

Jahresbericht

der Deutschen Mathematiker-Vereinigung

4 – 2003

Herausgegeben von A. Krieg
unter Mitwirkung von
U. Gather, E. Heintze, B. Kawohl,
H. Lange, H. Triebel



Jahresbericht

der Deutschen Mathematiker-Vereinigung

Der „Jahresbericht“ ist das offizielle Veröffentlichungsorgan der Deutschen Mathematiker-Vereinigung, für dessen inhaltliche Gestaltung im Auftrag des Präsidiums der jeweilige Herausgeber zuständig ist. Im „Jahresbericht“ sollen vornehmlich Überblicksartikel über Teilgebiete der reinen und angewandten Mathematik, Nachrufe sowie historische Artikel und Buchbesprechungen veröffentlicht werden.

Manuskripte:

Alle für die Schriftleitung des Jahresberichts bestimmten Briefe und Manuskripte sind an Prof. Dr. A. Krieg zu richten. Für Buchbesprechungen ist Prof. Dr. H. Lange zuständig. Bücher, von denen eine Besprechung erfolgen soll, werden bei den Verlagen angefordert. Autoren von Buchbesprechungen und Artikeln werden gebeten, die vorhandenen LATEX-style-files für den Jahresbericht zu verwenden. Somit kann der Aufwand für die Satzarbeiten erheblich reduziert werden. Sollten Illustrationen in die Arbeiten integriert werden, können diese auch in das Satzsystem übernommen werden. Dazu ist es erforderlich, dass die Daten der Abbildungen nochmals in separaten Dateien einzeln abgespeichert werden. Die LATEX-style-files sind neben weiteren Informationen im Internet verfügbar unter

<http://www.mathA.rwth-aachen.de/dmv/index.html>

Auf Anfrage können die style-files auch auf Diskette zugeschickt werden.

Grundsätzlich sollen nur solche Manuskripte eingereicht werden, die nicht gleichzeitig an anderer Stelle zur Veröffentlichung eingereicht oder bereits veröffentlicht worden sind. Mit der Annahme zur Veröffentlichung erwirbt der Verlag das Recht zur Vervielfältigung und Verbreitung sowie das Recht der Übersetzung in andere Sprachen.

Verlag:

B. G. Teubner Verlag/GWV Fachverlage GmbH
Abraham-Lincoln-Straße 46
65189 Wiesbaden
<http://www.teubner.de>
<http://www.gwv-fachverlage.de>

Geschäftsführer: Dr. Hans-Dieter Haenel
Verlagsleitung: Dr. Heinz Weinheimer
Gesamtleitung Anzeigen: Thomas Werner
Gesamtleitung Produktion: Reinhard van den Hövel
Gesamtleitung Vertrieb: Gabriel Göttlinger

Abo-/Leserservice:

Tatjana Hellwig
Telefon: (06 11) 78 78-1 51
Fax: (06 11) 78 78-4 23
E-Mail: tatjana.hellwig@gwv-fachverlage.de

Marketing/Sonderdrucke:

Stefanie Hoffmann
Telefon: (06 11) 78 78-3 79
Fax: (06 11) 78 78-4 39
E-Mail: stefanie.hoffmann@gwv-fachverlage.de

Abonnentenverwaltung:

(Änderungen von Adressen und Bankverbindung, Rückfragen zu Rechnungen oder Mahnung)
VVA-Zeitschriftenservice, Abt. D6F6 / Jahresbericht der Deutschen Mathematiker-Vereinigung,
Postfach 7777, 33310 Gütersloh
Ursula Müller
Telefon: (0 52 41) 80-19 65
Fax: (0 52 41) 80-96 20
E-Mail: ursula.mueller@bertelsmann.de

Bezugsbedingungen:

Die Zeitschrift erscheint 4mal jährlich zum Jahresabonnementpreis von € 98,- (176,- sFr) inkl. Versandkosten. Der Bezug von Einzelheften ist nicht möglich. Schriftliche Kündigung des Abonnements spätestens sechs Wochen vor Ablauf des Bezugsjahres.

Für persönliche Mitglieder der DMV, die den Jahresbericht zu beziehen wünschen, ist der zwischen DMV und Verlag vereinbarte Bezugspreis maßgebend, der im Rahmen des Mitgliedsbeitrags erhoben wird.

Copyright ©

B. G. Teubner Verlag/GWV Fachverlage GmbH, Wiesbaden 2003. Printed in Germany. Der Verlag B. G. Teubner ist ein Unternehmen von Springer Science+Business Media. Alle Rechte vorbehalten. Kein Teil dieser Zeitschrift darf ohne schriftliche Genehmigung des Verlages vervielfältigt oder verbreitet werden. Unter dieses Verbot fällt insbesondere die gewerbliche Vervielfältigung per Kopie, die Aufnahme in elektronischen Datenbanken und die Vervielfältigung auf CD-ROM und allen anderen elektronischen Datenträgern.

Satz: Fotosatz Behrens, D-68723 Oftersheim
Druck: Thomas Müntzer, Bad Langensalza

ISSN 0012-0456

Übersichtsartikel	Historischer Artikel	Buchbesprechungen
-------------------	----------------------	-------------------

Didaktik der Mathematik als Wissenschaft

L. Hefendehl-Hebeker		3
--------------------------------	--	---

Die Weierstraßschen „analytischen Gebilde“: Alternativen zu Riemanns „Flächen“ und Vorboten der komplexen Räume

P. Ullrich		30
----------------------	--	----

From 1970 until present: The Keller-Segel model in chemotaxis and its consequences I

D. Horstmann		103
------------------------	--	-----

Die Sporadischen Gruppen

G. Hiss		169
-------------------	--	-----

Entropie und Dissipation – Zur Numerik nichtlinearer Transportprozesse

T. Sonar		195
--------------------	--	-----

Übersichtsartikel	Historischer Artikel	Buchbesprechungen
-------------------	----------------------	-------------------

Heinz Bauer – Wissenschaftlicher Weg und Werk

H. Heyer		63
--------------------	--	----

Alexander Peyerimhoff 1926–1996

W. Kratz, U. Stadtmüller		79
------------------------------------	--	----

Hans Rohrbach zum Gedächtnis 27.02.1903–19.12.1993

W. Schwarz, B. Volkmann		89
-----------------------------------	--	----

Übersichtsartikel	Historischer Artikel	Buchbesprechungen
-------------------	----------------------	-------------------

H. Sohr: The Navier-Stokes Equations

R. Farwig		1
---------------------	--	---

L. Barreira, Ya. Pesin: Lyapunov Exponents and Smooth Ergodic Theory

J. Schmeling		3
------------------------	--	---

V. V. Chepyzhov, M. I. Vishik: Attractors for Equations of Mathematical Physics

G. Schneider		4
------------------------	--	---

A. Borel: Essays in the History of Lie Groups and Algebraic Groups

J. Schwermer		5
------------------------	--	---

M. Epple: Die Entstehung der Knotentheorie

M. Kreck		6
--------------------	--	---

J. F. Davis, P. Kirk: Lecture Notes in Algebraic Topology

T. tom Dieck		8
------------------------	--	---

H. Bass, A. Lubotzky: Tree lattices

K. Strambach		9
------------------------	--	---

R. Kiehl, R. Weissauer: Weil Conjectures, Perverse Sheaves and l -adic Fourier Transform

A. Huber		11
--------------------	--	----

T. de Jong, G. Pfister: Local Analytic Geometry, Basic Theory and Applications

H. Kurke		12
--------------------	--	----

H. Pottmann, J. Wallner: Computational Line Geometry	
W. Barth	14
H. Triebel: The Structure of Functions	
M. Hieber	15
J. Duoandikoetxea: Fourier Analysis	
W. Trebels	17
R. Iorio, V. Iorio: Fourier Analysis and Partial Differential Equations	
F. Duzaar	19
W. F. Pfeffer: Derivation and Integration	
N. Jacob	20
M. Yor: Exponential functionals of Brownian motion and related processes	
M. Schröder	21
W. Hazod, E. Siebert: Stable Probability Measures on Euclidean Spaces and on Locally Compact Groups	
L. Saloff-Coste	24
N. Madras: Lectures on Monte Carlo Methods	
A. Klenke	26
K.-H. Hoffmann, Q. Tang: Ginzburg-Landau Phase Transition Theory and Superconductivity	
Ch. M. Elliott	27
L. Sigler: Fibonacci's Liber Abaci	
H. Lüneburg	29
M. Folkerts: Carl Friedrich Gauß' Aktivitäten an der Universität Göttingen	
C. J. Scriba	30
M. Kneser: Quadratische Formen	
A. Pfister	32
R. A. Wilson: Graphs, Colourings and the Four-colour Theorem	
M. Aigner	34
H. J. Prömel, A. Steger: The Steiner Tree Problem	
R. Diestel	35
E. Levin, D. S. Lubinsky: Orthogonal Polynomials for Exponential Weights	
G. Schmeißer	37
F. Colonius, W. Kliemann: The Dynamics of Control	
B. Aulbach	39
E. Cohen, R. F. Riesenfeld, G. Elber: Geometric Modeling with Splines: An Introduction	
H. Strauß	42
J. Franke, W. Härdle, C. Hafner: Einführung in die Statistik der Finanzmärkte	
M. Schweizer	44
E. B. Dynkin: Diffusions, Superdiffusions, and Partial Differential Equations	
A. Schied	45

Vorwort 167

Übersichtsartikel	Historischer Artikel	Buchbesprechungen
-------------------	----------------------	-------------------

Die Sporadischen Gruppen

G. Hiss 169

Entropie und Dissipation – Zur Numerik nichtlinearer Transportprozesse

T. Sonar 195

Übersichtsartikel	Historischer Artikel	Buchbesprechungen
-------------------	----------------------	-------------------

L. Sigler: Fibonacci's Liber Abaci

H. Lüneburg 29

M. Folkerts: Carl Friedrich Gauß' Aktivitäten an der Universität Göttingen

C. J. Scriba 30

M. Kneser: Quadratische Formen

A. Pfister 32

R. A. Wilson: Graphs, Colourings and the Four-colour Theorem

M. Aigner 34

H. J. Prömel, A. Steger: The Steiner Tree Problem

R. Diestel 35

E. Levin, D. S. Lubinsky: Orthogonal Polynomials for Exponential Weights

G. Schmeißer 37

F. Colonius, W. Kliemann: The Dynamics of Control

B. Aulbach 39

E. Cohen, R. F. Riesenfeld, G. Elber: Geometric Modeling with Splines: An Introduction

H. Strauß 42

J. Franke, W. Härdle, C. Hafner: Einführung in die Statistik der Finanzmärkte

M. Schweizer 44

E. B. Dynkin: Diffusions, Superdiffusions, and Partial Differential Equations

A. Schied 45

In den nächsten Heften erscheinende Arbeiten

J. Eschenburg: Pluriharmonic maps, twisted loops and twistors

D. Horstmann: From 1970 until present: The Keller-Segel model in chemotaxis and its consequences II

J. Matoušek, G. M. Ziegler: Topological lower bounds for the chromatic number: A hierarchy

K. Mohnke: Holomorphe Kurven, Hamiltonsche Dynamik und Symplektische Topologie

I. Pigeot, K. Bammann, A. Reineke, N. Wawro, A. Zierer: Statistical methods in genetics: From microarrays to genetic epidemiology – an overview

M. Váth: Einige topologische Methoden in der nichtlinearen Analysis

Anschriften der Herausgeber

Prof. Dr. Aloys Krieg, Lehrstuhl A für Mathematik, RWTH Aachen, 52056 Aachen
E-Mail: krieg@mathA.rwth-aachen.de

Prof. Dr. Ursula Gather, Lehrstuhl für Mathematische Statistik und industrielle Anwendungen, Universität Dortmund, 44221 Dortmund
E-Mail: gather@statistik.uni-dortmund.de

Prof. Dr. Ernst Heintze, Institut für Mathematik, Universität Augsburg, 86135 Augsburg
E-Mail: heintze@math.uni-augsburg.de

Prof. Dr. Bernhard Kawohl, Mathematisches Institut, Universität zu Köln, 50923 Köln
E-Mail: kawohl@mi.uni-koeln.de

Prof. Dr. Herbert Lange, Mathematisches Institut, Friedrich-Alexander-Universität Erlangen-Nürnberg, Bismarckstraße 1 $\frac{1}{2}$, 91054 Erlangen
E-Mail: lange@mi.uni-erlangen.de

Prof. Dr. Hans Triebel, Mathematisches Institut, Friedrich-Schiller-Universität, Ernst-Abbe-Platz 1–4, 07740 Jena
E-Mail: triebel@minet.uni-jena.de

Bezugshinweis

Früher erschienene Bände (ab Band 68) des „Jahresberichts der Deutschen Mathematiker-Vereinigung“ können durch den Buchhandel oder den Verlag bezogen werden.

Nachdruck der Bände 41 bis 67 liefert: Swets & Zeitlinger, Heereweg 347b, POB 810, NL-2160 SZ Lisse/Holland

Vorwort

Die Konzeption des Jahresberichts sieht vor, auch Ausarbeitungen von Vorträgen zu publizieren, die sich an eine breite Öffentlichkeit wenden. In diesem Heft finden Sie dazu zwei Beispiele aus unterschiedlichen Gebieten der Mathematik.

Herr Hiss hat anlässlich der Ehrenpromotion von B. Fischer im Juli 2002 in Gießen einen Vortrag über die sporadischen Gruppen gehalten. In seiner Ausarbeitung beschreibt er sowohl deren Entwicklungsgeschichte als auch die Klassifikation und präsentiert damit eine Kombination aus Übersichtsartikel und historischem Beitrag.

Herr Sonar hat im Mai 2003 in Göttingen die Gauß-Vorlesung über Entropie und Dissipation gehalten. In seiner Ausarbeitung wird das leitende Prinzip bei der Konstruktion numerischer Methoden zur Diskretisierung nichtlinearer Transportprozesse herausgestellt.

A. Krieg



Die sporadischen Gruppen

Ausarbeitung eines anlässlich der Ehrenpromotion von Professor Bernd Fischer am 5. Juli 2002 in Gießen gehaltenen Vortrags

Gerhard Hiss

Abstract

- Mathematics Subject Classification: 01-02, 20D 08, 20-02, 20-03
- Keywords and Phrases: Sporadic groups, Fischer groups, Monster, finite simple groups

On July 5, 2002, Professor Bernd Fischer was awarded an Honorary Doctorate Degree by the University of Gießen. This article is an extended version of the talk I gave on this occasion. It surveys the discovery and construction of some of the sporadic simple groups, namely the Mathieu groups, the Higman-Sims group, the Conway groups, the Fischer groups, the Monster and the Babymonster. The “Monstrous Moonshine” conjecture of Thompson, Conway and Norton, and its solution by Borcherds is also sketched.

Eingegangen: 26.06.2003

Gerhard Hiss, Lehrstuhl D für Mathematik, RWTH Aachen,
52056 Aachen, gerhard.hiss@math.rwth-aachen.de

DMV
JAHRESBERICHT
DER DMV
© B. G. Teubner 2003

1 Einleitung

Eine Gruppe G heißt *einfach*, wenn sie nicht-trivial ist (d. h. mindestens zwei Elemente besitzt) und jeder surjektive Gruppenhomomorphismus von G auf eine nicht-triviale Gruppe bereits ein Isomorphismus ist. Die endlichen einfachen Gruppen sind die elementaren Bausteine, aus denen alle endlichen Gruppen zusammengesetzt sind. Eine gemeinsame, sich über mehrere Jahrzehnte erstreckende Anstrengung vieler Dutzend Mathematiker führte schließlich zur Klassifikation der endlichen einfachen Gruppen, eine der bedeutendsten Errungenschaften der Mathematik des 20. Jahrhunderts.

Gemäß dieser Klassifikation ist jede endliche einfache Gruppe entweder zyklisch von Primzahlordnung, eine alternierende Gruppe, eine endliche Gruppe vom Lie-Typ, oder eine von 26 sporadischen Gruppen. Die alternierende Gruppe A_n ist die Gruppe der geraden Permutationen von n Ziffern. Sie ist einfach für $n \geq 5$. Die endlichen Gruppen vom Lie-Typ sind die endlichen Analoga der Lie-Gruppen über den reellen oder komplexen Zahlen. In Tabelle 1 sind die 16 Serien der endlichen einfachen Gruppen vom Lie-Typ zusammengestellt. Der Parameter q bezeichnet darin jeweils eine Primzahlpotenz, die Parameter n und m natürliche Zahlen.

In dieser Arbeit stehen die sporadischen Gruppen im Mittelpunkt. Deren Faszination ergibt sich aus ihren mannigfaltigen Querverbindungen zu anderen Gebieten der Mathematik, wie etwa der Kombinatorik, der Codierungstheorie, der Geometrie, der Zahlentheorie, der Funktionentheorie oder der String-Theorie. Im Zentrum aller dieser Verbindungen steht das Monster, die größte der sporadischen Gruppen und die wohl faszinierendste Entdeckung von Professor Fischer.

Die sporadischen Gruppen wurden im Zeitraum von 1861–1981 entdeckt. Zwischen der „Entdeckung“ einer sporadischen Gruppe, d. h. ihrer Beschreibung durch Eigenschaften meist gruppentheoretischer Natur, bis zu ihrer „Konstruktion“, die meist gleichbedeutend mit dem Beweis ihrer Existenz war, klaffte oft eine große zeitliche Lücke. Dazwischen wurden weitere Eigenschaften einer hypothetischen Gruppe bestimmt, wie etwa ihre Ordnung, ihre maximalen Untergruppen und ihre Charaktertafel. Diese Eigenschaften gingen oft wesentlich in den Existenzbeweis mit ein.

Eine Liste der sporadischen Gruppen mit Daten zu ihrer Entdeckung und Konstruktion findet sich in Tabelle 2. Eine kurze Einführung in die Geschichte dieser Gruppen gibt Aschbacher in seiner Monographie [1, § 15]. Mehr Einzelheiten finden sich in Gorensteins Buch [15, Abschnitte 2.2–2.10].

Die Bezeichnung „sporadisch“ für diejenigen einfachen Gruppen, die sich in keine bekannte unendliche Serie von Gruppen einfügen, geht vermutlich auf eine Bemerkung in Burnside's Buch [4] zurück. In Note N, S. 504, schreibt Burnside in Bezug auf die Mathieu-Gruppen:

„These apparently sporadic simple groups would probably repay a closer examination than they have yet received.“

Diese Bezeichnung wurde später von Conway aufgegriffen, und taucht wohl zum ersten Mal im Titel von [6] wieder auf.

Bis heute fehlt ein einheitlicher Zugang zur Beschreibung und Konstruktion aller sporadischer Gruppen, und es ist fraglich, ob ein solcher Zugang überhaupt möglich ist.

Augenscheinlich wird dieses Problem in den beiden Monographien [1, 21], die jeweils nur einen Teil der sporadischen Gruppen mit ihrem systematischen Ansatz erfassen.

Tabelle 1. Die endlichen Gruppen vom Lie-Typ

Bezeichnung	Parameter	Name (vereinfacht)
$PSL_n(q)$	$n \geq 2, (n, q) \neq (2, 2), (2, 3)$	lineare Gruppen
$PSU_n(q)$	$n \geq 3, (n, q) \neq (3, 2)$	unitäre Gruppen
$PSP_{2m}(q)$	$m \geq 2, (m, q) \neq (2, 2)$	symplektische Gruppen
$\Omega_{2m+1}(q)$	$m \geq 3, q$ ungerade	orthogonale Gruppen
$P\Omega_{2m}^+(q)$	$m \geq 4$	"
$P\Omega_{2m}^-(q)$	$m \geq 4$	"
$G_2(q)$	$q \geq 3$	
$F_4(q)$		
$E_6(q)$		
$E_7(q)$		
$E_8(q)$		
${}^2E_6(q)$		
${}^3D_4(q)$		Steinberg-Trialitäts-Gruppen
${}^2B_2(q)$	$q = 2^{2m+1}, m \geq 1$	Suzuki-Gruppen
${}^2G_2(q)$	$q = 3^{2m+1}, m \geq 1$	Ree-Gruppen
${}^2F_4(q)$	$q = 2^{2m+1}, m \geq 1$	Ree-Gruppen
${}^2F_4(2)'$		Tits-Gruppe

Bei großzügiger Auslegung lässt sich allerdings jede sporadische Gruppe durch eines von zwei grundlegenden Prinzipien beschreiben. Das erste davon ist geometrischer Art: Die Gruppen treten als Symmetriegruppen von Designs, Graphen, Codes oder Gittern auf. So sind etwa die zuerst entdeckten sporadischen Gruppen, die Mathieu-Gruppen, Symmetriegruppen von Golay-Codes. Auch die Beschreibung der klassischen Gruppen als lineare Gruppen die eine Form, z. B. ein Skalarprodukt, invariant lassen, lässt sich diesem Prinzip zuordnen. Dieser geometrisch anschauliche Zugang soll in der vorliegenden Arbeit im Vordergrund stehen. Das zweite Prinzip ist gruppentheoretischer Art: Die Gruppen werden beschrieben mittels des Zentralisators einer Involution. Ausgangspunkt ist ein Satz von Brauer und Fowler, der besagt, dass es bis auf Isomorphie nur endlich viele einfache Gruppen gibt, die eine Involution mit einem vorgegebenen Zentralisator haben. Die erste sporadische Gruppe, die nach den Mathieu-Gruppen gefunden wurde, die Janko-Gruppe J_1 , wurde auf diese Weise entdeckt. Der gruppentheoretische Zugang ist natürlich nicht weniger bedeutend als der geometrische, er ist jedoch wesentlich technischer und wird deshalb hier nur am Rande eine Rolle spielen.

2 Die Mathieu-Gruppen

Die fünf Mathieu-Gruppen wurden von Émile Mathieu in den 60er Jahren des 19. Jahrhunderts bei der systematischen Suche nach mehrfach transitiven Permutationsgruppen entdeckt.

Mit einer Permutationsgruppe ist hier eine Untergruppe der vollen symmetrischen Gruppe S_Ω auf der endlichen Menge Ω gemeint. Eine solche Permutationsgruppe $G \leq S_\Omega$ ist *transitiv* auf Ω , wenn je zwei Punkte von Ω durch ein Element von G aufein-

ander abgebildet werden. Mit anderen Worten: Ω bildet eine einzige Bahn unter der Operation von G . Wird jedes Paar verschiedener Punkte von Ω auf jedes andere solche Paar abgebildet, dann operiert G *zweifach transitiv*. Eine Gruppe $G \leq S_\Omega$ ist genau dann zweifach transitiv auf Ω , wenn sie transitiv ist und der Stabilisator G_ω eines beliebigen Punktes $\omega \in \Omega$ transitiv auf $\Omega \setminus \{\omega\}$ ist. (Der Stabilisator G_ω besteht aus denjenigen Elementen von G , die ω festlassen.) Analog ist die dreifache Transitivität oder allgemeiner die m -fache Transitivität für eine natürliche Zahl m definiert. Ist $|\Omega| = n \geq 3$, dann ist S_Ω $(n - 1)$ -fach transitiv, und die alternierende Gruppe A_Ω der geraden Permutationen noch $(n - 2)$ -fach.

Tabelle 2. Die Entdeckung der sporadischen Gruppen

Gruppe	Entdeckung	Konstruktion
M_{11}		Mathieu 1861 [42]
M_{12}		"
M_{22}		"
M_{23}		"
M_{24}		"
J_1		Janko '65 [31, 32]
J_2	Janko '68 [33]	Hall, Wales '68 [22, 23]
J_3	Janko '68 [33]	G. Higman, McKay '69 [26, 27]
J_4	Janko '76 [34]	Cambridge '80 [2]
HS		D. G. Higman, Sims '67 [28]
McL		McLaughlin '69 [44]
Suz		Suzuki '69
Ru	Rudvalis '72 [47]	Conway, Wales '73 [11]
He	Held '69 [24, 25]	G. Higman, McKay '69 [27]
Ly	Lyons '72 [40, 41]	Sims '73 [48]
ON	O'Nan '76 [46]	Sims '73
Co_1		Conway '69 [6, 7]
Co_2		"
Co_3		"
Fi_{22}		Fischer '71 [12]
Fi_{23}		"
Fi_{24}		"
HN	Thompson '73	Norton '76
Th	Thompson '73	P. Smith '76
B	Fischer '73	Leon, Sims '77 [37]
M	Fischer, Griess '73	Griess '81 [19, 20]

2.1 Mathieus Zugang

Die Konstruktionen von Mathieu beruhen auf dem Prinzip der transitiven Erweiterung. Gegeben sei die transitive Permutationsgruppe H auf der endlichen Menge Ω . Eine *transitive Erweiterung* von H ist eine transitive Permutationsgruppe G auf der Menge $\Omega_1 = \Omega \cup \{\alpha\}$, wobei $\alpha \notin \Omega$, so dass H gleich dem Stabilisator G_α ist. In diesem Fall ist G automatisch $(m + 1)$ -fach transitiv auf Ω_1 , wenn H schon m -fach transitiv auf Ω war.

Ausgehend von einer transitiven Permutationsgruppe auf 8 Punkten konstruiert Mathieu auf diese Weise in [42, S. 270–274] eine 5-fach transitive Permutationsgruppe auf 12 Punkten, eben die Mathieu-Gruppe M_{12} . In der gleichen Arbeit kündigt Mathieu auch die Konstruktion einer 5-fach transitiven Permutationsgruppe auf 24 Punkten an, die heute mit M_{24} bezeichnet wird. Die Konstruktion wird in [43] ausgeführt.

Die beiden Gruppen M_{11} und M_{23} sind jeweils 4-fach transitiv auf 11 bzw. 23 Punkten. Die Mathieu-Gruppe M_{22} ist noch 3-fach transitiv auf 22 Punkten. Die hier genannten Gruppen ergeben sich aus M_{12} bzw. M_{24} durch Übergang zu Stablisatoren: $M_{23} = (M_{24})_{24}$, $M_{11} = (M_{12})_{12}$ und $M_{22} = (M_{23})_{22}$.

Die kleinste der Mathieu-Gruppen, M_{11} , ist auch zugleich die kleinste der sporadischen Gruppen. Es ist $|M_{11}| = 7920$.

Wie man heute weiß, war Mathieu mit seiner Suche sehr erfolgreich. Er hat nämlich alle 4- und 5-fach transitiven Permutationsgruppen gefunden, die von den symmetrischen und alternierenden Gruppen auf der jeweiligen Menge verschieden sind. Der folgende Satz ergibt sich aus der Klassifikation der endlichen einfachen Gruppen (siehe [5, Theorem 4.11]).

Satz: *Es sei Ω eine endliche Menge mit $|\Omega| \geq 6$ und $G \leq S_\Omega$ sei m -fach transitiv für ein $m \geq 4$. Dann tritt einer der folgenden Fälle ein:*

- (1) *Es ist $G = S_\Omega$ oder A_Ω .*
- (2) *Es ist $m = 4$ und $G = M_{11}$ oder M_{23} .*
- (3) *Es ist $m = 5$ und $G = M_{12}$ oder M_{24} .*

2.2 Witts Zugang

In [58] stellt Ernst Witt zwei der Mathieu-Gruppen mit den folgenden Worten vor (Hervorhebungen im Original):

„Die Gruppe M_{24} tritt in natürlicher Weise bei folgender Aufgabe auf:

Aus 24 Personen sollen $\frac{24 \cdot 23 \cdot 22 \cdot 21 \cdot 20}{8 \cdot 7 \cdot 6 \cdot 5 \cdot 4}$ Vereine gebildet werden. Jeder Verein soll aus acht Mitgliedern bestehen. Fünf beliebige Personen sollen jeweils einem einzigen Verein angehören.

[. . .]

Die Gruppe M_{24} besteht genau aus denjenigen Personenvertauschungen des Systems $\mathfrak{S}(5, 8, 24)$, bei welchem Vereine in Vereine übergehen.

Entsprechend tritt M_{12} als Automorphismengruppe des einzigen Systems $\mathfrak{S}(5, 6, 12)$ auf.“

Ein Steinersystem $\mathfrak{S}(l, m, n)$ ist ein System von m -elementigen Teilmengen (den *Vereinen*) einer n -elementigen Menge N (den *Personen*) mit der Eigenschaft, dass je l Elemente von N in genau einer Menge des Systems $\mathfrak{S}(l, m, n)$ enthalten sind (jeweils l Personen gehören genau einem Verein an). Die Automorphismengruppe oder Symmetriegruppe eines Steinersystems $\mathfrak{S}(l, m, n)$ besteht aus denjenigen Permutationen von N (den Personenvertauschungen), die $\mathfrak{S}(l, m, n)$ erhalten (die also einen Verein wieder auf einen Verein abbilden).

ist offensichtlich eine Bahn unter G , so dass der Rang von G auf Ω mindestens 2 ist. Genau dann ist G zweifach-transitiv auf Ω , wenn G den Rang 2 hat. In diesem Sinne bilden Rang-3-Gruppen eine Verallgemeinerung von mehrfach transitiven Gruppen.

Eine von der Diagonalen verschiedene Bahn von G auf $\Omega \times \Omega$ kann als gerichteter Graph mit Knotenmenge Ω interpretiert werden, auf dem G knoten- und kantentransitiv operiert. Diese Graphen heißen auch *Orbitalgraphen*. Im Falle einer zweifach transitiven Operation erhalten wir den vollständigen Graphen, im Falle einer Rang-3-Operation erhalten wir zwei komplementäre Graphen.

In Tabelle 3 sind diejenigen sporadischen Gruppen zusammengestellt, die eine Rang-3-Operation besitzen.

Tabelle 3. Die Rang-3-Gruppen unter den sporadischen Gruppen

Gruppe	Grad	Gruppe	Grad
J_2	100	Ru	4 060
HS	100	Fi_{22}	3 510
McL	275	Fi_{23}	31 671
Suz	1 782	Fi_{24}	306 936

2.4 Die Higman-Sims-Gruppe

Diese Gruppe wurde in der Nacht vom Samstag, den 2., auf Sonntag, den 3. September 1967 entdeckt. Ihre Konstruktion wurde vollständig „von Hand“ ausgeführt und benutzt die oben diskutierten Prinzipien der transitiven Erweiterung und der Rang-3-Gruppen. Die Existenz wurde durch die explizite Angabe eines der beiden Orbital-Graphen in der hypothetischen Rang-3-Permutationsdarstellung der Gruppe bewiesen.

Der Graph \mathcal{G}_{HS} , der Anlass zur Higman-Sims-Gruppe gibt, kann wie folgt beschrieben werden. Die 100 Knoten von \mathcal{G}_{HS} bestehen aus einem Symbol $*$, aus den 22 Zahlen $1, 2, \dots, 22$, sowie aus den 77 Vereinen B_1, \dots, B_{77} eines Steinersystems $\mathfrak{S}(3, 6, 22)$, das sich leicht aus einem $\mathfrak{S}(5, 8, 24)$ durch zweimaliges „Punktieren“ gewinnen lässt.

In \mathcal{G}_{HS} ist $*$ zu jedem der 22 Knoten aus $\{1, 2, \dots, 22\}$ verbunden, aber zu keinem der Knoten B_1, \dots, B_{77} . Ein Knoten $i \in \{1, \dots, 22\}$ ist genau dann zu einem B_j verbunden, wenn i in B_j liegt. Zwei Knoten B_j und B_k sind genau dann verbunden, wenn sie disjunkt sind. Higman und Sims haben in jener denkwürdigen Nacht gezeigt, dass die Automorphismengruppe G von \mathcal{G}_{HS} transitiv ist. Es ist klar, dass der Stabilisator von $*$ in G isomorph zu $M_{22}.2$ ist, der Automorphismengruppe von $\mathfrak{S}(3, 6, 22)$. Später ist es Higman und Sims gelungen zu zeigen, dass die Ordnung von G gleich $44\,352\,000 \times 2$ ist, und dass die Kommutatorgruppe von G eine einfache Gruppe ist, die zur damaligen Zeit noch nicht bekannt war.

In einer Email an den Autor [50] erinnert sich Charles Sims an die Ereignisse jener Nacht wie folgt.

“[. . .]

Don Higman and I were in Oxford for a conference entitled “Computational Problems in Abstract Algebra”, which was held from August 29 to September 2, 1967. [. . .]

Prior to this conference, Don had been investigating rank 3 groups. He had discovered a number of conditions that the parameters of such a group have to satisfy and had used a computer to generate a list of parameters that satisfied all of his conditions. I was familiar with Don’s work. [. . .]

At the Oxford conference, Marshall Hall announced the construction of Janko’s second group. There is a long paper by Marshall in the conference proceedings that includes, among other things, a description of how this group was constructed. The group was given as a rank 3 group of degree 100 with subdegrees 1, 36, and 63.

After Marshall’s talk, Don and I discussed whether there might be other rank 3 groups of degree 100. If it were not the case that we use the decimal system and that $100 = 10^2$, I am not sure we would have asked this question.

Don consulted his list of rank 3 parameters and found that the subdegrees 1, 18, 81 appeared on the list for degree 100. It did not take us long to realize that the wreath product of S_{10} and Z_2 has a rank 3 representation (on the Cartesian product of two copies of $\{1, \dots, 10\}$) of degree 100 with these subdegrees.

Encouraged, we looked at the list again. There was one other set of subdegrees for a possible rank 3 group of degree 100, namely 1, 22, 77. The number 22 certainly suggests that the stabilizer of a point should be M_{22} or its automorphism group. (S_{22} and A_{22} don’t have representations of degree 77.) We did not immediately see how to construct such a group and agreed to continue our discussions later.

The conference dinner was held on the last day of the conference, Saturday, September 2. This dinner was quite formal. After the main part of the meal, the participants were asked to leave the hall while the staff cleared the tables and prepared for dessert and coffee. As Don and I walked around the courtyard of the college in which the dinner was being held, we again talked about $100 = 1 + 22 + 77$. The first question to answer was whether M_{22} has a transitive representation of degree 77. Both Don and I were familiar with combinatorial designs and knew that M_{22} acts on $\mathfrak{S}(3, 6, 22)$. As we walked, we computed the number of blocks in this design. When we got the answer 77, we were sure we were on to something.

At this point, it was time to go back in for dessert. After the dinner was finished, we went to Don’s room [. . .] to continue working. There were some false starts, but eventually we realized that we needed to construct a graph of degree or valence 22 with 100 vertices consisting of a point $*$, the 22 points of an $\mathfrak{S}(3, 6, 22)$, and the 77 blocks of that $\mathfrak{S}(3, 6, 22)$. The point $*$ would be connected in the graph to the 22 points. One of the 22 points p would be connected to $*$ and to the 21 blocks containing p . A block would be connected to the 6 points in the block and to 16 other blocks. We had to do some computations, but it was not hard to show that a block is disjoint from exactly 16 other blocks. Thus in the graph, two blocks should be connected if they are disjoint.

At this point we had the graph and we knew that $\text{Aut}(M_{22})$ was the stabilizer of $*$ in the automorphism group of the graph, but we did not know that the automorphism group had any elements that moved $*$. To get additional elements, we used the fact that Witt had proved that $\mathfrak{S}(3, 6, 22)$ was unique.

I don't think we finished until the early morning hours of Sunday, September 3, 1967. There was one uncertainty. We knew we had a new simple group, but we did not know whether the stabilizer of a point in the simple group was M_{22} or $\text{Aut}(M_{22})$.
[...]"

2.5 Der Golay-Code

Eine weitere Konstruktion der Mathieu-Gruppen erhält man mit Hilfe der Golay-Codes, hier vorgestellt am Beispiel der M_{24} . Der binäre Golay-Code C_{24} ist ein $\{24, 12, 8\}$ -Code über \mathbb{F}_2 , d. h., ein linearer binärer Code der Länge 24, Dimension 12 und Minimaldistanz 8. Diese Eigenschaften bestimmen C_{24} bis auf Isomorphie (von Codes). Es gilt nun $M_{24} \cong \text{Aut}(C_{24})$. (Die Automorphismengruppe eines binären Codes ist die Gruppe der Koordinaten-Permutationen, die die Menge der Codewörter invariant lässt.)

Interpretiert man die Codewörter von C_{24} als Indikatorfunktionen auf der Menge $\{1, \dots, 24\}$, dann beschreiben die Codewörter vom Gewicht 8 ein Steinersystem $\mathfrak{S}(5, 8, 24)$.

Die nachfolgende Konstruktion des Golay-Codes ist besonders leicht zu behalten. Sie stammt von Turyn (siehe [38, S. 44ff]) und geht von der Fano-Ebene aus (vgl. Abbildung 1). Wir betrachten die Inzidenzmatrix F der Fano-Ebene (in den folgenden Matrizen sind die Nullen durch Punkte dargestellt):

$$F = \begin{bmatrix} 1 & 1 & \cdot & 1 & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & 1 & 1 & \cdot & 1 & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & 1 & 1 & \cdot & 1 & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & 1 & 1 & \cdot & 1 \\ 1 & \cdot & \cdot & \cdot & 1 & 1 & \cdot \\ \cdot & 1 & \cdot & \cdot & \cdot & 1 & 1 \\ 1 & \cdot & 1 & \cdot & \cdot & \cdot & 1 \end{bmatrix}.$$

Daraus bilden wir die Matrizen I und I^* wie folgt.

$$I = \begin{bmatrix} 1 & 1 & \cdot & 1 & \cdot & \cdot & \cdot & 1 \\ \cdot & 1 & 1 & \cdot & 1 & \cdot & \cdot & 1 \\ \cdot & \cdot & 1 & 1 & \cdot & 1 & \cdot & 1 \\ \cdot & \cdot & \cdot & 1 & 1 & \cdot & 1 & 1 \end{bmatrix} \quad I^* = \begin{bmatrix} \cdot & \cdot & \cdot & 1 & \cdot & 1 & 1 & 1 \\ \cdot & \cdot & 1 & \cdot & 1 & 1 & \cdot & 1 \\ \cdot & 1 & \cdot & 1 & 1 & \cdot & \cdot & 1 \\ 1 & \cdot & 1 & 1 & \cdot & \cdot & \cdot & 1 \end{bmatrix}$$

Die ersten sieben Spalten der Matrizen I und I^* bestehen aus den ersten vier Zeilen von F , die bei I^* von hinten nach vorne gelesen. Diese Zeilen werden jeweils um den Eintrag 1 ergänzt, um die Zeilensumme gerade zu machen. Der Golay-Code C_{24} besitzt als Basis die Zeilen der folgenden Matrix:

$$\begin{bmatrix} I & 0 & I \\ 0 & I & I \\ I^* & I^* & I^* \end{bmatrix}$$

3 Die Conway-Gruppen

Bisher haben wir einige sporadische Gruppen kennengelernt, die als Symmetriegruppen von Designs (Steinersysteme), Graphen (Higman-Sims-Graph) oder Codes (Golay-Codes) auftreten. Jetzt wollen wir Symmetriegruppen von Gittern betrachten.

3.1 Das Leech-Gitter

Vektoren aus \mathbb{R}^n kennzeichnen wir im Folgenden durch Unterstreichen. Ein Gitter L in \mathbb{R}^n besteht aus den Vektoren

$$\sum_{i=1}^n x_i \underline{v}_i, \quad x_1, \dots, x_n \in \mathbb{Z},$$

wobei $\{\underline{v}_1, \dots, \underline{v}_n\}$ eine Basis von \mathbb{R}^n ist. Die *Symmetriegruppe* von L besteht aus denjenigen orthogonalen Transformationen $\sigma \in O(n)$ mit $\sigma(L) = L$.

Als Beispiel ist das kubische Gitter in Abbildung 2 aufgezeichnet. Es ist leicht zu sehen, dass die Symmetriegruppe des kubischen Gitters isomorph zu $C_2 \times S_4$ ist, wobei C_2 eine zyklische Gruppe der Ordnung 2 bezeichnet, die hier von der Punktspiegelung am Ursprung erzeugt wird. Die symmetrische Gruppe S_4 ist die Untergruppe der Symmetriegruppe, die aus den Drehungen besteht, die das kubische Gitter invariant lassen. Dabei werden die vier Diagonalen des Einheitswürfels transitiv permutiert.

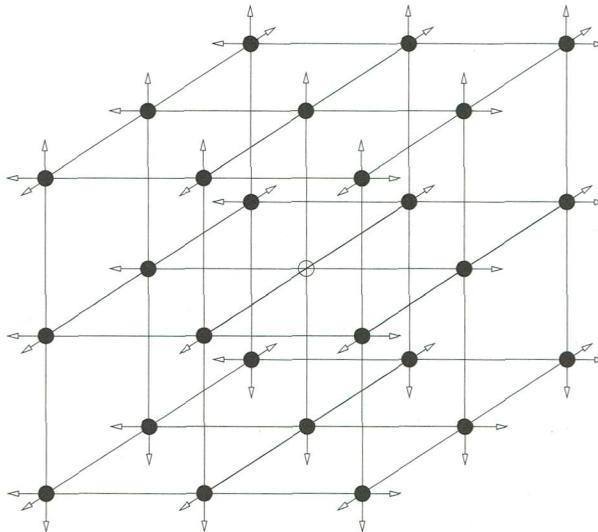


Abbildung 2. Das kubische Gitter

Im Folgenden sei $\underline{0}$ der Nullvektor in \mathbb{R}^{24} und $\underline{1} \in \mathbb{R}^{24}$ der Vektor mit sämtlichen Einträgen 1. Wie in Abschnitt 2.5 sei C_{24} der Golay-Code, hier jedoch als Teilmenge von \mathbb{R}^{24} aufgefasst. Das *Leech-Gitter* besteht aus den Vektoren

$$\frac{1}{\sqrt{8}}(\underline{0} + 2\underline{c} + 4\underline{x}), \quad \frac{1}{\sqrt{8}}(\underline{1} + 2\underline{c} + 4\underline{y}),$$

mit $\underline{c} \in C_{24}$, $\underline{x}, \underline{y} \in \mathbb{Z}^{24}$ mit $\sum x_i$ gerade und $\sum y_i$ ungerade. Diese Definition ist dem Buch von Conway und Sloane [10, Chapter 4, Section 11] entnommen. Die Symmetriegruppe des Leech-Gitters ist die berühmte Conway-Gruppe Co_0 .

Das Leech-Gitter ist in vielerlei Hinsicht bemerkenswert. Zum Beispiel liefert es die dichteste bekannte Kugelpackung in \mathbb{R}^{24} (siehe [10, Subsection 1.5]). Allerdings ist nicht bekannt, ob es auch die dichtest mögliche Kugelpackung in dieser Dimension liefert. Das Leech-Gitter kann auch charakterisiert werden als das (bis auf Isometrie) eindeutig bestimmte selbstduale, unimodulare Gitter in \mathbb{R}^{24} , das keine Vektoren der Norm 2 hat. Conway gibt einen kurzen Beweis davon in [10, Chapter 12].

Die spannende Entdeckung der Conway-Gruppen und ihrer Eigenschaften aus dem Leech-Gitter durch John Conway ist in dem sehr lesenswerten Buch von Thomas M. Thompson [53] beschrieben. Einen besonders aufschlussreichen Eindruck von der Arbeitsweise von Conway und der Rolle von John Thompson gibt [53, Chapter 3, Section 3].

Wie schon angedeutet zog die Entdeckung der Conway-Gruppe die Entdeckung weiterer, bis dahin unbekannter, sporadischer Gruppen mit sich. Als erstes ergibt sich die einfache Conway-Gruppe Co_1 als Faktorgruppe von Co_0 modulo ihrem Zentrum der Ordnung 2. Der Stabilisator in Co_0 eines nicht-trivialen kürzesten Vektors des Leech-Gitters ist die einfach sporadische Gruppe Co_2 . Der Stabilisator eines Vektor-Paares (v_1, v_2) mit $\|v_1 - v_2\|^2 = 6$ ist die Conway-Gruppe Co_3 . Erstaunlicherweise treten auch viele schon bekannte sporadische Gruppen als Untergruppen (oder Faktorgruppen von Untergruppen) in der Conway-Gruppe auf. So ist etwa der Stabilisator eines Vektor-Paares (v_1, v_2) mit $\|v_1 - v_2\|^2 = 14$ isomorph zur oben schon erwähnten Higman-Sims-Gruppe. Insgesamt sind auf diese Weise zwölf sporadische Gruppen in der Conway-Gruppe involviert. Für mehr Einzelheiten sei der Leser auf den Artikel von Conway [10, Chapter 10] und den Atlas [8, S. 180ff] verwiesen.

3.2 Theta-Reihen

Um die Ordnungen der Conway-Gruppen zu bestimmen und um Stabilisatoren gewisser Vektor-Konfigurationen mit bekannten Gruppen zu identifizieren, war es notwendig, die Anzahlen von Vektoren gegebener Norm im Leech-Gitter zu berechnen. Diesem Zweck dienen Theta-Reihen von Gittern. Sei L ein Gitter in \mathbb{R}^n . Die *Theta-Reihe* von L ist die formale Potenzreihe

$$\Theta_L(q) = \sum_{n=0}^{\infty} N_L(n) q^n$$

mit

$$N_L(n) = |\{x \in L \mid \underline{x} \cdot \underline{x} = n\}|.$$

So ist zum Beispiel die Theta-Reihe des kubischen Gitters gegeben durch

$$\sum_{n=0}^{\infty} r_3(n) q^n = 1 + 6q + 12q^2 + 8q^3 + 6q^4 + 24q^5 + 24q^6 + 8q^7 + 24q^8 \dots$$

Hier steht $r_3(n)$ für die Anzahl der Möglichkeiten, n als Summe von 3 Quadraten ganzer Zahlen zu schreiben (wobei zwei Summen mit gleichen Summanden in anderer Reihenfolge zweimal gezählt werden).

Die Theta-Reihe des Leech-Gitters ist gegeben durch

$$\sum_{n=0}^{\infty} \theta(2n) q^{2n} = 1 + 196\,560 q^4 + 16\,773\,120 q^6 + 398\,034\,000 q^8 + 4\,629\,381\,120 q^{10} + \dots$$

mit

$$\theta(2n) = \frac{65520}{691} [\sigma_{11}(n) - \tau(n)]$$

(siehe z. B. [10, Chapter 4, § 11]). Hierbei ist

$$\sigma_{11}(n) = \sum_{d|n} d^{11}$$

die 11. Teilersummenfunktion und $\tau(n)$ Ramanujans Tau-Funktion, die durch die folgende Identität definiert ist:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \tau(n) q^n = q \prod_{n=1}^{\infty} (1 - q^n)^{24}.$$

Diese Beispiele deuten bereits den engen Zusammenhang zwischen Gittern und der Zahlentheorie an, der über Theta-Reihen vermittelt wird.

3.3 Modulformen

Eine auf der oberen Halbebene \mathbf{H} und in ∞ meromorphe Funktion f heißt *Modulform* (vom Gewicht $k \in \mathbf{Z}$), wenn gilt:

$$f\left(\frac{az+b}{cz+d}\right) = (cz+d)^k f(z)$$

für alle $z \in \mathbf{H}$ und alle $\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in \mathrm{SL}_2(\mathbf{Z})$. (Im Gegensatz zu meinem Vortrag folge ich hier der Sprechweise des Buches von Koecher und Krieg [36, Kapitel 3, § 1].) Wegen $-E_2 \in \mathrm{SL}_2(\mathbf{Z})$ ist eine Modulform von ungeradem Gewicht die Nullfunktion.

Eine Modulform f erlaubt eine Fourier-Entwicklung

$$f(z) = \sum_{n=-N}^{\infty} a_n e^{2\pi i n z},$$

mit einer nicht-negativen ganzen Zahl N und *Fourier-Koeffizienten* $a_n \in \mathbf{C}$, $n \geq -N$ (siehe etwa [36, Kapitel III, § 1]).

Die Modulformen vom Gewicht 0 heißen *Modulfunktionen*. Sie bilden einen Körper $\mathbf{C}(j)$. Hierbei ist j die sogenannte *modulare Invariante* oder *elliptische Modulfunktion*; die Fourier-Reihe von j ($q = e^{2\pi i z}$) ist:

$$\begin{aligned} j(q) = & q^{-1} + 744 + \\ & 196\,884\,q + \\ & 21\,493\,760\,q^2 + \\ & 864\,299\,970\,q^3 + \\ & 20\,245\,856\,256\,q^4 + \\ & 333\,202\,640\,600\,q^5 + \dots \end{aligned}$$

Eine Modulform heißt *ganz*, wenn sie holomorph auf $\mathbf{H} \cup \{\infty\}$ ist. Ein berühmter Satz von Hecke stellt einen Zusammenhang zwischen Theta-Reihen von gewissen Gittern und ganzen Modulformen her.

Sei $L \subseteq \mathbf{R}^n$ ein Gitter, das aus den ganzzahligen Linearkombinationen der Basis $\{\underline{v}_1, \dots, \underline{v}_n\} \subseteq \mathbf{R}^n$ besteht. Dann heißt L *unimodular*, wenn $\underline{x} \cdot \underline{y}$ für alle $\underline{x}, \underline{y} \in L$ eine ganze Zahl, und die Determinante der Matrix $(\underline{v}_i \cdot \underline{v}_j)_{i,j}$ gleich 1 ist, und L heißt *gerade*, wenn $\underline{x} \cdot \underline{x}$ für alle $\underline{x} \in L$ eine gerade ganze Zahl ist. In diesem Fall ist die Theta-Reihe von L von der Form $\Theta_L(q) = \sum_{n=0}^{\infty} N_L(2n) q^{2n}$ (siehe Abschnitt 3.2).

Satz: (Hecke, siehe [36, Kapitel V, Sätze 5,6]): *Sei $L \subseteq \mathbf{R}^n$ ein gerades, unimodulares Gitter. Dann ist n durch 8 teilbar.*

Die Funktion $\Theta_L(e^{\pi i z}) = \sum_{n=0}^{\infty} N_L(2n) e^{2\pi i n z}$ ist eine ganze Modulform vom Gewicht $n/2$.

Dieses Resultat erlaubt es z. B. die Theta-Reihe des Leech-Gitters aus ihren ersten beiden Fourier-Koeffizienten zu berechnen.

4 Die Fischer-Gruppen

Diese Gruppen wurden von Bernd Fischer im Rahmen seiner Klassifikation von 3-Transpositionsgruppen gefunden.

4.1 3-Transpositionsgruppen

Im Folgenden stehe $|g|$ für die Ordnung des Elementes g einer endlichen Gruppe. Fischer nennt eine endliche Gruppe G eine *3-Transpositionsgruppe*, wenn eine

Konjugiertenklasse C von Involutionsen (das sind Elemente der Ordnung 2) in G existiert, die G erzeugt, und so dass gilt:

$$|st| \in \{1, 2, 3\} \quad \text{für alle } s, t \in C.$$

Natürlich ist, mit obiger Bezeichnung, $|st| = 1$ genau dann wenn $s = t$ ist, und für $s \neq t$ ist $|st| = 2$ genau dann, wenn $st = ts$ ist, d. h., wenn s und t vertauschen.

Als Beispiel diene die symmetrische Gruppe S_n . Ist $C \subseteq S_n$ die Konjugiertenklasse der Transposition $\{(i, j) \mid 1 \leq i \neq j \leq n\}$, dann gilt für $(i, j), (k, l) \in C$:

$$|(i, j)(k, l)| = \begin{cases} 1, & \text{falls } |\{i, j\} \cap \{k, l\}| = 2, \\ 2, & \text{falls } |\{i, j\} \cap \{k, l\}| = 0, \\ 3, & \text{falls } |\{i, j\} \cap \{k, l\}| = 1. \end{cases}$$

Da S_n von C erzeugt wird, ist also S_n eine 3-Transpositionsgruppe.

Einen Höhepunkt im Werk von Professor Fischer stellt sicherlich die Klassifikation aller 3-Transpositionsgruppen dar (siehe [12]). Hierbei treten neben bekannten Serien von Gruppen, den symmetrischen Gruppen S_n ($n \geq 2$), den symplektischen Gruppen $Sp_{2n}(2)$ ($n > 2$), den unitären und orthogonalen Gruppen über kleinen Körpern, auch drei neue sporadische Gruppen auf, von Fischer mit $M(22)$, $M(23)$ und $M(24)$ bezeichnet. In heutiger Notation sind dies die drei *Fischer-Gruppen* Fi_{22} , Fi_{23} und Fi_{24} bzw. F_3 . Die ersten beiden davon sind einfach, die letzte hat eine einfache Kommutatorgruppe Fi'_{24} vom Index 2.

4.2 Vertauschungsgraphen

Die Arbeit von Fischer ist stark geometrisch geprägt. Dies hat es ihm erlaubt, die Existenz seiner neuen Gruppen ohne Hilfe von Computern zu beweisen.

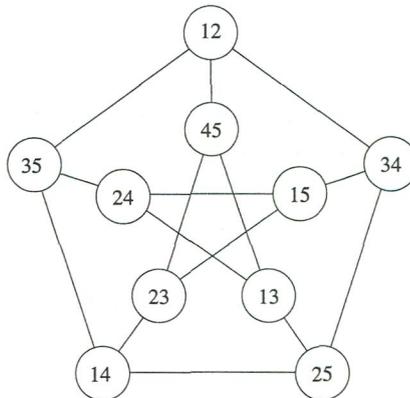


Abbildung 3. Der Fischer-Graph für S_5

Der Klasse C von 3-Transpositionen ordnet Fischer einen Graphen zu, den *Vertauschungsgraphen*. Dessen Knoten sind die Elemente von C , und zwei Knoten s und t

sind genau dann verbunden, wenn $st = ts$ ist, d. h., wenn s und t vertauschbar sind. Ein Beispiel für einen Vertauschungsgraphen ist in Abbildung 3 gegeben. Hier ist $G = S_5$ und C die Menge der Transpositionen auf 5 Ziffern.

Bei den Untersuchungen von Fischer hat sich herausgestellt, dass die maximalen, vollständigen Teilgraphen des Fischer-Graphen eine große Rolle spielen. Diese gehören zu maximalen Teilmengen paarweise vertauschbarer Elemente von C . Der Stabilisator eines solchen maximalen Teilgraphen kontrolliert wesentlich die Struktur von G . Bei den drei oben genannten Fischer-Gruppen sind diese Stabilisatoren Erweiterungen von Mathieu-Gruppen H gemäß der folgenden Tabelle. Dies erklärt die von Fischer eingeführte Bezeichnung seiner Gruppen.

G	Fi_{22}	Fi_{23}	Fi_{24}
H	M_{22}	M_{23}	M_{24}

4.3 Historische Notiz

Die ersten Erwähnungen der Fischer-Gruppen finden sich in den Vortragsbüchern von Oberwolfach. In [54, S. 31] beschreibt Fischer die Gruppe Fi_{22} . Hier findet sich nicht nur eine Skizze für die Konstruktion dieser Gruppe sondern auch ihre Ordnung. Der Eintrag von Bernd Fischer erfolgte im Rahmen einer „Arbeitsgemeinschaft über Gruppen und Geometrie, 2.–5. 1. 1969“, veranstaltet von Reinhold Baer. Ich zitiere das Vortragsbuch:

„Erweiterungen von $PSU(6, 2^2)$

Sei D die Menge der unitären Transvektionen in $G = PSU(6, 4)$. Sei $\Gamma(D)$ der Graph mit den Punkten aus D und den Verbindungen $d \circ \circ d' \Leftrightarrow dd' = d'd \neq 1$. In G gibt es drei Konjugiertenklassen von Untergruppen R mit $|D \cap R| = 126$, $R' \leq R$, $|R| = 2^8 \cdot 3^6 \cdot 5 \cdot 7$, R' ist einfach. $\Gamma(D)$ heißt eine Erweiterung zu Γ mit den Eigenschaften: $|\Gamma| = 3510$; sind a, b verschiedene, nicht verbundene Punkte von Γ , so gibt es genau einen Punkt $z = a \circ b$ in Γ , so daß z mit allen mit a und b verbundenen Punkten verbunden ist; die Abbildungen $p^+ : x \rightarrow x \circ p$, $x \rightarrow x$, falls $x \circ p$ nicht definiert, sind Automorphismen von Γ . Ferner folgt $|\text{Aut } \Gamma| = 2^{18} \cdot 3^9 \cdot 5^2 \cdot 7 \cdot 11 \cdot 13$. $(\text{Aut } \Gamma)'$ ist einfach und hat Index 2 in $\text{Aut } \Gamma$. Möglicherweise gibt es zwei weitere Erweiterungen von Γ ; die Automorphismengruppen wären einfach und hätten die Ordnungen $2^{18} \cdot 3^{13} \cdot 7^2 \cdot 5^2 \cdot 11 \cdot 13 \cdot 23$ bzw. $2^{22} \cdot 3^{13} \cdot 5^2 \cdot 7^2 \cdot 11 \cdot 13 \cdot 17 \cdot 23 \cdot 1483^*$

Bernd Fischer“

In diesem Eintrag wird nicht der Vertauschungsgraph aus Abschnitt 4.2 beschrieben, sondern sein Komplement. Die Gruppe $\text{Aut } \Gamma$ operiert als Rang-3-Gruppe auf den Punkten von Γ , und Γ und sein Komplement sind gerade die beiden Orbitalgraphen dieser Operation (siehe Abschnitt 2.3).

* Vielleicht ein Schreibfehler. Richtig wäre 5481.

Im gleichen Band des Vortragsbuches, im Rahmen der Tagung „Gruppen und Geometrien, 18.–24.5.1969“, bestätigt Bernd Fischer auf den Seiten 204–205 die Existenz der beiden großen Fischer-Gruppen und gibt deren Ordnungen an. Hier verwendet er auch zum ersten Mal die Schreibweise $M(22)$, $M(23)$ und $M(24)$. Es folgt der Wortlaut dieses Eintrags:

„Extensions of finite simple groups

Let $G = \text{PSU}(6, 2)$, d an involution in $\mathbb{Z}(S)$, $S \in \text{Syl}_2(G)$. Then G admits an extension $M(22)$ which is simple of order $2^{17} \cdot 3^9 \cdot 5^2 \cdot 7 \cdot 11 \cdot 13$ (see p. 31); $M(22)$ is generated by a class D_1 of conjugate involutions and $\mathbf{C}_{M(22)}(x)/\langle x \rangle \simeq \text{PSU}(6, 2)$ for $x \in D_1$. The group $M(22)$ has an extension $M(23)$ which is simple of order $2^{18} \cdot 3^{13} \cdot 5^2 \cdot 7 \cdot 11 \cdot 13 \cdot 17 \cdot 23$; there is a class D_2 of conjugate involutions in $M(23)$ such that $\mathbf{C}_{M(23)}(x)/\langle x \rangle \simeq M(22)$ for $x \in D_2$. Again, there is an extension $M(24)$ generated by a class D_3 of conjugate involutions such that $\mathbf{C}_{M(24)}(x)/\langle x \rangle \simeq M(23)$, and $M(24)'$ is simple of order $2^{21} \cdot 3^{16} \cdot 5^2 \cdot 7^3 \cdot 11 \cdot 13 \cdot 17 \cdot 23 \cdot 29$.

Bernd Fischer“

5 Das Monster

Die größte der sporadischen Gruppen, von Conway *Monster* getauft, wurde von Fischer im Jahre 1973 entdeckt.

5.1 Das Monster

Die erste schriftliche, öffentlich zugängliche Erwähnung des Monsters findet sich wohl in [56, S. 105], dem Vortragsbuch Nr. 26 von Oberwolfach, anlässlich der „Arbeitsstagung Professor Baer, 1.1.–5.1. 1974“. Ich zitiere den Eintrag von Bernd Fischer:

„Bemerkungen über einige sporadische Gruppen

Es gibt möglicherweise einfache Gruppen folgender Ordnungen

$$G_1: 2^{41} 3^{13} 5^6 7^2 11 13 17 19 23 31 47$$

$$G_2: 2^{15} 3^{10} 5^3 7^2 13 19 31, G_3: 2^{14} 3^6 5^6 7 11 19$$

$$G_4: 2^{46} 3^{20} 5^9 7^6 11^2 13^3 17 \cdot 19 \cdot 23 \cdot 29 \cdot 31 \cdot 41 \cdot 47 \cdot 59 \cdot 71.$$

Hier ist $G_1 \simeq \mathbf{C}_{G_4}(d)/\langle d \rangle$ für eine Involution d und G_2, G_3 wären in G_1 enthalten. Die Ordnungen von G_2, G_3, G_4 wurden von Conway, Harada und Thompson bestimmt.

B. Fischer“

Die in diesem Zitat G_4 genannte Gruppe ist das Monster. Ausgeschrieben ist die Ordnung des Monsters

$$808\,017\,424\,794\,512\,875\,886\,459\,904\,961\,710\,757\,005\,754\,368\,000\,000\,000$$

oder ungefähr $8 \cdot 10^{53}$.

Die kleinste Realisierung des Monsters als Permutationsgruppe existiert auf

97 239 461 142 009 186 000

Punkten. Als Matrixgruppe über dem Körper mit 2 Elementen lässt sich das Monster in 196 882 Dimensionen realisieren. Über den rationalen Zahlen existiert eine Matrix-Darstellung des Monsters in 196 883 Dimensionen. Diese wurde von Robert L. Griess, Jr. „von Hand“ konstruiert, und im Jahre 1981 publiziert [19, 20].

Vor dem Monster hatte Fischer bereits das Babymonster entdeckt. Dieses wird heute auch mit F_2 bezeichnet und taucht in obigem Zitat als G_1 auf. In Abschnitt 5.3 werde ich etwas näher auf das Babymonster eingehen.

Im Monster, das heute auch F_1 genannt wird, sind insgesamt 20 der 26 sporadischen Gruppen involviert. Darunter befinden sich auch zwei, die erst durch die Entdeckung des Monsters gefunden wurden, die Thompson-Gruppe Th oder F_3 (in obigem Zitat G_2), und die Harada-Norton-Gruppe HN oder F_5 (in obigem Zitat G_3). Es ist daher angebracht zu sagen, dass Bernd Fischer der Entdecker von insgesamt sieben der 26 sporadischen Gruppen ist.

5.2 Wann und wie wurde das Monster entdeckt?

Robert L. Griess, Jr. wird in der Literatur neben Fischer als unabhängiger Entdecker des Monsters genannt, etwa in [9], in [15, Abschnitt 2.4.F], oder in [1, S. 68]. Griess selbst datiert die Entdeckung des Monsters in der Einleitung von [20] auf den November 1973. Die zweite schriftliche Erwähnung des Monsters fand ich in Griess' Arbeit [16] über die Schurmultiplikatoren der sporadischen Gruppen. In dieser Arbeit, die im Dezember 1974 erschienen ist, gibt Griess den Wert des Schurmultiplikators von F_2 mit „1 or \mathbb{Z}_2 “ und denjenigen von F_1 mit 1 an (Tabelle auf S. 446). Als Referenz für das Monster F_1 nennt er die folgenden drei Quellen:

15. B. Fischer, Lecture, Bielefeld, November 1973.
18. R. Griess, On the subgroup structure of the group of order $2^{46} 3^{20} 5^9 7^6 11^2 13^3 17 \cdot 19 \cdot 23 \cdot 29 \cdot 31 \cdot 41 \cdot 47 \cdot 59 \cdot 71$, in preparation.
37. J. Thompson, unpublished.

Die oben genannte Arbeit mit der Nummer 18, die Griess auch als Quelle für die Schurmultiplikatoren von F_1 und F_2 angibt, ist wohl nicht publiziert worden. Die endgültige Entscheidung über den Schurmultiplikator des Babymonsters erfolgte erst mit dem Existenzbeweis für das Monster.

Griess veröffentlichte im Jahre 1976 eine Note [17], in der er ohne Beweis einige Eigenschaften des damals noch hypothetischen Monsters angibt. Hierin geht er von einer einfachen Gruppe F aus, die zwei nicht-konjugierte Involutionen z und t enthält, deren Zentralisatoren die folgenden beiden (vereinfacht dargestellten) Hypothesen erfüllen.

(HC) $C_F(t)$ ist eine Erweiterung einer extraspeziellen Gruppe der Ordnung 2^{25} mit der Conway-Gruppe Co_1 .

(HB) $C_F(z)$ ist eine zweifache Überlagerung des Babymonsters.

In dieser Note erwähnt Griess einen Vortrag von Fischer in Bielefeld (vermutlich der vom November 1973), in dem dieser das Monster als einfache Gruppe postuliert, die ein Element ρ der Ordnung 3 enthält, dessen Zentralisator die folgende Hypothese erfüllt:

(HS) $C(\rho)$ ist eine Erweiterung einer extraspeziellen Gruppe der Ordnung 3^{13} und Exponent 3 mit der zweifachen Überlagerung der Suzuki-Gruppe.

Diese Hypothesen sind natürlich nicht unabhängig voneinander. So sagt Griess in [17, S. 114, Zeile 8] über die zentrale Involution z der zweifachen Überlagerung der Suzuki-Gruppe:

„Thompson then determined that $C(z)$ must have shape as in (B) above, and proceeded to derive other local information as consequences“.

Der Ausdruck „shape as in (B) above“ meint hier eine Gruppe, die die Hypothese (HC) erfüllt. Weitere Abhängigkeiten zwischen diesen drei Hypothesen diskutieren Gorenstein in [15, Abschnitt 2.4.F] und Aschbacher in [1, S. 68]. Welche davon zuerst in Betracht gezogen wurde, um das Monster vorauszusagen, konnte ich anhand der Literatur nicht feststellen.

Die Aufgabe, einfache Gruppen durch Vorgabe des Zentralisators einer Involution, wie etwa in den Hypothesen (HC) und (HB), zu klassifizieren, und dabei möglicherweise neue einfache Gruppen zu finden, war für die damaligen Gruppentheoretiker sehr naheliegend. Zum einen kann es nach dem schon erwähnten Satz von Brauer und Fowler bis auf Isomorphie nur endlich viele solche einfachen Gruppen geben, so dass deren Klassifikation möglich erscheint. Zum anderen wurde die erste sporadische Gruppe, die nach den Mathieu-Gruppen entdeckt wurde, die Janko-Gruppe J_1 , durch genau dieses Prinzip der Charakterisierung mittels des Zentralisators einer Involution gefunden. Auch die anderen drei Janko-Gruppen, sowie die Held- und die Lyons-Gruppe verdanken ihre Entdeckung dieser Methode (siehe [15, Abschnitt 2.4]).

Im Sommer 1973 hatte Fischer das Babymonster entdeckt, während die Entdeckung der Conway-Gruppen und der Suzuki-Gruppe bereits einige Jahre zurücklag. Deshalb halte ich es für plausibel, dass die Vorhersage des Monsters zuerst aufgrund der Hypothese (HB) erfolgt ist.

Am 3. September 2002 hatte ich Gelegenheit, mit Professor Fischer über diese Fragen zu sprechen. In diesem Gespräch bekräftigte Fischer, seinen Überlegungen zuerst die Hypothese (HB) zugrunde gelegt zu haben. Weiter sagte er, dass ihm etwa drei Wochen nach Entdeckung des Babymonsters die wesentlichen Eigenschaften des Monsters bekannt gewesen seien. Dies war also schon einige Zeit vor dem November 1973 der Fall, wenn man, wie etwa Griess in [20, Abschnitt 15], und wie das auch durch das Oberwolfach-Vortragsbuch Nr. 25 [55, S. 58] belegt wird, die „Geburt“ des Babymonsters auf den Sommer des Jahres 1973 datiert. Im gleichen Gespräch bestätigte Fischer die bedeutende Rolle, die Thompson und Conway bei der Beschreibung der Eigenschaften des Monsters gespielt haben.

5.3 Das Babymonster

Wie sein Name suggeriert, ist das *Babymonster* „ein Kind des Monsters“, denn seine Existenz ergibt sich sehr leicht aus derjenigen des Monsters. Das Babymonster wurde allerdings *vor* dem Monster gefunden, und hat umgekehrt, wie oben ausgeführt, Anlass zur Vorhersage des Monsters gegeben.

Das Babymonster ist eine weitere bemerkenswerte Entdeckung von Professor Fischer, die sich unmittelbar an seine Klassifikation der 3-Transpositionsgruppen anschließt. Nachdem diese so erfolgreich abgeschlossen worden war, lag es nahe, $\{3, 4\}$ -Transpositionsgruppen zu untersuchen. (Dazu wird die Definition der 3-Transpositionsgruppen dahin gehend erweitert, dass auch Produkte der Ordnung 4 erlaubt sind.) Im Verlauf dieser Untersuchungen wurde Fischer auf eine hypothetische Gruppe geführt, die er in [55, S. 58] im Rahmen der Tagung „Endliche Gruppen und Permutationsgruppen, 6.8.73–10.8.73“ wie folgt beschreibt:

„ $\{3, 4\}$ -Transpositions in Finite Groups

Is there a finite simple group G satisfying

- (i) $G = \langle D \rangle$, $D = d^G$, $d^2 = 1 \neq d$,
- (ii) $x, y \in D \Rightarrow o(x, y) \in \{1, 2, 3, 4\}$,
- (iii) $\mathbf{C}_G(d)/\langle d \rangle$ contains ${}^2E_6(2)$ as a subgroup of index 2,
- (iv) $\mathbf{C}_G(d)$ has 5 orbits on D :

$$D = d \cup (D \cap \mathbf{C}_G(d)' \setminus \{d\}) \cup (D \cap \mathbf{C}_G(d) \setminus \mathbf{C}_G(d)') \cup A_d \cup V_d$$

for $A_d = \{x \mid o(dx) = 3\}$, $V_d = \{v \in D \mid o(vd) = 4\}$

and $|V_d| = 2812^* \cdot |D \cap \mathbf{C}_G(d)' \setminus \{d\}|$?

Such a group would have order $2^{41} 3^{13} 5^6 7^2 11 \cdot 13 \cdot 17 \cdot 19 \cdot 23 \cdot 31 \cdot 47$. Some of the centralizers can be determined.

Bernd Fischer“

Jeffrey Leon und Charles Sims bewiesen als Erste die Existenz der in diesem Zitat beschriebenen Gruppe, eben des Babymonsters. Dazu konstruierten sie mit Hilfe von Computern eine Permutationsgruppe auf

13 571 955 000

Punkten und zeigten, dass diese die geforderten Eigenschaften besitzt (siehe [37]). Diese Leistung ist auch aus heutiger Sicht noch äußerst bemerkenswert. Weitere Anmerkungen zu dieser Konstruktion gibt Sims in [49].

Soweit ich weiß ist die Klassifikation der $\{3, 4\}$ -Transpositionsgruppen bis heute noch nicht abgeschlossen.

* Dies ist ein Schreibfehler. Die richtige Zahl ist 2816.

5.4 Monstrous Moonshine

Die (rationalisierte) Charaktertafel des Monsters wurde in einer gewaltigen einwöchigen Arbeitssitzung im Jahre 1978 von Fischer, Livingstone und Thorne in Birmingham ausgerechnet (siehe [13]). Einige Charakterwerte des Monsters finden sich in Tabelle 4. Die Spaltenüberschriften bezeichnen Elementordnungen, gemäß der Konvention des Atlas [8], wobei Elemente gleicher Ordnung durch Buchstaben unterschieden werden. Die gesamte Charaktertafel ist eine 194×194 -Matrix und nimmt acht Seiten des Atlas in Anspruch.

Tabelle 4. Ausschnitt aus der gewöhnlichen Charaktertafel des Monsters

1a	2a	2b	3a
1	1	1	1
196883	4371	275	782
21296876	91884	-2324	7889
842609326	1139374	12974	55912
18538750076	8507516	123004	249458
19360062527	9362495	-58305	297482
293553734298	53981850	98970	1055310

John McKay machte Ende der 70er Jahre die bemerkenswerte Beobachtung $196\,884 = 1 + 196\,883$. Auf der linken Seite dieser Gleichung steht der Fourier-Koeffizient der j -Funktion zu q^1 (vgl. Abschnitt 3.2), auf der rechten Seite die Summe der Grade der kleinsten Darstellungen des Monsters in Charakteristik 0.

Thompson trieb diese „Numerologie“ noch etwas weiter (siehe [52]):

$$196\,884 = 1 + 196\,883,$$

$$21\,493\,760 = 1 + 196\,883 + 21\,296\,876,$$

$$864\,299\,970 = 2 \times 1 + 2 \times 196\,883 + 21\,296\,876 + 842\,609\,326.$$

In [51] baute er diese Beobachtung zu einer Vermutung aus, die von Conway und Norton in [9] numerisch untermauert, weiter analysiert und ergänzt wurde. Sie ist seither unter dem Namen *Monstrous-Moonshine-Vermutung* bekannt.

Mit Hilfe von Vertex-Operator-Algebren konstruierten Frenkel, Lepowsky und Meurmann in [14] einen graduierten \mathbb{C} -Vektorraum

$$V = V_{-1} \oplus V_0 \oplus V_1 \oplus V_2 \oplus \dots$$

mit $V_0 = \{0\}$, auf dem das Monster linear graduiert operiert (d. h. auf jedem V_i operiert das Monster linear), so dass gilt:

$$j(q) - 744 = \sum_{n=-1}^{\infty} \dim_{\mathbb{C}}(V_n) q^n.$$

Nach einer Reihe von vorbereitenden Arbeiten hat Richard Borcherds, ein Schüler von Conway, in [3] die Moonshine-Vermutungen bewiesen.

Satz (Borcherds): *Zu jedem Element $x \in M$ existiert eine Fuchs'sche Gruppe K_x , so dass die Riemannsche Fläche \mathbf{H}/K_x vom Geschlecht 0 ist, und der zugehörige Funktionenkörper einen Hauptmodul f_x (d. h. der Funktionenkörper ist $\mathbf{C}(f_x)$) mit der Fourierentwicklung*

$$f_x = \sum_{n=-1}^{\infty} \text{Spur}(x, V_n) q^n.$$

hat.

Dieser Satz deckt tiefliegende Zusammenhänge zwischen dem Monster und der Theorie von Modulformen auf. Zum Beweis setzt Borcherds Ideen aus der String-Theorie ein. Für dieses Ergebnis (und für weitere bahnbrechende Resultate), hat Borcherds auf dem Internationalen Mathematikerkongress 1998 in Berlin die Fields-Medaille erhalten.

6 Ausblick

Was bleibt für uns und die nächsten Generationen zu tun?

Wie die Erforschung des Sonnensystems nicht endet mit der Entdeckung, Benennung und Vermessung der Planeten, oder die Chemie nicht mit der Entdeckung und Beschreibung der Elemente (Dank an Klaus Lux für dieses Bild), hört auch die Gruppentheorie nicht mit der Klassifikation der endlichen einfachen Gruppen auf, sondern tritt vielmehr in eine neue Ära ein. Um den Nutzen der Klassifikation zu erhöhen, sind nunmehr die wesentlichen strukturellen Eigenschaften der endlichen einfachen Gruppen zu erforschen.

Hierzu gehören z. B. ihre Untergruppen und ihre Darstellungen als Matrixgruppen. Bei den Untergruppen wird man sich zunächst darauf beschränken, die maximalen zu beschreiben. Bei den Matrixdarstellungen steht zunächst die Konstruktion und Klassifikation der irreduziblen im Vordergrund. Während für die unendlichen Serien der einfachen Gruppen theoretische Methoden verwendet werden, die geometrischer Natur sind und generische Resultate liefern, ist man bei den sporadischen Gruppen oft auf Ad-Hoc-Methoden und insbesondere die Benutzung von Computern angewiesen.

Zum Programm, die maximalen Untergruppen der sporadischen Gruppen zu bestimmen, hat Robert Wilson (Birmingham) die weitaus meisten Ideen, Methoden und Ergebnisse beigesteuert. Inzwischen sind die maximalen Untergruppen aller sporadischen Gruppen, mit Ausnahme derjenigen des Monsters, bekannt. Auch beim Monster kennt man die meisten maximalen Untergruppen. Daneben gibt es eine Liste von relativ kleinen Gruppen, die Kandidaten für maximale Untergruppen des Monsters sind. Für einige davon ist bekannt, dass sie Untergruppen sind (z. B. weil sie in bereits bekannten Untergruppen vorkommen), für andere ist nicht einmal bekannt, ob sie überhaupt Untergruppen sind. Erst kürzlich konnten Wilson und seine Schülerin Beth Holmes zeigen, dass $\text{PGL}_2(29)$ und $\text{PSL}_2(59)$ maximale Untergruppen des Monsters sind (siehe [29] für den ersten Fall; der zweite ist noch nicht publiziert). Auf der anderen Seite gelang ihnen der Nachweis, dass es keine maximale Untergruppe des Monsters gibt, deren Sockel isomorph zu $\text{PSL}_2(23)$ ist, obwohl $\text{PSL}_2(23)$ eine Untergruppe des Monsters ist.

Tabelle 5. Die kleinsten Matrixdarstellungen der sporadischen Gruppen

Grp.	Dim.	Kp.	Grp.	Dim.	Kp.
M_{11}	5	\mathbb{F}_3	He	50	\mathbb{F}_7
M_{12}	10	\mathbb{F}_2	Ly	111	\mathbb{F}_5
M_{22}	10	\mathbb{F}_2	ON	154	\mathbb{F}_3
M_{23}	11	\mathbb{F}_2	Co_1	24	\mathbb{F}_2
M_{24}	11	\mathbb{F}_2	Co_2	22	\mathbb{F}_2
J_1	7	\mathbb{F}_{11}	Co_3	22	\mathbb{F}_2
J_2	6	\mathbb{F}_4	Fi_{22}	77	\mathbb{F}_3
J_3	18	\mathbb{F}_9	Fi_{23}	253	\mathbb{F}_3
J_4	112	\mathbb{F}_2	Fi_{24}	781	\mathbb{F}_3
HS	20	\mathbb{F}_2	HN	132	\mathbb{F}_4
McL	21	\mathbb{F}_3	Th	248	\mathbb{F}_2
Suz	64	\mathbb{F}_3	B	4370	\mathbb{F}_2
Ru	28	\mathbb{F}_2	M	196 882	\mathbb{F}_2

Zur Zeit gehen Holmes und Wilson diese Kandidatenliste systematisch durch. Ihre Arbeit wird substantziell von Computern unterstützt. Es ist möglich, explizit mit Elementen des Monsters zu rechnen, z. B. die Ordnung des Produktes von zwei Elementen zu bestimmen. Dazu werden verschiedene Matrixdarstellungen von M über endlichen Körpern (mit 2, 3, oder 7 Elementen) eingesetzt, die von Wilson und Mitautoren konstruiert wurden (siehe [39, 30]).

Es ist überflüssig zu sagen, dass Rechnungen mit Matrizen dieser Größe nicht automatisch ablaufen: der Platzbedarf für eine Monstermatrix über dem Körper mit 2 Elementen beträgt ca. 5 Gigabyte. Erst einmal wurden zwei solche Matrizen wirklich multipliziert. Diese Rechnung erfolgte im Dezember 1998 und dauerte, unter Einbeziehung aller damals am Lehrstuhl D für Mathematik in Aachen zur Verfügung stehenden Rechner (15 PCs unterschiedlicher Stärke) etwa 45 Stunden. Für die oben angesprochenen Aufgaben müssten viele Hundert solcher Matrizen multipliziert werden. Deshalb benötigen diese Rechnungen spezielle, auf das Monster zugeschnittene, Datenstrukturen und Programme.

Auch zum Rechnen mit den anderen sporadischen Gruppen werden Matrixdarstellungen herangezogen, vorzugsweise solche von kleinem Grad. Viele Matrixdarstellungen sind explizit bekannt, und über die Web-Seite von Robert Wilson [57] zu erhalten. Eine Liste der kleinsten Matrixdarstellungen der sporadischen Gruppen ist in Tabelle 5 zusammengestellt.

Ein weiteres Programm, das noch viele Jahrzehnte in Anspruch nehmen wird, ist die Bestimmung der irreduziblen Matrixdarstellungen der sporadischen Gruppen über Körpern positiver Charakteristik. (Die entsprechende Information für Körper der Charakteristik 0 ist seit vielen Jahren vorhanden und in Form von Charaktertafeln im Atlas [8] zugänglich.) Über Körpern endlicher Charakteristik sind vollständige Ergebnisse für die 16 kleinsten der sporadischen Gruppen bekannt, und für die ersten 10 davon publiziert [35]. Unsere Web-Seite [45] stellt den jeweils neuesten Stand der Ermittlungen vor.

Als Beispiel seien die Grade der irreduziblen 2-modularen Darstellungen der Fischer-Gruppe Fi_{22} angegeben, die erst kürzlich von Jürgen Müller, Felix Noeske, John Thackray und dem Autor erhalten wurden:

1,	78,	350,	572,	1 352,
7 942,	24 596,	5 824,	5 824,	31 668,
34 892,	62 952,	62 952,	163 084(?),	2 555 904.

Der zweit-letzte der aufgeführten Grade ist noch mit einer gewissen Unsicherheit behaftet. Die angegebene Zahl stellt jedenfalls eine untere Schranke für den Grad der betreffenden irreduziblen Darstellung dar.

7 Dank

Viele Personen und Institutionen haben mich bei der Vorbereitung meines Vortrags und bei der Verfassung diese Artikels unterstützt. Ihnen allen gilt mein herzlichster Dank.

Meinolf Geck, Frank Lübeck, Klaus Lux, Jürgen Müller, Joachim Neubüser, Max Neunhöffer, Felix Noeske, Charles Sims und Jonathan Thackray haben bei den Recherchen geholfen, Informationen geliefert, das Manuskript gelesen und zahlreiche Verbesserungen vorgeschlagen. Professor Charles Sims danke ich ganz besonders herzlich für die Zustimmung, seine Email zur Geschichte der Higman-Sims-Gruppe hier zu veröffentlichen. Dem Direktor des Mathematischen Forschungsinstituts Oberwolfach, Professor Gert-Martin Greuel, danke ich für die Erlaubnis, aus den Vortragsbüchern zu zitieren.

Die Institutionen *Internet*, *MathSciNet*, *The On-Line Encyclopedia of Integer Sequences* von Neil Sloane, *Eric Weisstein's World of Mathematics* waren von unschätzbare Hilfe bei der Vorbereitung meines Vortrags und dieser Ausarbeitung. Nach meinem Vortrag in Gießen haben mich zahlreiche Zuhörer auf Ungenauigkeiten mathematischer und historischer Natur aufmerksam gemacht. Ich habe (fast) alle diese Vorschläge in den vorliegenden Text eingebaut. Insbesondere möchte ich in diesem Zusammenhang den Herrn Danzer, Fischer, Hering, Huppert, Laue, Pickert, Stellmacher, Stroth und Timmesfeld danken.

Meinem Kollegen Aloys Krieg danke ich für die Anregung, meinen Vortrag zu einem Beitrag für den DMV-Jahresbericht auszuarbeiten.

Mein ganz besonders herzlichster Dank gebührt Herrn Professor Fischer, der sehr bereitwillig alle meine Fragen zur Entdeckungsgeschichte der Fischer-Gruppen (und einiger anderer sporadischer Gruppen) beantwortet hat, und mir dabei auch sehr viel von der Stimmung der damaligen aufregenden Zeit in der Gruppentheorie vermittelt hat.

Literatur

- [1] M. Aschbacher, *Sporadic groups*, Cambridge University Press, Cambridge, 1994.
- [2] D. J. Benson, *The simple group J_4* , PhD-thesis, University of Cambridge, 1981.
- [3] R. E. Borcherds, *Monstrous moonshine and monstrous Lie superalgebras*, *Invent. Math.* **109** (1992), 405–444.

- [4] W. Burnside, Theory of groups of finite order, 2nd edition, Cambridge, 1911.
- [5] P. J. Cameron, Permutation groups, Cambridge University Press, 1999.
- [6] J. H. Conway, A perfect group of order 8, 315, 553, 613, 086, 720, 000 and the sporadic simple groups, *Proc. Nat. Acad. Sci. U.S.A.* **61** (1968), 398–400.
- [7] J. H. Conway, A group of order 8, 315, 553, 613, 086, 720, 000, *Bull. London Math. Soc.* **1** (1969), 79–88.
- [8] J. H. Conway, R. T. Curtis, S. P. Norton, R. A. Parker und R. A. Wilson, Atlas of finite groups, Clarendon Press, 1985.
- [9] J. H. Conway und S. P. Norton, Monstrous moonshine, *Bull. London Math. Soc.* **11** (1979), 308–339.
- [10] J. H. Conway und N.J.A. Sloane, Sphere packings, lattices and groups, Third edition, Springer, 1999.
- [11] J. H. Conway und D. B. Wales, Construction of the Rudvalis group of order 145, 926, 144, 000, *J. Algebra* **27** (1973), 538–548.
- [12] B. Fischer, Finite groups generated by 3-transpositions. I, *Invent. Math.* **13** (1971), 232–246.
- [13] B. Fischer, D. Livingstone und M. P. Thorne, The charaters of the „Monster“ simple group, Birmingham, 1978.
- [14] I. Frenkel, J. Lepowsky und A. Meurman, Vertex operator algebras and the Monster, Pure and Applied Mathematics, 134, Academic Press, Boston, 1988.
- [15] D. Gorenstein, Finite simple groups, an introduction to their classification, Plenum Press, 1982.
- [16] R. L. Griess, Jr., Schur multipliers of some sporadic simple groups, *J. Algebra* **32** (1974), 445–466.
- [17] R. L. Griess, Jr., The structure of the „Monster“ simple group, in: W. R. Scott und F. Gross (Hrsg.), Proceedings of the conference on finite groups, Academic Press, 1976, S. 113–118.
- [18] R. L. Griess, Jr., Schur multipliers of the known finite simple groups. II, in: B. Cooperstein und G. Mason (Hrsg.), The Santa Cruz conference on finite groups, Proceedings of Symposia in Pure Mathematics Vol. 37, American Mathematical Society, 1980, S. 279–282.
- [19] R. L. Griess, Jr., A construction of F_1 as automorphisms of a 196, 883-dimensional algebra, *Proc. Nat. Acad. Sci. U.S.A.* **78** (1981), 686–691.
- [20] R. L. Griess, Jr., The friendly giant, *Invent. Math.* **69** (1982), 1–102.
- [21] R. L. Griess, Jr., Twelve sporadic groups, Springer Monographs in Mathematics, Springer-Verlag, Berlin, 1998.
- [22] M. Hall, Jr. und D. Wales, The simple group of order 604, 800, in: Theory of Finite Groups (Symposium, Harvard Univ., Cambridge, Mass., 1968), Benjamin, New York, 1969, S. 79–90.
- [23] M. Hall, Jr. und D. Wales, The simple group of order 604, 800, *J. Algebra* **9** (1968), 417–450.
- [24] D. Held, Some simple groups related to M_{24} , in: Theory of Finite Groups (Symposium, Harvard Univ., Cambridge, Mass., 1968), Benjamin, New York, 1969, S. 121–124.
- [25] D. Held, The simple groups related to M_{24} , *J. Algebra* **13** (1969), 253–296.
- [26] G. Higman und J. McKay, On Janko’s simple group of order 50, 232, 960 in: Theory of Finite Groups (Symposium, Harvard Univ., Cambridge, Mass., 1968), Benjamin, New York 1969, S. 65–77.
- [27] G. Higman und J. McKay, On Janko’s simple group of order 50, 232, 960, *Bull. London Math. Soc.* **1** (1969), 89–94; correction, *ibid.* **1** (1969), 219.
- [28] D. G. Higman und C. C. Sims, A simple group of order 44, 352, 000, *Math. Z.* **105** (1968), 110–113.
- [29] P. E. Holmes und R. A. Wilson, A new maximal subgroup of the Monster, *J. Algebra* **251** (2002), 435–447.
- [30] P. E. Holmes und R. A. Wilson, A new computer construction of the Monster using 2-local subgroups, *J. London Math. Soc.* **67** (2003), 349–364.
- [31] Z. Janko, A new finite simple group with abelian 2-Sylow subgroups, *Proc. Nat. Acad. Sci. U.S.A.* **53** (1965), 657–658.

- [32] Z. Janko, A new finite simple group with abelian Sylow 2-subgroups and its characterization, *J. Algebra* **3** (1966), 147–186.
- [33] Z. Janko, Some new simple groups of finite order, I, in: *Symposia Mathematica (INDAM, Rome, 1967/68)*, Vol. 1, Academic Press, London, 1969, S. 25–64.
- [34] Z. Janko, A new finite simple group of order 86775571046077562880 which possesses M_{24} and the full covering group of M_{22} as subgroups, *J. Algebra* **42** (1976), 564–596.
- [35] C. Jansen, K. Lux, R. Parker und R. Wilson, *An atlas of Brauer characters*, Clarendon Press, Oxford, 1995.
- [36] M. Koecher und A. Krieg, *Elliptische Funktionen und Modulformen*, Springer, 1998.
- [37] J. S. Leon und C. C. Sims, The existence and uniqueness of a simple group generated by $\{3, 4\}$ -transpositions, *Bull. Amer. Math. Soc.* **83** (1977), 1039–1040.
- [38] J. H. van Lint, *Introduction to coding theory*, Second edition, Springer, 1992.
- [39] S. Linton, R. Parker, P. Walsh und R. Wilson, Computer construction of the Monster, *J. Group Theory* **1** (1998), 307–337.
- [40] R. Lyons, Evidence for a new finite simple group, *J. Algebra* **20** (1972), 540–569.
- [41] R. Lyons, Errata: „Evidence for a new finite simple group“ (*J. Algebra* 20 (1972), 540–569), *J. Algebra* **34** (1975), 188–189.
- [42] É. Mathieu, Mémoire sur l'étude de plusieurs quantités, sur la manière de les former et sur les substitutions qui les laissent invariables, *J. Math. Pures Appl.* **6** (1861), 241–323.
- [43] É. Mathieu, Sur la fonction cinq fois transitive de 24 Quantités, *J. Math. Pures Appl.* **18** (1873), 25–46.
- [44] J. McLaughlin, A simple group of order 898, 128, 000, in: *Theory of Finite Groups (Symposium, Harvard Univ., Cambridge, Mass., 1968)*, Benjamin, New York, 1969, S. 109–111.
- [45] The Modular Atlas Homepage, <http://www.math.rwth-aachen.de/~MOC/>
- [46] M. E. O’Nan, Some evidence for the existence of a new simple group, *Proc. London Math. Soc.* **32** (1976), 421–479.
- [47] A. Rudvalis, A rank 3 simple group of order $2^{14}3^35^37^{13}29$, I, *J. Algebra* **86** (1984), 181–218.
- [48] C. C. Sims, The existence and uniqueness of Lyons’ group, in: *Finite groups ’72 (Proc. Gainesville Conf., Univ. Florida, Gainesville, Fla., 1972)*, North-Holland Math. Studies, Vol. 7, North-Holland, Amsterdam, 1973, S. 138–141.
- [49] C. C. Sims, How to construct a baby monster, in: M. J. Collins (Hrsg.), *Finite simple groups II*, Academic Press, 1980, S. 339–345.
- [50] C. C. Sims, History of Higman-Sims Group, Email an Gerhard Hiss, 4. Juni 2002.
- [51] J. G. Thompson, Finite groups and modular functions, *Bull. London Math. Soc.* **11** (1979), 347–351.
- [52] J. G. Thompson, Some numerology between the Fischer-Griess Monster and the elliptic modular function, *Bull. London Math. Soc.* **11** (1979), 352–353.
- [53] T. M. Thompson, From error-correcting codes through sphere packings to simple groups, MAA, 1983.
- [54] Vortragsbuch Nr. 14, Mathematisches Forschungsinstitut Oberwolfach.
- [55] Vortragsbuch Nr. 25, Mathematisches Forschungsinstitut Oberwolfach.
- [56] Vortragsbuch Nr. 26, Mathematisches Forschungsinstitut Oberwolfach.
- [57] R. A. Wilson, ATLAS of Finite Group Representations, <http://www.mat.bham.ac.uk/atlas/>
- [58] E. Witt, Die 5-fach transitiven Gruppen von Mathieu, *Abh. Math. Sem. Univ. Hamburg* **12** (1938), 256–264, in: I. Kersten (Hrsg.), Ernst Witt, *Collected Papers, Gesammelte Abhandlungen*, Springer, 1998, S. 279–287.
- [59] E. Witt, Über Steinersche Systeme, *Abh. Math. Sem. Univ. Hamburg* **12** (1938), 265–275, in: I. Kersten (Hrsg.), Ernst Witt, *Collected Papers, Gesammelte Abhandlungen*, Springer, 1998, S. 288–298.



Entropie und Dissipation – Zur Numerik nichtlinearer Transportprozesse

Zum Gedenken an Günter Braatz

Thomas Sonar

Abstract

- Mathematics Subject Classification: 35 L 40, 35 L 65, 65 M 06, 94 A 08
- Keywords and Phrases: Transport equations, diffusion equations, entropy, finite difference schemes, image processing

Aus Anlaß der Gauß-Vorlesung am 16. Mai 2003 in Göttingen habe ich einige Dinge für ein allgemein interessiertes Publikum zusammengetragen, die mit dem Begriff *Entropie* und dem zweiten Hauptsatz der Thermodynamik zusammenhängen. Erstaunlicherweise ist gerade die Entropie ein leitendes Prinzip bei der Konstruktion numerischer Methoden zur Diskretisierung nichtlinearer Transportprozesse. Dieses Prinzip gebietet dabei nicht nur über Vorgänge in der Gasdynamik, sondern findet sich in allen Bereichen, in denen zeitabhängige partielle Differentialgleichungen eine Rolle spielen.

Eingegangen: 30.07.2003

Thomas Sonar, Institut für Analysis, TU Braunschweig, Pockelsstr. 14,
38106 Braunschweig

DMV
JAHRESBERICHT
DER DMV
© B. G. Teubner 2003

1 Einführung: Lineare Transportprozesse

Nicht weit von Göttingen entfernt liegt der schöne Ort Ebergötzen, in dem Wilhelm Busch einen Teil seiner Jugend verbrachte und in späteren Jahren seinen Jugendfreund, den Sohn des ortsansässigen Müllers, regelmäßig besuchte. Aus dieser Freundschaft entstanden die Geschichten von ‚Max und Moritz‘, die unzweifelhaft den jungen Busch und den Müllersohn darstellen sollen! Im dritten Streich geht es bekanntlich dem Schneider Böck ans Leder. Eine über das Flübchen führende Brücke wird angesägt, der Schneider wird mit Schmährufen hinausgelockt und stürzt in den Fluß. Hier möchte ich gerne in mein Thema einsteigen.



Abbildung 1: Des Schneiders Sturz!

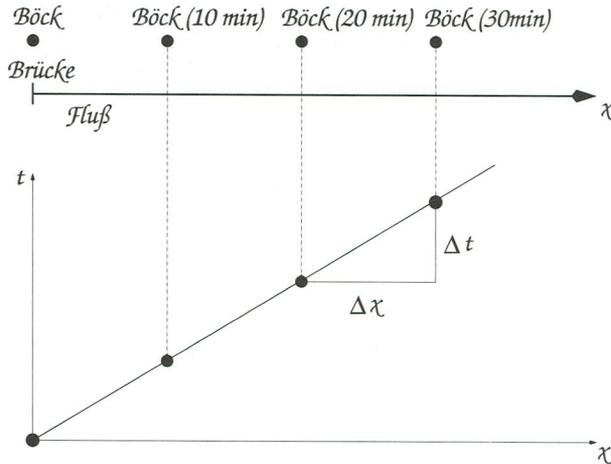


Abbildung 2: Böcks Weg im (x, t) -Diagramm

Nehmen wir an, daß Böck vor Schreck wie gelähmt ist und sich im Wasser nicht rührt! Nehmen wir weiter an, die Fließgeschwindigkeit des Flusses ist konstant und mit v bezeichnet. Dann legt Böck in gleichen Zeitabschnitten (etwa 10 Minuten) gleiche Wege zurück. Denken wir uns den Fluß eindimensional und kennzeichnen wir die sukzessiven Positionen von Böck im Fluß wie in Abbildung 2, dann sehen wir bei Übertragung der

Positionen zu den jeweiligen Zeiten im (x, t) -Diagramm eine Gerade, die sogenannte **Charakteristik**. Durch die Charakteristik ist Böcks Weg im Fluß eindeutig beschrieben. Die Steigung der Charakteristik ist gerade der Kehrwert $\Delta t/\Delta x$ der Geschwindigkeit $v = \Delta x/\Delta t$, d. h. die Steigung ist gerade $1/v$.

Nehmen wir nun an, daß Böck ja nicht notwendig bei der Brücke in den Fluß fallen muß, sondern an irgendeiner Stelle unseres Flusses hineinstürzen kann. Dann können wir im (x, t) -Diagramm an jeder Stelle auf der x -Achse eine Charakteristik anheften wie in Abbildung 3. Nun ersetzen wir den armen Böck durch seine ‚Dichtefunktion‘ u . Sie ist zur Zeit $t = 0$ dadurch definiert, daß wir $u_0 := u(x, 0) = 1$ überall dort setzen, wo Böcks Körper sich befindet, ansonsten soll $u_0 = 0$ gelten. Damit ergibt sich eine Funktion wie in Abbildung 4. Wie läßt sich nun Böcks Bewegung im Fluß beschreiben? Nun, offenbar wird die Dichtefunktion, die zur Zeit $t = 0$ definiert ist, entlang der Charakteristiken aus Abbildung 3 transportiert! Damit hat Böck automatisch die Geschwindig-

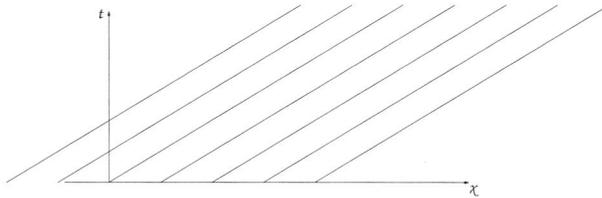


Abbildung 3: Charakteristiken

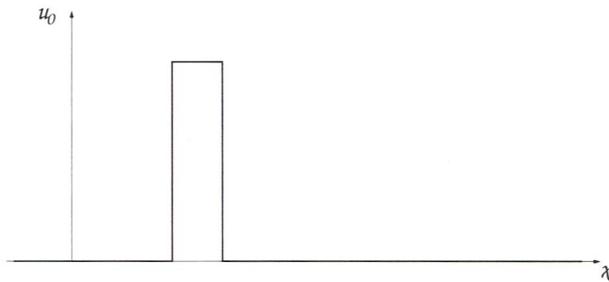


Abbildung 4: Böcks Dichtefunktion

keit $v = \Delta x/\Delta t$ und das ist der Kehrwert der Steigung der Charakteristiken. Können wir nun Böcks Bewegung *mathematisch* fassen? Betrachten wir ein Intervall $[a, b]$ auf der x -Achse und fragen, wie sich die Dichte im gesamten Intervall ändert. Doch nur dadurch, daß Böck von links in das Intervall hineinkommt, oder rechts aus dem Intervall herausgeschwemmt wird. Die Dichte im gesamten Intervall messen wir durch das Integral $\int_a^b u(x, t) dx$ und bedenken, daß das Ein- bzw. Austreten von Böck jeweils mit der Geschwindigkeit v passiert. Dann ist die zeitliche Änderung der Dichte gleich den Geschwindigkeiten an den Rändern, in Formeln:

$$\frac{d}{dt} \int_a^b u(x, t) dx = v \cdot (u(a, t) - u(b, t)).$$

Dabei haben wir das Eintreten von Böck ins Intervall bei $x = a$ positiv gezählt und das Ausschwemmen bei $x = b$ negativ. Schreiben wir die Differenz auf der linken Seite etwas komplizierter, dann erhalten wir

$$\frac{d}{dt} \int_a^b u(x, t) dx = - \int_a^b v \frac{\partial u}{\partial x} dx$$

und das ist nichts anderes als

$$\int_a^b \left(\frac{\partial u}{\partial t} + v \frac{\partial u}{\partial x} \right) dx = 0.$$

Daraus folgt, daß der Integrand verschwinden muß, und wir erhalten schließlich die **lineare Transportgleichung**

$$(1) \quad \frac{\partial u}{\partial t} + v \frac{\partial u}{\partial x} = 0.$$

Mit Hinblick auf alles spätere weise ich Sie darauf hin, daß der durch die lineare Transportgleichung beschriebene Transport **vollständig reversibel**, d. h. umkehrbar ist! Könnten wir nach 10 Minuten den Fluß plötzlich stoppen und genauso plötzlich *rückwärts* mit Geschwindigkeit $-v$ fließen lassen könnten, dann wäre Böck nach weiteren 10 Minuten in genau derselben Form an genau seinen Ausgangspunkt zurückgekehrt!

Würde ich eine neue Größe η einführen, die ich **Entropie** nennen würde (nach dem griechischen Wort für *umkehren*: entrepein), und die den Grad der Nicht-Umkehrbarkeit messen soll, dann würde im Fall von (1) die Entropiedifferenz zwischen $t = 0$ und jeder anderen positiven Zeit gerade $\Delta\eta = 0$ sein, siehe [6].

2 Nichtlinearer Transport

Zu allem Unglück muß ich Ihnen jetzt mitteilen, daß mich *linearer* Transport gar nicht interessiert! Ich bin viel eher interessiert an Gleichungen der Form

$$(2) \quad \frac{\partial u}{\partial t} + u \frac{\partial u}{\partial x} = 0,$$

d. h. die Transportgeschwindigkeit *ist* die Dichte. Sie sagen, so etwas gibt es gar nicht? Oh doch: Denken Sie an Ihre letzte Autobahnfahrt! War Ihre Geschwindigkeit nicht tatsächlich abhängig von der *Verkehrsdichte*? Genau so ist es mit der Gasdynamik: In reibungsfrei strömenden, kompressiblen Gasen *ist* die Geschwindigkeit der Strömung abhängig von der Dichte, nur das die genauen Zusammenhänge viel komplizierter sind, vergl. [5]. Geben wir zur Zeit $t = 0$ eine Anfangsdichte $u_0(x) = u(x, 0)$ vor wie in Abbildung 5, dann haben die Charakteristiken die Steigung $1/u_0(x) = 1$ links von $x = 0$ und $1/u_0(x) = \infty$ rechts von $x = 1$. Dazwischen haben die Charakteristiken alle Steigungen zwischen 1 und ∞ . Auf den Charakteristiken ist die Dichte u wieder konstant. Dann gibt es aber ein Problem am Punkt A , denn dort treffen alle Werte von $u = 0$ bis $u = 1$ aufeinander! An diesem Punkt bricht unsere Lösung zusammen. Die Theorie sogenannter *schwacher* Lösungen (insbesondere der Satz von Rankine und Hugoniot) zwingt uns dazu, einen **Stoß** einzubauen, d. h. eine echte Unstetigkeit der Lösung, vergl. [10, 12, 13,

16]. Wie Sie Abbildung 5 entnehmen können, liegt die Geschwindigkeit dieses Stoßes *zwischen* der Geschwindigkeit der Charakteristiken auf der linken und rechten Seite.

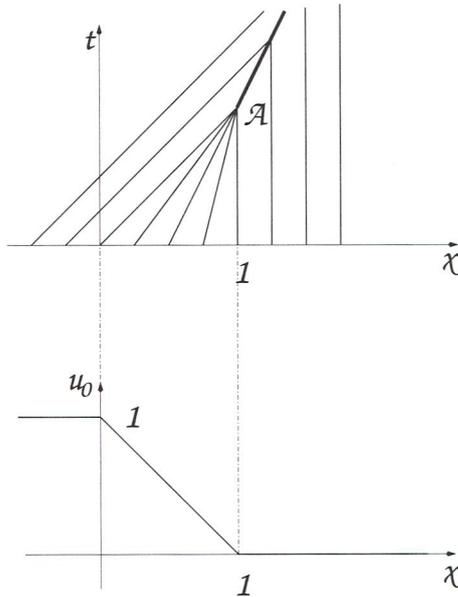


Abbildung 5: Charakteristiken von Gleichung (2)

Die Anfangswertfunktion u_0 wird jetzt nicht nur entlang der Charakteristiken verschoben, sondern durch die konvergierenden Charakteristiken steilt sich der lineare Übergang solange auf, bis eine echte Unstetigkeit entsteht! Solche Unstetigkeiten treten in der Gasdynamik in Form von **Verdichtungsstößen** auf, wie man sie bei der Überschallumströmung eines Flugzeugs im Windkanal in Abbildung 6 (aus [19]) in Form der dunklen Linien erkennen kann. Wie steht es nun mit dem *entrepein*, d. h. der Umkehrbarkeit? Erst einmal spricht nichts dagegen, eine Lösung zur Zeit $t > 0$ entlang den Charakteristiken in der Zeit *zurück*zuschieben. Allerdings gibt es ein interessantes Problem, das ich in Abbildung 7 dargestellt habe. Betrachten Sie die zwei verschiedenen Anfangswertfunktionen in Abbildung 7. Während die eine sofort zu einer Lösung mit einem Stoß führt, benötigt die andere etwas Zeit, bis sich ein Stoß bildet. Hinter diesem Zeitpunkt sind beide Lösungen nicht zu unterscheiden. Kennen Sie nun zu einer späten Zeit die Lösung, dann wissen Sie *nicht*, ob diese Lösung aus der einen oder der anderen Anfangswertfunktion hervorgegangen ist! Nichtlineare Transportprozesse sind im allgemeinen **irreversibel**. Unsere neue Zustandsgröße, die Entropie η , die das Maß der Umkehrbarkeit ist, ist im Laufe des Transports gewachsen, d. h. es muß $\Delta\eta > 0$ gelten. Es ist offenbar **Information** verlorengegangen, nämlich die Information, von welcher Anfangswertfunktion wir gestartet sind.

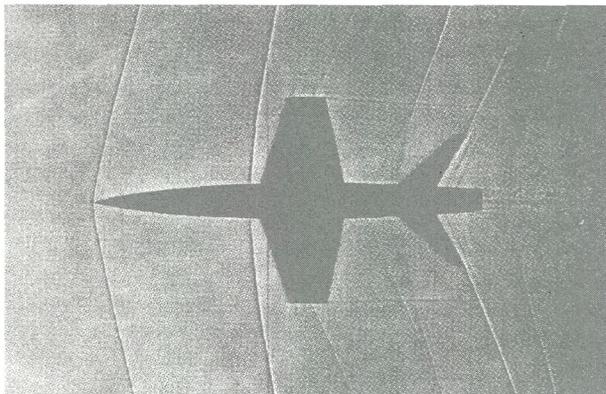


Abbildung 6: Verdichtungsstöße um ein Flugzeugmodell

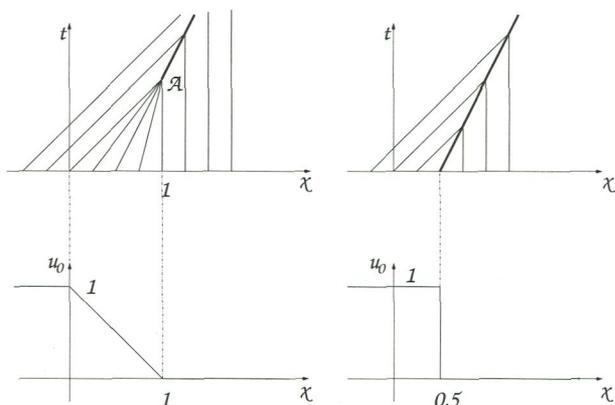


Abbildung 7: Zwei verschiedene Anfangswertfunktionen führen schließlich zur selben Lösung

Geben wir nun als Anfangswertfunktion einen Sprung von 0 auf 1 wie in Abbildung 8 vor und tragen die zugehörigen Charakteristiken in das x - t -Diagramm ein, dann bedecken die Charakteristiken einen Zwickel zwischen $x = 0$ und $t = x$ *nicht*. Um zu einer global definierten Lösung zu gelangen könnten wir einen Stoß wie im linken Teil von Abbildung 8 einführen, von dem aus dann Charakteristiken links und rechts weiterlaufen. Andererseits könnte man mit gleichem Recht einen stetigen Übergang wie im rechten Teil der Abbildung 8 einbauen, eine sogenannte **Verdünnungswelle**. Welche Lösung ist denn nun die richtige? Im linken Bild entstehen Charakteristiken auf dem Stoß zur Zeit $t > 0$. Damit wäre die Lösung im Zwickel durch *zukünftige* Ereignisse bestimmt, d. h. nicht nur durch die Anfangswertfunktion zur Zeit $t = 0$ determiniert! Das ist aber physikalisch nicht möglich, denn wir würden Information *gewinnen*! Ob eine Lösung ‚richtig‘ oder ‚falsch‘ oder besser: ‚möglich‘ oder ‚unmöglich‘ ist, hat offenbar etwas mit der *Richtung* der Sprünge in den Anfangswerten zu tun, vergl. [11]!

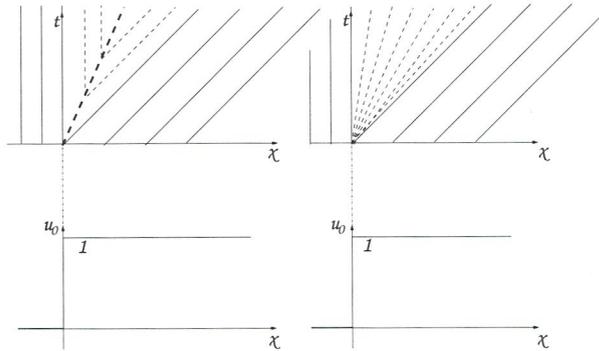


Abbildung 8: Eine Anfangswertfunktion führt scheinbar zu zwei Lösungen

3 Irreversibilität und Diffusion

Die Vorstellung, daß die Entstehung von Stößen etwas mit Irreversibilität zu tun hat, erscheint sehr abstrakt. Wenn wir nach uns vertrauteren irreversiblen Prozessen suchen, stoßen wir schnell auf das Phänomen der **Diffusion**. Dazu werfen wir nun nicht mehr den armen Schneider Böck ins Wasser, sondern wir spucken einfach von der Brücke ins strömende Wasser. Unser Spuckefleck, der schön klein und fast kreisrund war, ist nach dem Durchfließen einer kurzen Strecke schon viel größer geworden und hat seine Form verloren. Könnten wir nun den Fluß anhalten und ihn rückwärts laufen lassen, würde die Spucke *nie* wieder in der Form am Ausgangspunkt ankommen, die sie ursprünglich gehabt hat! Diffusionsprozesse sind daher klassische irreversible Prozesse. Die berühmte Gleichung, die eine lineare Diffusion beschreibt, ist die **lineare Diffusionsgleichung** (oder Wärmeleitungsgleichung)

$$\frac{\partial u}{\partial t} = k \Delta u = k \left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} \right),$$

wobei Δ den **Laplace-Operator** bezeichnet und k den **Diffusionskoeffizienten**. Im Gegensatz zum Transport ist Diffusion also durch das Auftreten der *zweiten* Ableitungen gekennzeichnet.

Was haben wir davon? Was bringt uns die Erkenntnis, daß nichtlinearer Transport und Diffusion offenbar verwandte Aspekte aufweisen? Nun, wir könnten uns zum Beispiel eine *gestörte* nichtlineare Transportgleichung der Form

$$(3) \quad \frac{\partial u^\varepsilon}{\partial t} + \frac{\partial u^\varepsilon}{\partial x} f(u^\varepsilon) = \varepsilon \frac{\partial^2 u^\varepsilon}{\partial x^2}$$

ansehen, wobei man die Funktion f die **Flußfunktion** nennt. Jetzt kann man studieren, was für den Fall $\varepsilon \rightarrow 0$ passiert. Das ist im allgemeinen sehr schwierig, siehe [20], man sieht dann aber, daß solche Lösungen $u = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} u^\varepsilon$ eine **Entropieungleichung** erfüllen, wenn man gewisse Voraussetzungen an f stellt:

$$(4) \quad \frac{\partial \eta(u^\varepsilon)}{\partial t} + \frac{\partial q(u^\varepsilon)}{\partial x} \leq 0,$$

wobei eine neue Funktion q , der **Entropiefluß**, auftaucht. Wenn keine Stöße auftauchen, dann gilt das Gleichheitszeichen (d. h., der Prozeß wird vollständig reversibel sein), tritt ein Stoß auf, dann ändert sich die Entropie nur in eine Richtung!

Diese Entropieungleichung ist eine mathematische Formulierung des **2.ten Hauptsatzes der Thermodynamik**, vergl. [1, 2]. Dieser die uns bekannte Welt beherrschende Satz geht auf Clausius, Boltzmann und Lord Kelvin im 19. Jahrhundert zurück. Der Mathematiker Caratheodory hat im 20. Jahrhundert eine axiomatische Fassung gegeben. Für den Hausgebrauch sagt der 2. te Hauptsatz:

Alle natürlichen Prozesse sind irreversibel. Reversible Prozesse sind nur idealisierte Grenzfälle irreversibler Prozesse.

In einer Fassung von Max Planck liest sich das so:

Alle Prozesse, bei denen Reibung auftritt, sind irreversibel.

Rudolf Clausius schrieb:

Wärme kann nie von einem kälteren auf einen wärmeren Körper übergehen,

und Ludwig Boltzmann [3] und der moderne Informationstheoretiker Claude Shannon [15] geben dem Satz die Form:

In realistischen Prozessen geht stets Information verloren,

siehe auch [18]. Damit sehen Sie die gesamte Bandbreite dieses Satzes auf einen Schlag: Irreversibilität, Wärme (Diffusion) und Information sind eng verwandte Begriffe, wobei die Verwandtschaft durch den 2. ten Hauptsatz dokumentiert wird.

Diffusion muß übrigens nicht notwendig auf den ersten Blick etwas mit einer partiellen Differentialgleichung wie der Wärmeleitungsgleichung zu tun haben! Betrachtet man ein **Teilchen** in einer Ebene und läßt pro Zeitschritt einen Schritt des Teilchens auf einem cartesischen Gitter zu, wobei man die Richtung auswürfelt (das nennt man **Brownsche Bewegung**), dann kann man zeigen, daß das Teilchen einer Diffusionsgleichung genügt, siehe [4]! Diffusion kann also auch gedeutet werden als eine Form von **zufälliger Bewegung**!

4 Diskrete Welten

Nichtlineare Transportgleichungen sind mathematisch knifflige Dinge. Für die wirklich interessanten Gleichungen, wie für die **Eulerschen Gleichungen der Gasdynamik**, gibt es fast keine mathematischen Resultate. Selbst die schiere Existenz von Lösungen ist (außer für triviale Sonderfälle) noch nicht bewiesen! Die Euler-Gleichungen für zweidimensionale Strömungen werden beschrieben durch

$$\frac{\partial}{\partial t} \begin{bmatrix} \rho \\ \rho u \\ \rho v \\ \rho E \end{bmatrix} + \frac{\partial}{\partial x} \begin{bmatrix} \rho u \\ \rho u^2 + p \\ \rho uv \\ \rho Hu \end{bmatrix} + \frac{\partial}{\partial y} \begin{bmatrix} \rho v \\ \rho uv \\ \rho v^2 + p \\ \rho Hv \end{bmatrix} = 0$$

und stellen ein nichtlineares, gekoppeltes System von Transportgleichungen für die unbekanntenen Größen Dichte ρ , Geschwindigkeitsvektor mit Komponenten u und v , und Totalenergie E dar. Die Größe H , die Enthalpie, ist nur eine Abkürzung für $H := E + p/\rho$ und der Zusammenhang zwischen Energie und Druck ist gegeben durch eine Zustandsgleichung – für ideale Gase etwa: $p = (\kappa - 1)\rho(E - (u^2 + v^2)/2)$, wobei κ für Luft konstant 1.4 ist.

Will man Lösungen solcher Systeme wenigstens näherungsweise berechnen (und die Welt der Ingenieure kann nicht warten, bis wir die Existenzprobleme mathematisch in den Griff bekommen haben), dann benötigt man **numerische Methoden**, siehe u. a. [7]. Der Einfachheit halber bleiben wir bei unserem eindimensionalen Modell

$$\frac{\partial u}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x} f(u) = 0.$$

Hier kann man ein **Gitter** in Raum und Zeit verwenden, wobei jeder Gitterpunkt durch zwei Zahlen (j, n) bezeichnet werden kann. Hat das Gitter die Maschenweiten Δx in Raum- und Δt in Zeitrichtung, dann ist ein Gitterpunkt gegeben durch $(j \cdot \Delta x, n \cdot \Delta t)$. Ersetzt man nun die Differentialquotienten $\frac{\partial u}{\partial t}$ und $\frac{\partial}{\partial x} f(u)$ durch **Differenzenquotienten**, etwa so:

$$\frac{\partial u}{\partial t} \approx \frac{U_j^{n+1} - U_j^n}{\Delta t}$$

$$\frac{\partial}{\partial x} f(u) \approx \frac{F_{j+1}^n - F_{j-1}^n}{2\Delta x},$$

wobei U_j^n einen Näherungswert für $u(j\Delta x, n\Delta t)$ und $F_j^n = f(U_j^n)$ bedeutet, dann erhalten wir ein diskretes Abbild unserer nichtlinearen Transportgleichung in der Form:

$$(5) \quad U_j^{n+1} = U_j^n - \frac{\Delta t}{2\Delta x} (F_{j+1}^n - F_{j-1}^n).$$

Vermutlich in den 40er Jahren des 20. Jahrhunderts wurde erstmalig versucht, kompressible Strömungen mit Hilfe einer solchen Differenzengleichung zu berechnen, und zwar von John von Neumann im Rahmen des Manhattan-Projekts in Los Alamos. Von Neumann stellte fest, daß die so kanonisch gewonnene Differenzengleichung (5) tatsächlich völlig unbrauchbar ist – sie ist **instabil**, siehe z.B. [14]. Diese Instabilität äußert sich in heftigen Oszillationen die schließlich so stark werden, daß die Rechnung abbricht. Blicken wir auf unsere Diskussion über Entropie zurück dann könnten wir jetzt argumentieren, daß sich in Oszillationen physikalisch falsche Stöße verstecken, d. h. Sprünge, die in ‚falscher‘ Richtung verlaufen. Also wird der 2.te Hauptsatz mit Füßen getreten und wir könnten auf die Idee kommen, die Gleichung (5) mit etwas Diffusion zu versehen! Genau diese Idee hatte von Neumann, obwohl er von einer anderen Richtung her dachte! Man sollte also zu (5) eine Diskretisierung einer (kleinen!) Diffusion proportional zu $\partial^2 u / \partial x^2$ hinzufügen:

$$U_j^{n+1} = U_j^n - \frac{\Delta t}{2\Delta x} \left(F_{j+1}^n - F_{j-1}^n + \Delta \left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \right) \right),$$

wobei Δ einen Differenzenoperator darstellen soll, der eine diskrete Form seines Arguments zurückliefert. Damit lösen wir also auf dem Computer eigentlich eine gestörte Gleichung der Form (3)! Der Nachteil liegt in der Verschmierung der numerischen Lösung: Stöße werden als steile, aber glatte Funktionen dargestellt.

Man kann nun eine diskrete Diffusion genau wie in der obigen Differenzgleichung direkt einführen und es gibt zahllose Arbeiten, die sich mit Methoden dieses Typs beschäftigen, man kann aber auch einen anderen Weg gehen! In den 1960er Jahren arbeitete ein junger Mathematiker, James Glimm, in New York an seiner Dissertation. Er betrachtete die diskrete Lösung als stückweise konstant auf Zellen eines Gitters. Damit entsteht lokal an jeder Zellgrenze ein sogenanntes **Riemann-Problem**, wobei ich wieder in Göttingen angekommen bin, da Bernhard Riemann dieses Problem tatsächlich hier in Göttingen bearbeitet hat! Trennt man Luft in einem Rohr durch eine Membran ab und sorgt dann in der linken Hälfte für einen sehr hohen Druck, dann kann man fragen, welche Strömung sich nach Entfernen der Membran im Rohr einstellt. Vor Riemann hatten der Schotte Rankine und der Franzose Hugoniot partielle Antworten gefunden, aber es blieb dem Genie Riemanns überlassen, die richtige Lösung (bis auf einen kleinen Fehler: Riemann hatte nicht auf die Entropie geachtet!) zu finden. Die Riemannsche Lösung besteht aus einem Stoß, der ins dünne Gas läuft, einer Verdünnungswelle und einer sogenannten Kontaktsunstetigkeit, über die hinweg einige – aber nicht alle – Strömungsgrößen unstetig sind. Die geniale Idee, Riemann-Probleme in der Numerik zu verwenden, geht auf den Russen Godunov zurück. Er löste die lokalen Riemann-Probleme numerisch bis zum nächsten Zeitschritt und *mittelte* die so gefundenen Lösungen, um wieder auf stückweise konstante Strömungsgrößen zu kommen. Dieser Mittelungsprozeß läßt nun wieder Information verschwinden, so daß das **Godunov-Verfahren** immer die richtige Lösung findet! Im Gegensatz zu Godunov verwendete Glimm eine **zufällig Auswahl** der Lösung der lokalen Riemann-Problemen auf der nächsten Zeitschicht, d. h. nach Lösung der lokalen Riemann-Probleme werden die nächsten stückweise konstanten Strömungsgrößen ausgewürfelt! Der Riesenvorteil: **Stöße sind im Glimmschen Verfahren immer ganz scharf**, d. h. sie werden nicht durch Diffusion verschmiert dargestellt. Aber immerhin wurde gewürfelt, es gibt also ein statistisches Moment in der Methode. Nach unserer Diskussion der Brownschen Bewegung könnte man auch hier eine gewisse Diffusion vermuten, aber wo ist sie? Nun, sie steckt im Ort des Stoßes: **Im Glimmschen Verfahren stimmt die Position des Stoßes nur im statistischen Mittel!** Damit gilt in der Numerik von Erhaltungsgleichungen eine Art **Unschärferelation**: *Entweder* kennt man den genauen Ort eines Stoßes, dann ist der Stoß aber durch die **numerische Viskosität** verschmiert, *oder* der Stoß ist absolut scharf, aber seine Position ist nicht exakt zu ermitteln. Informationen über das Godunov-Verfahren findet man in [9] und über das Glimm-Verfahren in [16].

Das Hinzufügen von Diffusion in irgendeiner Form ist also zur numerischen Lösung nichtlinearer Transportprozesse unverzichtbar. Diffusion bedeutet aber auch Informationsverlust, d. h. Phänomene in der Lösung werden gedämpft und verschmiert. Gibt es eine Möglichkeit Diffusion *so* einzusetzen, daß möglichst wenig davon zu sehen ist?

5 Bildverarbeitung in der Numerik nichtlinearer Transportvorgänge

In den vergangenen Jahrzehnten sind sehr intelligente numerische Verfahren entwickelt worden, mit denen sich nichtlineare Transportprozesse numerisch lösen lassen, siehe [17]. In Abbildung 9 ist links ein Windkanalbild einer Strömung um einen Keil zu sehen. Zu Beginn ist ein Stoß erzeugt worden (übrigens in einem Riemannschen Stoßrohr!), der von links nach rechts auf den Keil läuft. Ist der Stoß vollständig über den Keil gelaufen, dann sehen wir ein wundervolles Muster aus interagierenden Wirbeln, Stößen und Kontaktunstetigkeiten. Im Bild rechts daneben sehen wir die numerische Dichteverteilung, die mit einem modernen Verfahren errechnet wurde. Weiß man, wie Windkanalbilder, sogenannte Schlierenaufnahmen, wie das in Abbildung 9 gezeigte gemacht werden, dann kann man auch die numerischen Lösungen genau so behandeln, um einen besseren Vergleich zwischen Windkanalbild und numerischer Lösung zu gewährleisten. Ein solches Bild sehen wir in Abbildung 10 und ein Vergleich mit der ‚echten‘ Schlierenaufnahme in Abbildung 9 zeigt, wie gut das verwendete numerische Verfahren bereits ist.

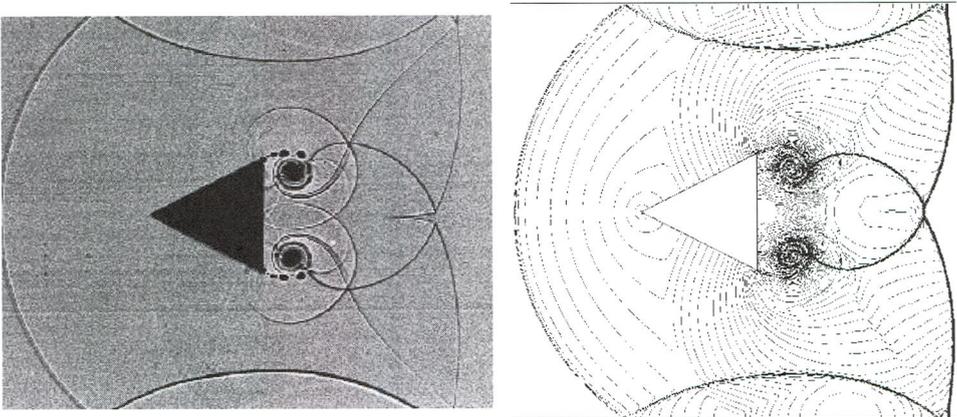


Abbildung 9: Strömung (links) und numerische Lösung der Strömung um einen Keil

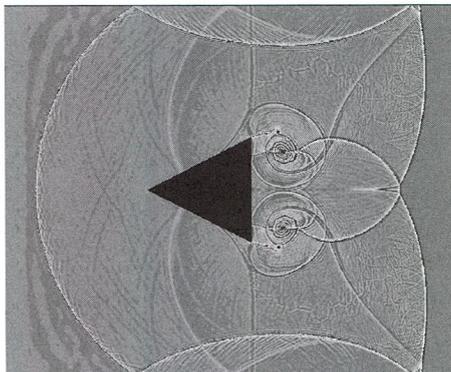


Abbildung 10: Numerische Lösung der Strömung um einen Keil als Schlierenaufnahme

Eine Idee zur Konstruktion einer ganz neuen Klasse numerischer Methoden kommt aus der **Bildverarbeitung**, siehe [21]. Dort wurden in den letzten Jahren *nichtlineare Diffusionsgleichungen* zum Entrauschen von Bildern entwickelt. Ein schwarz-weiß-Photo besteht aus **Pixeln**, so wie eine numerische Lösung einer Transportgleichung aus diskreten Werten auf einem Gitter besteht. Bei einem Photo möchte man das Rauschen entfernen, in der Numerik von Transportgleichungen möchte man unphysikalische Oszillationen entfernen. Im Photo möchte man scharfe Kontraste zwischen den Pixeln behalten, in der Numerik von Transportgleichungen möchte man scharfe Stöße nicht verschmieren. Man sieht aus dieser kurzen Diskussion, daß es sich offenbar um zwei scheinbar völlig getrennte Bereiche handelt, die dieselben Ziele verfolgen!

Eine nichtlineare Diffusionsgleichung ist eine partielle Differentialgleichung der Form

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial x} \left(D(u) \frac{\partial u}{\partial x} \right),$$

wobei $D(u)$ ein von u abhängiger Diffusionskoeffizient ist. Eine berühmte Gleichung von diesem Typ ist der sogenannte Perona-Malik-Filter

$$(6) \quad \frac{\partial u}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial x} \left(g \left(\left| \frac{\partial u}{\partial x} \right|^2 \right) \frac{\partial u}{\partial x} \right),$$

wobei g die Funktion

$$g(s^2) := \frac{1}{1 + \frac{s^2}{\lambda^2}}, \quad \lambda > 0$$

bezeichnet, in der λ ein Parameter ist. Man beachte, daß der Diffusionskoeffizient g tatsächlich immer positiv ist. Führt man die äußere Ableitung im Perona-Malik-Filter aus, dann erhält man die Gleichung

$$(7) \quad \frac{\partial u}{\partial t} = \Phi'(u_x) u_{xx},$$

wobei $u_x := \partial u / \partial x$, $u_{xx} := \partial^2 u / \partial x^2$ und $\Phi(s) := sg(s^2)$ bezeichnet. Aus dieser Definition sieht man, daß die Ableitung $\Phi'(s)$ positiv ist für $|s| \leq \lambda$, aber negativ für $|s| > \lambda$. Hier nun sieht man die Funktionsweise des Perona-Malik-Filters ganz deutlich: Ist $|u_x| \leq \lambda$, d. h. sind die Oszillationen in u klein, dann ist (7) eine nichtlineare Wärmeleitungsgleichung und ihr Effekt wird ein glättender sein. Ist aber $|u_x| > \lambda$, d. h. gibt es große Sprünge in u (z.B. ein Stoß!), dann ist Φ' negativ und (7) ist eine Diffusionsgleichung, die man **rückwärts** löst, d. h. mit negativer Diffusion! Eine Diffusionsgleichung mit negativem Diffusionskoeffizienten steilt starke Gradienten auf, aber die ‚Rückwärts-Diffusionsgleichungen‘ sind **schlecht gestellte Probleme**, d. h. sie sind numerisch unbrauchbar. Wir brauchen zum Glück aber (7) gar nicht zu lösen, denn wir haben ja (6) mit durchgehend positivem Diffusionskoeffizienten! Nun ist (6) vollständig äquivalent zu (7) und wir haben den wundervollen Fall, daß wir eine nichtlineare Diffusionsgleichung rückwärts lösen können (und damit Stöße *schärfen* können!), durch Lösung einer Diffusionsgleichung mit *positiver* Diffusion!

So, nun habe ich Ihnen doch einiges an Mathematik zugemutet. Ich hoffe aber, daß Ihnen die Stoßrichtung dieser neuen Ideen in der Numerik von Transportgleichungen klar geworden ist. Mit Hilfe neuer Diffusionen – und der Perona-Malik-Filter ist nur *ein* Beispiel aus einer riesigen Klasse von Möglichkeiten – sind wir in der Lage, unphysikalische Oszillationen herauszufiltern, aber Stöße in jedem Schritt nachzuschärfen! Erste numerische Tests, vergl. [8], stimmen uns sehr positiv, auf diesem Sektor neue Ufer zu erreichen.

Zum Abschluß möchte ich Ihnen noch die Möglichkeiten der modernen nichtlinearen Filter an Beispielen aufzeigen. In Abbildung 11 sehen Sie links das verrauschte Photo eines Mandrills. Im rechten Bild sehen Sie das Ergebnis nach Filterung mit einem nichtlinearen Diffusionsfilter. Das Rauschen ist völlig herausgefiltert worden, aber die

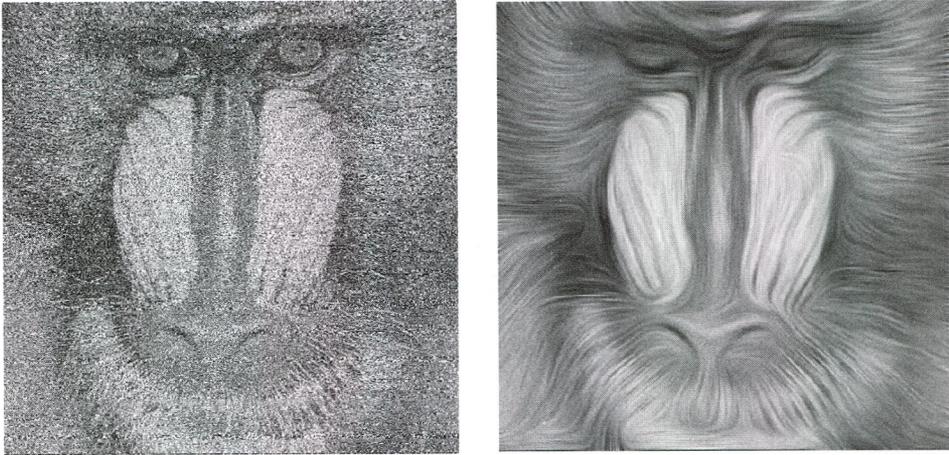


Abbildung 11: Verrauschtes Photo (links) und Wirkung eines nichtlinearen Diffusionsfilters

Strukturen des Fells sind jetzt viel deutlicher sichtbar als im Originalphoto. Nichtlineare Diffusionsfilter sind also auch hervorragende Strukturerkenner. Überträgt man Filter dieser Art auf bekannte Differenzenverfahren zur Lösung von Transportgleichungen, siehe [8], dann ergeben sich schon erstaunliche Resultate. In Abbildung 12 ist im linken Teil die numerische Lösung eines klassischen Verfahrens 2. Ordnung für eine nichtlineare Transportgleichung in zwei Raumdimensionen zu sehen. Dieses Verfahren aus den 1960er Jahren zeigt heftige Oszillationen rechts und links des Stosses, aber die Stoßauflösung selbst ist zufriedenstellend. Wendet man nun einen nichtlinearen Diffusionsfilter in jedem Zeitschritt an, dann ergibt sich das Bild im rechten Teil von Abbildung 12. Die Oszillationen sind verschwunden und die Lösung ist von der eines modernen Verfahrens nicht mehr zu unterscheiden. Neben den beschriebenen Diffusionsfiltern gibt es noch weitere Klassen von interessanten Filtern, die in der Numerik von Transportprozessen Verwendung finden sollten. Dabei denke ich insbesondere an sogenannte TV-Filter, die die *Variation* der numerischen Lösung, d. h. ihre Schwankung bzw. die Oszillationen, abbauen. Auch bei diesen Filtern spielt die Entropie eine wichtige Rolle. Es ist sehr reizvoll zu sehen, wie Bildverarbeitung und Numerik von Transportprozessen aus unter-

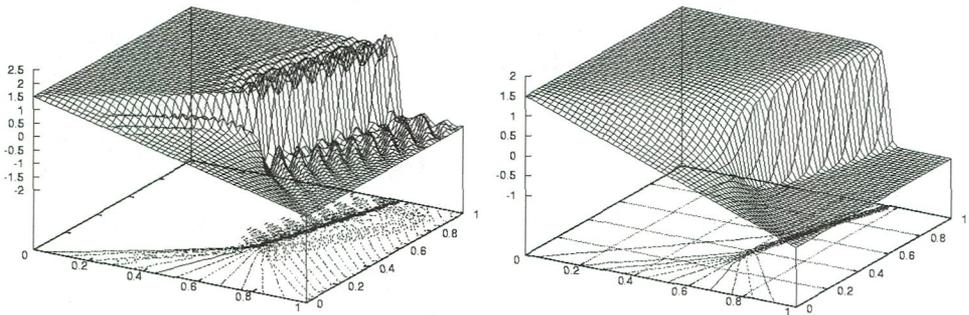


Abbildung 12: Numerische Lösung einer nichtlinearen Transportgleichung ohne (links) und mit Einsatz eines nichtlinearen Diffusionsfilters

schiedlichen Richtungen zusammenkommen, um ein neues Gebiet in der Numerik zu erschließen. Allerdings bleibt noch viel zu tun!

6 Rückblick und Danksagung

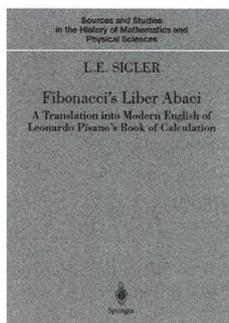
In dieser Gauß-Vorlesung stand die Entropie und ihre Rolle in der Numerik nichtlinearer Transportprozesse im Mittelpunkt. Ich hoffe, daß ich Ihnen die Faszination dieses aktiven Gebietes der Numerischen Analysis nahebringen konnte. Danken möchte ich insbesondere meinem Saarbrücker Kollegen Herrn Prof. Dr. Joachim Weickert, der ein Experte auf dem Gebiet der Bildverarbeitung ist. Er hat nicht nur Abbildung 11 (und viele weitere der im Vortrag gezeigten Abbildungen) freizügig zur Verfügung gestellt, sondern arbeitet in unserem gemeinsamen DFG-Projekt zur Entwicklung neuer Transportalgorithmen mit Mitteln der Bildverarbeitung federführend auf der Bildverarbeiterseite. Ich danke der Deutschen Forschungsgemeinschaft, die das Projekt SO 363/9-1 auf meiner Seite unterstützt.

In diesem Jahr wurde unserer Familie ein wundervoller Mensch und selbstloser Freund durch eine schwere Krankheit genommen. Meine Mathematikerkollegen mögen mir verzeihen, wenn ich diese Vorlesung ganz dem Andenken an diesen Menschen widme, der Mathematik zwar immer bewundert hat, dessen großes Herz jedoch der Kirchenmusik und der Jugendarbeit gehörte.

Literatur

- [1] H.D. Baehr – Thermodynamik. *Springer Verlag, 4te Auflage 1978.*
- [2] R. Becker – Theorie der Wärme. *Springer Verlag, 3te Auflage 1985.*
- [3] L. Boltzmann – Entropie und Wahrscheinlichkeit. *Verlag Harri Deutsch 2000.*
- [4] A.J. Chorin – Vorticity and Turbulence. *Springer Verlag 1994.*
- [5] R. Courant, K.O. Friedrichs – Supersonic Flow and Shock Waves. *Interscience Publ. 1948.*
- [6] J.S. Dugdale – Entropy and its Physical Meaning. *Taylor & Francis 1996.*
- [7] E. Godlewski, P.-A. Raviart – Numerical Approximation of Hyperbolic Systems of Conservation Laws. *Springer Verlag 1996.*

- [8] Th. Grahs, A. Meister, Th. Sonar – Image Processing for Numerical Approximations of Conservation Laws: Nonlinear Anisotropic Artificial Dissipation. (SIAM J. Sci. Comput. **23**, 5, 1439–1455, 2002).
- [9] M. Holt – Numerical Methods in Fluid Dynamics. *Springer Verlag, 2nd ed. 1984.*
- [10] A. Jeffrey – Quasilinear hyperbolic systems and waves. *Pitman Publ. 1976.*
- [11] P.D. Lax – Hyperbolic Systems of Conservation Laws and the Mathematical Theory of Shock Waves. *SIAM 1973.*
- [12] A. Majda – Compressible Fluid Flow and Systems of Conservation Laws in Several Space Variables. *Springer Verlag 1984.*
- [13] C.S. Morawetz – Lectures on Nonlinear Waves and Shocks. *Springer Verlag 1981.*
- [14] R.D. Richtmyer, K.W. Morton – Difference Methods for Initial-Value Problems. *Interscience Publ. 1967.*
- [15] C.E. Shannon, W. Weaver – The Mathematical Theory of Communication. *University of Illinois Press 1963.*
- [16] J. Smoller – Shock Waves and Reaction-Diffusion Equations. *Springer Verlag, 2nd edition 1994.*
- [17] Th. Sonar – Mehrdimensionale ENO-Verfahren. *Teubner Verlag 1997.*
- [18] F. Topsøe – Informationstheorie. *Teubner Verlag 1974.*
- [19] M. Van Dyke – An Album of Fluid Motion. *The Parabolic Press 1982.*
- [20] G. Warnecke – Analytische Methoden in der Theorie der Erhaltungsgleichungen. *Teubner Verlag 1999.*
- [21] J. Weickert – Anisotropic Diffusion in Image Processing. *Teubner Verlag 1998.*



L. Sigler
**Fibonacci's Liber
 Abaci**

Berlin u. a., Springer, 2002, 636 S.,
 EUR 99,95

Im Jahre 1202 des pisanischen Kalenders, das ist für uns die Zeitspanne vom 25.3.1201 bis 24.3.1202, schrieb Leonardo Pisano die erste Version seines *liber abbaci*. Sechszwanzig Jahre danach kam er der Bitte Michael Scottus', eines Hofphilosophen Friedrichs II., nach einer Abschrift dieses Buches nach, wobei er es, wie er schreibt, gründlich überarbeitete. Nur diese zweite Version ist uns überliefert. Es sind heute noch dreizehn Kodizes bekannt, von denen einige den ganzen Text, andere nur die letzten beiden Kapitel des *liber abbaci* enthalten. Einzelheiten finden sich in meinem „Lesevergnügen“.

Der umfangreichste dieser Kodizes wurde 1857 von Baldassarre Boncompagni im Druck herausgegeben. Dieser Edition folgt die vorliegende Übersetzung von Laurence E. Sigler.

An Hand dieser Übersetzung kann man sich ein Bild von dem machen, was Leonardos *liber abbaci* bietet: Das Darstellen natürlicher Zahlen nach Art der Inder – das uns nun so vertraute Dezimalsystem –, das Rechnen mit solcher Art dargestellten Zahlen, das Rechnen mit Brüchen, wobei hier zum ersten Male in der Literatur der Bruchstrich auftaucht, die Aufgaben des Kaufmanns. Wenn die Aufgaben des Praktikers gelöst und zur Routine geworden sind, betreibt der Mathematiker Mathematik an sich. Das wird auch im *liber abbaci* deutlich. Es gibt dort herrliche lineare Probleme ohne jegliche Anwen-

dung, von denen keines in der Form vorkommt, die wir heute Standardform nennen. Bei vielen wird zu ihrer Formulierung von zyklischer Vertauschung Gebrauch gemacht und bei einigen die dadurch entstehende zyklische Symmetrie auch bei der Lösung benutzt. Es werden Verfahren geliefert, Quadrat- und Kubikwurzeln zu approximieren, wobei der rekursive Charakter dieser Verfahren ganz klar erscheint. – Kann ich die größte Ganze aus der Quadratwurzel einer drei- oder vierstelligen Zahl bestimmen, dann auch von einer fünf- bzw. sechsstelligen Zahl. – Ferner wird Buch X der euklidischen Elemente dargestellt, wobei Leonardo sich aber im Gegensatz zu Euklid algebraischer Methoden bedient, wodurch die Existenzaussagen viel einfacher zu etablieren sind.

Euklid kommt auch nicht ohne algebraische Methoden zum Ziel, er identifiziert aber nicht Strecken mit Zahlen, deren Quadratwurzeln und aus ihnen algebraisch zusammengesetzten weiteren Zahlen. Dies macht Leonardo ohne Hemmungen. Er erleichtert sich dadurch die Arbeit, wenn er auch an Präzision verliert, bzw. Sätze anderer Art bekommt, nämlich Sätze über gewisse algebraische Zahlen an Stelle von Sätzen über Strecken.

Darin besteht also der Wert der Übersetzung, dass man sich einen Überblick über den Inhalt des *liber abbaci* verschaffen kann. Im Einzelnen gibt es aber viel zu kritisieren.

Die Einleitung ist völlig indiskutabel. Sie machte auf mich den Eindruck, als sei sie von jemandem geschrieben, der zwar viele Detailkenntnisse besaß, diese aber aus zweiter Hand hatte und sie dann frei bearbeitete. Die Einleitung wurde aber von L. E. Sigler noch vor seinem Tode geschrieben, wie er auch die Übersetzung vollendet hatte. Dies ergaben meine Recherchen. Ich hätte mir gewünscht, dass der Springer-Verlag diese Information dem Buch mitgegeben hätte.

Die Übersetzung ist unzuverlässig. Ich habe sie mir natürlich nicht komplett angesehen. Ich habe mir vielmehr die Stellen herausgesucht, die ich als kritisch in Erinnerung hatte. Da fanden sich genügend Fehler und

andere Ungereimtheiten, um sie als unzuverlässig einzustufen. Gleich der erste Satz der Übersetzung hat mit dem ersten Satz des Originals nur wenig zu tun. Ich frage mich, ob irgendjemand die Übersetzung vor der Publikation zumindest in Teilen kontrolliert hat.

Wer mit dem Buch wissenschaftlich arbeiten will – es wird der Anspruch erhoben, dass man das könne –, muss den boncompagnischen Text des *liber abbaci* zur Hand haben. Kontrolle tut Not.

Das Schriftbild des Buches lässt zu wünschen übrig. Die Schrift der Vorlage scheint eine 10-Punkt-Schrift gewesen zu sein, die zu einer 9-Punkt-Schrift verkleinert wurde. Dabei ist das Unterschneiden bei den kursiv gesetzten Teilen des Textes aus den Fugen geraten. Hierzu gehören auch die vielen Marginalien. Ihr Anblick ist wenig harmonisch.

Die hier geübte Kritik ist sehr pauschal. Für Begründungen blieb kein Platz. Wer Einzelheiten wissen möchte, findet solche unter <http://www.mathematik.uni-kl.de/~luene/miszellen/abbaci.html>

Literatur

Baldassarre Boncompagni, *Scritti di Leonardo Pisano. Vol. I, Il liber abbaci*. Roma 1857
 Heinz Lüneburg, *Leonardi Pisani Liber Abbaci oder Lesevergnügen eines Mathematikers*. 2. Auflage. Mannheim 1993

Kaiserslautern

H. Lüneburg



M. Folkerts
Carl Friedrich Gauß'
Aktivitäten an der
Universität Göttingen
 Nachrichten der
 Akademie der Wissen-
 schaften zu Göttingen

II. Mathematisch-Physikalische Klasse.
 Jahrgang 2002, Nr. 2.

Göttingen: Vandenhoeck & Ruprecht: 2002.
 131 S. EUR 17,90.

Innerhalb der reichhaltigen und vielseitigen Literatur über das Leben und Schaffen von Carl Friedrich Gauß nimmt diese neue Publikation eine Sonderstellung ein: sie ist das Ergebnis ausgedehnter Archivstudien. Dabei hat der Autor vor allem auch Quellen, die bisher in Darstellungen der Geschichte der Universität Göttingen nicht beachtet wurden, sorgfältig ausgewertet. Die Resultate werden hier systematisch präsentiert und, soweit dazu geeignet, in Tabellen wiedergegeben. Im Anschluß an einen kurzen Überblick über die Göttinger Universität zur Zeit von Gauß werden folgende Themen behandelt: Gauß als Leiter der Sternwarte; Gauß' Vorlesungstätigkeit; von Gauß gestellte Preisaufgaben; Promotionen und Habilitationen, an denen Gauß beteiligt war; Gauß als Dekan der Philosophischen Fakultät: die große Politik und ihre Auswirkungen auf die Philosophische Fakultät.

Als Leiter der neu für Gauß zu errichtenden Sternwarte hatte er sich um Baumaßnahmen zu kümmern, insbesondere um die Beschaffung von Instrumenten, Büchern und Himmelskarten. Verf. hat sich dazu u. a. die Abrechnungsbelege angesehen und bemerkt: „All dies erinnert an die heutige Universitätsbürokratie“. Die Auswahl der Gehilfen oblag Gauß ebenso wie die Entscheidung darüber, welche Instrumente er von Göttinger Werkstätten (die oft seinen Ansprüchen nicht genügten) und welche er von den von ihm besonders geschätzten Münchner Werkstätten bezog.

„Gegen das Dociren habe ich einmal eine wahre Abneigung“, schrieb Gauß schon 1802 an Olbers – in Gauß' Verabredungen mit der Regierung war übrigens von Vorlesungsverpflichtungen nicht die Rede. Dennoch umfaßt die Vorlesungsliste (Anhang 3) über 40 angekündigte Themen (einige häufig wiederholt), darunter auch praktische Übungen zur Astronomie und Geodäsie, aber auch physikalische Vorlesungen zur Theorie des Erdmagnetismus.

Nachdem er 1828 Mitglied der engeren („Honoren-“)Fakultät geworden war (die aus acht Professoren bestand), nahm Gauß auch die damit verbundenen Verpflichtungen sehr ernst. Dazu gehörte das Stellen der jährlichen Preisaufgaben für Studenten. Im Vergleich zu den zuvor formulierten Aufgaben mathematisch-astronomisch-physikalischen Inhalts machte Gauß deutlich abstraktere Vorschläge: seiner Ansicht nach sollte nicht allein Belesenheit und Fleiß belohnt werden, sondern die Themen sollten „die Tendenz haben dürfen, die eigne Kraft anzuregen, dem Scharfsinn Spielraum und dem Talent Aufmunterung zu geben.“ Anhang 5 enthält nicht nur die Themenstellungen, sondern auch die Namen der Bearbeiter der (in Latein abzufassenden) Preisschriften sowie die Texte von vier erhaltenen Gaußschen Gutachten.

Die Schilderung der Promotionsvorgänge (für die zunächst keine Dissertation erforderlich war) in Kap. 5 wird ergänzt durch drei Anhänge: eine Übersicht über die Anzahl der Promotionen in der Philosophischen Fakultät von 1799 bis 1855, über die mathematisch-astronomischen Promotionen (Promovenden, Themen, Prüfer) und die informative Wiedergabe der Gaußschen Gutachten (18 aus den Jahren 1830 bis 1855). Gelegentlich genügte Gauß ein einziger Satz als positive Beurteilung, z. B. „Herr Listing ist unter allen Zuhörern, die ich je gehabt habe, einer der ausgezeichnetsten, und seine Probschrift gerecht sowohl seinen Kenntnissen als seinem Forschungsgeist zur Ehre.“

Unter den Habilitationen ragt bekanntlich diejenige Riemanns im Jahr 1854 heraus. Auch in diesem (kurzen) Kapitel beschreibt Verf. zunächst die allgemeinen Umstände und Bestimmungen, soweit sie den Akten zu entnehmen waren. Eine Habilitation ohne vorherige Vorlage einer Doktor-Dissertation lehnte Gauß ab – auch durch Zitate wird wieder sein Beharren auf hoher Qualität der Habilitationsschrift bezeugt (weniger Bedeutung wies er dem Kolloquium zu).

Im kurzen Kap. 7 wird Gauß als Dekan der philosophischen Fakultät behandelt. Er hatte das Amt dreimal inne, eine vierte Amtsperiode lehnte er im Alter von 74 Jahren ab (von der Wahl zum Prorektor ließ er sich von vornherein dispensieren). Zum Dekanat berichtet der Verf.: „Gauß hat während seiner drei Dekanate die Fakultätsakten muster­gültig geführt ... Gauß legte auch hier auf die strikte Einhaltung der Statuten Wert.“

Das Kap. 8 über die große Politik bezieht sich auf Gauß' Tätigkeit in der Honoren-Fakultät. In den Jahren 1831–1833 hatte man es mit Studentenunruhen zu tun, doch die (üblicherweise) kleine Zahl seiner Hörer ließ, wie Gauß bezeugte, keinen Mangel an Eifer erkennen. Eine wichtige Rolle spielten 1837 die Ereignisse um die Göttinger Sieben, gehörte doch sowohl Gauß' Physik-Kollege und Mitarbeiter bei der Erforschung des Elektromagnetismus Wilhelm Weber wie sein Schwiegersohn Heinrich Ewald zu den Unterzeichnern des Protestes gegen die Mißachtung der Verfassung durch den neuen König Ernst August. Gauß' Bemühungen zugunsten Webers werden beschrieben. Anhang 9 enthält eine Reihe von bisher unpublizierten Briefen mit den Regierungsvertretern F. von Laffert bzw. J. C. von Leist aus dem Jahr 1838, die die Versuche illustrieren, Weber wieder in seine Position einzusetzen bzw. Gauß um Rat für einen geeigneten Nachfolger zu bitten – für ihn gab es aber keinen gleichwertigen Kollegen. Erst 1848 konnte Weber wieder an die Universität Göttingen zurückkehren; zugleich wurde er Mitglied der Honoren-Fakultät. Die ausführliche Stellungnahme von Gauß zur Frage der Zahlung der ihm damit zustehenden Gelder ist in voller Länge abgedruckt. Weitere Erörterungen beziehen sich auf die Ereignisse des Jahres 1848.

Außer den bereits genannten Anhängen enthält die Publikation tabellarische Angaben über die Anzahl der Hochschullehrer an der Philosophischen Fakultät, eine 14seitige, detaillierte Tabelle der Professoren und Privatdozenten derselben zwischen 1800 und 1855 sowie eine auf Unterlagen aus dem

Stadtarchiv Braunschweig basierende Liste der Hörer von Gauß' Vorlesungen der Jahre 1846 bis 1852.

Ein ausführliches Namenregister erschließt diese wertvolle Sammlung neuer Quellen zum Leben und Wirken des großen Mathematikers. Die Zusammenfassung endet mit den Worten: „Durch [Gauß'] Handeln zieht sich wie ein roter Faden sein Festhalten an Altbewährtem und sein Bestreben, unter Beachtung der Vorschriften eine hohe Qualität des Universitätsunterrichts zu erreichen. Gauß war nicht nur ein großer Wissenschaftler, sondern hat auch als Hochschullehrer und in der akademischen Selbstverwaltung Bedeutendes geleistet.“

Hamburg

C. J. Scriba



M. Kneser
Quadratische Formen

Berlin u. a., Springer, 2002, 164 S.,
EUR 29,95

Dieses Buch ist aus Vorlesungen von Martin Kneser hervorgegangen, die er mehrfach in Göttingen gehalten hat. Grundlage ist insbesondere eine Ausarbeitung von 1974. Sie war bei den Experten schon lange bekannt und geschätzt. Es ist sehr zu begrüßen, dass die neu bearbeitete und erweiterte Fassung nun einem breiteren Leserkreis zugänglich gemacht wird.

Vor genau 50 Jahren publizierte M. Eichler sein Buch *Quadratische Formen und orthogonale Gruppen*. Es war einerseits ein Geniestreich in seiner Zielsetzung, die berühmten Ergebnisse von Minkowski, Siegel,

Hasse und Witt mit einer einheitlichen geometrisch-arithmetischen Methode abzuleiten ohne Verwendung von seitenlangen Matrizenrechnungen und tiefsinniger analytischer Zahlentheorie. Andererseits war Eichlers Buch leider sehr schwer lesbar und es enthielt gefürchtete Beweislücken. Wahrscheinlich haben nur sehr wenige Mathematiker jenes Buch gründlich studiert und verstanden. Kneser war damals Seminarteilnehmer und Zimmergenosse von Eichler in Münster, und ganz offensichtlich war er von der Person Eichler und seinem Buch so fasziniert, dass er fortan die quadratischen Formen und arithmetischen Gruppen zu seinem eigenen Hauptforschungsgebiet erwählte. Das nun vorliegende Buch ist also auch ein später Tribut an seinen inzwischen verstorbenen Lehrmeister und Freund Eichler, gleichzeitig aber immer noch das erste Buch, in dem ein vollständiger Beweis für den Hauptsatz von Minkowski-Siegel (über \mathbb{Q}) erbracht wird.

Damit komme ich zum Inhalt. Das Buch besteht grob gesprochen aus zwei Teilen: Einem algebraischen (Kap. I–V), in dem der Grundring A möglichst allgemein ist, und einem arithmetischen (Kap. VI–X) mit Grundring \mathbb{Z} bzw. \mathbb{Q} .

Die Kapitelüberschriften des 1. Teils lauten:

- I Bilineare und quadratische Formen
- II Clifford-Algebren
- III Witt-Gruppe und Invarianten quadratischer Formen
- IV Quadratische Formen über endlichen Körpern
- V Quadratische Formen über Bewertungsringen

Da sich dieser Stoff größtenteils auch in den bekannten Lehrbüchern von O.T. O'Meara, T.Y. Lam, W. Scharlau und M.-A. Knus findet, möchte ich hierzu vor allem die Besonderheiten im Buch von Kneser hervorheben:

1. Zusätzlich zu den üblichen Definitionen werden in I §2 für einen kommutativen Ring A , in dem 2 keine Einheit ist, bei ungerader

Dimension auch „halbreguläre“ quadratische Formen q definiert. Hier gilt für die Determinante $d = \det q \in A: d = 2d'$ mit invertierbarem $d' \in A$.

2. In I §4 wird ein trickreicher Beweis des Fortsetzungssatzes von Witt über einem beliebigen lokalen Ring gegeben.

3. Ist E ein freier quadratischer A -Modul vom Rang m , so ist die Clifford-Algebra $C(E)$ frei vom Rang 2^m . Der Beweis geschieht durch Zurückführung auf den Fall, dass A ein Körper der Charakteristik 0 ist und durch Verwendung des graduierten Tensorprodukts.

4. Die spezielle orthogonale Gruppe $SO(E)$, Spingruppe $\text{Spin}(E)$ und die Spinornorm werden auch für halbreguläres E erklärt, ebenso gewisse Invarianten wie Halbdiskriminante und Diskriminantenalgebra.

5. Die Untersuchung quadratischer Formen über Hauptidealringen, Bewertungsringen und lokalen Körpern in Kap. V ist besonders originell und elegant. Hier werden auch bereits einige Sätze über Gitter bewiesen, die später benötigt werden.

Der zweite Teil hat vor allem das Ziel, die Hauptsätze von Minkowski-Hasse und Minkowski-Siegel zu beweisen. Um technischen Ballast zu vermeiden, geschieht das nicht für beliebige Zahlkörper, sondern nur für \mathbb{Q} bzw. \mathbb{Z} .

In Kap. VI wird zuerst mit Hilfe der Ausschöpfungsmethode von Tate-Milnor die Wittgruppe $W(\mathbb{Q}) = \cup W(k)$ berechnet, dann die Produktformel $\prod_p c(V_p) = 1$ und

das quadratische Reziprozitätsgesetz abgeleitet und schließlich der Satz von Minkowski-Hasse bewiesen. Dabei wird der Dirichletsche Primzahlsatz (ohne Beweis) benutzt.

Kap. VII bringt eine knappe Behandlung der \mathbb{Z} -Gitter E und ihrer Komplettierungen $E_p = \mathbb{Z}_p E$, insbesondere die Reduktionstheorie (Satz von Hermite) und die Endlichkeit der Klassen in einem Geschlecht. Als Anwendung werden die Standardgitter I_n und A_n betrachtet und damit klassische Sätze

von Fermat, Euler, Lagrange und Gauß bewiesen.

Mit Kap. VIII beginnen die etwas „härteren“ aber besonders wichtigen Kapitel des Buches. Kap. VIII §23 behandelt die schwache Approximation von Elementen, Vektoren, Gittern und Gruppen. Ein typischer Satz ist etwa (23.6). Ist V ein regulärer quadratischer \mathbb{Q} -Vektorraum mit $\dim V \geq 3$, so liegt $\text{Spin}(V)$ dicht in $\prod_{p \in S} \text{Spin}(V_p)$.

Dabei ist S eine beliebige endliche Stellenmenge. In § 24 werden diese Resultate zu starken Approximationssätzen verschärft, wobei allerdings V_l für mindestens ein $l \in S$ indefinit sein muss. §25 bringt die Definition der Spinorgeschlechter und den Satz (25.2) von Eichler: Ist $\dim V \geq 3$ und $\text{ind}_\infty V > 0$, so enthält jedes Spinorgeschlecht nur eine Klasse. Damit können die wichtigsten Resultate über indefinite und über unimodulare \mathbb{Z} -Gitter hergeleitet werden.

Der definite Fall ist bekanntlich wesentlich schwieriger, weil hier das Lokal-Global-Prinzip für ganzzahlige Darstellungen fast vollständig versagt. Es gibt jedoch zwei Methoden, die eingesetzt werden können. Einmal die (eindeutige) orthogonale Zerlegung von Vektoren und Gittern nach Eichler, zum anderen die Methode der Nachbargitter von Kneser. Dabei heißen zwei Gitter L, M im selben \mathbb{Q} -Vektorraum benachbart, wenn es eine Primzahl p gibt, so dass $[L : L \cap M] = [M : L \cap M] = p$ ist. Damit ist der Inhalt des besonders schönen Kapitels IX im wesentlichen umrissen. Unter Hinzunahme der Ergebnisse von Kap. VIII wird in IX §29 ein Beweis des Satzes von Tartakovskii ohne Verwendung analytischer Hilfsmittel gegeben. Dieser Satz lautet: Ist L ein positiv definites \mathbb{Z} -Gitter mit $\text{rg} L \geq 5$, so gibt es höchstens endlich viele $t \in \mathbb{N}$, die überall lokal, aber nicht global durch L dargestellt werden.

Das längste und schwierigste Kapitel X behandelt den Satz von Minkowski und Siegel. Einige wichtige Stichworte kann man den Paragraphenüberschriften entnehmen:

§30 Klassen und Geschlechter von Darstellungen (eines Gitters L durch ein Gitter M)

§31 Adele und Haarsches Maß (sowie Kongruenzuntergruppen, Fundamentalbereiche usw.)

§32 Darstellungsanzahlen in einem Geschlecht (viele Indexberechnungen, Normierung der lokalen Maße μ_p)

§33 und

§34 Beweis des Satzes von Minkowski-Siegel

§35 Einige Beispiele und Anwendungen (und die Maßformel)

Der Hauptsatz (33.6) steht auf S. 144. Er sagt aus, dass eine gemittelte globale Darstellungsanzahl eines positiv definiten Gitters L durch die sämtlichen Klassen M_1, \dots, M_h im Geschlecht eines positiv definiten Gitters M als Produkt über lokale „Darstellungsdichten“ geschrieben und damit berechnet werden kann. Auf seine genaue Formulierung will ich verzichten. Wie schon eingangs erwähnt, beruht der Beweis fast allein auf der geometrisch-adelischen Methode und den Approximationssätzen. Nur zur Berechnung der Werte $\gamma(V) = \mu(O(V) \setminus O_A(V))$ wird etwas elementare analytische Zahlentheorie verwendet. $\gamma(V)$ hängt nur von $\dim V$ ab, $V = \mathbb{Q}M$.

Die interessantesten Anmerkungen zu Kapitel X enthalten Verweise auf frühe historische Arbeiten von Eisenstein, Smith, Minkowski und Siegel sowie einen Ausblick auf das Buch *Adeles and Algebraic Groups* von A. Weil, die Tamagawa-Zahl $\tau(SO) = 2$ und die Galois-Kohomologie reduktiver algebraischer Gruppen.

Zum Stil des Buches ist zu sagen, dass die Beweise präzise und vollständig sind, aber in der Regel ziemlich knapp. Intensives Mitdenken von Seiten des Lesers ist erforderlich, um kleinere Lücken zu schließen oder zu erkennen, dass ein Beweis tatsächlich beendet ist. Das Buch besticht durch seine Stoffauswahl und Eleganz, ist aber kein Selbstläufer. Insbesondere im zweiten Teil spürt man die Erfahrung eines Meisters, der 50 Jahre auf diesem Gebiet gearbeitet hat.

Abschließend einige kurze Bemerkungen zu Druckfehlern und zur Literatur. Die meisten Druckfehler wird der aufmerksame Leser leicht korrigieren können. Störend ist die Vertauschung von E und F in Satz (14.7), Teil a) (Teil b) ist richtig!). Die Behauptung über die Gruppe $O(H)$ auf S. 127 oben ist falsch: Diese Gruppe ist nicht-zyklisch von der Ordnung 4.

Das Literaturverzeichnis sollte m. E. durch folgende Werke ergänzt werden, deren Inhalt sich teilweise mit dem hier behandelten überschneidet:

M.-A. Knus – A.S. Merkurjev – M. Rost – J.-P.

Tignol: *The Book of Involutions*. AMS Colloquium Publications, Vol. 44, 1998

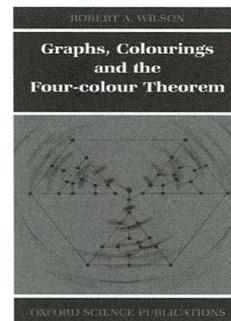
J. Milnor – D. Husemoller: *Symmetric Bilinear Forms*. Springer. Berlin 1973

J.-P. Serre: *Cours d'Arithmétique*. Presses Univ. de France. Paris 1970

(Letzteres Buch wird in den Anmerkungen zu Kapitel VIII aufgeführt.)

Mainz

A. Pfister



R. A. Wilson
**Graphs, Colourings
and the Four-colour
Theorem**

Oxford University Press, 2002, 141 S.,
£19,50

Es gibt mehrere Gründe, ein Buch zu schreiben, und der schlechteste ist es nicht, eine offenbar gut gelungene Vorlesung als Grundlage zu verwenden. Vor allem in der englischen Literatur sind solche mathematischen „Texte“ üblich, auch wegen der Tradition, Textbooks verbindlich als Grundlage für einen Kurs vorzuschreiben. Dann gibt es

natürlich noch einen weiteren Grund: das Thema ist berühmt und fasziniert den Autor und (wie er hofft) auch die Leser. Das 4-Farbenproblem ist solch ein Thema. Die einen empfinden es immer als eine topologische Kuriosität und die anderen als ein Jahrhundertproblem, das eine ganze Theorie (die Graphentheorie) hervorbrachte und mit der Lösung 1976 erstmalig die Schwelle zu Computerbeweisen überschritt. Die letzten zehn Jahre haben noch einen weiteren Aspekt gezeigt. Es wurden mehrere zum 4-Farbensatz äquivalente Formulierungen gefunden: In Geometrie und Topologie (Penrose-Polynom mit Verbindungen zu Matroiden, Knoten), in Lie-Algebra, in Differentialgeometrie (Colin de Verdière Zahl) und anders mehr. Es scheint, als hätten wir den 4-Farbensatz noch nicht wirklich verstanden, jedenfalls wird immer deutlicher, dass er wohl ein Fokuspunkt der ebenen Topologie ist.

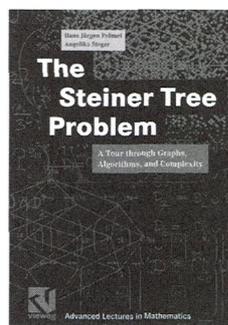
Robert Wilson hat also ein Buch über ein faszinierendes und spannendes Thema verfasst: es ist gut und sorgfältig geschrieben und doch eine kleine Enttäuschung. Teil I behandelt die Urgeschichte des 4-Farbenproblems mit Landkarten, Euler-Formel, Kempe-Ketten und dem berühmten „Beweis“ von Kempe. In Teil II werden alternative Zugänge behandelt, zum Beispiel mittels 3-Kantenfärbungen oder Hamiltonschen Kreisen auf Polyedern. An allgemeinen Resultaten wird der Satz von Kuratowski bewiesen und die Vermutungen von Hadwiger und Hajos behandelt. Teil III gibt schließlich eine sehr knappe Einführung in die beiden Ideen des Beweises: unvermeidbare und reduzierbare Mengen von Konfigurationen, wobei sich der Autor auf einfachste Entladungsalgorithmen und Reduzierbarkeitsätze beschränkt. All dies hätte schon vor zwanzig Jahren geschrieben werden können, und es wurde auch geschrieben, zum Beispiel von Barnette, Map Coloring, Polyhedra, and the Four-Color Problem (1983) und von mir, Graphentheorie – eine Entwicklung aus dem 4-Farbenproblem (1983, englische Übersetzung 1987). Im ersten Buch wird der geometrische Aspekt betont, im zweiten der

graphentheoretische, aber beide Bücher gehen weit über das vorliegende hinaus.

Schließlich gibt es natürlich noch einen Grund – das Zielpublikum, und das sind hier die Undergraduates, auf Deutschland übertragen Studenten etwa ab dem 2. Semester. Hier kann man dem Autor nur gratulieren. Sein Buch ist, wie fast immer bei englischsprachigen Autoren, gut und flüssig geschrieben. Es ist didaktisch geschickt konzipiert, ohne aufdringlich pädagogisch daherzukommen, und es gibt nicht vor, mehr zu sein als es ist: ein kleiner Abriss eines großen Themas. Wer mehr darüber wissen möchte, der greife zu den erwähnten Büchern oder informiere sich in der aktuellen Literatur.

Berlin

M. Aigner



H. J. Prömel, A. Steger

The Steiner Tree Problem

A Tour through Graphs, Algorithms, and Complexity

Braunschweig/Wiesbaden, Vieweg, 2002, 241 S., € 29,50

Warten auch Sie schon seit langem darauf, dass Ihnen endlich einmal jemand im Detail darlegt, was genau ein Steinerbaum ist und was es alles damit auf sich hat? Nun, ich auch nicht. Und wie es scheint, dürfen wir auf die Sympathie selbst der Verfasser der obigen Monographie hoffen:

To handle the (...) Steiner problem one has to combine methods, tools and techniques from many different areas. The resulting progress has uncovered fascinating connections between and within graph theory, the study of algorithms, and complexity theory. This sin-

gle problem can thus serve perfectly as a motivation and link for an introduction to these three fields.

Steinerbäume also nur als Aufhänger, als eher zufälliger Leitfaden für eine letztlich anderweitig motivierte *Tour through Graphs, Algorithms and Complexity* (so der Untertitel)? Wenn ja: lohnt sich angesichts der unzähligen bereits existierenden Einführungen in diese Gebiete die Lektüre einer weiteren?

Um das Ergebnis vorwegzunehmen: ja, allemal ja. Gerade durch die radikale inhaltliche Fokussierung glückt den Autoren eine Gratwanderung durch diese Gebiete, die in gleichmäßigem Anstieg von Gipfel zu Gipfel führt und dabei mit minimalem Aufwand ein weites methodisches Panorama moderner Algorithmik und Komplexitätstheorie zeigt. Besondere Beachtung (und kompetente Behandlung) finden probabilistische Zugänge, von Zufallsalgorithmen bis hin zu Nichtapproximierbarkeitsresultaten als Folge des berühmten PCP-Theorems.

Der Text beginnt mit drei Kapiteln souverän knapp gehaltener doch fast durchweg präziser Einführungen in die einfachsten Grundbegriffe der Graphentheorie (insbesondere Zufallsgraphen), Algorithmen (RAMs und etwas Datenstrukturen) und Komplexitätstheorie (\mathcal{P} , \mathcal{NP} , und \mathcal{NP} -Vollständigkeit). Es folgen Darstellungen ausgewählter exakter Algorithmen, Näherungsalgorithmen und (echter) Zufallsalgorithmen, letztere unter der suggestiven Kapitelüberschrift *Randomness Helps* als vertrautes Bonmot für Insider. Höhepunkt ist dann das Kapitel über Nichtapproximierbarkeit, mit einer Beweisskizze selbst für die schwierige Richtung des PCP-Theorems.

Das Buch schließt mit einem Kapitel über das Steinerbaumproblem in ganz speziellen Graphen (Gittern) und in der euklidischen Ebene. Dieses letzte Kapitel will sich trotz auch hier zu findender schöner Resultate in die geschilderte Bergtour nicht so recht einreihen und gleicht eher einem Abstieg mit der Standseilbahn. Könnte es sein, so mag der an die Faszination der Höhenluft inzwi-

schen gewöhnte Flachländer etwas enttäuscht argwöhnen, dass hier eine Pflichtaufgabe nachgeschoben wurde? Während die euklidische Variante etwas nach dem sonst so mutig missachteten Ziel historischer Vollständigkeit schmeckt, erinnern die Gitter eher an die bekannten Chips *inside* – immerhin eines der Hauptanwendungsgebiete der Steinerbäume.

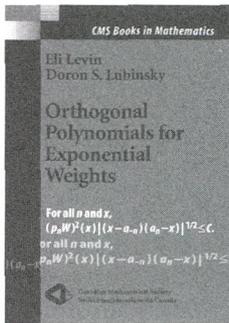
Die Stärke dieses Buchs, seine Konzentration auf die Darstellung wesentlicher Ideen und Methoden an Beispielen statt durch unnötige Stofffülle, wird untermauert durch die Wahl dieser Beispiele. Sie sind gleichzeitig einfach, relevant und wirklich typisch – eine nicht immer leicht zu erzielende Kombination. Dies gilt im Kleinen für die Illustration einer einzelnen Idee (wie etwa der amortisierten Laufzeitberechnung für Algorithmen) wie im Großen bei der detaillierten Anwendung einer zuvor geschilderten Methode (etwa der Verwendung von Zufall in der Kryptographie). Letzteren ist in jedem Kapitel eine abschließende „Exkursion“ gewidmet, die anspruchsvoller ist als der laufende Text aber zum Verständnis der Folgekapitel entbehrlich – eine gelungene Weise, nahezu voraussetzungslose Lesbarkeit des Buches insgesamt mit Attraktivität auch für den fortgeschrittenen fachfremden Leser zu verbinden.

Und welcher Leserschaft ist das Buch zu empfehlen? Sicherlich allen weiteren Fachkollegen, die mit geringem Zeitaufwand und mit mehr Freude als Arbeit einen Einblick in einen Strauß grundlegender Ideen der genannten Gebiete gewinnen möchten. Sicher auch näheren Fachkollegen als Grundlage einer Vorlesung, etwa für an Informatik interessierte Mathematikstudenten. Und Studenten selbst? Obwohl das Buch, wie gesagt, insgesamt sehr sorgfältig geschrieben ist, bin ich doch an einigen Stellen eine Zeit lang steckengeblieben oder ins Grübeln gekommen. Als Student hätte mir das nicht behagt – aber die entsprechenden Details werden sich für die nächste Auflage berichtigen oder optimieren lassen. Und so, denke ich, zerfällt seit Erscheinen dieses Bandes die Gemeinde

der der Informatik nicht grundlegend abge-
neigten Mathematiker in zwei Teile: diejen-
igen, die schon lange wissen was ein Steiner-
baum ist und was es so alles damit auf sich
hat, und diejenigen, die es bald wissen wer-
den.

Hamburg

R. Diestel



E. Levin, D. S. Lubinsky
**Orthogonal Poly-
nomials for Exponen-
tial Weights**

Berlin u. a., Springer, 2001, 476 S., \$ 79,95

Die Standardtheorie der orthogonalen Poly-
nome, wie sie etwa in dem 1939 erschienenen
Buch von G. Szegő (1985 Nachdruck der
vierten Auflage) dargestellt wird, enthält ei-
nerseits allgemein gültige Aussagen, die so-
fort auf jedes in den Anwendungen auftau-
chende *neue* System orthogonaler Polynome
anwendbar sind, und andererseits Unglei-
chungen und asymptotische Aussagen, die
eher von einer individuellen Natur sind und
sich in erster Linie auf die *klassischen* ortho-
gonalen Polynome (Jacobi-, Laguerre- und
Hermite-Polynome) erstrecken. Darüber hi-
naus ist es allerdings Szegő gelungen, für eine
weite Klasse von Gewichtsfunktionen auf
 $[-1, 1]$, die die Jacobi-Gewichte umfaßt, eine
leistungsfähige Asymptotik anzugeben.

Als G. Freud in den sechziger Jahren des
vergangenen Jahrhunderts gewichtete Poly-
nomapproximation auf der reellen Geraden
untersuchte, stieß er auf orthogonale Poly-
nome für die in der Literatur keine Asympto-
tik vorlag. Angetrieben durch Freuds Schü-
ler Paul Nevai wurde die Untersuchung von
orthogonalen Polynomen mit sog. Freud-

Gewichten zu einem sehr aktiven Gebiet,
dem sich zunehmend neue Gruppen von Ma-
thematikern, darunter auch die Autoren des
vorliegenden Buches, anschlossen. Ein
Durchbruch in der Asymptotik gelang da-
durch, daß man potentialtheoretische Me-
thoden verwendete und zum n -ten orthogo-
nalen Polynom ein Intervall $\Delta_n = [a_{-n}, a_n]$
angeben konnte, das im wesentlichen die
Rolle des Einheitsintervalls $[-1, 1]$ in der
oben erwähnten Asymptotik von Szegő
übernimmt.

Das vorliegende Buch ist aus diesem For-
schungsgebiet heraus entstanden, wobei sich
die Autoren um möglichst große Allgemei-
heit bemühen und insbesondere über Freud-
Gewichte hinausgehen. Um Näheres über
den Inhalt sagen zu können, ist es erforder-
lich, einige Voraussetzungen und Bezeich-
nungen wenigstens anzudeuten.

Die Autoren gehen aus von einem Inter-
vall $I = (c, d)$, wobei $-\infty \leq c < 0 < d \leq \infty$
gilt, und betrachten darauf Gewichtsfunk-
tionen der Form $w := W^2 = \exp(-2Q)$ mit
einer Funktion $Q : I \rightarrow [0, \infty)$, die folgende
Eigenschaften besitzt:

- Q' ist auf I stetig und $Q(0) = 0$;
- Q' ist auf I wachsend;
- $\lim_{t \rightarrow c+} Q(t) = \lim_{t \rightarrow d-} Q(t) = \infty$.

Ferner werden noch gewisse Bedingungen
an

$$T(t) := \frac{tQ'(t)}{Q(t)} \quad (t \neq 0)$$

gestellt; z. B. soll T links von der Null fallend
(oder wenigstens „quasi“-fallend) und rechts
davon steigend (oder wenigstens „qua-
si“-steigend) sein. Die so definierte Klasse \mathcal{F}
von Gewichtsfunktionen wird oft durch ver-
schiedene Regularitätsforderungen an Q
wieder etwas eingeschränkt. Wichtige in der
Theorie verwendete Größen sind:

- μ_t , das Gleichgewichtsmaß der Masse t auf I
bei äußerem Feld Q ,
- V^{μ_t} , das logarithmische Potential von μ_t ,
- $\Delta_t = [a_{-t}, a_t]$, der Träger von μ_t ,
- σ_t , die Dichte von μ_t ,

$\varphi_t(x)$, eine Hilfsgröße, die auf I eine ähnliche Rolle spielt wie $\max\{n^{-2}, \sqrt{1-x^2}/n\}$ in der Polynomapproximation auf $(-1,1)$.

Nun können wir auf den Inhalt näher eingehen. Im ersten Kapitel werden, nach einer Einführung in das Thema und die Bezeichnungen, alle wichtigen Ergebnisse ohne Beweis vorgestellt. Etwas gewöhnungsbedürftig ist dabei, daß hier alle Theoreme eine andere Numerierung besitzen als in den späteren Kapiteln, wo sie erneut formuliert und dann bewiesen werden.

In den Kapiteln 2 und 3 sowie 5 und 6 geht es um die Hilfsgrößen aus der Potentialtheorie, insbesondere um Darstellungen oder Abschätzungen von $Q(x)$, $\sigma_t(x)$, $a_{\pm t}$, $\varphi_t(x)$ und V^{μ_t} .

Auch die Kapitel 4 und 7 enthalten noch Hilfsmittel, die aber schon Polynome betreffen. So wird in Kapitel 4 gezeigt, daß für ein Polynom P vom Grad n der Ausdruck $P(x)W(x)$ nur auf dem Intervall Δ_n von entscheidender Größe ist. Genauer gilt

$$\|PW\|_{L_p(I \setminus \Delta_t)} < \|PW\|_{L_p(\Delta_t)}$$

und

$$\|PW\|_{L_p(I)} < 2^{1/p} \|PW\|_{L_p(\Delta_t)}$$

für $0 < p < \infty$ und alle nicht identisch verschwindenden Polynome vom Grad höchstens $t - 2/p$. Im Kapitel 7 geht es im wesentlichen darum, mit einem Polynom P_n vom Grad n durch $P_n W$ die Konstante 1 auf Δ_n zu approximieren. Dieses Approximationsproblem spielt bei späteren Abschätzungen und Darstellungen eine Rolle.

Zur Beschreibung des weiteren Inhalts sei zunächst auf die folgenden Zusammenhänge hingewiesen. Das Extremalproblem

$$E_{n,p}(W) = \inf \|PW\|_{L_p(I)},$$

wobei sich das Infimum über alle Polynome P von Grad n mit Leitkoeffizient 1 erstreckt, hat für $1 \leq p \leq \infty$ ein eindeutig bestimmtes Polynom $T_{n,p}(W, \cdot)$ als Lösung. Führt man dann das *normalisierte Extremalpolynom*

$$p_{n,p}(W, x) := \frac{T_{n,p}(W, x)}{E_{n,p}(W)}$$

ein, so folgt aus einer bekannten Extremaldarstellung orthogonaler Polynome, daß

$$p_n(W^2, x) := p_{n,2}(W, x)$$

das n -te orthonormale Polynom bezüglich der Gewichtsfunktion W^2 ist. Mit \mathcal{P}_n sei ferner die Menge aller Polynome vom Grad höchstens n bezeichnet.

In Kapitel 8 werden asymptotische Darstellungen für das Infimum $E_{n,p}(W)$, also für den Fehler der besten gewichteten L_p -Approximation von x^n durch Polynome aus \mathcal{P}_{n-1} , gewonnen.

In Kapitel 9 wird unter anderem die durch

$$\lambda_{n,p}(W, x) := \inf_{P \in \mathcal{P}_n} \left(\frac{\|PW\|_{L_p(I)}}{|P(x)|} \right)^p$$

definierte L_p -Christoffel-Funktion zweiseitig abgeschätzt. Dabei ist $\lambda_n(W^2, x) := \lambda_{n,2}(W, x)$ die klassische Christoffel-Funktion, die für jede Stützstelle der Gaußschen Quadraturformel bezüglich W^2 den zugehörigen Gewichtungsfaktor (auch Christoffel-Zahl genannt) liefert.

Das Kapitel 10 behandelt Markov-Bernstein- und Nikolskii-Ungleichungen. Typische Ergebnisse sind

$$\|(PW)'\varphi_n\|_{L_p(I)} \leq C_1 \|PW\|_{L_p(I)}$$

und

$$\|PW\|_{L_p(I)} \leq C_2 N(p, q, n) \|PW\|_{L_q(I)}$$

für $P \in \mathcal{P}_n$ und $p, q \in (0, \infty]$. Dabei bezeichnen C_1 und C_2 nicht näher spezifizierte Konstanten, während $N(p, q, n)$ explizit in Abhängigkeit von p, q und n angegeben wird.

In Kapitel 11 werden die Nullstellen der Extremalpolynome $T_{n,p}(W, x)$ abgeschätzt. Für die orthonormalen Polynome $p_n(W^2, x)$ werden weitere Ergebnisse erreicht; unter anderem wird auch der Abstand aufeinanderfolgender Nullstellen abgeschätzt.

Als das bedeutendste Ergebnis des gesamten Buches sehen die Autoren die in Kapitel 12 bewiesene Abschätzung

$$C_1 \leq \sup_{x \in I} |p_n(W^2, x)| W(x) [|x - a_n| \cdot |x - a_{-n}|]^{1/4} \leq C_2$$

mit von n unabhängigen positiven Konstanten C_1 und C_2 an. Der Beweis erstreckt sich über 32 Seiten.

In Kapitel 13 folgen weitere Abschätzungen, unter anderem Schranken für die gewichtete L_p -Norm orthogonaler Polynome und für die Fundamentalfunktionen der Lagrange-Interpolation bezüglich der Nullstellen der orthogonalen Polynome.

In Kapitel 14 werden die Extremalpolynome $p_{n,p}(W, z)$ sowohl bezüglich der L_p -Norm als auch punktweise in der komplexen Ebene außerhalb des Intervalls der Orthogonalität asymptotisch dargestellt.

Im Kapitel 15 folgen punktweise asymptotische Darstellungen der orthonormalen Polynome im Intervall der Orthogonalität und asymptotische Darstellungen der Koeffizienten der Rekursionsformel.

Schließlich beschäftigt sich ein zweigliedriger Anhang mit Darstellungen der Extremalpolynome und der orthonormalen Polynome im Falle von Gewichten aus der Bernstein-Szegő-Klasse.

Die einzelnen Kapitel des Buches sind in der Regel so aufgebaut, daß im ersten Paragraphen die Ergebnisse präsentiert werden, während die, zum Teil sehr langen, Beweise streng gegliedert in den anschließenden Paragraphen folgen. Man kann dadurch leicht ein gesuchtes Ergebnis nachschlagen, ist aber für dessen Verständnis auf die Liste der Bezeichnungen angewiesen.

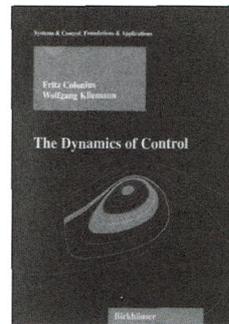
In Kommentaren zu den einzelnen Ergebnissen und in Anmerkungen am Ende des Buches wird auf Quellen, verwandte Beiträge oder alternative Zugänge hingewiesen. So kann sich der Leser einen Überblick verschaffen und Zugang zu der Literatur der letzten zwanzig Jahre finden. Insbesondere erwähnen die Autoren oft erhebliche Verschärfungen, falls die in der Gewichtsfunktion auftretende Funktion Q höchstens polynomial wächst (Freud-Gewichte). In diesem Zusammenhang mag man sich fragen, ob

nicht durch die von den Autoren verfolgte Allgemeinheit zu viel an Präzision aufgegeben wurde.

Das Buch ersetzt sicher kein Lehrbuch über orthogonale Polynome. Es ist aber ein wertvoller Beitrag über ein interessantes, aktuelles Teilgebiet, nämlich über die Abschätzung und Asymptotik von Extremal- und Orthogonalpolynomen mit exponentiellen Gewichten. Mathematiker aus der Approximationstheorie, der Theorie der speziellen Funktionen, der Numerik und der Potentialtheorie, und eventuell auch Anwender orthogonaler Polynome aus den Natur- und Ingenieurwissenschaften können davon profitieren.

Erlangen

G. Schmeißer



F. Colonius,
W. Kliemann
**The Dynamics
of Control**

Boston u. a., Birkhäuser, 2000, 629 S., EUR 120,-

Control theory and the theory of dynamical systems are traditional fields of mathematical research which have developed into powerful theories with important applications in science and technology. While the two theories are obviously linked in various ways, their development has largely been independent of each other and research incorporating both concepts from control and dynamical systems theory have been relatively sparse. In this context, the authors of the book under review have done some pioneering work over a period of about ten years in bringing together control-theoretic notions

and basic concepts from the theory of dynamical systems. As an appropriate link between control and dynamical systems they have introduced the so-called control flow, an infinite dimensional dynamical system acting on the product of the space of admissible controls and the state space. Using this control-dynamic device, they have studied control-theoretic topics such as controllability regions and their domains of attraction, robust stability and stability radii, and open loop as well as feedback stabilization for nonlinear systems. Applications to dynamical systems include time-varying perturbations of nominal systems, new spectral concepts, and persistence and continuity results for attractors and their spectra.

In this book Colonius and Kliemann present an up-to-date account of their work on the dynamical theory of control. The systems they consider are ordinary differential equations $\dot{x} = X_0(x)$ and their control-theoretic counterparts $\dot{x} = X_0(x) + \sum_{i=1}^m u_i(t)X_i(x)$ where the X_0, X_1, \dots, X_m are C^∞ -vector fields on a connected Riemannian C^∞ -manifold M and the u_1, \dots, u_m are real-valued functions of $t \in \mathbb{R}$ with $u = (u_1, \dots, u_m) \in \mathcal{U} = \{u : \mathbb{R} \rightarrow U\}$ where U is a given subset of \mathbb{R}^m . They suppose throughout that for each $u \in \mathcal{U}$ and $x \in M$ the solution $\varphi(t, x, u)$ of the control system starting in x at $t = 0$ is unique and exists for all $t \in \mathbb{R}$. Of the different ways to interpret the role of the functions $u \in \mathcal{U}$ relative to the nominal system $\dot{x} = X_0(x)$ in this book both a perturbation and a control-theoretic point of view is taken, i.e., the functions $u \in \mathcal{U}$ are interpreted as (deterministic) perturbations or as controls. In the former case the focus is on the limit behavior of the trajectories of the perturbed system relative to the nominal system, and in the latter case the problem is to choose from among the admissible controls a particular function in such a way that the system exhibits a certain prescribed behavior.

It is a feature of this book that control-theoretic and perturbation problems are treated in a unifying way by associating to a control/perturbation system a dynamical system over

the space of control/perturbation functions. In this way, a variety of techniques from the theory of dynamical systems (e.g. mixing, chain recurrence, Morse decompositions, invariant measures, Lyapunov exponents, invariant manifolds) as well as ideas from control theory (e.g. accessibility, reachability, control sets, optimal control) can be used to analyze the associated dynamical systems. This methodology allows new results in control and perturbation theory, some of which apply to classical problems in these areas and some to questions of current interest.

After this general description of the authors' view on the connection between dynamical and control systems we now outline the contents of this book. Following a short overview and some hints on how to use this book, the preliminary Chapter 2 presents eight classical and current problems which serve as a motivation for the theory and provide a body of examples that will be discussed in later chapters. These topics concern 1. Perturbations of Complex Behavior, 2. Approximation of Complex Systems, 3. Generic Behavior of Perturbations, 4. Stability Boundaries and Multistability, 5. Reachability in Control Systems, 6. Linear and Nonlinear Stability Radii, 7. Stabilization of Bilinear Systems and 8. The Lyapunov Spectrum of Matrices.

The main body of the book consists of three parts: I. Global Theory, II. Linearization Theory and III. Applications.

In Part I (Chapters 3 and 4) the global behavior of nonlinear systems is investigated in terms of control sets and control flows. The notion of control set is introduced in Chapter 3 as a maximal subset of the state space where complete controllability holds. Then the basic properties of control sets are derived and illustrated by means of a number of examples, and the reachability order on control sets is described. Furthermore, two variants of control sets are discussed, control sets that are maximal within a subset of the state space, and chain control sets which are based on a weaker notion of controllability allowing for arbitrarily small jumps.

The key notion of this book, the control flow $\Phi: \mathbb{R} \times \mathcal{U} \times M \rightarrow \mathcal{U} \times M$, is introduced in Chapter 4 as $\Phi(t, u, x) := (\Theta(t, u), \varphi(t, x, u))$ where $\Theta(t, u)$ is the shift on \mathcal{U} defined by $\Theta(t, u)(s) = u(t + s)$ and $\varphi(t, x, u)$ is the solution of the control system with $\varphi(0, x, u) = x$. In order for \mathcal{U} to become a topological space it is vital that the control functions appear affinely in the given system and that the control range $U \subset \mathbb{R}^m$ is compact and convex. Under these assumptions \mathcal{U} is a subset of $L_\infty(\mathbb{R}, \mathbb{R}^m)$, the space of bounded and measurable functions from \mathbb{R} to \mathbb{R}^m , and because of the duality relation $L_\infty(\mathbb{R}, \mathbb{R}^m) = (L_1(\mathbb{R}, \mathbb{R}^m))^*$ the set \mathcal{U} may be endowed with the weak*-topology. It should be noted that in this construction not only piecewise constant controls are taken into account but measurable ones, because this gives \mathcal{U} the structure of a compact metric space, a property which is convenient from a dynamical systems point of view. In fact, it is shown that the shift Θ on \mathcal{U} is continuous, topologically mixing, and transitive and that the periodic functions are dense in \mathcal{U} . Thus, the shift also has sensitive dependence on initial conditions and therefore it is chaotic in the sense of Devaney. In addition it is chain recurrent. Further topics covered in Chapter 4 concern the relation between control sets and the topologically mixing components of the control flow, ergodic properties of the control flow, chain controllability and inner pairs, the generic behavior of the control flow as $t \rightarrow \pm\infty$ and the behavior of control sets under perturbations of the control range.

Part II (Chapters 5–7) contains the basic results on linearized systems. It begins with general linear flows on vector bundles and their spectral theory, including the Morse spectrum and other spectral concepts such as the Lyapunov, the Sacker-Sell and the Oseledec's spectrum. It also contains an abstract invariant manifold theorem. Then these results are specialized to bilinear and linearized control systems on vector bundles, including a characterization of the Lyapunov spectrum in terms of the Floquet and the Morse

spectrum and some results on local stable manifolds. Finally, the most specialized case, the linearization at a singular point, is singled out in a separate chapter because this is all what is needed for (robust) stability and stabilization of linear and (classical) bilinear control systems in later chapters.

Part III (Chapters 8–13) deals with examples of local and global analysis of systems. First one-dimensional systems are considered for which explicit constructions of (chain) control sets and spectra are possible, and then the global behavior of nonlinear systems is studied with respect to controllability and reachability properties. In Chapter 10 it is shown how the Lyapunov spectrum of control systems can be computed numerically. The examples include several two- and three-dimensional parameter-controlled linear oscillators and a continuous flow stirred tank reactor. The results and algorithms described here are used in the remaining chapters to illustrate robustness and stabilization properties of control systems and to explain the use of control-theoretic concepts in the study of dynamical systems. In Chapter 11 the focus is on linear systems with time-varying perturbations from the point of view of robust stability and stabilizability, and Chapter 12 deals with open and closed loop stabilization. Finally, in Chapter 13 some consequences of the theory developed in this book are drawn for persistence and continuity of attractors and their spectra, including applications to the Lorenz system and a model for ship roll motion.

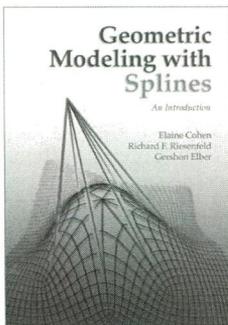
The final Part IV of this book consists of four extensive appendices: A. Geometric Control Theory, B. Dynamical Systems, C. Numerical Computation of Orbits and D. Computation of the Spectrum (by Lars Grüne).

In summary, the book under review represents a systematic and comprehensive description of the dynamical theory of control as the authors have developed it over more than a decade. It gives an up-to-date account of their research combining ideas and concepts from control theory and the theory of

dynamical systems. As this approach of linking two different but related fields turns out to be very fruitful and beneficial for both areas, this book is a valuable addition to the mathematical literature. Moreover, it provides a significant amount of material for further research in the fields of control and dynamical systems, as demonstrated e.g. by means of eight open questions of current interest in the Introduction of this book. For readers with different backgrounds and levels of experience the authors provide various support to make this mathematically ambitious book accessible. At the end of each chapter they present Notes that refer to related topics in the research literature, the four Appendices exhibit much of the background material that might not be available to all of the potential readers, and the extensive Bibliography contains 333 references. All in all, this book is highly recommend reading for researchers and graduate students in the fields of control theory and dynamical systems, but also for control engineers and mathematically inclined scientists.

Augsburg

B. Aulbach



E. Cohen,
R. F. Riesenfeld,
G. Elber
**Geometric Modeling
with Splines**
An Introduction

Natick, MA, A.K. Peters, 2001, 616 S.,
\$ 59,-

Die geometrische Modellierung mit Splinefunktionen ist ein wichtiges Forschungsgebiet geworden und hat viele Anwendungen in der Informatik und den Ingenieurwissen-

schaften gefunden. Man beschäftigt sich dabei vor allem mit der Beschreibung von Kurven und Flächen und die gewonnenen Verfahren werden z. B. zur Darstellung großer Datenmengen, der Visualisierung von Produkten, der Modellierung von Oberflächen und bei vielen weiteren Problemen verwendet. Die Theorie der Splinefunktionen begann mit den fundamentalen Arbeiten von I. Schoenberg und wurde Gegenstand einer sehr intensiven Forschung in der Approximationstheorie. Es zeigte sich schnell, daß diese Theorie bei der geometrischen Modellierung sehr gut anwendbar ist. In diesem Buch wird nun eine umfassende Darstellung der Modellierung mit Splinefunktionen gegeben. Vor allem wird die Theorie der B-Splines sehr ausführlich untersucht.

Im ersten Teil des Buches sind in Kapitel 1 die mathematischen Grundlagen dargestellt, die im weiteren Verlauf benötigt werden.

Dann wird im zweiten Teil die Theorie der Kurven betrachtet. Zunächst sind im 2. Kapitel ganz allgemein Darstellungen von Kurven und Flächen in impliziter und parametrischer Form beschrieben. Im 3. Kapitel werden die ältesten benutzten Kurven für die geometrische Modellierung betrachtet – die Kegelschnitte. Diese Kurven sind in der sogenannten Blendingdarstellung angegeben, wobei eine Kurve durch Konvexkombinationen von Punkten berechnet wird. Die Methoden werden später auf allgemeinere Kurven erweitert. Grundlagen der Differentialgeometrie für Kurven sind Gegenstand des 4. Kapitels. In Kapitel 5 und 6 werden Bézier-Kurven und Bernsteinpolynome betrachtet. Bézierkurven vom Grad n erhält man durch einen konstruktiven Prozeß aus $n + 1$ Punkten. Dieser Prozeß ist eine Erweiterung des Verfahrens, das schon bei Kegelschnitten angewendet wurde. Bézier-Kurven werden ausführlich betrachtet. In diesem Zusammenhang sind die Bernsteinpolynome von großer Bedeutung. Bézier-Kurven werden dann erweitert zu stückweise glatten Approximationskurven, die sich auch als B-Splinekurven darstellen lassen. Die Kapitel 6 bis 11 beschäftigen sich im wesentlichen mit

solchen B-Splinekurven. Zunächst werden grundlegende Eigenschaften der B-Splines gezeigt, insbesondere die bekannten Rekursionsformeln. Diese Funktionen werden verwendet, um lineare Splineräume zu definieren. Es wird die Idee der Knotenverfeinerung eingeführt. Dann werden die häufigsten Knotenverteilungen betrachtet und die Auswirkung der Wahl der Knoten auf die Kurvenform. Schließlich werden auch rationale Splinefunktionen untersucht. Ein wichtiges Problem ist die Darstellung von Funktionen, von denen endlich viele Datenpunkte bekannt sind. Verschiedene Interpolationstechniken sind angegeben, z. B. vollständige Splineinterpolation, stückweise Hermite-Interpolation. Auch andere Approximationsmethoden werden betrachtet, z. B. Quasiinterpolation, L_2 -Approximation, variationsvermindernde Approximation und auch Interpolationsverfahren, die klassische Polynombasen verwenden. Die bisherige Definition der B-Splines ist eine numerisch stabile und effektive konstruktive Methode. Zur Abrundung werden weitere klassische Methoden zur Definition von B-Splines angegeben. Zunächst kann man B-Splines auch gewinnen durch die Projektion von höherdimensionalen Simplizes. Diese Methode erlaubt eine Erweiterung auf kompakt gestützte Splines in mehreren Variablen. Eine weitere Definition ergibt sich mit Hilfe von dividierten Differenzen.

Der dritte Teil des Buches betrachtet Flächen. Im Kapitel 12 werden zunächst grundlegende Ergebnisse der Differentialgeometrie von Flächen angegeben. Die Kapitel 13 bis 15 untersuchen Splineflächen. Zunächst werden Tensorproduktflächen von B-Splines und Bézier-Kurven definiert. Die Berechnung von Funktionswerten und Ableitungen dieser Funktionen wird diskutiert. Ausserdem werden Simplex- und Box-Splines vorgestellt. Tensorproduktsplines sind ein sehr wichtiges Hilfsmittel zur Darstellung von Flächen. Es werden Interpolationsprobleme mit Daten in Gitterpunkten betrachtet oder auch in Punktmengen, die man aus der Schoenberg-Whitney Bedingung gewinnt.

Vollständige kubische Splineinterpolation wird auf den Tensorproduktfall übertragen. Wichtig ist auch die Approximation im kleinsten Mittel. Dann werden Flächen erzeugt, die zunächst durch Randkurven bestimmt sind. Schließlich wird die Modellierung mit Tensorprodukt B-Splineflächen betrachtet.

Der vierte Teil des Buches schließlich ist „Advanced Techniques“ genannt. Die Kapitel 16 und 17 untersuchen Subdivision. Es sind zunächst B-Splinekurven gegeben, die zu gewissen Knotenverteilungen gehören. Diese Kurven werden dann dargestellt durch B-Splines zu immer feiner werdenden Knotenfolgen. Einige Varianten des Oslo Algorithmus werden in diesem Zusammenhang besprochen. Die Konvergenz von stückweise linearen Funktionen – gebildet durch die Kontrollpolygone von immer mehr verfeinerten Knotenfolgen – wird untersucht. Entsprechende Ergebnisse sind auch für Graderhöhung gezeigt. Dann werden Subdivisionsmethoden bei der Modellierung betrachtet. Kapitel 18 und 19 enthält Überlegungen, wie man verschiedene Teilstücke zu einem komplexen Modell zusammensetzen kann. In diesem Zusammenhang werden Methoden zur Bestimmung von Schnittmengen von Kurven und Flächen angegeben. Ein fundamentales Problem, um geometrische Objekte zu behandeln, ist die Suche nach einer geeigneten Datenstruktur, um das Modell darzustellen. In den Kapiteln 20 und 21 werden schließlich Subdivisionsflächen betrachtet, vor allem die Catmull-Clark und die Doo-Sabin Subdivisionsflächen. Weiter sind Algorithmen für Flächen in drei Veränderlichen angegeben.

Insgesamt gibt das Buch einen umfassenden Überblick über die Theorie und Anwendungen der geometrischen Modellierung mit Splinefunktionen. Es ist sehr klar geschrieben und der Aufbau ist übersichtlich. Die Beweise sind meist ausführlich dargestellt. Es ist trotzdem gelungen, eine große Fülle an Stoff in diesem Buch aufzunehmen. Die Bedeutung der B-Splinefunktionen in dieser Theorie wird dabei eindrucksvoll demonstriert.

Das Buch ist bestens geeignet als begleitende Literatur neben einer Vorlesung. Es enthält aber auch eine Fülle von Material, das für den an der Forschung interessierten Leser wertvoll ist. Es ist ein Buch, das man sehr empfehlen kann.

Erlangen

H. Strauß



J. Franke, W. Härdle,
C. Hafner
**Einführung in die
Statistik der
Finanzmärkte**

Berlin u. a., Springer, 2001, 358 S.,
EUR 27,99

The goal of this German textbook is to give an introduction to some of the mathematical and statistical ideas and tools used in the field of financial engineering. It is mainly addressed to students who neither want nor need all the mathematical details, but are more interested in learning some concepts and approaches that may be useful for practical applications.

The book is divided into three major parts: Valuation of options, statistical modelling of financial time series, and specific finance applications. Parts I and II each comprise about 130 pages, whereas the shorter part III has about 90 pages. The book comes with a CD that includes the entire text in both HTML and PDF format. It should also be possible to reproduce or modify graphics, examples and tables with the help of the Xplore programs on the CD, but as a Macintosh user, I was unable to verify this.

In some more detail, the contents of the book is as follows. Part I contains chapters on financial derivatives, the basics of mana-

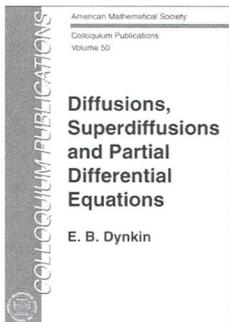
ging options, basic concepts from probability, introductions to stochastic processes in discrete time and to stochastic integrals and differential equations, the Black-Scholes option pricing model, the binomial model, American options, and exotic options and interest rate derivatives. In this part, the mathematical level is kept deliberately low with clear emphasis on intuition instead of proofs. Part II starts with a fairly long introduction of some definitions and concepts in the statistical modelling of financial time series, then discusses ARIMA time series models and ARCH models with their numerous variations, and ends with a chapter on nonparametric concepts for financial time series. The overall structure of part II is less clear than that of part I, and especially the last chapter seems very technical in comparison to the gentle presentation in part I.

The final part III on applications has chapters on option valuation with volatility estimators (using ARCH models), Value at Risk and backtesting, neural networks, volatility risks for portfolios, and nonparametric estimators for default probabilities. This part reflects some of the authors' recent work in those areas.

For a course which aims at statistical applications or at an introduction to financial engineering, the book should be a useful complement. The first part is carefully written and explains the central ideas in a clear and understandable way. The second part is sometimes more technical and might be made more balanced in a future edition, and the applications will have to stand the test of time. The index is not really usable since page numbers do not fit. But despite these drawbacks, this book will help to fill a gap in the German literature on financial engineering with particular emphasis on the statistical rather than the theoretical aspects.

München

M. Schweizer



E. B. Dynkin
Diffusions, Superdiffusions, and Partial Differential Equations
 (Coll. Publ. 50)

Providence, Am. Math. Soc., 2002, 236 S.,
 \$ 49,-

E. B. Dynkin ist in weiten Bereichen der Mathematik durch mittlerweile klassische Arbeiten über Liesche Gruppen sowie über allgemeine Markovsche Prozesse und deren Beziehungen zur Potentialtheorie linearer Differentialoperatoren bekannt. Nun hat Dynkin, der im kommenden Jahr achtzig Jahre alt wird, ein weiteres Buch vorgelegt, das einen probabilistischen Zugang zu positiven Lösungen der folgenden Klasse semilinearer partieller Differentialgleichung beschreibt:

$$Lu = \psi(u) \quad \text{in einem Gebiet } D \subset \mathbb{R}^d. \quad (1)$$

Hierbei ist L ein elliptischer Differentialoperator zweiter Ordnung mit hinreichend regulären Koeffizienten, und die Nichtlinearität $\psi = \psi(x, u)$ entstammt einer Familie von Funktionen, die insbesondere Potenzen von u mit Exponenten $\alpha \in (1, 2]$ beinhaltet. Das Besondere an dieser Theorie ist, dass sie nicht nur eine probabilistische Alternative zur rein analytischen Betrachtung von (1) aufzeigt sondern auch völlig neue Resultate liefert, die sich bisher mit analytischen Methoden allein nicht beweisen lassen.

Der probabilistische Zugang zur klassischen *linearen* Differentialgleichung

$$Lu = 0 \quad \text{in einem Gebiet } D \subset \mathbb{R}^d \quad (2)$$

beruht auf dem zu L gehörigen Diffusionsprozess $\xi = (\xi_t)_{t \geq 0}$ in \mathbb{R}^d , dessen Fluktuationen die durch L induzierte Geometrie wi-

derspiegeln. Ist L zum Beispiel der Laplace-Operator, so ist ξ eine Brownsche Bewegung. Möchte man dagegen die *semilineare* Gleichung (1) mit einem Markovschen Prozess assoziieren, so muss man den euklidischen Raum verlassen und sich auf den darüber liegenden Raum $\mathcal{M}(\mathbb{R}^d)$ aller positiven endlichen Borelschen Maße begeben. Hier leben die sogenannten Superdiffusionen, die man sich intuitiv als Kontinuumslimiten diffundierender und kritisch verzweigender Teilchensysteme vorstellen kann. Der Operator L kommt dabei durch die Diffusion der einzelnen Partikel ins Spiel, während sich die Nichtlinearität ψ über einen Grenzwertsatz aus der Nachkommenverteilung ergibt.

Mittels solch einer Superdiffusion $X = (X_t)_{t \geq 0}$ lässt sich jetzt der Wert $u(x)$ einer Lösung von (1) zu einem vorgegebenen, positiven Randwert probabilistisch darstellen. Dazu reicht zwar ein einfacher, linearer Erwartungswert nicht mehr aus, aber immerhin gelingt es mit einem logarithmischen Laplace-Funktional bezüglich derjenigen Wahrscheinlichkeitsverteilung P_x , unter der die Superdiffusion mit einer Einheitsmasse $X_0 = \delta_x$ startet. Spannend wird die Sache nun, wenn man den Randwert gegen Unendlich streben lässt, denn aus der probabilistischen Darstellung ergibt sich unmittelbar die Konvergenz der Lösungen gegen einen endlichen Grenzwert. Und in der Tat: für beschränkte reguläre Gebiete D besitzt (1) eine *maximale positive Lösung* w , die überall in D endlich ist aber zum Rand hin explodiert. Sie besitzt die probabilistische Darstellung

$$w(x) = -\log P_x[\mathcal{R} \subset D],$$

wobei $\mathcal{R}(\omega)$ die kleinste abgeschlossene Menge in \mathbb{R}^d bezeichnet, die die Träger aller Maße $X_t(\omega)$ ($t \geq 0$) enthält.

Das Hauptziel der im Buch dargelegten Theorie ist nun eine Klassifikation *aller* positiven Lösungen von (1) durch ihr jeweiliges Randverhalten. Die angestrebte Charakterisierung gelingt Dynkin jedoch nur für die Teilklasse der *σ -moderaten* Lösungen, die man als aufsteigende Grenzwerte positiver Lösungen erhält, die sich ihrerseits durch

L -harmonische Funktionen dominieren lassen. Solch eine σ -moderate Lösung u ist dann eindeutig bestimmt durch ihre *feine Spur*, bestehend aus einer Borelsche Menge $\Gamma \in \partial D$ und einem σ -endlichen positiven Maß ν auf $\partial D \setminus \Gamma$. Die Menge Γ entspricht in gewisser Weise denjenigen Randpunkten, an denen u eine Singularität besitzt, während das Maß ν schwache Randwerte auf $\partial D \setminus \Gamma$ repräsentiert. Diese Charakterisierung σ -moderater Lösungen wirft natürlich die folgende Frage auf, die in Dynkins Buch unbeantwortet bleibt: Sind alle Lösungen von (1) σ -moderat? Erst nach Erscheinen des Buchs ist es Benoit Mselati, einem Schüler Jean-François Le Galls in seiner Dissertation [1] gelungen, diese Frage für den Spezialfall $L = \Delta$ und $\psi(u) = u^2$ positiv zu beantworten. Damit ist zumindest in diesem Fall die Klassifikation aller Lösungen vollständig.

Ein weiteres Thema des Buchs ist die Entwicklung einer „Potentialtheorie“ des semilinearen Operators $L - \psi(\cdot)$ in Analogie zur klassischen Potentialtheorie für L . Dieses Programm beinhaltet insbesondere eine Charakterisierung hebbbarer Randsingularitäten der Lösungen von (1) mittels verschiedener Kapazitätsbegriffe.

Das Buch beginnt mit einer exzellent geschriebenen Einführung, in der die wichtigsten Resultate in knapper, sehr gut verständlicher Form zusammengefasst sind. Der weitere Verlauf ist in zwei Teile gegliedert. Teil 1 behandelt zum einen die (1) und (2) entsprechenden linearen und semilinearen *parabolischen* Differentialgleichungen. Diese Resultate sind weniger vollständig als die der elliptischen Theorie, sie werden aber für die Konstruktion der Superdiffusionen benötigt, die die zweite Hälfte von Teil 1 ausmacht. Dynkin versteht Superdiffusionen nicht als einen stochastischer Prozess im üblichen Sinn, sondern als eine Kollektion von Zufallsvariablen, die über Stoppzeiten der Einteilchenbewegung ξ indiziert ist. Der mit Superprozessen weniger vertraute Leser wird an dieser Stelle vielleicht zusätzlich auf die einführenden Bücher von Etheridge oder Le Gall zurückgreifen wollen. Teil 2 des Buchs

ist länger und überwiegend der Theorie der elliptischen Differentialgleichungen (1) und (2) gewidmet. Es fällt jedoch auf, dass jeglicher Hinweis auf diejenigen Effekte fehlt, die durch die mögliche Ortsabhängigkeit der Funktion $\psi(x, u)$ hervorgerufen werden können. Für eine entsprechende Diskussion sei der interessierte Leser auf [2] verwiesen. Zwei Anhänge und eine Diskussion offener Probleme schließen das Buch ab.

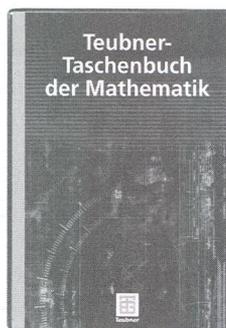
Die Lektüre dieses Buchs setzt eine gewisse Erfahrung voraus, so dass es sich wohl nur in besonderen Glücksfällen als Grundlage eines Studentenseminars eignet. Eine Ausnahme hiervon bildet jedoch die sehr kurze und prägnante Einführung in die probabilistische Potentialtheorie der *linearen* partiellen Differentialgleichung (2). So wird etwa in Kapitel 7 auf nur elf Seiten die Theorie des Martin-Randes und die Integraldarstellung positiver L -harmonischer Funktionen entwickelt. Allerdings sollte warnend hinzugefügt werden, dass der Text gerade in diesen einführenden Kapiteln besonders knapp geschrieben ist, und die verwendete Notation etwas vom üblichen Standard abweicht. Für Wissenschaftler und Doktoranden ist Dynkins Buch jedoch insgesamt eine gelungene Einführung in ein faszinierendes und weiterhin aktuelles Forschungsgebiet im Grenzbereich von Wahrscheinlichkeitstheorie und Analysis.

- [1] Benoit Mselati, *Classification et représentation probabiliste des solutions positives de $\Delta u = u^2$ dans un domaine*. Thèse de doctorat de l'Université Paris VI (2002).
- [2] Yang-Xia Ren, *Support properties of super-Brownian motions with spatially dependent branching rate*. Preprint, Peking University (2003).

Vancouver

A. Schied

Die unentbehrlichen Klassiker in Studium, Lehre und Praxis



Wolfgang Hackbusch/Hans-Rudolf Schwarz

Teubner-Taschenbuch der Mathematik

Eberhard Zeidler (Hrsg.)
2., durchges. Aufl. 2003.
XXVI, 1298 S. Geb.
EUR 34,90
ISBN 3-519-20012-0

Günter Grosche/Viktor Ziegler/
Eberhard Zeidler/Dorothea
Ziegler (Hrsg.)

Teubner-Taschenbuch der Mathematik. Teil II

8., durchges. Aufl. 2003.
XVI, 830 S. Geb. EUR 44,90
ISBN 3-519-21008-8

Inhalt

Formeln und Tabellen - Elementarmathematik - Mathematik auf dem Computer - Differential- und Integralrechnung - Vektoranalysis - Gewöhnliche Differentialgleichungen - Partielle Differentialgleichungen - Integraltransformationen - Komplexe Funktionentheorie - Algebra und Zahlentheorie - Analytische und algebraische Geometrie - Differentialgeometrie - Mathematische Logik und Mengentheorie - Variationsrechnung und Optimierung - Wahrscheinlichkeitsrechnung und Statistik - Numerik und Wissenschaftliches Rechnen - Geschichte der Mathematik

Das Buch

Das Teubner-Taschenbuch der Mathematik erfüllt aktuell, umfassend und kompakt alle Erwartungen, die an ein mathematisches Nachschlagewerk gestellt werden. Es vermittelt ein lebendiges und modernes Bild der heutigen Mathematik. Als Handbuch begleitet es die Studierenden vom ersten Semester bis zur letzten Prüfung und der Praktiker nutzt es als ständiges und unentbehrliches Nachschlagewerk in seinem Berufsalltag.

Inhalt

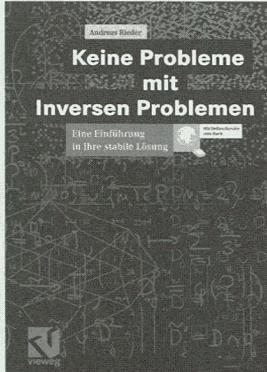
Mathematik und Informatik - Operations Research - Höhere Analysis - Lineare Funktionalanalysis und ihre Anwendungen - Nichtlineare Funktionalanalysis und ihre Anwendungen - Dynamische Systeme, Mathematik der Zeit - Nichtlineare partielle Differentialgleichungen in den Naturwissenschaften - Mannigfaltigkeiten - Riemannsche Geometrie und allgemeine Relativitätstheorie - Liegruppen, Liealgebren und Elementarteilchen, Mathematik der Symmetrie - Topologie - Krümmung, Topologie und Analysis

Teubner Lehrbücher:
einfach clever



Abraham-Lincoln-Str. 46
65189 Wiesbaden
Fax 0611.7878-420
www.teubner.de

Die Mathematik hinter der Computer-Tomographie



Andreas Rieder

Keine Probleme mit Inversen Problemen

Eine Einführung in ihre stabile
Lösung

2003. XIV, 300 S. Br. € 25,90
ISBN ISBN 3-528-03198-0

INHALT

Was ist ein Inverses Problem? - Schlecht gestellte Operatorgleichungen - Regularisierung linearer und nichtlinearer schlecht gestellter Probleme - Optimalität von Regularisierungsverfahren - Tikhonov-Phillips-Regularisierung - Iterative Regularisierungen - Diskretisierung und Regularisierung - Anwendungsbeispiele

DAS BUCH

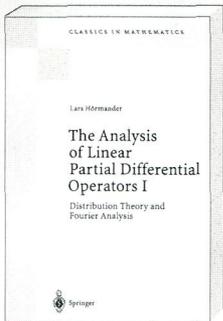
Inverse Probleme treten in der heutigen Hochtechnologie häufig auf. Aus mathematischer Sicht bestehen inverse Probleme darin, Operatorgleichungen zu lösen. Das vorliegende Lehrbuch führt umfassend ein in die mathematischen Grundlagen zur stabilen Lösung inverser Probleme, zielt dabei aber auch auf konkrete Anwendungen ab. Es eignet sich als Grundlage für eine vierstündige Vorlesung und zum Selbststudium, das durch zahlreiche Übungen unterstützt wird.



Abraham-Lincoln-Straße 46
D-65189 Wiesbaden
Fax 0611.78 78-420

Änderungen vorbehalten.
Erhältlich beim Buchhandel oder beim Verlag.

CLASSICS IN MATHEMATICS



L. Hörmander

The Analysis of Linear Partial Differential Operators I

Distribution Theory and Fourier Analysis

From the reviews:

"In order to illustrate the richness of the book: in my review of the 1983 edition [...] I gave a list of 20 subjects which were new compared to Hörmander's book of 1963. [...] In all, the book can be highly recommended, both as a textbook for advanced students, and as background and reference for introductory courses on distributions and Fourier analysis."

J.J. Duistermaat in Mededelingen van het Wiskundig Genootschap

Reprint of the 2nd ed. Berlin Heidelberg New York 1990, 2003. XI, 440 p. Softcover € 34,95; sFr 60,00; £ 27,00 ISBN 3-540-00662-1

Please order from
Springer - Customer Service
Haberstr. 7
69126 Heidelberg, Germany
Tel.: +49 (0) 6221 - 345 - 0
Fax: +49 (0) 6221 - 345 - 4229
e-mail: orders@springer.de
or through your bookseller

All Euro and GBP prices are net-prices subject to local VAT, e.g. in Germany 7% VAT for books and 16% VAT for electronic products. Prices and other details are subject to change without notice. d&p - 010425x

springeronline.com

H. Grauert, R. Remmert

Theory of Stein Spaces

From the reviews:

"Theory of Stein Spaces provides a rich variety of methods, results, and motivations - a book with masterful mathematical care and judgement. It is a pleasure to have this fundamental material now readily accessible to any serious mathematician."

J. Eells in Bulletin of the London Mathematical Society (1980)

Reprint of the 1st ed. New York 1979, 2004. XVI, 254 pp. 5 illus. Softcover € 34,95; sFr 60,00; £ 25,00 ISBN 3-540-00373-8

Forthcoming

I.I. Gihman, A.V. Skorohod

The Theory of Stochastic Processes I

Reprint of the 1st ed. Berlin Heidelberg New York 1974, 2004. XII, 574 p. Hardcover € 34,95; sFr 60,00; £ 27,00 ISBN 3-540-20284-6

The Theory of Stochastic Processes II

From the Reviews:

"Gihman and Skorohod have done an excellent job of presenting the theory in its present state of rich imperfection."

D.W. Stroock in Bulletin of the American Mathematical Society, 1980

Reprint of the 1st ed. Berlin Heidelberg New York 1995, 2004. XI, 441 p. Hardcover € 34,95; sFr 60,00; £ 27,00 ISBN 3-540-20285-4

Also available in the series
- a selection -

R. Courant, F. John

Introduction to Calculus and Analysis Volume I

Reprint of the 1st ed. Berlin Heidelberg New York 1989, 1999, XXIII, 661 p. Softcover € 34,95; sFr 60,00; £ 27,00 ISBN 3-540-65058-X

Introduction to Calculus and Analysis Volume II/1

Chapters 1 - 4

Reprint of the 1st ed. Berlin Heidelberg New York 1989, 2000, XXV, 556 p. 120 illus. Softcover € 34,95; sFr 60,00; £ 27,00 ISBN 3-540-66569-2

Introduction to Calculus and Analysis Volume II/2

Chapters 5 - 8

Reprint of the 1st ed. New York 1989, 2000, XXV, 412 pp., 120 figs. Softcover € 34,95; sFr 60,00; £ 27,00 ISBN 3-540-66570-6

H. Hasse

Number Theory

Reprint of the 1st ed. Berlin Heidelberg New York 1980, 2002, XVII, 638 p. 49 illus. Softcover € 34,95; sFr 60,00; £ 27,00 ISBN 3-540-42749-X

R. M. Switzer

Algebraic Topology

Homotopy and Homology

Reprint of the 1st ed. Berlin Heidelberg New York 1975, 2002, XIII, 526 pp. Softcover € 34,95; sFr 60,00; £ 27,00 ISBN 3-540-42750-3

For the complete series see
springeronline.com



Springer

