeichnet, denn er ist isometrisch zum Raum gleichen Namens im Sinne von Lebesgue, was aber keine Rolle spielt und man daher auch nicht wissen muss.

Man zeigt dann, dass $C_0^\infty(\Omega)$ isometrisch in $L_2(\Omega)$ eingebettet ist, dass $\overline{C_0^\infty(\Omega)}$ vollständig ist, dass sich das Skalarprodukt von $C_0^\infty(\Omega)$ auf $\overline{C_0^\infty(\Omega)}$ ausdehnen lässt und weist schließlich nach, dass $L_2(\Omega)$ gleich $\overline{C_0^\infty(\Omega)}$ ist, woraus folgt, dass $L_2(\Omega)$ ein Hilbertraum ist.

Weil als Grundraum der $C_0^\infty(\Omega)$ gewählt wurde, ergibt sich in natürlicher Weise ein *Ableitungsbegriff*, das heißt man ordnet einem Funktional aus $L_2(\Omega)$ neue lineare Funktionale auf $C_0^\infty(\Omega)$ zu, die man aus gutem Grund Ableitungen des Ausgangsfunktionals nennt. Jedoch brauchen diese nicht beschränkt zu sein, das heißt sie liegen nicht unbedingt in $L_2(\Omega)$. Das gibt Anlass, geeignete Teilmengen zu betrachten, die die Rolle von Sobolev-Räumen spielen.

Es sind nun alle Bestandteile beisammen, um das *ursprüngliche Problem* im *neuen Rahmen zu interpretieren* und es folgt dann recht leicht mit Hilfe des Riesz'schen Darstellungssatzes die *Existenz einer Lösung des neu formulierten Problems* (und auch ihre *Eindeutigkeit* lässt sich unschwer beweisen).

Am Ende meditiert man ein wenig verwundert die Parallele zwischen der Gleichung $x^2 = 2$ und der partiellen Differentialgleichung $-\Delta u + u = f$ und hat vermutlich ein neues Verhältnis zur Gleichung $x^2 = 2$ gewonnen.

Zur Erinnerung: Eine der Milleniumsaufgaben des Jahres 2000 hängt mit diesem Thema zusammen. Es geht um einen Rahmen für die Navier-Stokes-Gleichungen!

Längsschnittkohärenz heißt: In der Wurzel den Baum, im Baum die Wurzel sehen.

3.2 Aspekt 2: Beweise analysieren oder die Suche nach dem Kern

Wenn es auch eine unstatthafte Verkürzung wäre, die Mathematik aufs Beweisen zu reduzieren, so ist die Möglichkeit, Beweise führen zu können, doch ihr konstitutiver Wesenszug.

Es ist für Außenstehende überraschend, dass für Mathematikerinnen und Mathematiker nicht nur die Richtigkeit von Beweisen wichtig ist, sondern auch andere Kategorien eine Rolle spielen, insbesondere eine Form der Ästhetik. Wenn ein Beweis viele „Fallunterscheidungen" erfordert, wird er als mühsam und unbefriedigend empfunden. Ein Beweis mit überraschenden Ideen hingegen, gilt als *originell*, und, wenn er „ästhetisch ansprechend" und eventuell noch vergleichsweise kurz ist, als *elegant*.

Die Mathematikvorlesungen sind voll von „eleganten Beweisen". Meistens handelt es sich ja um Stoffe, die nicht brandneu sind, die sich als wichtig erwiesen haben, die schon häufig unterrichtet, und daher wiederholt aufgearbeitet wurden. In diesen Prozessen wird das Präsentationarrangement fortlaufend optimiert, das Geflecht aus Begriffen und Theoremen wird immer besser aufeinander abgestimmt: *Die Eleganz nimmt zu!*

Aus didaktischer Sicht ist diese Entwicklung zweischneidig. Auf der einen Seite ist dieser Prozess fortschreitender Vereinfachung und Bereinigung ein hoch wichtiger Beitrag der Fachwissenschaft zur Didaktik des Faches und von großem Nutzen. Es wird niemand bezweifeln, dass es beispielsweise kaum möglich wäre, weltweit Jahr für Jahr

Hunderttausende in die Differential- und Integralrechnung einzuweihen, wenn sie noch nach Newton unterrichtet werden müsste.

Andererseits muss man sehen, dass es für Lernende oft schwierig ist, derart optimierte Beweise besser als „*Schritt für Schritt*“ zu verstehen: Sie können zwar den Gedankengängen der Dozentin einigermaßen folgen, aber die „intuitiven Überlegungen“, die einst die Beweiskonzeption steuerten, sind aus der logisch-deduktiven und „polierten“ Darstellung meist nicht ohne Weiteres zu rekonstruieren.

Es ist daher eine wichtige Aufgabe der Fachwissenschaftlichen Vertiefung mit pädagogischem Fokus in Mathematik exemplarisch Beweise „auseinanderzulegen“, verschiedene Beweise einander gegenüberzustellen, im Idealfall neue, durchsichtigere Beweise zu entwerfen, um das Schritt-für-Schritt-Verständnis zu einem *integrierteren Verstehen* weiter zu entwickeln.

Ein vorbildliches Beispiel für das, was hier gemeint ist, ist die meisterliche Auseinandersetzung von H. Winter[12] mit dem *Zwei-Quadrate-Satz*[13].

3.3 Aspekt 3: Elementarisieren von Inhalten

Ein professioneller Lehrer sieht einen Stoff immer auch unter dem Aspekt seiner Vermittlung: Welches Vorwissen ist nötig, welche kognitiven Leistungen sind zu seiner Durchdringung zu erbringen, wie könnte der Stoff didaktisch strukturiert werden, welche Hilfestellungen könnten entwickelt werden?

Elementarisieren ist eine genuin mathematische Aufgabe, die in verschiedenen Ausprägungen vorkommt. Eine Form ist das Generieren von Plausibiltätsbetrachtungen, die ein Resultat zwar nicht beweisen, aber verständlich machen. Ein schönes Beispiel sind die Überlegungen zum Primzahlsatz im legendären Buch „Was ist Mathematik?“ von R. Courant und H. Robbins.

Eine andere Variante ist die Entwicklung von „vereinfachten Theorien“. Zum Beispiel können Teile der Galoistheorie für Gymnasiasten zugänglich gemacht werden, etwa, dass das klassische Problem der Winkeldreiteilung mit Zirkel und Lineal grundsätzlich nicht lösbar ist.

Als weiteres Beispiel für Elementarisierung sei das Thema *„Schlecht gestellte Inverse Probleme“* angesprochen, das D. Stoffer und der Autor in Zusammenarbeit mit Andreas Kirsch bearbeitet haben.

Wissenschaft betreiben heißt, Ursache-Wirkungs-Zusammenhänge entdecken: Wenn das, dann das. Wenn sich Ursache und Wirkung quantifizieren lassen, und wenn der Mechanismus zwischen Ursache und Wirkung bekannt ist und mit mathematischen Mitteln ausgedrückt werden kann, dann gibt es eine direkte und eine inverse Aufgabe. Die direkte Aufgabe besteht darin, aus gegebener Ursache die Wirkung zu berechnen. Umgekehrt versteht man unter dem inversen Problem die Aufgabe, aus der Wirkung auf die Ursache zurückzuschließen, oder genauer: Aus einer mit Messfehlern behafteten Messung der Wirkung die Ursache möglichst genau zu bestimmen, zu *rekonstruieren*, wie man sagt. Das Beispiel par Excellance sind die bildgebenden Verfahren in der Medizin, zum Beispiel die Computertomografie. Aus der Abschwächung, die Röntgenstrahlen beim Durchgang durch eine Körperschicht erfahren, wird auf die Dichteverteilung in dieser Schicht geschlossen. So können allfällige Anomalien festgestellt werden.

Studierende, die etwas Funktionalanalysis gehört haben, finden ausgesprochen Gefallen daran, ihre Kenntnisse auf schlecht gestellte inverse Probleme anzuwenden. Es sei $y = Kx$ eine Ursache-Wirkungs-Beziehung, x stehe für die Ursache, y für die Wirkung. x^* sei ein bestimmter Wert von x und $y^* = Kx^*$ die Wirkung die x^* nach sich zieht. Die Studierenden machen große Augen wenn sie Gewahr werden, dass es nicht immer gelingt, aus der Messung $\overline{y}$ der Wirkung y^* durch Auflösen der Gleichung $K\overline{x} = \overline{y}$ nach $\overline{x}$ auf die Ursache x^* zu schließen, und zwar mit umso geringerem Fehler, je genauer die Messung $\overline{y}$ von y^* ist. Das ist aber gerade der Fall, wenn K ein kompakter injektiver linearer Operator auf einem unendlichdimensionalen Raum ist. Das Phänomen ist ja auch beunruhigend, stellt es doch ein wichtiges Prinzip in Frage!

Die Einführung von singulären Systemen, die (Wieder-)Begegnung mit dem Satz von Picard (dessen endlichdimensionale Version sie auf jeden Fall aus der Linearen Algebra kennen) und vor allem die Idee der sogenannten Regularisierung, die Definition von Glattheitseigenschaften mit Hilfe des glättenden Operators K, sind Schritte, die in der Regel gut in ihrer „Zone of proximate development" liegen.

Kann man dieses Thema elementarisieren? Es ist möglich. Es sei auf drei Publikationen verwiesen, die sich an drei verschiedene Leserkreise richten:

- Kirchgraber U., Kirsch A., Stoffer D.: *Schlecht gestellte Probleme – Oder wenn das Ungenaue genauer ist*, Math. Semesterberichte, 51, 2004, 175–205. Diesen Beitrag können Studierende verstehen, die das erste Studierjahr absolviert haben.
- Kirchgraber U., Kirsch A., Stoffer D.: *Schlecht gestelllte Probleme – Oder wenn das Ungenaue genauer ist*, Berichte über Mathematik und Unterricht Nr. 01-05, 2001, an der ETH herausgegeben von U. Kirchgraber. Dieser Beitrag – er ist nicht inhaltsgleich mit dem zuvor genannten – richtet sich an Gymnasiallehrpersonen der Fächer Mathematik und Physik.
- Kirchgraber U., Stoffer D.: *Von gut und schlecht gestellten Problemen oder Von Ursache und Wirkungen und zurück oder Computertomographie und Co*, ETH-Bildungsserver EducETH: www.educeth.ch. Die ersten vier Abschnitte dieses Beitrags richten sich an Schülerinnen und Schüler der Sekundarstufe I. Der 5. Abschnitt beinhaltet eine – schlanke – Einführung in die zweidimensionale Lineare Algebra und ihre Anwendung auf schlecht gestellte inverse Probleme. Er eignet sich für interessierte Schülerinnen und Schüler der Sekundarstufe II.

Zur Illustration soll die Behandlung eines schlecht gestellten inversen Problems anhand eines Beispiels, das in den genannten Publikationen näher untersucht wird, skizziert werden.

Wenn die Erde eine homogene Kugel wäre und keine Atmosphäre hätte und wenn es überdies weder Mond noch Sonne gäbe, würden Satelliten nach den Keplerschen Gesetzen um die Erde kreisen. Die Erde ist aber keine homogene Kugel und daher muss man ihre Dichteverteilung genau kennen, u.a. um Satellitenbewegungen präzise prognostizieren zu können.

Im Prinzip kann man sich vorstellen, man würde an jedem Ort außerhalb der Erde ihre Anziehungskraftskraft auf einen punktförmigen Probekörper der Masse 1 messen mit dem Ziel, daraus die Dichteverteilung der Erde zu ermitteln.

Vereinfachen wir dieses etwas komplizierte Problem. Anstelle der Erde werde ein eindimensional gedachter Stab und das von ihm erzeugte Gravitationskraftfeld betrachtet.

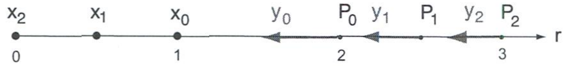


Abbildung 1: Dreigliedrige „Kette" von 3 Massenpunkten mit Massen x_0, x_1, x_2. „Aufpunkte" P_0, P_1, P_2. y_j = Betrag der Kraft, die von der Kette auf einen Probekörper der Masse 1 am Punkt P_j ausgeübt wird.

Weil auch das ein noch verhältnismäßig kompliziertes Problem ist, werde der Stab durch 3 Massenpunkte mit Massen x_i, $i = 0, 1, 2$, ersetzt, s. Abbildung 1. Man denke sich die Massenpunkte auf einer r-Achse in den Punkten $r_i = (2-i)\frac{1}{2}$ liegend. Das von den drei Massen erzeugte Gravitationskraftfeld werde an den Punkten P_j, $j = 0, 1, 2$, mit den Koordinaten $r_j = 2 + j\frac{1}{2}$ abgetastet. Es bezeichne y_j den Betrag der Gravitationskraft, die das System der drei Massen x_1, x_2, x_3 auf eine Probemasse der Größe 1 ausübt, wenn sich die Probemasse im Punkt P_j befindet. Unter Benutzung des Newtonschen Gravitationsgesetzes ist es leicht die Beziehung zwischen den x_i und den y_j hinzuschreiben. Fasst man die x_i und y_j zu Vektoren x, bzw. y zusammen, erhält man eine lineare Beziehung $y = Kx$ mit einer (symmetrischen!) 3×3-Matrix K.

Nehmen wir an es sei speziell

$$x_0 = x_0^* = \frac{1}{3}, \quad x_1 = x_1^* = \frac{1}{3}, \quad x_2 = x_2^* = \frac{1}{3} \approx 0.333$$

Dieses System von Massenpunkten erzeugt das Gravitationskraftfeld $y^* = (y_0, y_1, y_2)^T$, das mittels der Ursache-Wirkungsbeziehung $y^* = Kx^*$ leicht berechnet werden kann. Unter der Annahme, dass die universelle Gravitationskonstante gleich 1 gesetzt wird, erhält man

$$y_0^* = \frac{61}{108} \approx 0.565, \quad y_1^* = \frac{769}{2700} \approx 0.285, \quad y_2^* = \frac{469}{2700} \approx 0.174.$$

Das ist die Lösung des direkten Problems, die Sichtweise Gottes, gewissermaßen. Wir Menschen können lediglich Messungen $\overline{y}_j$ der y_j^* machen und versuchen, daraus Näherungen $\overline{x}_i$ für die „wahren" Massen x_i^* zu bestimmen. Messungen sind immer mit Fehlern behaftet. Diese mögen durch

$$\overline{y}_j = y_j^* + (-1)^{j+1} \cdot \frac{1}{1000}, j = 0, 1, 2$$

simuliert werden. Wenn nun die $\overline{x}_i$ gemäß klassischer Tradition durch Lösen der Gleichung

$$K\overline{x} = \overline{y}$$

bestimmt werden, ist das Ergebnis überraschend. Man findet:

$$\overline{x}_0 \approx 0.208, \quad \overline{x}_1 \approx 0.999, \quad \overline{x}_2 \approx -0.352$$

– nicht gerade, was man erwartet!

Analysiert man die Schwiergkeit, die hinter schlecht gestellten inversen Problemen steckt, stellt man fest, dass sie etwas mit einem Phänomen zu tun hat, dem man einst im Geometrieunterricht begegnete!

Im Geometrieunterricht muss man oft den Schnittpunkt zweier Geraden bestimmen. Wenn die Geraden mehr oder weniger senkrecht zueinander stehen, ist der Schnittpunkt leicht zu bestimmen – selbst wenn mit einem nicht so gut gespitzten Bleistift gezeichnet wird! Der Schnittpunkt ist hingegen umso weniger gut auszumachen, je flacher die beiden Geraden zueinander liegen. In der Schweiz spricht man von *„schleifenden Schnitten"*.

Die sogenannte *Regularisierung* eines schlecht gestellten inversen Problems erlaubt eine Ursache aus einer Ursache-Wirkungs-Beziehung – unter gewissen Bedingungen – einigermaßen genau zu rekonstruieren, ohne dass die Messung der Wirkung exorbitant genau, ohne dass der Bleistift über alle Maßen gut gespitzt sein muss!

Was eine Ursache-Wirkungsbeziehung ist, was Schlecht-Gestelltheit bedeutet, und eine Version der sogenannten Tikhonov-Regularisierung[14] können schon Schülerinnen und Schüler in Klasse 9 verstehen.

Der Aspekt „Elementarisieren" hat für den Mathematikunterricht eine ganz besondere Bedeutung: Der übliche Schhulstoff geht nicht über Erkenntnisse hinaus, die bereits im 17. Jahrhundert bekannt waren. Neueres kann nur punktuell und erst nach einer Transformation oder „Transposition" eingebracht werden, die zu erarbeiten eine gemeinsame Aufgabe von Fachmathematikern, Fachdidaktikern und Lehrern ist.

3.4 Aspekt 4: Exaktifizieren

In der Entwicklung der Mathematik ist es häufig so, dass in einer ersten Phase mit vorläufigen Begriffen und Vorstellungen gearbeitet wird. Erst im Verlaufe der weiteren Entwicklung entsteht das Bedürfnis nach Präzisierung, zum Beispiel um die Reichweite einer Methode oder einer Behauptung zu klären. Das erfordert meist auch eine Präzisierung der verwendeten Begriffe, unter Umständen wird ein axiomatischer Zugang entwickelt. *Exaktifizierungsprozesse* sind daher eine immer wiederkehrende wichtige mathematische Aufgabe.

Insbesondere in der Elementargeometrie und der Analysis wird im Rahmen der Schulmathematik mit anschaulichen Begriffen und intuitiven Vorstellungen gearbeitet.

Während die Analysis im Grundstudium Mathematik mindestens im Prinzip axiomatisch aufgebaut wird (was für die Studierenden zwar eine harte Schule, aber doch einigermaßen verdaubar ist, weil sie ja intuitive Vorstellungen aus der Schulanalysis mitbringen), ist eine axiomatische Betrachtung der für die Schule wichtigen ebenen Geometrie eine Aufgabe für die Fachwissenschaftliche Vertiefung mit pädagogischem Fokus.

Der Prozess des Exaktifizierens kann aber auch an andern, insbesondere „geometrienahen“ Themen studiert werden, zum Beispiel an topologischen Begriffen, etwa am Begriff der *Umlaufzahl* einer ebenen geschlossenen Kurve bezüglich eines Punktes. Es ist nicht schwer, sich eine intuitive Vorstellung des Begriffs der Umlaufzahl zu verschaffen. Hingegen ist es eine gar nicht so einfache Aufgabe, sich zu überlegen, wie dieser Begriff elementargeometrisch rigoros konstruiert werden muss.

Der Begriff Umlaufzahl ist nicht nur an sich interessant, sondern für Lehrkräfte, die das Thema komplexe Zahlen unterrichten und in diesem Rahmen ihren Schülerinnen den Fundamentalsatz der Algebra vorstellen, unmittelbar relevant. Auf der Grundlage intutiver Vorstellungen über die Umlaufzahl erhält man eine schultaugliche Annäherung an den Beweis dieses wichtigen Satzes, indem man mit Hilfe eines vorgegebenen Polynoms sukzessive größere Kreise um den Nullpunkt der z-Ebene in die w-Ebene abbildet, bis die Bildkurven den Nullpunkt der w-Ebene umschlingen. Dieser Zugang ist so suggestiv, dass es wichtig ist, dass zumindest die Lehrperson die Erfahrung gemacht hat, wieviel mathematische Fantasie es braucht, daraus einen wasserdichten Beweis zu entwickeln, ja wieviel Konzentration es nur schon erfordert, einen solchen Beweis nachzudenken.

Die Frage nach der Verallgemeinerung von Resultaten auf höhere Dimensionen, die im Zweidimensionalen mit Hilfe der Umlaufzahl gewonnen werden, ist so naheliegend, dass es sich im Rahmen einer FV-Veranstaltung zum Thema „Gleichungen“ aufdrängt, eine Einführung in die *Theorie des Abbildungsgrades* anzuschließen und einige Anwendungen zu besprechen: Zum Beispiel die Anwendung auf den Brouwerschen Fixpunktsatz und/oder auf die Frage nach der Existenz von periodischen Lösungen von gewöhnlichen Differentialgleichungen.

Die Anliegen der Aspekte 2 (Beweise analysieren) und 3 (Inhalte elementarisieren) einerseits, und von Aspekt 4 (Exaktifizieren) andererseits sind komplementär. Während es in den Aspekten 2, 3 um die (Rück-)Gewinnung des intuitiven Gehalts in „Fertigprodukten“ geht, ist das Ziel in Aspekt 4, intuitive Ideen zu formalisieren.

3.5 Aspekt 5: Geschichte der Genese von Begriffen

In der Mathematikdidaktik gibt es den Begriff des „epistemologischen Hindernisses“. Man versteht darunter die Hypothese, dass Begriffe, deren Genese wissenschaftsgeschichtlich mit größeren Schwierigkeiten verbunden war, Lernschwierigkeiten bereiten.

Der Funktionsbegriff ist heute gewiss der zentralste Begriffe der Mathematik. Die Auseinandersetzung mit seiner Entwicklungsgeschichte ist höchst instruktiv. Ihre Aufarbeitung bringt eine Auseinandersetzung mit wichtiger Mathematik. Überdies handelt es sich um ein Paradebeispiel für den oft fruchtbaren Einfluss von externen Fragestellungen, hier der Physik, auf die Entwicklung der Mathematik: Immer neue Anforderungen machten die Überwindung des jeweiligen Konzepts nötig. Und es zeigt sich der Prozesscharakter von Mathematik, der in sorgfältig präparierten und bis ins Detail optimierten Vorlesungen oft fast nicht mehr sichtbar ist.

Im Rahmen der Fachdidaktik wird dann auf die in der Tat vorhandenen Lernschwierigkeiten mit dem Funktionsbegriff, die empirisch relativ gut untersucht sind, eingegangen.

3.6 Aspekt 6: Mathematik würdigen

Schulbildung gehört zu den biologisch am besten abbaubaren Stoffen. Das ist in aller Regel nicht weiter schlimm. Es lebt sich schließlich auch ohne plusquamperfekte Subjonctivkonjugation anständig. Was allerdings ärgerlich ist, sind die Jahre, die wir mit dem Studium eines Faches verbrachten, ohne auch nur einen Zipfel seiner ergreifenden Schönheit gezeigt bekommen zu haben: Ich meine die Mathematik.

G. Werffeli: Das Große Einmaleins, (Zürcher) Tages-Anzeiger, Das Magazin Nr. 22/98, p. 7.

Schweizer Gymnasiast/-innen haben in internationalen Vergleichsstudien wie TIMSS und PISA in Mathematik bisher nicht schlecht abgeschnitten. Daraus kann allerdings nicht ohne weiteres geschlossen werden, dass sie auch ein *angemessenes Bild* des Fachs Mathematik entwickeln. Ein solches erforderte Reflektieren über Mathematik, Nachdenken über Fragen im Großen: Was ist das Spezielle, das Unverwechselbare an der Mathematik? Und Nachdenken über Fragen im Kleinen: Welche Bedeutung hat ein bestimmter Gegenstand aus innermathematischer Sicht und/oder im Hinblick auf Anwendungen?

Bei der Formulierung von Lernzielen für den Mathematikunterricht werden meist zu entwickelnde mathematische Handlungskompetenzen postuliert. Die Frage nach dem *Wert* des zu Lernenden wird dagegen kaum gestellt. Das hängt vielleicht damit zusammen, dass viele Mathematiker meinen, die Bedeutung von Mathematik erschließe sich von selbst.

Literatur, Musik, und Bildende Kunst, sagt man, würden für sich selbst sprechen. Jedoch: Haben Sie schon einmal den Gewinn an Einsicht und Genuss erfahren, wenn ein Literaturwissenschafter – wie P. von Matt – über Metaphern im Zusammenhang mit Canetti, ein Musikwissenschafter über das Verhältnis von h-moll-Messe und Missa solemnis – natürlich mit Hörproben, eine Kunsthistorikerin über die Farbigkeit bei Ernst Ludwig Kirchner spricht? Auch das Verständnis für Mathematik kann durch *Interpretation* erhöht werden.

Nehmen Sie den Begriff „Differentialgleichung“. Lässt er sich interpretieren? Gegenstand sind *Prozesse*. Das Ziel ist, Prozessverläufe vorherzusagen; zum Beispiel den Flug eines Diskus, die Bahn eines Satelliten, den Verlauf einer chemischen Reaktion, die Entwicklung des Wetters.

Mathematisch ist ein Prozess durch eine Reihe von Größen charakterisiert, die sich kontinuierlich verändern. Bei einer chemischen Reaktion sind es die Konzentrationen der beteiligten Substanzen. Die Werte, die die den Prozess charakterisierenden Größen zu einem bestimmten Zeitpunkt haben, definieren seinen *Zustand* zu diesem Zeitpunkt.

Wenn ein Prozess durch eine Differentialgleichung modelliert werden kann, bedeutet das, dass bei diesem Prozess *der jeweilige Prozesszustand die Tendenz seiner Veränderung bestimmt.*

Man kann ohne Übertreibung sagen, dass dies eine der tiefsten und erfolgreichsten *Denkfiguren der exakten Wissenschaften* ist. Entdeckt wurde sie von I. Newton, als er die Aufgabe löste, eine umfassende Theorie der Bewegung zu entwickeln. Ihre Reichweite ist viel größer als Newton wohl vermutete.

Oder nehmen Sie nochmals das Thema Gleichungen. Es ist gewiss eine schöne Erkenntnis, dass man Gleichungen 2., 3. und 4. Grades und ein paar Differentialgleichungen mit als verfügbar geltenden Mitteln „lösen“ kann. Aber dabei stehen zu bleiben, heißt ein sehr unvollständiges Bild vermitteln. Jenseits dieser paar Fälle bedurfte es bekanntlich eines ganz anderen Paradigmas, das erkenntnistheoretisch hoch interessant ist: Zuerst wird die Existenz von Lösungen bewiesen, ohne dass man sie durch Rechnung explizit gewinnt (nicht selten, indem man die Annahme, es würde keine Lösung existieren, zu einem Widerspruch führt) und dann wird das unmöglich Scheinende versucht: Eigenschaften dieser „existierenden“, aber „nicht bekannten Lösungen“ in Erfahrung zu bringen. Das ist ein dramatischer Sichtwechsel, der die Mathematik nun schon seit 200 Jahren, und vermutlich noch lange, prägt. Mathematik würdigen können heißt, einen solchen Paradigmawechsel jedenfalls in Umrissen zu kennen und zu verstehen.

4 Gymnasialer Mathematikunterricht: Mit welcher Wolle soll was gestrickt werden?

Die Frage nach dem Bildungswert des gymnasialen Mathematikunterrichts ist nicht ohne Rückwirkungen auf das Curriculum.

Wohlverstanden, es geht nicht um einen radikalen Umbau des schulischen Unterrichts. Angeregt werden sollen nicht sehr große, aber wichtige Akzentverschiebungen.

Rektor Noger vom Gymnasium am Burggraben in St. Gallen hat einer Gruppe von Mathematiklehrpersonen anlässlich einer Weiterbildungsveranstaltung kritische Fragen zum gängigen Mathematikunterricht gestellt und u.a. je ein Exzerpt aus einer Mathematik-Maturaprüfung aus den Jahren 1901, 1954 und 2004 gezeigt. Jedesmal ging es um eine bescheidene Kurvendiskussion.

Das Thema Kurvendiskussion hat ohne Zweifel auch im heutigen gymnasialen Analysisunterricht einen Platz. Aber warum bringt man es nicht zum Beispiel mit dem Thema *Bifurkationtheorie* in Zusammenhang, womit es eine ganz neue Qualität erhält?

RSA, die Verschlüsselungsmethode von Rivest, Shamir und Adelman aus dem Jahr 1977, ist ein Glücksfall für den Mathematikunterricht, wie A. Engel schon vor Jahrzehnten erkannt hat: RSA ist pradigmatisch für unsere Diziplin – da wird eine zwar wunderschöne, aber voraussichtlich völlig nutzlose Entdeckung über die Natur der Zahlen gemacht und gehört von da an zum Schatz der Erkenntnisse der Menschen. Plötzlich, nach Jahrhunderten, entfaltet sie an einem Ort, wo man es gewiss nicht erwartet hätte, eine unglaubliche Wirkung. Das Thema ist inzwischen mehrfach auf verschiedenen Niveaus dargestellt worden. Trotzdem hat es nicht auf breiter Front Eingang in den gymnasialen Unterricht gefunden.

Wem RSA zu anspruchsvoll ist, kann auf den Vorläufer, den Schlüsseltausch von Diffie-Hellman zurückgreifen, wie es der Schweizer Mathematiklehrer O. M. Keiser propagiert[15]. Das Thema passt wunderbar in das Rechnen mit natürlichen Zahlen und Neuntklässler können erfahren, was Mathematik zu leisten vermag.

Fehlererkennende Codes, auch ganz einfache, zeigen an einem anderen Beispiel, wie die Mathematik in die Lebenswelt der Menschen eingreift.

Zum Schluss soll ein Beispiel erwähnt werden, das J. Hromkovic[16] aus dem Departement Informatik der ETH propagiert. Es sind zwei n-stellige Binärzahlen, die auf zwei verschiedenen Computern liegen, auf Gleichheit zu prüfen, wobei n groß, sagen wir $n = 10^{16}$ ist. Die Vorstellung ist, dass die Zahlen ursprünglich gleich waren. Dann wurden an beiden Zahlen Manipulationen vorgenommen, wobei beabsichtigt war, die gleichen Manipulationen vorzunehmen, so dass die beiden Zahlen eigentlich gleich sein sollten. Das muss aber geprüft werden. Die Komplexität der Prüfung wird durch die Anzahl Bits gemessen, die übertragen werden muss.

Man kann beweisen, dass deterministisch kein besserer Algorithmus existiert, als die Zahl vom einen Computer auf den andern zu übertragen und dann beide Zahlen Bit für Bit zu vergleichen. Bei $n = 10^{16}$ ist das jenseits des Praktikablen (die Datenmenge entspricht dem Inhalt von 250000 DVD's!).

Überraschend ist, dass es einen einfachen *randominisierten* Algorithmus gibt, der mit $4 \log_2 n$ Transmissionsbits auskommt. Im Beispiel sind das grad einmal 256 Bits anstatt 10^{16}. Der Preis ist, dass die Antwort nicht ganz sicher ist. Die Irrtumswahscheinlichkeit ist jedoch nicht größer als:

$$\frac{2 \ln n}{n}.$$

Für $n = 10^{16}$ ist das weniger als 10^{-14}!

Die Pointe: Der Algorithmus und seine Begründung können von Gymnasiastinnen und Gymnasiasten verstanden werden, lediglich der Primzahlsatz muss als nicht bewiesenes Element eingespeist werden.

Noch einmal: Es ist nicht ein radikaler Umbau des bisherigen Mathematikunterrichts nötig. Die paar Beispiele machen deutlich: Es geht um eine Verschiebung von Akzenten. Sie führt zu einer Verwesentlichung und – hoffentlich – zu einem besseren Verständnis für das, was Mathematik ist.

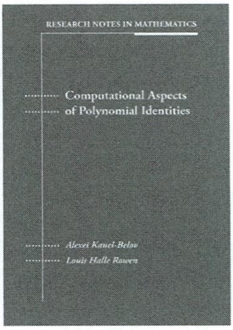
Die skizzierten Beispiele können den Anwendungen der Mathematik zugerechnet werden. Der Autor möchte klar stellen, dass er keineswegs der Meinung ist, die Mathematik müsse sich im gymnasialen Unterricht durch ihre Anwendbarkeit rechtfertigen. Wichtig an den Beispielen ist zunächst einmal, dass sie – jedes in seiner Weise – ein Stück charakteristische Mathematik beinhalten. Dass sie auch noch einen lebensweltlichen Bezug haben, ist natürlich willkommen und hilft vielleicht beim sich Hineindenken.

Dank

Der Autor dankt dem Referenten für seine einfühlsame Auseinandersetzung mit dem Manuskript und für eine Reihe wertvoller Verbesserungsvorschläge.

Anmerkungen

1 Gemeint sind Punkte gemäß dem ECTS-System
2 F. Osterwalder, *Gymnasiallehrkräfte – eine aussterbende Spezies?* Bulletin der Vereinigung schweizerischer Hochschuldozenten, April 2006.
3 E. Stern, C. Aprea, H. G. Ebner: *Improving cross-content transfer in text processing by means of active graphical representation*, Learning and Instruction 13, 2003, 191–203.
4 I often say that when you can measure what you are speaking about, and express it in numbers, you know something about it; but when you cannot express it in numbers, your knowledge is of a meagre and unsatisfactory kind: it may be the beginning of knowledge, but you have scarcely, in your thoughts, advanced to the stage of science, whatever the matter may be (Kelvin, 1889).
5 E. Fennema, T. P. Carpenter, M. Loef, *Teacher belief scale: Cognitively guided instruction project.* Madison, University of Wisconsin, March 1990, und P. Cobb, T. Wood, E. Yackel, J. Nicholls, G. Wheatly, B. Trigatti, M. Perlwitz, *Assessment of a problem-centered second-grade mathematics project*, J. for Research in Mathematics Education 22, 191, p. 3–29.
6 F. Staub, E. Stern, *The Nature of Teachers' Pedagogical Content Beliefs Matters for Students' Achievement Gains: Quasi-Experimental Evidence From Elementary Mathamatics*, J. of Educational Psychology 94, 2002, p. 344–355.
7 H. C. Hill, B. Rowan und D. L. Ball, *Effects of teachers' mathematical knowledge for teaching on student achievement*, American Educational Research Journal, 42, 2005, p. 371–406.
8 M. Brunner, M. Kunter, S. Krauss, U. Klusmann, J. Baumert, W. Blum, M. Neubrand, T. Dubbereke, A. Jordan, K. Löwen, Y. Tsai, *Die professionelle Kompetenz von Mathematiklehrkräften: Konzeptualisierung, Erfassung und Bedeutung für den Unterricht. Eine Zwischenbilanz des COACTIV-Projekts*, in M. Prenzel, L. Allolio-Näcke (Hrsg.): *Untersuchungen zur Bildungsqualität von Schule*, 2006.
9 E. Stern ist seit WS 06/07 Professorin für Lehr- und Lernforschung an der ETH Zürich und seit SS 07 Leiterin der Gymnasiallehrpersonenausbildung an der ETH Zürich und Vorsitzende der Institutsleitung des ZHSF.
10 P. Werner, *A distribution-theoretical approach to certain Lebesgue and Sobolev spaces*, J. Math. Anal. Appl. 29, 1970, p. 18–78, und J. Drehmann, P. Werner, *Remarks on the Dirichlet Problem for linear Elliptic Differential Equations*, Meth. Verf. Math. Phys. 8, 1973, p. 147–181 sowie ibid 9, 1974, p. 1–46.
11 Burg, Haf, Wille, *Höhere Mathematik für Ingenieure*, Band V, 1991.
12 H. Winter, *Der Zwei-Quadrate-Satz von Fermat – eine Studie zur Heuristik des Beweisens*, Mathematische Semesterberichte 50, 2003, p. 191–235.
13 Zur Erinnerung: Der Zwei-Quadrate-Satz von Fermat vermutet, erstmals von Euler bewiesen, besagt, dass jede Primzahl der Form $4n + 1$ sich als Summe zweier Quadratzahlen darstellen lässt, und dass diese Darstellung, bis auf die Reihenfolge der Summanden, eindeutig ist.
14 Die Idee von Thikonov besteht darin, den Operator K in der Ursache-Wirkungs-Beziehung $y = Kx$ etwas zu „verfälschen", durch einen Operator $\overline{K}$ zu ersetzen, so dass die Lösung x der neuen Gleichung $\overline{K}x = y$ weniger „sensitiv" von y abhängt. Natürlich darf sich $\overline{K}$ nur geringfügig von K unterscheiden, da man sonst ein völlig falsches Problem löst. Wenn K symmetrisch und positiv ist, eignet sich die Wahl $\overline{K} = \overline{K}_\alpha = \alpha I + K$ wobei I die Identität und α eine kleine positive Zahl ist, der sogenannte *Regularisierungsparameter.* Durch den Zusatz αI wird offenbar das Spektrum von K um α von 0 weg verschoben. Daraus folgt, dass $\overline{K}_\alpha$ eine beschränkte Inverse hat.
15 Otto M. Keiser: Einführung von CAS in der Algebra, 2003.
16 J. Hromkovic, *Randomisierte Algorithmen*, 2004, und J. Hromkovic, *Sieben Wunder der Informatik*, 2006.



A. Kanel-Belov and
L. Halle Rowen
Computational Aspects of Polynomial Identities

Wellesley, A.K. Peters, 2005, 378 S., $ 69,–

A polynomial identity of an algebra A is a polynomial in non commuting variables vanishing identically on all substitutions in A. The class of algebras satisfying a non-trivial polynomial identity (PI-algebras) is quite wide and includes finite dimensional algebras, commutative algebras, algebraic algebras of bounded exponent and many more. A structure theory of PI-algebras was systematically developed since the 1960's and made use of structure theory of general ring theory as well as purely combinatorial techniques. The discovery of central polynomials for $n \times n$ matrices in 1972 by Formanek and Razmyslov provided new techniques allowing to prove new structure theorems with applications to central simple algebras. A comprehensive account of these results can be found, for instance, in the books of Rowen (L. H. Rowen, Polynomial identities in ring theory, Pure and Applied Mathematics **84**, Academic Press, New York-London, 1980; L. H. Rowen, Ring theory. Vol. II, Pure and Applied Mathematics **128**, Academic Press, Boston, MA, 1988).

From another point of view one can consider the class of all algebras satisfying a given set of polynomial identities. This is a variety and from this point of view, one can study an algebra through the set of polynomial identities it satisfies. This in turn is a T-ideal of the free algebra, i.e. an ideal invariant under all endomorphisms of the free algebra. In 1950 Specht conjectured that any T-ideal of the free algebra is finitely generated as a T-ideal. This conjecture turned out to be very difficult and its solution, due to Kemer in 1987 over a field of characteristic zero, is based on some deep results on the structure of T-ideals and their connection with the theory of superalgebras. Kemer's approach, known nowadays as Kemer's theory, could be found in the original papers and in Kemer's monograph (A. R. Kemer, Ideals of identities of associative algebras, Translations of Mathematical Monographs **87**, AMS, Providence, RI, 1991).

The book under review presents some of the main results of PI-theory of combinatorial nature which have contributed to the development of the theory. They are the basic ingredients for Kemer's solution of Specht conjecture.

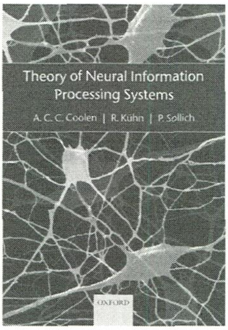
A basic combinatorial result proved in the early chapters of the book is Shirshov's height theorem. It implies directly a positive solution of Kurosh problem for PI-algebras. This was a challenging problem of the 1940's asking if a finitely generated algebraic algebra is finite dimensional. This problem was also solved in the positive for PI-algebras by Levitzki and Kaplansky using structure theory. Another important result is Razmyslov-Kemer-Braun theorem on the nilpotency of the Jacobson radical J of a finitely generated PI-algebra A. Razmyslov had proved that J is nilpotent whenever A satisfies a Capelli identity and Kemer verified that any finitely generated PI-algebra in characteristic zero satisfies a Capelli identity, hence completing the proof in characteristic zero. Later Braun gave a characteristic free proof based on the structure theory of Azumaya algebras. Here the authors present a characteristic free proof based on the approach of Razmyslov and Kemer.

One of the main objectives and motivating results of the book is Kemer's solution of Specht's conjecture in characteristic zero. In the first six chapters the authors present a detailed exposition of the theory needed for its proof. Great effort is devoted to the proof of one of the key results due to Kemer asserting that any finitely generated PI-algebra is PI-equivalent to a finite dimensional algebra. The beautiful and powerful role played by Kemer's theory becomes clearer by the subsequent extension of this theorem to superalgebras and their superidentities together with the featured role played by the Grassmann algebra as the link between algebras and superalgebras. Important appplications proved in the book include Belov's theorem about the rationality of the Hilbert series of a finitely generated relatively free algebra over an infinite field and a theorem of Berele on the finite Gelfand-Kirillov dimension of a finitely generated PI-algebra. Also the book contains various counterexamples to the Specht problem in positive characteristic.

Other classical topics covered in the book include central polynomials for matrices, the codimension theorem and the tensor product theorem of Regev and the characterization of group algebras satisfying a polynomial identity in characteristic zero. The codimension growth of a PI-algebra and the corresponding asymptotic results are considered very briefly since they can be found in the recent book of Giambruno and Zaicev (A. Giambruno and M. Zaicev, Polynomial identities and asymptotic methods, Mathematical Surveys and Monographs **122**, AMS, Providence, RI, 2005).

In conclusion this is an interesting book written by two experts of the theory of polynomial identities. The large collection of exercises and open questions make it suitable for an advanced course in PI-theory or combinatorial ring theory.

Palermo A. Giambruno



A.C.C. Coolen, R. Kühn, P. Sollich

Theory of Neural Information Processing Systems

Oxford University Press, 2005, 569 S., £ 75,–

This voluminous textbook is devoted to a presentation of a substantial part of of the theory of neural information processing systems, or, more commonly, theory of neural networks, covering all the major developments starting from the seminal work of McCulloch and Pitts in 1943, that had started off the connection between neurophysiology and information theory. The subject of the book is in many ways multidisciplinary, engaging in principle biology, mathematics, and computer science. It is no surprise that theoretical physics has played a major part in bringing these diverse fields together, and the last thirty year theoretical physics, and notably statistical physics has had a major impact in the field. The authors of this book belong to the group of physicists that have participated in this development, and it is from this perspective that the book is written. This explains why biology, or neurophysiology, is playing essentially no part in the exposition (with the exception of some cursory remarks), and the wide area regarding the functioning of the individual neuron is neglected in favour of the analysis of the collective functioning neural networks.

The book is divided into five parts.

Part I gives a brief introduction into the basic notions of neural networks and discusses mainly the state of the field up to the mid 1980ies. That is, it covers the basic ideas of modelling neurons as abstract logical devices and the functioning of a network of neurons as the performance of logical operations on input data, with the specific feature that the adjustment in the parameters of the network (synaptic connections) is interpreted as the learning of specific tasks, i.e. emulating specific input-output functions. In the second chapter if this part, this aspect is explained in detail in the context of layered, or feed-forward neural networks, such a the famous perceptron. The fundamental question that is addressed here is that of universality: when are neural networks capable to perform any desired computational task? Considerable attention is given to the implementation of learning algorithms and their dynamical behaviour. The third chapter then deals with the other important class of networks, the recurrent or networks and their role as associative memories.

Part II is presents an extension of the problem of learning in feed-forward networks. Much more modern material from the last decade is covered, including new types of neural networks (Vector Quantisation, Self-organisation maps, Support Vector machines); on the other hand, connections to and applications of deep concepts from (non-parametric) statistics, in particular Bayesian learning, to neural learning are explored.

Part III gives an introduction to classical Information Theory, its relation to statistics (via the maximum likelihood method) and finally applications to neural networks.

Part IV turns to a look at neural systems from a more genuine perspective of statistical physics, or more precisely non-equilibrium statistical mechanics. The general theme here is to look at the dynamics of (typically recurrent) neural networks defined on the microscopic scale of the neurons and to study the effective dynamics induced on macroscopic observables. In general on expects in the macroscopic dynamics to be in many ways simpler than the original one, and in particular one can expect to see the emergence of deterministic equations of motions in suitable limits. This scheme is applied in two distinct contexts: the operation of a network with fixed synaptic connections, and in the context of perceptron training, where the synaptic coupling themselves evolve under the dynamics.

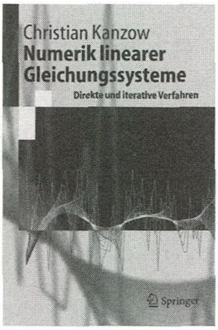
The final Part V returns to the equilibrium statistical mechanics of recurrent neural networks, a topic that had in the early 1980ies drawn the attention of the statistical mechanics community to the theory of neural networks in the first place. What is analysed here are the invariant (usually reversible) measures of the Markov chains defining the dynamics of neural networks. The interest here lies in the fact that these systems are highly complex due to the inhomogeneous nature of the synaptic couplings, so that the emerging problems fall into the realm of the statistical mechanics of disordered systems, and within those, of the particularly intriguing spin glass theory. Chapter 20 gives an introduction into statistical mechanics (mostly of mean-field theory) and chapter 21 treats the famous Hopfield model of an auto-associative memory. The final chapter of the book treats the other classical example of this context, the capacity problem of the perceptrons, originally developed by Gardener.

A number of appendices provide pedestrian introductions to some of the mathematical tools used in the book.

Each part of the book ends with a chapter on references and suggested further reading, which is particularly helpful for the novice. A mathematically inclined reader may, at this point, regret the complete absence of references or discussion of mathematically rigorous results in the field that have been obtained in the last decade, notably with respect to the material of Part V. As a rule, the distinction between mathematically rigorous and heuristic results is not made explicit and an appreciation is left to the discretion of the reader.

Apart from this minor flaw, the book will be very useful for everyone wanting to get an overview of the theory of neural information processing. It will also provide a good basis for an advanced course on the subject.

Berlin A. Bovier



Ch. Kanzow
Numerik linearer Gleichungssysteme
Direkte und iterative Verfahren

Berlin u.a., Springer, 2005, 349 S. € 39,50

Das Lösen linearer Gleichungssysteme gehört zu den ersten Fähigkeiten, die in der universitären Mathematikausbildung (nicht nur für Mathematiker, sondern für alle Fachrichtungen, in denen eine Mathematik-Grundausbildung erfolgt) erlernt werden, wobei das Gaußsche Eliminationsverfahren oft bereits aus dem Schulunterricht bekannt ist. Obwohl also die Aufgabenstellung, einen Vektor $x \in \mathbb{R}^n$ zu finden, der

$$Ax = b, \quad A \in \mathbb{R}^{n \times n} \text{ regulär}, b \in \mathbb{R}^n, \tag{1}$$

erfüllt, damit als sehr elementar angesehen werden kann, verbirgt sich hinter der Gleichung (1) eine enorme Vielfalt an Problemen, die die Lösung dieser Aufgabe oft zu einer echten Herausforderung an Algorithmen und Rechnerleistung werden lässt. Dabei erfolgte die Entwicklung neuer Methoden und Verfahren in den letzten 50–60 Jahren meist aufgrund immer neuer Anforderungen aus Natur- und Ingenieurwissenschaften, größere und schwierigere Gleichungssysteme lösen zu müssen, aber auch motiviert durch sich verändernde Rechnerarchitekturen. Leider wurde mit diesem Buch verpasst, diese spannende Entwicklung aufzuzeigen, wobei insbesondere der rasanten Entwicklung in den Bereichen der Vorkonditionierung (im Buch wird der heutzutage eher weniger gebräuchliche Begriff Präkonditionierung verwendet) kaum und der sparsen direkten Löser nicht Rechnung getragen wird.

Doch der Reihe nach. Im ersten Kapitel werden zunächst einige Grundlagen der linearen Algebra bereitgestellt. Hierbei hätte man durchaus auf die Beweise verzichten können, da diese sich in ausreichender Form in zahlreichen Büchern zur linearen Algebra finden und für das weitere Verständnis nicht von Belang sind. Beim Satz über die Jordansche Normalform wird dann auf einen solchen Beweis verzichtet, dafür ist die Darstellung irreführend: Man könnte leicht den Eindruck gewinnen, dass es zu jedem Eigenwert λ_k einer Matrix nur einen Jordanblock geben kann. (Die Verschiedenheit der λ_k wird zwar nicht vorausgesetzt, die gewählte Darstellung auf S. 16 suggeriert dies aber.) Abschnitt 1.5 gibt einen kurzen Abriss zur Kondition linearer Gleichungssysteme und zu Fehlerabschätzungen. Begriffe wie numerische (Vorwärts-, Rückwärts-)Stabilität und deren Zusammenhang zum zu erwartenden Fehler bei der numerischen Lösung fehlen hier jedoch. Das heutzutage als unverzichtbar geltende und in fast jedem in die Numerische Mathematik einführenden Buch enthaltende Konzept des Rückwärtsfehlers wird im gesamten Buch ausgespart. Es überrascht daher weiter nicht, dass damit auch das bei der Lösung von linearen Gleichungssystemen mit direkten Methoden wichtige (und z. B. in LAPACK [1] implementierte) Prinzip der iterativen Verbesserung unerwähnt bleibt (siehe hierzu z.B. [6, 8]). Es ist schon sehr verwunderlich, dass man heutzutage ein Buch zur Numerik linearer Gleichungssysteme ohne wenigstens einen Verweis auf das fast schon als Enzyklopädie in diesem Bereich anzusehende Buch von Higham [10] schreiben kann. Drei Abschnitte mit den in diesem Buch immer wieder verwendeten Modellproblemen vervollständigen das erste Kapitel; dabei handelt es sich um Finite-Differenzen-Diskretisierungen der Poisson-, Helmholtz-, und Konvektions-Diffusions-Gleichung auf dem Einheitsintervall bzw. -quadrat zur Erzeugung von Test-Beispielen mit symmetrisch positiv definiter, symmetrisch indefiniter bzw. unsymmetrischer Koeffizientenmatrix A.

Die direkte Lösung linearer Gleichungssysteme ist Thema des zweiten Kapitels. Die etwas langatmige Darstellung der Lösung über die LR-Zerlegung mit Hilfe des Gaußschen Eliminationsverfahrens vermeidet leider jegliche Diskussion numerischer Stabilität. Die einzige Motivation für eine Pivotisierung, die im Abschnitt 2.3 gegeben wird, ist das eventuelle Auftreten eines Null-Pivots. Ein Einfluss auf die numerische Genauigkeit wird nicht erwähnt, geschweige denn diskutiert! Das offenbar fehlende Verständnis für diese Problematik zieht sich wie ein roter Faden durch dieses Kapitel: Für vollständige Pivotisierung wird lediglich ein Zitat angegeben, Diagonalpivotisierung bei der Cholesky-Zerlegung wird überhaupt nicht erwähnt, im Abschnitt über symmetrisch indefinite Systeme wird die Parlett-Reid-Aasen Zerlegung ausführlich besprochen (worauf im Vorwort sogar gesteigerter Wert gelegt wird!), während die numerisch stabilere und in Software-Paketen wie LAPACK bevorzugte Bunch-Kaufmann-Parlett Methode nicht zum Zuge kommt. Stattdessen werden mehrere Seiten für die bei heutigen Rechnerarchitekturen nahezu irrelevante Flop-Zählerei verschwendet. Dieses Kapitel verstellt – selbst wenn es sich um ein Lehrbuch handelt und nicht um eine Forschungsmonographie – völlig den Blick auf die wesentlichen Aspekte bei der direkten numerischen Lösung linearer Gleichungssysteme, also numerische (Rückwärts-)Stabilität, Fehler- und Konditionsschätzung zur Verifikation der Lösung, etc. – all diese Dinge werden sogar in den meisten in die Numerische Mathematik einführenden Büchern in gewissem Maße besprochen. Um so mehr sollte dies in einem Spezialbuch der Fall sein – der Stoff des zweiten Kapitels wird sicher in jeder Numerik-Grundvorlesung besprochen, eine Spezialvorlesung zum Thema dieses Buches sollte eigentlich wesentlich tiefer gehen! Ein weiterer Schwachpunkt dieses Kapitels und insgesamt des Buches ist der Verzicht auf die Darstellung der direkten Lösung sparser Gleichungssysteme – es findet sich lediglich ein Verweis auf die etwas in die Jahre gekommene Darstellung in [14]. Hier hat sich in den vergangenen Jahren eine rasante Entwicklung abgespielt, die z.B. dazu geführt hat, dass man das Gleichungssystem aus Abschnitt 1.7 (diskretisierte 2D Poisson-Gleichung) für $n = 250.000$ heutzutage auf einem handelsüblichen Notebook mit dem Matlab-Kommando `x = A\ b` in weniger als 4 Sekunden lösen kann. Sicherlich sind auch seit der Erstellung des Buches noch weitere Fortschritte erzielt worden, doch auch schon im Jahr 2004 waren die sparsen direkten Methoden (und die mit ähnlichen Techniken arbeitenden unvollständigen Zerlegungen zur Vorkonditionierung) soweit fortgeschritten, dass sie in jeder modernen Abhandlung über die Numerik linearer Gleichungssysteme ihren Platz finden sollten. Dies kann an dieser Stelle sicher nicht nachgeholt werden, der interessierte Leser möge sich z.B. über die Softwarepakete UMFPack, CHOLMOD (die in Matlab für LR- und Cholesky-Zerlegung verwendet werden), SuperLU, PARDISO, ILUPACK, TAUCS, uvm., informieren, einen Überblick gewinnt man z.B. in [5, 13]. Hierbei sei noch erwähnt, dass ein großer Teil der hier erzielten Fortschritte auch neuen Graph-Partitionierungs-Methoden zuzuordnen ist. Möglicherweise hätte eine Darstellung solcher Verfahren den vorgegebenen Rahmen für dieses Buch gesprengt, aber selbst so altbewährte Verfahren wie *Reverse Cuthill-McKee* oder *Minimum Degree* Ordnung werden in diesem Buch nicht besprochen!

Motiviert durch die Lösung linearer Ausgleichsprobleme widmet sich das dritte Kapitel Orthogonalisierungsverfahren wie der QR-Zerlegung sowie ihrer Berechnung mit Hilfe des Gram-Schmidt-Verfahrens, mit Householder-Spiegelungen sowie mit (schnellen) Givens-Rotationen. Erstaunlich ist hierbei, dass beim Gram-Schmidt-Verfahren nun numerische Stabilität diskutiert wird, nachdem dieser Aspekt im zweiten Kapitel vollständig ignoriert wurde. Allerdings scheint dies eine nur durch die Motivation für das modifizierte Gram-Schmidt-Verfahren begründete Ausnahme zu sein.

In Kapitel 4 werden die klassischen Splitting-Methoden besprochen. Interessant ist, dass der Autor auf S. 133 feststellt, dass „deren Bedeutung in den letzten Jahren allerdings stark abgenommen hat", diesem Thema jedoch das längste Kapitel widmet. Es wird dabei aber vergessen, darauf hinzuweisen, dass neben den Anwendungen bei der Vorkonditionierung oder als Glätter bei Mehrgitterverfahren gerade die Theorie der Splitting-Methoden nach wie vor von erheblicher Bedeutung, z.B. für die Analyse von Gebietszerlegungsmethoden wie additiver oder multiplikativer Schwarz-Iteration, ist. Dieser Aspekt wird bereits in [9] ausführlich dargestellt und hat auch und gerade in den letzten Jahren zu einer Reihe neuer Konvergenzresultate geführt. Auch hier fällt wieder auf, dass ein wesentliches und zentrales Forschungsthema der letzten Jahre bei der Lösung sehr großer Gleichungssysteme, nämlich die Gebietszerlegungsmethoden, im gesamten Buch nicht angesprochen wird. Ansonsten gelingt in diesem Kapitel aber eine recht vollständige Darstellung der vorgestellten Methoden.

Dem Verfahren der konjugierten Gradienten (CG-Verfahren) ist das gesamte fünfte Kapitel gewidmet. Basierend auf der klassischen Interpretation als Minimierungsverfahren für die Funktion $f(x) = \frac{1}{2}x^T Ax + -b^T x$ wird die CG-Theorie sauber hergeleitet. Allerdings – und dies ist sicher an dieser Stelle nicht mehr verwunderlich – fehlt jeglicher Hinweis darauf, welche Gefahren in der auf S. 191 beschriebenen Aufdatierung des Residuums (also, dass durch die dabei akkumulierten Rundungsfehler womöglich eine falsche Information über die Güte der erreichten Approximation vorliegt) stecken können. Das Kapitel beinhaltet auch einige Ideen zur Vorkonditionierung und Varianten für unsymmetrische Koeffizientenmatrizen (CGNE und CGNR). Der Zusammenhang zu den in den beiden folgenden Kapiteln besprochenen Krylovraum-Verfahren wird hergestellt. Hier wäre es allerdings wünschenswert gewesen, auch die Charakterisierung als Lanczos-Verfahren zu geben, um diesen Zusammenhang vollständig zu verdeutlichen, wie es bei den im sechsten Kapitel dargestellten GMRES-artigen Verfahren und den weiteren, im siebten Kapitel behandelten, Krylovraum-Verfahren für unsymmetrische Matrizen A (QMR, BICG, CGS, BiCGStab, TFQMR), durchaus gelingt. Hier wurde die Chance vertan, die zur Vermeidung von Breakdowns bei Verfahren, die auf dem unsymmetrischen Lanczos-Algorithmus beruhen, erfolgreiche Look-Ahead-Technik, einmal in Lehrbuchform darzustellen und damit eine in der bisherigen Literatur klaffende Lücke zu füllen. Leider geht der Autor wie auch in [12] den einfacheren Weg eines alleinigen Verweises auf die wirklich nicht einfach zu lesende Originalliteratur. Auch fehlt eine verständisfördernde Diskussion des teilweise irregulär anmutenden Konvergenzverhaltens der Krylovraum-Verfahren für unsymmetrische Gleichungssysteme wie man sie z.B. in [7,15] findet.

Auch für unsymmetrische Gleichungssysteme wird kurz auf Vorkonditionierung eingegangen, wobei sowohl Splitting-Methoden als auch unvollständige Zerlegungen angesprochen werden. Wie bereits oben erwähnt, fehlt leider jeder Hinweis auf moderne Varianten der letztgenannten Methoden wie z.B. unvollständige Zerlegungen mit Toleranz-gesteuertem Fill-in (ILUT u.ä.) oder gar weitere verwandte Entwicklungen wie approximative Inverse (SPAI, AINV). Damit reicht die Lektüre von Kanzows Buch nicht einmal aus, die Funktionsweise der Matlab-Funktionen `luinc`, `cholinc` zu verstehen.

Letzteres sollte aber m.E. ein Minimalziel eines Buchs zum Thema der numerischen Lösung linearer Gleichungssysteme sein.

Es sei auch erwähnt, dass wesentliche theoretische Ergebnisse über Krylovraum-Verfahren für unsymmetrische Gleichungssysteme fehlen, z.B. findet man die klassische Arbeit von Faber-Manteuffel über die Existenz von Verfahren mit kurzen Rekursionen zwar in der Literaturliste, doch das Ergebnis wird nicht angegeben, geschweige denn werden die sich daraus ergebenden Konsequenzen für iterative Verfahren diskutiert. Der in diesem Zusammenhang durchaus wesentliche Begriff der Normalität einer Matrix wird im ganzen Text nicht erwähnt. (Siehe z.B. [11] für die zentrale Bedeutung der Normalität bei der Konvergenzanalyse von Krylovraum-Verfahren.)

Vollständig fehlen auch Verweise auf die Lösung von Gleichungssystemen über den komplexen Zahlen. Zwar sind i.a. alle Verfahren problemlos übertragbar, doch gibt es z.B. für die gerade in der Physik, Elektromagnetik und -technik häufig vorkommenden Probleme mit komplex-symmetrischer Koeffizientenmatrix eine Reihe spezieller Krylovraum-Verfahren, die eine Erwähnung verdient hätten.

Im letzten Kapitel des Buchs wird eine kurze Einführung in die Theorie der Mehrgitterverfahren gegeben. Die zentralen Begriffe wie Glätter, Prolongation und Restriktion, Zweigitterverfahren, V- und W-Zyklus sowie das vollständige Mehrgitterverfahren und die Grundelemente der Mehrgitter-Konvergenztheorie werden vorgestellt. Als kurze Einleitung in die Thematik ist dieses Kapitel sicherlich gut verwendbar. Negativ fällt in diesem Kapitel auf, dass alle Referenzen zu algebraischen Mehrgitterverfahren, die ebenfalls in den vergangenen Jahren eine signifikante Weiterentwicklung erfahren haben, aus der Mitte der 80er Jahre stammen.

Insgesamt ist die Herleitung der besprochenen Verfahren recht ausführlich und gut nachvollziehbar, alle Ergebnisse werden mit mathematischer Stringenz bewiesen. Das Verhalten der meisten Verfahren wird anhand der im ersten Kapitel hergeleiteten Beispiele veranschaulicht, wobei auffällt, dass dies ausgerechnet für eines der in der Praxis am meisten angewendeten Verfahren (PCG mit IC-Vorkonditionierung) nicht geschieht. Leider fehlt ein Vergleich von Verfahren, wie er sich bei den verschiedenen Krylovraum-Methoden für unsymmetrische Gleichungssysteme oder verschiedene Vorkonditionierer angeboten hätte (und z.B. in [12] durchgeführt wird). Der Lehrbuch-Charakter wird durch zahlreiche, z.T. recht anspruchsvolle Aufgaben unterstrichen, deren erfolgreiche Bearbeitung sicherlich dem Verständnis der vorgestellten Methoden zuträglich ist. Dies kann aber leider die oben angesprochenen Schwächen nicht ausgleichen. Leider wurde das Buch von einem Autor verfasst, der keinen Bezug zur weltweit sehr aktiven Forschungsgemeinschaft in der Angewandten und Numerischen Linearen Algebra aufweist und die entsprechenden Tagungen und Publikationen nicht verfolgt. Dadurch ist erklärlich, dass so gut wie alle interessanten Entwicklungen der letzten 10–15 Jahre unerwähnt bleiben. Einen interessanten Beitrag hätte der Autor, ein ausgewiesener Optimierer, liefern können, in dem er als Modellbeispiele Anwendungen aus der Optimierung genommen hätte, da diese traditionsgemäß oft sehr schwierig zu lösende lineare Gleichungssysteme liefern. (Siehe dazu etwa [3].) Stattdessen werden triviale Diskretisierungen trivialer partieller Differentialgleichungen als Beispiele hergenommen, die kaum eine Herausforderung für die besprochenen Algorithmen liefern. Zwar sind diese Beispiele für eine erste Veranschaulichung der Verfahren geeignet und damit durchaus auch Lehrbuch-kompatibel, aber die Grenzen und Möglichkeiten könnten sehr einfach mit einigen der in der Scientific Community seit Jahren verwendeten Beispiele aus der *Harwell-Boeing Collection* des *Matrix Market*[1] dargestellt werden.

Um die Liste der Schwächen des besprochenen Buches weiter zu verlängern, sei noch erwähnt, dass jeglicher Hinweis auf die gerade in diesem Bereich so reichhaltig verfügbare Software fehlt. Zumindest ein Verweis auf [1, 2] wäre wohl angebracht gewesen! Stattdessen werden, wie z.B. auf S. 251/252, seitenfüllende Algorithmen abgedruckt, die sich oft nur an zwei Stellen (Anwendung des Vorkonditionierers) unterscheiden.

Dem geneigten Leser ist vom Kauf dieses Buches abzuraten, wenn er sich erhofft, einen Überblick über die modernen Methoden der Numerik linearer Gleichungssysteme zu gewinnen. Hat man Konzepte wie numerische Stabilität und Arithmetik mit endlicher Genauigkeit noch nicht in ausreichendem Maße verstanden, besteht gar die Gefahr, einen fundamental falschen Eindruck von diesem Gebiet zu erhalten. Leider hat es der renommierte Springer-Verlag verpasst, dieses immer junge Feld in einer zeitgemäßen Darstellung als Lehrbuch zu veröffentlichen. Sicherlich würde eine ausführliche Darstellung problemorientierter Vorkonditionierungstechniken wie in [4] oder der oben angesprochenen, fehlenden Gebieten der sparsen direkten Löser und Gebietszerlegungsmethoden den Rahmen eines Lehrbuchs sprengen, eine konzentriertere Darstellung des in diesem Buch präsentierten klassischen Stoffs würde es aber sicherlich ermöglichen, diese Themen z.B. in einem Umfang wie die Mehrgittertechniken im achten Kapitel einzuführen. Ein solches Buch wäre sicherlich brauchbar als Grundlage einer Spezialvorlesung für das Hauptstudium (oder im Master), um Studierende langsam an das aktive Forschungsgebiet heranzuführen. Man muss sich die Frage stellen, wozu man stattdessen ein Buch auf den Markt bringt, welches dem sicherlich auch nicht von allen o.g. Kritikpunkten freien Buch von Meister [12] inhaltlich doch in einigen Teilen sehr ähnelt, jedoch im Hinblick auf neuere Entwicklungen hinter dieses Buch deutlich zurückfällt.

Wer sich über moderne Aspekte der Numerischen Linearen Algebra, wozu die Lösung linearer Gleichungssysteme zu zählen ist, tatsächlich informieren möchte, dem seien neben der unten aufgeführten Literatur auch die entsprechenden Themenhefte der GAMM-Mitteilungen[2] ans Herz gelegt.

References

[1] E. Anderson, Z. Bai, C. Bischof, J. Demmel, J. Dongarra, J. Du Croz, A. Greenbaum, S. Hammarling, A. McKenney, and D. Sorensen. *LAPACK Users' Guide.* SIAM, Philadelphia, PA, 3. Auflage, 1999.

[2] R. Barrett, M. Berry, T.F. Chan, J. Demmel, J. Donato, J. Dongarra, V. Eijkhout, R. Pozo, C. Romine und H. Van der Vorst. *Templates for the Solution of Linear Systems: Building Blocks for Iterative Methods, 2. Auflage*, SIAM, Philadelphia, PA, 1994.

[3] M. Benzi, G.H. Golub und J. Liesen. Numerical solution of saddle point problems. *Acta Numerica*, Vol. 14, S. 1–137, 2005.

[4] K. Chen. *Matrix Preconditioning Techniques and Applications.* Cambridge University Press, 2005.

[5] T. Davis. *Direct Methods for Sparse Linear Systems.* SIAM, Philadelphia, PA, 2006.

[6] J.W. Demmel. *Applied Numerical Linear Algebra.* SIAM, Philadelphia, PA, 1997.

[7] A. Greenbaum. *Iterative Methods for Solving Linear Systems.* SIAM, Philadelphia, PA, 1997.

[8] G.H. Golub und C.F. Van Loan. *Matrix Computations.* Johns Hopkins University Press, Baltimore, 3. Auflage, 1996.

[9] W. Hackbusch. *Iterative Lösung großer schwachbesetzter Gleichungssysteme.* B. G. Teubner, Stuttgart, 1991.

[10] N.J. Higham. *Accuracy and Stability of Numerical Algorithms.* SIAM, Philadelphia, PA, 1996. (2., erweiterte Auflage 2002.)

[1] http://math.nist.gov/MatrixMarket/

[2] http://www.tu-bs.de/~hfassben/gamm/gamm_fa_anla.html

[11] J. Liesen und P. Tichy. Convergence analysis of Krylov subspace methods. *GAMM Mitteilungen* (Themenheft „Angewandte und Numerische Lineare Algebra“, Hrsg. H. Faßbender), Vol. 27, Nr. 2, S. 153–173, 2004.

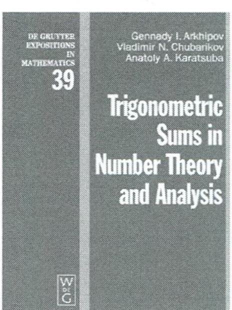
[12] A. Meister. *Numerik linearer Gleichungssysteme.* Vieweg Verlag, Wiesbaden, 1999. (2. Auflage 2005.)

[13] G. Meurant. Gaussian elimination for the solution of linear systems of equations. In P. Ciarlet, J. Lions, (Hrsg.), *Handbook of Numerical Analysis*, Vol. 7, S. 3–170. North-Holland / Elsevier, Amsterdam, 2000.

[14] Y. Saad. *Iterative Methods for Sparse Linear Systems.* PWS Publishing, Boston, MA, 1996.

[15] H. van der Vorst. *Iterative Krylov Methods for Large Linear Systems.* Cambridge University Press, Cambridge, 2003.

Chemnitz P. Benner



G. I. Arkhipov,
V. N. Chubikarov,
A. A. Karatsuba
Review of Trigonometric Sums in Number Theory and Analysis
de Gruyter Expos. in Mathem. 39

Berlin, de Gruyter Verlag, 2005, 554 S., € 128,–

In applications of analysis to problems in number theory one of the main techniques is, as elsewhere, Fourier theory; it is therefore entirely to be expected that the original problems will be transformed into ones involving exponential sums. In the early part of the 20th century a number of basic techniques were developed to estimate such sums. These are associated with the names of H. Weyl, J. G. van der Corput and I. M. Vinogradov. A further technique developed in the middle of the century is the large sieve. In the past few years there have been a number of books dealing with these methods, namely those by E. Krätzel, by S. W. Graham and G. Kolesnikov and by M. Huxley; also R. C. Vaughan's book on the Hardy-Littlewood method discusses exponential sums in that context.

On picking up the book under discussion the reviewer expected to find that it covers much the same material. It does not. It provides an idiosyncratic and interesting perspective. Of the 12 chapters the first three serve to set the picture. Chapter 4 is devoted to proving a multivariate version of Vinogradov's theorem, that is, a sharp estimate for expressions of the form

$$\int \Big| \sum_{1\le x_1\le P_1} \cdots \sum_{1\le x_r\le P_r} \exp(2\pi\imath F_a(x_1,\ldots,x_r))\Big|^{2k} d\omega(a)$$

where

$$F_a(x_1,\ldots,x_r) = \sum_{0\le t_1\le n_1,\ldots,0\le t_r\le n_r} a(t_1,\ldots,t_r)x_1^{t_1}\cdots x_r^{t_r}$$

and the integral is taken over $0 \le a(t_1,\ldots,t_r) \le 1$ with respect to the Lebesgue measure ω on this cube. The proof is very delicate and represents a *tour de force*. As one would expect this leads to estimates on exponential sums which are adumbrated in Chapter 5.

In the remaining seven chapters the authors consider individually a series of problems of number theory. These are mostly independent of one another and, curiously, independent of the results of Chapters 4 and 5 (although the argument of Section 6.1 in part repeats that of the preceding chapters). This is odd and the reviewer would have appreciated seeing the fruits of the intricate analysis of those two chapters. The latter part of the book reminds one of the Russian classics by I. M. Vinogradov, "The method of trigonometric sums in the theory of numbers" and A. O. Gelfond and Yu. V. Linnik, "Elementary methods in the analytic theory of numbers". The topics covered in the later chapters are:

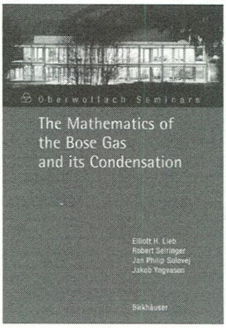
Chapter 6: Estimates for trigonometric sums on domains defined by polynomial inequalities, fractional parts of polynomials,
Chapter 7: Estimates for trigonometric sums when the P_j above are restricted by certain inequalities,
Chapter 8: The generalized Hilbert-Kamke Problem
Chapter 9: Variations on Artin's conjecture; the function $G(k)$,
Chapter 10: Problems involving prime numbers,
Chapter 11: Trignometric sums of the form $\sum_{1\leq|n|\leq N}\frac{1}{n}\exp(2\pi\imath P(n))$ where P is a polynomial, and
Chapter 12: Short "Kloosterman" sums and their applications.

Although it is a matter of personal taste the reviewer found the discussion of Artin's Conjecture in Chapter 9 particularly interesting. (This conjecture is ascribed to E. Artin, but with what authority is unclear.) In its original form this stated that a homogeneous form of degree n in k variables over $\mathbb{Q}_p$ would alway have a non–trivial zero $\mathbb{Q}_p$ if $k > n^2$. This was disproved by G. Terjanian in 1966. Here the authors construct more intricate families of counter-examples which show that Artin's conjecture is very false. In the other direction in 1965 J. Ax and S. Kochen showed that for given n there are only finitely many p for which the conjecture is false. The proof of Ax and Kochen was model-theoretic; a more traditional proof was found a little later by P. J. Cohen. Cohen's method permits in principle an estimate of the exceptional primes but is not practical. In Section 9.1.4 the authors state three stimulating conjectures which *inter alia* would imply that the set of exceptional p satisfies $p \leq n$.

The translation is generally good, although there are passages, such as the introductory paragraph to Chapter 7, where is is difficult to discern the meaning. There are also a few infelicitous translations – for example, in Section 9.1.4 there are a number of "Hypotheses"; "hypothesis" is the Russian *gipoteza* for which the apposite translation here would have been "conjecture". An unfortunate retranslation is that of the name "van der Corput" to "van der Korput"; remarkably for a book on trigonometric sums this name only occurs twice, in the appendix and in the index. The translator has remained anonymous. The translation itself is of a book which appeared in 1987; this corresponds to the first nine chapters and has remained essentially unchanged. The final three chapters were written for this edition. There is a substantial index, especially of the Russian literature; although it has been brought up to date from the time of the original edition, this has only been done for Russian contributions.

This is not a book for the casual reader. However, with its novel perspective, its unconventional material and its stimulating ideas it will handsomely repay the number theorist who studies it seriously.

Göttingen S. J. Patterson



E. Lieb, R. Seiringer, J.P. Solovej und J. Yngvason
The Mathematics of the Bose Gas and its Condensation
Oberwolfach Seminars 34

Basel u.a., Birkhäuser, 2005, 203 S., € 29,96

Dieses Buch fasst die Beiträge der vier Autoren zur Suche nach einer mathematisch rigorosen Theorie der Bose-Einstein-Kondensation aus den letzten zehn Jahren zusammen. In den 1920er Jahren entdeckte der Inder S.N. Bose die symmetrische Struktur der Beschreibung der Photonen durch Wellenfunktionen (nun *Bosonen* genannt), und kurz danach enthüllte A. Einstein das Phänomen der Kondensation dieser Teilchen, die nun *Bose-Einstein-Kondensation* genannt wird. Einige Zeit lang hielt man diesen Effekt für eine Kuriosität, doch in den 1940er und 1950er Jahren wurden etliche mathematische Anstrengungen unternommen, ihn rigoros zu beschreiben, allerdings ohne durchschlagenden Erfolg. Insbesondere wurde die *Bolgoljubov-Theorie* entwickelt, ein halbrigoroser mathematischer Ansatz, der die mathematische Intuition stark förderte. Neuen Schwung bekamen die Aktivitäten in der Mitte der 1990er Jahre, nachdem gelungen war, Bose-Einstein-Kondensation experimentell zu erhalten, eine Errungenschaft, die kurz danach mit dem Nobelpreis für Physik belohnt wurde. Für das Experiment war es nötig gewesen, die betrachteten Teilchen auf 10^{-9} Kelvin (!) abzukühlen, und das Kondensat, zusammengehalten durch eine 'Falle', bestand nur aus einigen 10 000 Teilchen, also handelte es sich um ein sehr verdünntes Gas. Inspiriert durch diesen experimentellen Durchbruch, verstärkten die Autoren ihre mathematischen Anstrengungen und erhielten unter Anderem eine rigorose Beschreibung der Kondensation für ein verdünntes Gas bei Anwesenheit einer Falle, die das Auseinanderlaufen der Teilchen verhindert, bei Nulltemperatur, also näherungsweise unter den Bedingungen der Experimente von 1995. Das Hauptziel allerdings ist nach wie vor noch nicht erreicht worden, nämlich die Beschreibung der Kondensation ohne Verdünnung und unter Wegfall der Falle, doch sind die mathematischen Erfolge der vier Autoren durchaus beachtlich und hilfreich auf dem Wege zu einem vollständigen Verständnis der Bose-Einstein-Kondensation. Was ist denn nun der mathematische Inhalt der Frage nach Bose-Einstein-Kondensation? In der Quantenphysik beschreibt man ein System von N Teilchen in einer Falle $W\colon \mathbb{R}^d \to [0,\infty]$ mit einer durch $v\colon (0,\infty) \to [0,\infty]$ gegebenen Interaktion durch den *Hamilton-Operator*

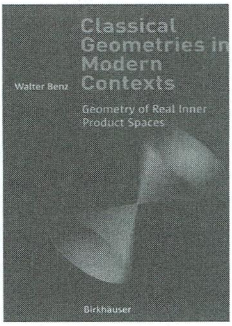
$$\mathcal{H}_N = -\sum_{i=1}^{N} \Delta_i + \sum_{i=1}^{N} W(x_i) + \sum_{1\le i<j\le N} v(|x_i - x_j|), \qquad x_1,\dots,x_N \in \mathbb{R}^d,$$

wobei der Laplace-Operator Δ_i die kinetische Energie des i-ten Teilchens beschreibt. Die Falle W explodiert bei Unendlich und v bei Null, so dass also die N Teilchen effektiv in einem Kompaktum gehalten werden und dort einer abstoßenden Paarinteraktion unterliegen. Der Grundzustand, d. h. die L^2-normierte positive Haupteigenfunktion des Operators $\mathcal{H}_N$ auf dem $L^2((\mathbb{R}^d)^N)$, beschreibt das System bei Nulltemperatur. Die Grundaufgabe ist die Beschreibung des Grundzustandes und seiner Energie im Grenzwert $N \to \infty$, wobei die Falle W reskaliert wird, d. h. in Dimension $d = 3$ durch $L^2 W(\cdot L)$ ersetzt wird, wobei $L = L_N$ mit N gegen ∞ läuft. Das Hauptaugenmerk wird dabei auf den Fall gerichtet, wo die Teilchendichte N/L_N^3 konstant bleibt, aber diese Frage scheint zur Zeit über das Vermögen der Mathematik hinauszugehen. Die Autoren des Buches konzentrieren sich denn auch auf den Fall, wo N/L_N^3 sich wie $1/N^2$ verhält (also ein spezielles verdünntes System), und dies stellt sich als das dünnste System heraus, in dem die Interaktion im Grenzwert $N \to \infty$ noch bemerkbar bleibt. Mit Hilfe einer Substitution kann man annehmen, dass W unabhängig von N bleibt, und reskaliert v zu $N^2 v(\cdot N)$. Die Beschreibung dieses Systems für große N ist eines der Hauptergebnisse, die in diesem Buch vorgestellt werden, und stammt aus einer Serie von Originalarbeiten dreier der Autoren von 1999 bis 2002. Es stellte sich heraus, dass die sogenannte *Gross-Pitajevski-Formel* das Verhalten beschreibt, und dies ist die Variationsaufgabe

$$\chi_\alpha^{\mathrm{GP}} = \inf_{\varphi \in L^2(\mathbb{R}^3): \|\varphi\|_2 = 1} \Big(\|\nabla\varphi\|_2^2 + \langle W, \varphi^2 \rangle + 4\pi\alpha \|\varphi\|_4^4 \Big),$$

wobei $\alpha \in (0, \infty)$ ein Parameter ist. Die Formel für $\chi_\alpha^{\mathrm{GP}}$ besitzt einen nichttrivialen Minimierer $\varphi_\alpha^{\mathrm{GP}}$. Die N-Partikel-Wellenfunktion des obigen verdünnten Systems wird asymptotisch beschrieben durch das N-fache Tensorprodukt von $\varphi_\alpha^{\mathrm{GP}}$ (wobei α die Streulänge der Interaktionsfunktion v ist), zusammen mit der Lösung der zugehörigen Streugleichung. Diese Aussage ist eine mathematische Präzisierung des Sachverhalts, dass bei Nulltemperatur die N Teilchen durch eine Ein-Teilchen-Wellenfunktion beschrieben werden können, und dies ist eines der Anzeichen für das Vorliegen von Bose-Einstein-Kondensation. Ein weiteres Anzeichen ist die damit eng verbundene und deutlich tiefer liegende Aussage, dass der Haupteigenwert der reduzierten Ein-Teilchen-Dichtematrix (aufgefasst als ein Integraloperator) asymptotisch nicht verschwindet. Eine wichtige Beweisidee wurde von F. Dyson in den 1960er Jahren entwickelt, aber erst von Lieb, Seiringer und Yngvason zu einem vollständigen Beweis ausgebaut.Ein Gutteil des Buches ist diesem Ergebnis und großen Teilen des Beweises gewidmet. In einer Einleitung wird der physikalische Hintergrund der betrachteten Fragen kurz ausgebreitet, und sodann wird die oben skizzierte Aussage motiviert, diskutiert, formuliert und zunächst in einer schwächeren Version bewiesen (nur das Verhalten der Grundzustandsenergie). Eine Version des Ergebnisses für zwei Dimensionen wird ebenfalls behandelt. Um zu den tiefer liegenden Aussagen zu kommen, wird dann ein Kapitel über Verallgemeinerungen der Poincaré-Ungleichung eingeschoben, mit deren Hilfe anschließend die volle Stärke der oben skizzierten Aussage bewiesen wird, und zwar in drei und in zwei Dimensionen. Den Beweisen geht jeweils eine ausführliche Motivation und Diskussion mit vielen erhellenden Bemerkungen voraus. Der Begriff der Superfluidität wird ebenfalls eingeführt und sein Vorliegen im betrachteten Fall quasi simultan mitbewiesen. Das bis hier beschriebene Material füllt ungefähr die erste Hälfte des Buches.Im weiteren Verlauf des Buches folgen einige spezialisiertere Fragen in diesem Gebiet: das Verhalten des verdünnten Gases in $d = 3$ unter dem Einfluss von Fallen, deren 'Zigarrenform' bzw. Kreisform das Gas in eine lange Linie bzw. in eine Scheibe zwingt, elektrisch geladenes Gas mit langreichweitiger Wechselwirkung, wo die Interaktion durch $e_i e_j / |x_i - x_j|$ ersetzt wird (mit elektrischen Ladungen $e_i \in \{-1, 1\}$), und einen interessanten Phasenübergang in einem periodischen optischen Gitter, das zur Hälfte mit Teilchen gefüllt ist. In einem Anhang wird die Bolgoljubov-Theorie erläutert, ein gewisses exakt lösbares Modell diskutiert, die Streulänge und ein paar ihrer Eigenschaften eingeführt und ein rigoroser Aspekt der Bolgoljubov-Approximation behandelt, der spontane Bruch der Symmetrie. Der gesamte Text ist sehr pädagogisch geschrieben und legt Wert auf verständliche Erläuterung, Klärung der Zusammenhänge der beschriebenen Mathematik mit den physikalischen Hintergründen und auf Vermeidung überflüssiger technischer Details. Der Text wurde anlässlich eines DMV-Seminars in Oberwolfach im Jahre 2004 geschrieben und soll vornehmlich dem schnellen Erlangen eines Verständnisses der Theorie und des derzeit mathematisch Machbaren vermitteln. Das Buch erhebt keinen Anspruch auf eine vollständige Abhandlung des Themas (dafür gibt es viel zu viele mögliche Ansätze), sondern möchte hauptsächlich die Beiträge der vier Autoren aus den letzten zehn Jahren zusammenfassend darstellen. Das Niveau, auf dem es geschrieben ist, sollte es einem fortgeschrittenen Studierenden der Mathematik möglich machen, den Beweisen zu folgen; es wird im Wesentlichen die Analysis vorausgesetzt, wie sie etwa in dem Buch von Lieb und Loss behandelt wird. Allerdings sind fundierte Kenntnisse in der Mathematischen Physik für die Einordnung und das Verständnis der physikalischen Hintergründe hin und wieder nicht nur nützlich, sondern sogar notwendig. Eine ausführliche Literaturliste rundet das Werk ab.

Leipzig W. König



W. Benz
Classical Geometries in Modern Contexts
Geometries of Real Inner Product Spaces

Basel u.a., Birkhäuser, 2005, 242 S., € 168,–

Der Autor gibt in seinem Buch eine dimensionsfreie Darstellung reeller metrischer Geometrien, die in einem beliebigen Prähilbertraum modelliert sind. Obgleich er vom Leser nur Kenntnisse der linearen Algebra und Verständnis für Geometrie verlangt, führt er ihn mit seinem Text behutsam bis an die Front der gegenwärtigen Forschung in den Grundlagen der metrischen Geometrien. Da die orthogonalen Abbildungen Bewegungen metrischer Geometrien sind, charakterisiert der Autor zuallererst orthogonale Abbildungen eines Raumes mit Skalarprodukt unter besonders schwachen Annahmen. Dann definiert er in diesen Räumen Translationsgruppen zu einer festen Richtung. Nachdem der Verfasser die reelle und hyperbolische Geometrie eingeführt hat, gibt er eine gemeinsame Charakterisierung dieser beiden Geometrien in der Klasse der reellen Räume mit Skalarprodukt an, was das Hauptergebnis des ersten Kapitels ist.

Im zweiten Kapitel diskutiert der Autor zunächst verschiedene Definitionen für Geraden in euklidischen und hyperbolischen Geometrien. Die Motivation für zwei der von ihm gegebenen Definitionen schreibt er L. M. Blumenthal und K. Menger zu. Anschließend führt der Verfasser Kugeln, Hyperebenen, Unterräume, Parallelismus, Winkel und Maße für diese ein. In hyperbolischen Geometrien zeigt er, wie man äquidistante Flächen, Enden und Horozykel definiert und sie parametrisieren kann. Das Cayley-Klein Modell der hyperbolischen Geometrie wird vorgestellt und das Verhalten von Hyperebenen und Geraden unter Translationen studiert. Natürlich wird die Gruppe der Isometrien von euklidischen und hyperbolischen Geometrien ausführlich untersucht und die Translationen in ihnen charakterisiert. Den Höhepunkt des zweiten Kapitels bildet eine Charakterisierung von euklidischen und hyperbolischen Bewegungen in der Klasse der Punktabbildungen einer Geometrie in sich.

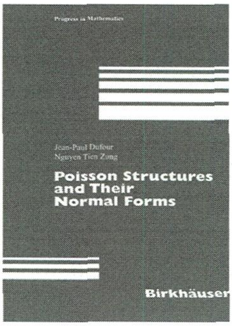
Das dritte Kapitel des Buches ist in der Hauptsache der reellen Möbiusgeometrie und der Liegeometrie gewidmet, zwei Arten von Geometrien, die der Autor in seinem Lebenswerk für die Moderne revitalisiert hat. Der Verfasser hebt die Untersuchung mit dem Studium der Möbiustransformationen an. Er erkennt die ∞ festlassenden Transformationen als Ähnlichkeiten und klassifiziert die Involutionen. Außerdem gibt er ein Kriterium für die Othogonalität von Möbiuskugeln und charakterisiert die Möbiuskreise mittels der Doppelverhältnisse. Anschließend beweist er die Existenz der stereographischen Projektion und leitet das Poincare-Modell sowie das Weierstraß-Modell der hyperbolischen Geometrie ab. Dann führt er die Laguerregeometrie ein, indem er Sperre, Laguerre-Zykel und ihre Berührungsrelation definiert. Mit Hilfe der Laguerregeometrie gelangt der Verfasser zur Liegeometrie, charakterisiert die Laguerre-Transformationen innerhalb der Gruppe der Lietransformationen und zeigt, wie jede Möbiustransformation auf natürliche Weise zu einer Lietransformation führt. Die Einführung der Liequadrik und der zyklischen Koordinaten für Zykel rundet die Untersuchung der Liegeometrien ab.

Im Zusammenhang mit den orthogonalen sowie den Laguerre-Transformationen wendet sich der Verfasser im dritten Kapitel auch den Lorentzboosts und den Lorentztransformationen zu, deren ausführlichen Untersuchung das vierte Kapitel des Buches gewidmet ist. Hier bestimmt er zunächst in der Lorentz-Minkowski Geometrie die kausalen Automorphismen sowie die orthochronen Lorentztransformationen und gibt an, wie die zugehörigen Boosts relativistisch zu addieren sind. Anschließend studiert er Licht-, Zeit- und Raumgeraden, Lichtkegel und Lichthyperebenen (das sind Hyperebenen, die eine Lichtgerade, aber keine Zeitgerade enthalten). Der Autor demonstriert außerdem die engen Zusammenhänge zwischen der Lorentz-Minkowski und der Laguerregeometrie, indem er zeigt, dass die Lorentztransformationen solche Laguerre-Transformationen sind, die die Tangentialdistanz erhalten, dass die Ereignisse den Laguerrezykeln entsprechen und dass die Speere, als Punktmengen aufgefasst, gerade die Lichthyperebenen sind.

In Abschnitt 4.9 ist die Einsteinsche Zylinderwelt definiert, in Abschnitt 4.10 werden ihre Geraden und Unterräume studiert und in 4.11 werden alle Zweipunkte-Invarianten des Einsteinschen Zylinderuniversums bestimmt. In der Sektion 4.12 wird der Leser in die Sittersche Welt eingeführt, um in 4.13 ihre Zweipunkte-Invarianten kennenzulernen. In den letzten Abschnitten des Buches untersucht der Verfasser die elliptische und die sphärische Geometrie, definiert ihre Unterräume, Kugeln und geschlossene Geodätische, bestimmt ihre Isometriegruppen und charakterisiert die Geraden dieser Geometrien mittels Funktionalgleichungen. Den Schlusspunkt des Buches bildet eine Diskussion des engen Zusammenhangs zwischen Lorentz-Boosts und hyperbolischen Translationen. So wird dort etwa bewiesen, dass jede hyperbolische Translation eine Lorentztransformation induziert.

Zusammenfassend muss betont werden, dass der Verfasser sein Ziel zu zeigen, dass der Dimensinonsbegriff im Falle metrischen Geometrien entbehrlich ist, auf vorbildliche Weise erreicht. Er tut es auf eine Art, die den Leser so an der Hand führt, dass einer sich bei der Lektüre wohlfühlt und nirgends sich Stellen finden, deren Interpretation ihm Mühe abverlangte. Dies ist für eine mathematische Monographie, die in die aktuelle Forschung führt, ein seltenes Phänomen. Daher sei das Buch jedem empfohlen, in dessen Herzen ein Plätzchen für Geometrie erhalten geblieben ist.

Erlangen K. Strambach



J. P. Dufour, N. T. Zung
Poisson Structures and Their Normal Forms
Progr. in Math. 242

Basel u.a., Birkhäuser, 2005, 321 S., € 48,–

In search for a procedure to construct new integrals of motion out of given ones, in 1809, Poisson discovered a certain operation which is nowadays referred to as a Poisson bracket. The formal properties of a Poisson bracket give rise to the concept of a Poisson manifold, much more general than that of a symplectic manifold. Poisson brackets have been extensively used by S. Lie, E. Cartan, P. Dirac, and others. They were the basic tool for Lie's work and provided for example an appropriate language for the proof of Lie's third theorem. For many discoveries in modern symplectic geometry, there are precedents in Lie's work which could not have been spelled out without the concept of a Poisson structure. Dirac made the fundamental observation that Poisson brackets furnish the right framework in which classical mechanics is seen as an approximation of quantum mechanics. He also noticed their importance for classical constrained systems and developed the miraculous notion of Dirac bracket.

Poisson brackets are nowadays in a period of intense development. The monograph under review reflects this activity, by presenting in detail several of these developments in some of which the authors took part themselves; it contains a rich and thorough bibliography; and it is readable and stimulating and contains material which otherwise is only spread over the literature, the main emphasis being on the normal form problem.

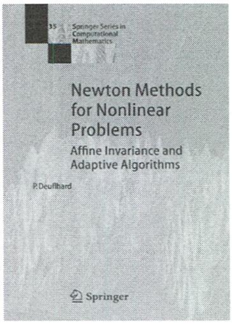
The monograph begins with a concise but helpful and self-contained introduction into Poisson geometry, including the familiar interpretation of a Poisson manifold as a singular foliation with symplectic leaves. The topics treated next include Poisson cohomology, normal forms, linearization of Poisson structures, and the smooth degeneracy of real semisimple Lie algebras of real rank at least equal to 2. Thereafter the links among quadratic Poisson structures, r-matrices, and Poisson-Lie groups are explained. The authors go on with exploring Nambu structures, a Nambu structure being a generalization of a Poisson bracket which involves more than two arguments. Next, they consider Lie groupoids and Lie algebroids; they explain, in particular, a slice theorem established recently jointly by A. Weinstein and the second named author, discuss symplectic groupoids and local normal forms of Lie algebroids and, finally, conclude with a description of the recent integrability result for Lie algebroids due to Crainic and Fernandes.

In an appendix various technical details are recollected, including Moser's path method, division theorems, the Reeb stability criterion for a foliation, action-angle variables, normal forms of vector fields, normal forms of Poisson structures along a singular curve, a model for the neighborhood of a symplectic leaf, Dirac structures, and deformation quantization.

Occasionally, perhaps, the reader should be a bit circumspect. For example, in the description of what the authors refer to as a Lie pseudoalgebra (p. 239), an axiom is missing (the axiom saying that, with the notation adopted at that stage, $(f\alpha)(g) = f(\alpha(g))$). Also systematic usage of Lie pseudoalgebras would have clarified and simplified the description of Poisson cohomology and, more generally, Lie algebroid cohomology.

The book makes a number of important topics available to the non-expert, perhaps for the first time in book form. It should be an essential purchase for mathematics libraries and is likely to be a standard reference for years to come, providing an introduction to an attractive area of further research.

Lille — J. Huebschmann



P. Deuflhard
Newton Methods for Nonlinear Problems
Affine Invariance and Adaptive Algorithms

Berlin u. a., Springer, 2004, 424 S., € 79,95

The present monography is by far the most extensive and thorough presentation of Newton's method the reviewer is aware of.

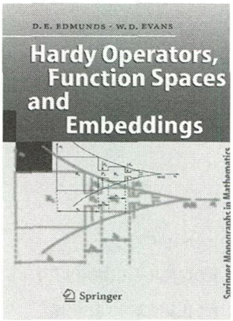
The author's view of Newton's method in all its variants is based on the concept of *affine invariance principles*, introduced by the author and co-workers starting in the early '70s.

This concept is a powerful tool for theoretical considerations as well as a key ingredient for the effective solution of complex applied problems.

The book addresses a very wide class of problems, ranging from algebraic equations, ODE to PDE problems. It copes with theoretical questions, applications and also with (often overlooked) questions of practical importance. Consequently, besides theoretical considerations, the reader is provided with many interesting real world examples and also links for downloading effective software. Many useful citations conclude the material.

In summary, this book is an indispensable monography for every numerical analyst dealing with the computational solution of nonlinear problems.

Erlangen E. Bänsch



D. E. Edmunds, W. D. Evans
Hardy Operators, Function Spaces and Embeddings

Berlin u. a., Springer, 2004, 326 S, € 89,95

The term *Function Spaces* appears in the mathematical life frequently for about thirty years. The reason is not only in the topic itself, but, moreover, in its importance for applications, mainly in the theory of differential equations. During that time, some important groups (or even schools) have developed – let us mention, e.g., Germany (Jena), Czech Republic (Prague), Spain (Barcelona), U.K. (Brighton, Cardiff, Dundee), …, and since then, series of schools or conferences are organized – e.g. NAFSA (*Nonlinear Analysis, Functions Spaces and Applications*) regularly since 1972 in Czech Republic and FSDONA (*Function Spaces, Differential Operators, Nonlinear Analysis*) mutually since 1988 in Finland, Germany and Czech Republic. The story started, roughly speaking, with the books by Adams (*Sobolev Spaces,* 1975), Kufner, John and Fučík (*Function Spaces,* 1977) and Triebel (*Interpolation Theory, Functions Spaces, Differential Operators,* 1978), and the authors of the book under review entered this company by their book *Spectral Analysis and Differential Operators* in 1987. From the amount of monographs devoted to this topic let us mention at least some published recently: *Bounded and Compact Integral Operators* by Edmunds, Kokilashvili and Meshki (2002), the second edition of *Sobolev Spaces* by Adams and Fournier (2003), *Weighted Inequalities of Hardy Type* by Kufner and Persson (2003) and *Theory of Function Spaces III* by Triebel (2006).

Hence, the book under review extends the number of monographs devoted to the topic and the authors believe, according to their Preface, that "the present state of affairs makes it desirable to have a connected account of those parts which seem... to have reached a degree of maturity". The main themes of the book are Banach function spaces and spaces of Sobolev type based on them, integral operators of Hardy type on intervals and on trees, and the distribution of approximation numbers of embeddings of Sobolev spaces based on ridged domains. It can be said that the authors succeeded in providing the reader with a useful survey of results from the theory of function spaces.

After Chapter 1 which contains some preliminaries, Chapter 2 deals mainly with the

Hardy type operator T,

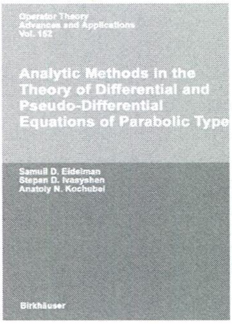
$$(Tf)(x) = v(x) \int_a^x u(t)\, f(t)dt;$$

acting as a mapping between two Lebesgue spaces on a (finite) interval (a, b), where the given weight functions u, v satisfy certain integrability conditions. Criteria are given for T to be bounded, its measure of non-compatness is derived and necessary and sufficient conditions are given for T to be compact. Analogous results are derived for the case when the interval (a,b) is replaced by a *tree,* i.e. a connected graph without loops or cycles, where the edges are non-degenerate closed line segments whose endpoints are the vertices of the tree. This concept will be important in Chapters 5 and 6 when dealing with embeddings of Sobolev spaces on special n-dimensional domains. Chapter 3 deals with Banach function spaces and Sobolev spaces based on them. Some refinements of the classical Sobolev embedding theorems are presented using more general function spaces then the "usual" Lebesgue ones (Lorentz-Zygmund and Lorentz-Karamata spaces, for instance). In Chapter 4, the Poincaré inequality is discussed in the general setting of spaces $W(X,Y)$ of Sobolev type, where X and Y are Banach function spaces on a rather general bounded n-dimensional domain and $W(X,Y)$ is the set of all functions from X with distributional gradient in Y. A higher-dimensional analogue of the Hardy inequality (with special weight function: power of the distance to the boundary of the domain) is dealt with, too.

Generalized ridged domains (GRD) seem to be a favorite object of the authors. GRDs are a very wide class of domains which includes horns, spirals, "rooms and passages" and ones with fractal boundaries. The following two problems are, in particular, investigated in Chapter 5: For Banach function spaces X, Y, Z defined on a GRD, what target space Z is permissible for the embedding of $W(X,Y)$ into Z and when an associated Poincaré inequality holds? Finally, Chapter 6 deals with the approximation numbers of Sobolev embeddings for spaces based on a GRD.

Chapter 2–6 contain a section "Notes" which provides the reader with useful supplementary information. Together with author, subject and notation indexes, the book of two distinguished authors presents a sympathetic and welcome complement to the large scale of the existing literature on the topic.

Prag A. Kufner



S. D. Eidelman,
S. D. Ivasyshen,
A. N. Kochubei

Analytic Methods in the Theory of Differential and Pseudo-Differential Equations of Parabolic Type

Basel u. a., Birkhäuser, 2004, 400 S., € 138,–

Dies ist kein Buch über parabolische Differentialgleichungen im landläufigen Sinn. Die Autoren konzentrieren sich auf lineare Gleichungen auf Raum-Zeit-Gebieten der Form $\Pi_I = I \times \mathbb{R}^n$, wo die räumliche Variable x über ganz $\mathbb{R}^n$ variiert und die Zeitvariable t über ein Intervall I in $[0, \infty)$. Nichtlineare Gleichungen sowie Gleichungen über Mannigfaltigkeiten oder beschränkten Gebieten werden ausgeklammert, und selbst die klassischen parabolischen Gleichungen im Sinn von Petrovski spielen praktisch keine Rolle.

Es ist dennoch ein wichtiges Buch, denn hier werden mit hoher analytischer Präzision vier nicht-alltägliche Klassen von Gleichungen behandelt, die durch Diffusionsvorgänge und stochastische Prozesse motiviert sind.

Jede dieser Klassen weist eine typische Besonderheit auf, nämlich
(E.1) Anisotropie in den räumlichen Ableitungen (sog. $2\vec{b}$-parabolische Gleichungen),
(E.2) Kolmogorovsche Entartung in den Raumvariablen,
(E.3) singuläres pseudodifferentielles Verhalten in den räumlichen Ableitungen oder
(E.4) nicht-ganzzahlige („gebrochene") Zeitableitungen.

Konkret heißt das Folgendes: Ein Operator zu einer Gleichung vom Typ (E.1) kann unterschiedliche Ordnungen bezüglich der verschiedenen Raumvariablen haben, wie beispielsweise

$$\partial_t - \partial_{x_1}^2 + 2\partial_{x_2}^4 - 4\partial_{x_3}^6, \quad t \in \mathbb{R},\ x \in \mathbb{R}^3.$$

Die Koeffizienten – im Beispiel konstant – werden zunächst als beschränkt und hölderstetig angenommen. Betrachtet wird jedoch auch die sog. dissipative Situation, wo unbeschränkte Terme niedrigerer Ordnung auftreten. Das obige Beispiel könnte man so um eine Funktion $a(x)^{12}$ mit einer hölderstetigen, im Unendlichen gegen $+\infty$ divergierenden Funktion a ergänzen. Die Klasse umfasst des weiteren in $t = 0$ entartete Operatoren wie

$$t^\alpha \partial_t - t^\beta \left(\partial_{x_1}^2 + 2\partial_{x_2}^4 - 4\partial_{x_3}^6\right), \quad \alpha, \beta > 0. \tag{1}$$

Natürlich können die Operatoren bzgl. t auch höhere Ordnung haben.

Gleichungen mit Kolmogorovscher Entartung (E.2) sind dadurch gekennzeichnet, dass die Variable x sich so in drei Gruppen aufspalten lässt

$$x = (x_1, x_2, x_3) = (x_{11}, \dots, x_{1n_1}, x_{21}, \dots, x_{2n_2}, x_{31}, \dots, x_{3n_3}) \quad \text{mit } n_1 \geq n_2 \geq n_3,$$

dass der Operator die Form

$$\partial_t - \sum_{j=1}^{n_1} x_{1j}\partial_{x_{2j}} - \sum_{j=1}^{n_2} x_{2j}\partial_{x_{3j}} - B(t, x, \partial_{x_1}) \tag{2}$$

hat, wobei $\partial_t - B$ gleichmäßig in x_2 und x_3 zur Klasse (E.1) gehört.

Bei den Gleichungstypen (E.3) und (E.4) handelt es sich um singuläre Pseudodifferentialgleichungen. Die Pseudodifferentialoperatoren, auf die in (E.3) Bezug genommen wird, sind endliche Summen von Operatoren zu strikt homogenen Symbolen. Ein zentrales Beispiel ist

$$\partial_t + |-\Delta|^{\gamma/2}, \quad 0 < \gamma < 2. \tag{3}$$

Bei den Gleichungen vom Typ (E.4) schließlich wird die t-Ableitung ∂_t ersetzt durch eine regularisierte gebrochene Ableitung $\mathbb{D}_t^{(\alpha)}$, $0 < \alpha < 1$. Untersucht werden Operatoren der Form $\mathbb{D}_t^{(\alpha)} - B(t, x, \partial_x)$, wobei B ein Laplace-artiger elliptischer Differentialoperator zweiter Ordnung ist.

Im ersten Kapitel des Buches werden alle Typen vorgestellt und motiviert. Anschließend wird das generelle Programm zu ihrer Behandlung skizziert. Die Autoren formulieren konkrete Aufgaben: die Bestimmung einer Fundamentallösung für das inhomogene Cauchy-Problem $Au = f$, $u|_{t=t_0} = g$ für die obigen Operatoren A, die Untersuchung ihrer Eigenschaften und des Verhaltens der Lösung u zu einer gegebenen Zeit t in Abhängigkeit von der „Güte" der Inhomogenität f und des Cauchy-Datums g sowie die Klärung der Frage, wann die Lösung eindeutig ist und in welchem Sinn $u(t, x)$ für $t = t_0$ mit g übereinstimmt.

In den folgenden Kapiteln werden die vier Gleichungstypen nacheinander diesem Programm unterworfen. Die Struktur dieser Kapitel ist daher weitgehend parallel, und die jeweils erzielten Aussagen lassen sich gut vergleichen. Jedes Kapitel schließt mit einem Abschnitt, in dem die Resultate kommentiert und historisch eingeordnet werden. Außerdem finden sich dort Verweise auf weitere Literatur.

Hauptaufgabe und zentrale Schwierigkeit ist in allen Fällen die Konstruktion der Fundamentallösung. Zum Einsatz kommt hier die Methode von Levi, bei der man zunächst eine Fundamentallösung zu einem vereinfachten Operator sucht. Daraus erhält man die volle Fundamentallösung über die Lösung einer Volterraschen Integralgleichung. Dies gelingt für alle Gleichungstypen, wobei naturgemäß die Ergebnisse für die einzelnen Operatorklassen unterschiedlich ausfallen. Am besten untersucht sind die Gleichungen vom Typ (E.1), mit denen sich Eidelman bereits seit 1960 befasst hat. Grundlegend sind hier die Abschätzungen für den Fall beschränkter hölderstetiger Koeffizienten. Ausgehend davon lässt sich der Einfluss wachsender Diffusionsterme oder einer Entartung bei $t = 0$ (wie in 0) nachverfolgen. Auch der Beitrag der Kolmogorov-Entartung kann so erfasst werden.

Im Gegensatz dazu ist über die Gleichungen vom Typ (E.3) und die so genannten gebrochenen Diffusionsgleichungen oder Sub-Diffusionsgleichungen vom Typ (E.4) weniger bekannt. In beiden Fällen gehen wichtige erste Resultate zur Struktur der Fundamentallösung auf Arbeiten von Kochubei 1989/90 zurück. Die Fundamentallösungen für den Typ (E.4) fallen – wie die für die Typen (E.1) und (E.2) – in den Raumvariablen exponentiell ab, und das Abfallverhalten kann aus den Daten abgelesen werden. Für die Behandlung der singulären Pseudodifferentialoperatoren in (E.3) verwenden die Autoren hypersinguläre Operatoren. Dabei lässt sich i.Allg. nur polynomiales Abfallen zeigen. Bei Beispiel 1 jedoch ist diese Abschätzung auch scharf, so dass eine Verbesserung nicht möglich ist. Im Fall (E.4) wiederum zeigt sich, dass die Fundamentallösung nicht nur bei $t = 0$, sondern auch bei $x = 0$ eine Singularität hat. Für diese Abschätzungen wird die Foxsche H-Funktion vergewendet.

Mit dieser Information kann man die Lösung des Cauchy-Problem bestimmen und untersuchen, wie sie von t abhängt. Besonders gut gelingt dies bei den Gleichungstypen (E.1) und (E.2). Die Autoren führen Klassen von t-abhängig gewichteten L_p-Räumen und Räumen stetiger Funktionen auf $\mathbb{R}^n$ ein. Ein solches Gewicht ist im einfachsten Fall ein Produkt von Termen der Form

$$\exp\Big(-ca(c^{2b_j-1} - a^{2b_j-1}t)^{-1/(2b_j-1)}|x_j|^{2b_j/(2b_j-1)}\Big).$$

Dabei ist $c > 0$ durch die Gleichung gegeben, $2b_j$ ist die Gleichungsordnung in der j-ten Koordinatenrichtung, $a > 0$ ist wählbar. Cauchy-Daten (für $t = 0$) oder Inhomogenitäten in einem solchen gewichteten Raum können in den räumlichen Variablen schnell anwachsen, so dass die Lösung u im Allgemeinen nur für endliche Zeit $T < \min_j(c/a)^{2b_j-1}$ existiert. Auf dem Intervall $(0, T]$ ergeben sich dann Abschätzungen für $u(t,\cdot)$ und seine Ableitungen bis zur Ordnung der Gleichung in Abhängigkeit von $f(t,\cdot)$ und g.

Zwei Abschnitte liegen außerhalb dieses Programms: Einer ist einer Unterklasse von (E.2), von den Autoren Fokker-Planck-Kolmogorov-Gleichungen genannt, gewidmet. Sie zeichnen sich dadurch aus, dass die Koeffizienten reellwertig sind und der Operator B in (2) Ordnung 2 hat. Gezeigt werden Aussagen zum Maximumprinzip, Abschätzungen der Lösung nach unten und Eindeutigkeitssätze. Ein Abschnitt zu den Gleichungen vom Typ (E.3) befasst sich mit der Frage, wann die Lösung $u(t, x)$ einer Gleichung mit konstanten Koeffizienten sich zeitlich stabilisiert, d.h. für $t \to \infty$ einen Grenzwert $v(x)$ anstrebt.

Fazit. In diesem Buch haben die Autoren Ergebnisse aus mehr als 40-jähriger Forschungstätigkeit zusammengetragen. Es bietet eine Fülle von Informationen, wie man sie sonst nicht findet. Der Stil ist manchmal etwas trocken, und die Notation könnte besser dokumentiert sein. Dennoch ist dieses Werk mit seinen vielen Beispielen und präzisen Abschätzungen für jeden, der an parabolischen Gleichungen auch abseits der ausgetretenen Pfade interessiert ist, ein wertvoller Begleiter.

Hannover E. Schrohe

Springer

springer.de

Aktuelles der Mathematik

Das Kontinuum diskret berechnen

M. Beck, San Francisco State University, CA, USA; **S. Robins**, Temple University, PA, USA

Die Autoren haben mit dem Buch einen roten Faden geknüpft, der Verbindungen im Gebiet des „Zählens von Gitterpunkten in Polytopen", auch Ehrhart-Theorie genannt, aufzeigt und so die grundlegenden und dennoch tiefgehenden Ideen aus diskreter Geometrie, Kombinatorik und Zahlentheorie anschaulich verbindet. Die vielen fesselnden Bilder tragen zu dem einladenden Stil dieses einzigartigen Buches bei.

2008. XX, 242 S. 32 Abb. (Springer-Lehrbuch) Brosch.
ISBN 978-3-540-79595-7
► **€ (D) 29,95 | € (A) 30,79 | *sFr 46,50**

2. AUFLAGE

Reelle Zahlen

Das klassische Kontinuum und die natürlichen Folgen

O. Deiser, Freie Universität Berlin

Das Buch untersucht die reellen Zahlen unter verschiedenen grundlagentheoretischen Gesichtspunkten. Ziel ist, die Komplexität dieser einzigartigen mathematischen Grundstruktur sichtbar zu machen.

2., korr. u. erw. Aufl. 2008. VI, 553 S. (Springer-Lehrbuch) Brosch.
ISBN 978-3-540-79375-5
► **€ (D) 29,95 | € (A) 30,79 | *sFr 46,50**

2. AUFLAGE

Endliche Körper

Verstehen, Rechnen, Anwenden

H. Kurzweil, Friedrich-Alexander-Universität, Erlangen

In jedem Handy, CD-Player und Computer steckt ein Chip, der lineare Gleichungssysteme über einen endlichen Körper blitzschnell löst, um fehlerbehaftetes Datenmaterial zu korrigieren. Dieses Buch erklärt das mathematische Innenleben dieses Bausteins.

2., überarb. Aufl. 2008. XIV, 178 S. 4 Abb. (Springer-Lehrbuch) Brosch.
ISBN 978-3-540-79597-1
► **€ (D) 19,95 | € (A) 20,50 | *sFr 31,00**

Bei Fragen oder Bestellung wenden Sie sich bitte an ► Springer Distribution Center GmbH, Haberstr. 7, 69126 Heidelberg ► **Telefon:** +49 (0) 6221-345-4301 ► **Fax:** +49 (0) 6221-345-4229 ► **Email:** SDC-bookorder@springer.com ► € (D) sind gebundene Ladenpreise in Deutschland und enthalten 7% MwSt; € (A) sind gebundene Ladenpreise in Österreich und enthalten 10% MwSt. ► Preisänderungen und Irrtümer vorbehalten. ► Springer-Verlag GmbH, Handelsregistersitz: Berlin-Charlottenburg, HR B 91022. Geschäftsführer: Haank, Mos, Gebauer, Hendriks

013916x

ISSN 0012-0456