Die Hamburger Abituraufgaben im Fach Mathematik

Entwicklung von 2005 bis 2013

Thomas Jahnke, Hans Peter Klein, Wolfgang Kühnel, Thomas Sonar und Markus Spindler

1 Einleitung

Das Zentralabitur in Hamburg ist in die öffentliche Diskussion geraten, weil Gegner und Befürworter von G8 bzw. G9 sich dort besonders heftig befehden. In der Studie KESS 12 wurde angeblich nachgewiesen, dass die G8-Abiturienten des Jahrgangs 2011 an Gymnasien in Englisch, Mathematik und den Naturwissenschaften teilweise sogar noch höhere Leistungen erbracht hatten als die G9-Abiturienten des Jahrgangs 2005: „Zusammenfassend kann festgestellt werden, dass unter den erhöhten Anforderungen des G8 mehr Abiturientinnen und Abiturienten höhere Lernstände erreicht haben“,[1] obwohl die Abiturquote von 2005 auf 2011 deutlich gestiegen war. Der Kurzbericht der Studie spricht von 33 % mehr Abiturienten und auch davon, dass der Anstieg mit einer erheblich höheren Beteiligung aus unteren sozialen Schichten einherging. Der Kurzbericht der Studie KESS 13 [2] erklärt dazu sogar:

> Die Zahl der Abiturientinnen und Abiturienten an den früheren Gesamtschulen, Aufbaugymnasien und beruflichen Gymnasien ist von 2005 bis 2012 um 67 Prozent gestiegen. Der Zuwachs betrifft vor allem Schülerinnen und Schüler aus bildungsferneren Elternhäusern.

Getestet wurden die Schülerinnen und Schüler aber überwiegend mit Aufgaben, die Stoffe aus der Sekundarstufe I abfragen und nicht aus der Sekundarstufe II.

Wenn man die verschiedenen Jahrgänge bezüglich ihrer tatsächlich im Abitur zu erbringenden Leistungen miteinander vergleichen will, dann bieten sich die auf dem Bildungsserver veröffentlichten Zentralabitur-Aufgaben[3] selbst an. Genau dieses soll hier versucht werden, und zwar jeweils für die Aufgaben beim Haupttermin an den „normalen“ allgemeinbildenden Gymnasien in den Jahren 2005, 2011 und 2013.

Die Frage war: Sind die gestellten Aufgaben vergleichbar, sind die fachlichen Ansprüche gleich geblieben oder gestiegen, oder waren für das Bestehen des Mathematik-Abiturs in den Jahren 2005, 2011 und 2013 zunehmend geringere Leistungen ausreichend?

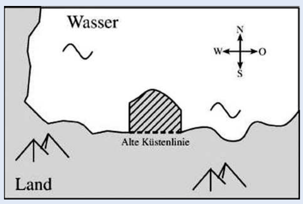
Um das Ergebnis kurz vorwegzunehmen: Es wird im Folgenden anhand der Aufgaben dargelegt, dass es 2011 und 2013 leichter war, die minimal erforderlichen 90 Punkte zu erreichen, als es 2005 war, die damals erforderlichen 135 Punkte zu erreichen. Entsprechendes gilt dann auch für die besseren Noten. Nicht diskutiert wird die Frage, ob es leichter oder schwieriger geworden ist, tatsächlich 100 % der Punkte zu erhalten. Es geht auch nicht um eine Schlussfolgerung über den Sinn oder Unsinn eines Zentralabiturs. Vielleicht kann ein Zentralabitur Sinn machen, aber keinesfalls dann, wenn das Anspruchsniveau von Jahr zu Jahr sinkt.

Wohl aber wird die Frage nach dem Unterschied zwischen Grundkurs und Leistungskurs bzw. grundlegendem und erhöhtem Niveau im Folgenden kurz angesprochen. Hier fällt auf, dass gerade 2013 viele Aufgabenteile wörtlich identisch waren und gerade diese identischen Teile auf beiden Niveaus bereits zum Bestehen ausreichten. Ein Beispiel zeigt Abbildung 1. Dieser Aufgabenteil für das grundlegende Niveau 2013 wurde auch beim erhöhten Niveau gestellt, dann mit nur 15 Punkten statt mit 20 (wobei für das Bestehen 90 Punkte erforderlich waren).

Somit kann man davon ausgehen, dass der Unterschied zwischen den beiden Niveaus gegenüber dem früher bestehenden Unterschied zwischen Grund- und Leistungskurs zunehmend verflacht. Dies steht im Gegensatz zu den Beteuerungen der zuständigen Schulbehörden.[4] Ein Unterschied besteht dann allenfalls noch bei den besseren Noten, ganz grob etwa so, dass ein „gut“ beim grundlegenden Niveau einem „befriedigend“ beim erhöhten Niveau entsprechen mag. Dies kann man aus der Punkteverteilung der jeweils identischen Teile schließen. Ein KMK-Beschluss vom 18. 10. 2012 spricht ebenfalls von

I.1 Halbinsel

Eine in einen See ragende künstlich angelegte Halbinsel soll neu gestaltet werden. Die Halbinsel ist in Ost–West-Richtung 30 m breit, auf der westlichen Seite ragt die Halbinsel in Nordrichtung 15 m (Punkt C), auf der östlichen Seite 10 m (Punkt D) in den See (siehe Abbildung in der Anlage).



Ein neuer Praktikant erstellt für den Verlauf der nördlichen Strandlinie die Funktionsgleichung

$$g(x) = -\tfrac{7}{90}x^2 + \tfrac{13}{6}x + 13 \quad \text{für} \quad 0 \le x \le 30.$$

Der Projektleiter zweifelt dieses Ergebnis an und fordert seinen Praktikanten auf, exemplarisch für drei Punkte mit x-Werten aus dem Intervall $[5; 25]$ zu überprüfen, ob der Funktionsgraph von g mit der Strandlinie übereinstimmt. Eine Abweichung der Funktionswerte von den gemessenen Werten (siehe Abbildung in der Anlage) von maximal 1 m soll akzeptiert werden.

a)
- Bestätigen Sie durch Rechnung, dass der Zweifel des Projektleiters berechtigt ist.
- Begründen Sie, warum die nördliche Strandlinie nicht auf dem Graphen einer quadratischen Funktion (Parabel) liegen kann (siehe Abbildung in der Anlage).

(20 P)

Hamburger Abituraufgabe zur Analysis 2013

DOI 10.1515/dmvm-2014-0044

diesen beiden Niveaus, definiert den Unterschied aber nur ausgesprochen vage.[5]

2 Die Aufgaben

Die Aufgaben verteilen sich auf die Sachgebiete I (Analysis), II (LAAG/Geometrie) und III (Wahrscheinlichkeitsrechnung). Bei jeder Prüfung muss das Gebiet I und ein weiteres Gebiet abgedeckt sein. Es gibt im Wesentlichen nur vier verschiedene Aufgabentypen:

- Typ 1: Minimax-Aufgaben mit Extrema und Steigung einer gegebenen Funktion, auch Flächenberechnungen durch Integrale. Dazu gehören alle Analysis-Aufgaben.
- Typ 2: Aufgaben zur analytischen Geometrie von Geraden und Ebenen im dreidimensionalen Raum. Dazu gehören die meisten Aufgaben zum Gebiet II.
- Typ 3: Aufgaben zu Übergangsmatrizen. Dazu gehören die restlichen Aufgaben zum Gebiet II.
- Typ 4: Aufgaben zu Wahrscheinlichkeiten von Ereignissen. Dazu gehören alle Aufgaben zum Gebiet III.

> Mit Ausnahme von fünf Aufgaben 2005 zur Analysis bzw. Geometrie sind in den Jahren 2005, 2011 und 2013 alle Aufgaben sogenannte Textaufgaben oder auch „Sachaufgaben“ mit zum Teil sehr langem Text und mit gezielt und fast krampfhaft herangezogenen Anwendungssituationen. Aufgaben zur Analysis beschäftigen sich dann typischerweise mit betriebswirtschaftlichen Fragen wie Gewinnmaximierung, Gewinnzonen, Fixkosten etc. Sie könnten in ähnlicher Weise auch in eine Prüfung im Fach Betriebswirtschaft eingebettet werden.

Die verwendeten mathematischen Methoden sind bei Typ 1 durchweg erste und zweite Ableitungen, bestimmte Integrale sowie Nullstellen linearer und quadratischer Funktionen. Bei Typ 2 geht es um Geraden und Ebenen im Raum, um Abstände, Winkel und Schnittpunkte, gelegentlich auch um Volumina. Kenntnisse in Vektorrechnung werden erwartet. Bei Typ 3 kommen Matrizen vor, die den Übergang von einem Zustand zu einem späteren beschreiben sollen. Zu beachten ist, dass die Taschenrechner inzwischen $(3,3)$-Matrizen bearbeiten können. Man muss dann gar nicht mehr selbst rechnen. Beliebte Veranschaulichungen sind dabei die Übergangsgraphen, die ihrerseits eigentlich gar nicht in die LAAG gehören. Bei Typ 4 schließlich geht es primär um Wahrscheinlichkeiten unabhängiger Ereignisse, Verteilungen, Erwartungswerte und Standardabweichungen.

Erwartungen und Vorbereitung

Es ist mit Sicherheit anzunehmen, dass diese o. g. vier Typen von Aufgaben im Unterricht reichlich geübt werden, weil sie offenbar von Jahr zu Jahr als Typen bestehen bleiben. Normalerweise geschieht das von Januar bis März des Prüfungsjahres. Bei G8 wird so die gymnasiale Oberstufe auf die 11. Klasse und dann die Monate August bis Dezember der 12. Klasse reduziert, weil direkt danach die Vorbereitung auf die schriftlichen Aufgaben im Abitur beginnt. Zudem können die Lehrer zwei aus sechs (2005: drei aus sieben) Aufgaben für ihre Prüflinge auswählen. Vermutlich ist von einer intensiven Vorbereitung und ggfs. Spezialisierung auf ganz bestimmte Aufgabentypen auszugehen. Wie man hört, sind Aufgaben zur Wahrscheinlichkeitsrechnung nicht beliebt. Es soll routinemäßig vorkommen, dass Lehrer die Wahrscheinlichkeitsrechnung nur kurz streifen und durchblicken lassen, dass sie dieses Thema im Abitur nicht auswählen werden. Damit verbleiben neben der obligatorischen Analysis nur noch Analytische Geometrie und Übergangsmatrizen.

> Wegen der Spezialisierung auf wenige Aufgabentypen sagen auch gute Ergebnisse bei diesen Klausuren nicht viel über das tatsächliche mathematische Verständnis insgesamt sowie über die Studierfähigkeit in MINT-Fächern aus.

Schwierigkeiten ergeben sich weniger von der Mathematik her als vielmehr von der nicht immer eindeutigen Interpretierbarkeit der Texte her (Es gibt einige Teile, die man als „Gummi-Aufgaben“ ansehen kann; ein Beispiel wird weiter unten diskutiert.). Die Schwierigkeiten bestehen meist im Herausfinden, was eigentlich mathematisch gerechnet werden soll. Diese Tendenz scheint es auch in anderen Bundesländern zu geben.

3 Vergleich Grundkurs/Leistungskurs

Rein formal ist der Unterschied der folgende: Beim Leistungskurs (bzw. erhöhten Niveau) hat jede Aufgabe einen Aufgabenteil mehr als beim Grundkurs (bzw. grundlegenden Niveau). Typischerweise hat eine Aufgabe bei ersterem die Teile (a)–(f), bei letzterem (a)–(e). Gelegentlich gibt es auch (a)–(g) gegenüber (a)–(f). Allerdings wird dies dann wieder dadurch wettgemacht, dass die Bearbeitungszeit im Leistungskurs stets 60 Minuten länger als beim Grundkurs ist, ebenso beim erhöhten vs. grundlegenden Niveau. Die Zahl der Punkte für die verschiedenen Notenstufen differiert nicht zwischen den Niveaus. Aber es gab 2005 drei Aufgaben mit zusammen 300 Punkten und später nur noch zwei Aufgaben mit zusammen 200 Punkten. Nichts deutet darauf hin, dass die einzelnen Punkte 2011 und 2013 gewichtiger waren als 2005. Die Punktbewertung der Aufgabenteile scheint im Wesentlichen dieselbe geblieben zu sein, d. h. 20 Punkte waren 2013 nicht spürbar schwieriger zu erhalten als 2005. Es verbleibt natürlich ein gewisser Unterschied im Anspruchsniveau der Aufgaben von grundlegendem und erhöhtem Niveau. Es ist aber nicht leicht, diesen Unterschied eindeutig zu quantifizieren. Aufschlussreicher ist da die Entwicklung von 2005 bis 2013 im Vergleich.

4 Vergleich 2005/2011/2013

Dramatische Änderungen gibt es nicht bei den Aufgaben in den drei Sparten Analysis, LAAG und Stochastik. Betrachten wir konkret die jeweils erste Analysis-Aufgabe I.1 und die jeweils erste Geometrie-Aufgabe II.1. Im Jahr 2005 war dann noch eine dritte Aufgabe erforderlich, später nicht mehr. Es gibt außerdem ernst zu nehmende Hinweise darauf, dass sich in letzter Zeit der Aufgabentyp 3 zu Übergangsmatrizen (etwa II.2 „Pinguine"[6] 2013) großer Beliebtheit erfreut, weil er offenbar als leichter gilt als Typ 2. Weil es aber Typ 3 im Jahr 2005 noch nicht gab, werden im Folgenden nur Typ 1 und Typ 2 besprochen. Aber die Schlussfolgerung gilt dann erst recht.

4.1 Grundkurs bzw. grundlegendes Niveau

Beim GK 2005 sind in Aufgabe I.1 („drei ganzrationale Funktionen") zwei bzw. drei Polynom-Funktionen mit Termen der Form $0.5x^4 + cx^3$ zu vergleichen. In Teil (a) muss man entscheiden, ob der eine Graph oberhalb oder unterhalb des anderen liegt. Das kann man durch Einsetzen bewerkstelligen (mit oder ohne Taschenrechner). In Teil (b) muss man immerhin Extrempunkte und Wendepunkte berechnen sowie die Gleichung der Wendetangente aufstellen, ohne dass diese Punkte nun schon gegeben wären. In Teil (c) ist ein bestimmtes Integral zu berechnen. In Teil (d) sollen Nullstellen berechne und eine Skizze der dritten Funktion angefertigt werden. Dies zusammen bringt 80 Punkte, man benötigt aber einige Kenntnisse in Differential- und Integralrechnung. Für einen Grundkurs scheint das angemessen zu sein. Erst mit 135 Punkten aus drei Aufgaben ist die Klausur bestanden.

Die entsprechende Aufgabe I.1 im Jahr 2011 („Netbook-Vermarktung") beschäftigt sich mit betriebswirtschaftlichen Themen wie Kosten und Gewinn. Der erste Punkt von Teil (a) ist eine reine Einsetzaufgabe, mit dem Taschenrechner leicht zu bewerkstelligen. Die Lösung des zweiten Punktes „Beschreiben Sie die inhaltliche Bedeutung von $K'(80)$" ist ein paar Zeilen darüber praktisch vorformuliert: Das beschreibt die Grenzkosten pro Stück. Mit Mathematik hat das zunächst nicht viel zu tun. Die minimalen Grenzkosten in Teil (b) treten als Lösung einer linearen Gleichung auf, sind also einfach zu ermitteln. „Interpretieren Sie die Bedeutung der minimalen Grenzkosten im Sachkontext" ist wieder so eine „Gummi-Aufgabe", bei der man nie genau weiß, wann sie korrekt gelöst ist.[7] „Sachkontext" ist kein klar definierter Begriff. Man soll wohl raten, was gemeint ist, nämlich ein Wendepunkt des Graphen der Funktion. Was aber mag dieser geometrische Begriff in diesem betriebswirtschaftlichen „Sachkontext" bedeuten? Das wirkt verkrampft. Dies zusammen bringt bereits 35 Punkte. In Teil (c) ist die Erlösfunktion als „Preis mal x" leicht hinzuschreiben. Für die Gewinnfunktion muss man nur die Kosten vom Erlös abziehen. Das wäre vielleicht sogar eine Aufgabe für die Realschule. Zusammen haben wir nun bereits 50 Punkte, und zwar ohne ernsthafte Mathematik außer dem Ableiten des gegebenen Polynoms. Zum Bestehen benötigt man nur noch 40 weitere Punkte aus der anderen Aufgabe. Die Teile (d) und (e) bringen noch einmal je 25 Punkte. Der Gewinnbereich in (d) ist bereits angegeben, man soll das nur noch durch Einsetzen verifizieren. Der maximale Gewinn ergibt sich als Lösung einer quadratischen Gleichung. Dies ist schon der mathematische Gipfel der Aufgabe. Die so erreichbaren 75 Punkte (von 90 Punkten für das Bestehen) sind auf jeden Fall leichter erreichbar als eine analoge Punktzahl 2005. Dort würde ja selbst eine komplett richtige Aufgabe zum Bestehen noch nicht reichen, weil drei Aufgaben zu bearbeiten sind bei eine Bearbeitungszeit von 270 Minuten gegenüber 240 Minuten im Jahr 2011 für zwei Aufgaben. Somit ist es den Abiturienten 2011 im Vergleich zu 2005 leichter gemacht worden, und das grundlegende Niveau liegt unter dem eines Grundkurses (Für den Unterricht muss das natürlich nicht gelten, das kann man nicht schlussfolgern; hier geht es nur um die Abitur-Aufgaben.).

Im Jahr 2013 schließlich sind bei Aufgabe I.1 („Halbinsel") die drei Teile (a), (c), (d) identisch mit den entsprechenden Teilen beim erhöhten Niveau. Ein wirklich hohes Niveau ist das allerdings nicht. Die Details folgen weiter unten. In Teil (b) soll man einfach den Wert der Tangens-Funktion an einer gegebenen Stelle verifizieren (offenbar mit dem Taschenrechner). Das kann kaum falsch gemacht werden. Außerdem soll man verifizieren, dass eine gegebene Polynomfunktion an der entsprechenden Stelle eben diesen Wert als Ableitung hat. Das ist ein einmaliges Ableiten des Polynoms, gefolgt vom Einsetzen der gegebenen Stelle. Dieser Teil ist mathematisch besonders simpel und auch beim grundlegenden Niveau eigentlich nicht abiturwürdig. Teil (c) besteht aus dem Ableiten des gegebenen Polynoms und dem Lösen einer quadratischen Gleichung. In (d) ist die Zielfunktion aus der Skizze leicht hinzuschreiben, führt aber auf ein Polynom vierten Grades. Dieser Teil ist vergleichsweise anspruchvoll und ist den Aufgaben von 2005 vergleichbar, aber die Teile (a)–(d) zusammen bringen bereits 75 Punkte, womit zum Bestehen nur noch 15 Punkte fehlen. Man kann daher wohl sagen, dass auch 2013 die Anforderungen geringer waren als die im Jahr 2005. Ein Unterschied zwischen 2011 und 2013 ist nicht klar auszumachen. Allerdings wurde die Bearbeitungszeit um 30 Minuten (die sog. „Lesezeit") auf 270 Minuten verlängert und hat somit wieder die von 2005 erreicht, das aber bei nur zwei Aufgaben statt drei Aufgaben im Jahr 2005.

Wenden wir uns den jeweiligen Aufgaben II.1 zum Thema LAAG/Geometrie zu. Beim GK 2005 geht es um „Dreieck und Pyramide". In Teil (a) sind drei gegebene Punkte im Raum als die Punkte eines gleichschenkligen Dreiecks nachzuweisen. Man muss dazu nur die euklidische Länge von zwei der Seiten als gleich erkennen. In Teil (b) ist eine Ebene durch drei Punkte in zwei Darstellungen zu beschreiben, und in Teil (c) geht es um den Winkel zwischen zwei Ebenen. Das erfordert immerhin Kenntnisse über die Einheitsnormalen von Ebenen. Zusammen bringen diese drei Teile 55 Punkte. Für die Pyramide in Teil (d) soll man zunächst zeigen, dass sie eine quadratische Grundfläche hat. Weil die vier Punkte gegeben sind, ist das einfach. Um zu zeigen, dass die Spitze senkrecht über dem Mittelpunkt des Quadrats liegt, muss man nicht viel rechnen, aber irgendeine geometrische Idee entwickeln, wie man das bewerkstelligen kann. Hier genügt eine Standardformel nicht. Teil (e) betrifft „verkappte“ lineare Gleichungssysteme und ist nicht schwieriger als die anderen Teile. Aber man brauchte ja 135 Punkte zum Bestehen.

Die Aufgabe II.1 („Solarturmkraftwerk“) im Jahr 2011 ist eine Geometrie-Aufgabe zu Geraden, Ebenen und Winkeln. Teil (a) ist recht blumig formuliert. Tatsächlich aber soll man nur die Punkt-Richtungs-Form einer Geraden aufstellen (Startpunkt und Richtungsvektor sind gegeben) und dann verifizieren, dass diese sowie eine andere Gerade durch einen bestimmten Punkt gehen. Das ist recht einfach, bringt aber 20 Punkte. In Teil (b) sind vier Punkte gegeben. Es ist nur zu zeigen, dass dies die Eckpunkte eines Rechtecks sind, und der Mittelpunkt ist zu berechnen. Man braucht dann den Flächeninhalt, um ihn mit der Zahl 1818 zu multiplizieren. Das erfordert keine Idee und keine geometrische Vorstellung. In Teil (c) soll die Ebene E bestimmt werden, in der dieses Rechteck liegt. Das ist eine Standard-Prozedur, und „zur Kontrolle“ ist die Ebenengleichung bereits gegeben. In Teil (d) den Schnittpunkt der einen Geraden mit der Ebene E zu berechnen, dürfte als leicht einzustufen sein. Dann muss man entscheiden, ob dieser Punkt innerhalb des gegebenen und oben berechneten Rechtecks liegt. Dies alles zusammen bringt 80 Punkte, womit die Klausur schon fast, nämlich zu 8/9, bestanden ist. Im Jahr 2005 musste dafür deutlich mehr gearbeitet werden, denn dem Anteil von 8/9 würden dort 120 Punkte entsprechen bei nur 30 Minuten längerer Bearbeitungszeit.

Im Jahr 2013 ist die Aufgabe II.1 („Bauernhaus mit Photovoltaikanlage“) ganz ähnlich aufgebaut. In Teil (a) soll nur etwas Gegebenes eingezeichnet werden in eine Teilskizze. Die Methoden und Schwierigkeiten sind vergleichbar denen von 2011: Geraden, Ebenen, Winkel, Rechtecke. Hier scheint mehr ins Gewicht zu fallen, dass beim erhöhten Niveau die Aufgabenteile (a), (b), (c), (d) wörtlich auch beim grundlegenden Niveau vorkommen. Zu Details siehe weiter unten. Beim grundlegenden Niveau ist das vielleicht ähnlich wie 2011 einzuschätzen, das „erhöhte Niveau“ aber ist dann eine Mogelpackung.

4.2 Leistungskurs bzw. erhöhtes Niveau

Im LK 2005 geht es in Aufgabe I.1 („Funktionenschar exponentieller Funktionen“) um die 1-Parameter-Schar $f_n(x) = 3e^x/(1+e^x)^n$ mit $n \in \mathbb{N}$. In Teil (a) sind drei solcher Funktionen grafisch gegeben, und man soll die drei Parameter bestimmen. In Teil (b) geht es um Asymptoten für $x \to \infty$, in Teil (c) um eine Stammfunktion, die allerdings bereits gegeben ist. Man muss also nur einmal ableiten. Damit ist dann in Teil (d) ein bestimmtes Integral auszurechnen. In Teil (e) geht es darum, Symmetrien der Graphen von f_1 und f_2 rechnerisch nachzuweisen. Das ist alles nicht besonders schwierig, erfordert aber solide Kenntnisse in Differential- und Integralrechnung. Dies ist einem LK wohl gerade noch angemessen.

Bei der recht ähnlichen Aufgabe I.3 zu einer anderen Funktionenschar f_k muss sogar noch ernsthafter gerechnet werden. Allein Teil (a) erfordert umfangreiche Berechnungen, u. a. zu Polstellen, Extrema und Wendepunkten, bringt allerdings 45 Punkte. In Teil (e) ist eine Stammfunktion von f_1 zu ermitteln, und es ist zu entscheiden, ob ein uneigentliches Integral einen endlichen Wert hat. Man muss den natürlichen Logarithmus kennen sowie sein Verhalten im Unendlichen. Zu beachten ist, dass 2005 drei Aufgaben zu bearbeiten waren.

Beim erhöhten Niveau 2011 beginnt die Aufgabe I.1 („Keramik“) mit einem Teil (a) nur zum Eintippen. Der „Gewinnbereich“ ist in Teil (b) an einer Skizze abgelesen, muss also nicht berechnet werden. Nur der maximale Gewinn ist auszurechnen, indem das gegebene kubische Polynom abgeleitet wird und eine quadratische Gleichung gelöst wird. Das ist sehr simple Analysis. Teil (c) soll so interpretiert werden, dass man die Fixkosten als Konstante $K(0)$ von der gegebenen Funktion $K(x)$ subtrahiert. Die entstehende Funktion K_v erfüllt dann $K_v(0) = 0$. Dann soll lediglich grafisch eine berührende Gerade an diese Kurve gelegt werden. Zu rechnen ist da nichts. Die Steigung der Geraden ist nur abzulesen. Die Teile (a),(b),(c) bringen bereits 55 Punkte, davon 5 Punkte im höchsten „Anforderungsbereich III“. Zum Bestehen (wohlgemerkt, auf erhöhtem Niveau) fehlen dann nur noch 35 Punkte, die man etwa bei der anderen Aufgabe erbeuten kann. Rechnerisch ist das alles aber sehr simpel. Die Schwierigkeiten, wenn es denn welche gibt, bestehen in der Interpretation der betriebswirtschaftlichen Begriffe wie Gewinn, Preisuntergrenze etc. In Teil (d) werden die variablen Stückkosten $k_v(x) = K_v(x)/x$ verwendet (gegeben als $k_v(x) = 25x^2 - 200x + 600$), und das Minimum ist auszurechnen, womit das Ergebnis aus Teil (c) noch einmal interpretiert wird. Teil (d) bringt weitere 20 Punkte, aber ohne mathematische Schwierigkeiten, womit zum Bestehen der Klausur nur noch 15 Punkte fehlen. Die Bezeichnung „erhöhtes Niveau“ dafür ist sehr geschmeichelt. Dies gilt auch dann, wenn man die Teile (e) und (f) mit einer Exponentialfunktion für anspruchsvoller erklärt. Diese entscheiden praktisch nur über die besseren Noten. Zum Bestehen mit 90 Punkten sind sie entbehrlich. Das liegt klar unter dem Niveau von 2005.

Beim erhöhten Niveau 2013 („Halbinsel“) schließlich ist zunächst verwirrend, dass die Skizze im großen Maßstab (vgl. Abbildung 1) nicht genau dasselbe beschreibt wie der Ausschnitt im kleinen Maßstab in der so genannten

„Anlage“. Die letztere ist nach oben konvex, die erstere scheint aber einen Wendepunkt zu haben, zumindest dann, wenn man das mit guten Augen oder mit einer Lupe betrachtet. Teil (a) besteht zunächst aus einem reinen Einsetz- und Ableseteil sowie aus der Betrachtung, dass der Graph einer quadratischen Funktion nicht so aussehen kann wie die Skizze in der Anlage. Das ist sehr elementar und bringt nur 15 Punkte. Der wörtlich gleiche Aufgabenteil bringt im grundlegenden Niveau auch nur 20 Punkte. In (b) ist dann ein kubisches Polynom zu bestimmen, das auch gegeben ist. Das führt auf ein lineares Gleichungssystem für die Koeffizienten. In Teil (c) ist die Nullstelle der ersten Ableitung durch Lösen einer quadratischen Gleichung zu bestimmen. Dasselbe gilt für Teil (d), wenngleich hier die Zahlen komplizierter zu rechnen sind (Brüche mit großem Nenner). Bemerkenswert ist, dass die Teile (a),(c),(d) beim grundlegenden Niveau und beim erhöhten Niveau wörtlich identisch sind und zusammen 60 bzw. 55 Punkte bringen. Was die Bezeichnung „erhöhtes Niveau“ rechtfertigen soll, ist nicht zu erkennen. Die Aufgaben sind nur etwas umfangreicher. Beim LK 2005 mussten sich die Abiturienten jedenfalls mathematisch mehr anstrengen als 2011 bzw. 2013, hatten allerdings auch weniger mit dem Text zu kämpfen. „Textverständnis statt mathematische Fähigkeiten“, das könnte man als Motto herauslesen.

Nun vergleichen wir noch die jeweiligen Aufgaben II.1 zum Thema LAAG/Geometrie. Die „Eckpyramide“ im Jahr 2005 geht von einer Ebenenschar E_a aus in Abhängigkeit von einem reellen Parameter a. Teil (a) zu E_0 ist recht einfach, in Teil (b) ist zu zeigen, dass alle Ebenen eine Gerade gemeinsam haben. Das kann man durch geeignetes Einsetzen entscheiden, ist also auch recht einfach. Allerdings gibt es für beide Teile zusammen nur 25 Punkte. Teil (c) ist anspruchsvoller, weil hier das Volumen eines Körpers zu bestimmen ist, dessen Eckpunkte erst zu berechnen sind. Folglich gibt das 30 Punkte. Zusammen haben wir dann 55 Punkte. Zum Bestehen brauchte man aber 135 Punkte aus drei Aufgaben. Für die Teile (d), (e), (f) mit je 15 Punkten muss man die Orthogonalität durch das Skalarprodukt ausdrücken, den Abstand einer Ebene von einem Punkt berechnen sowie eine Grenzbetrachtung für das in (c) berechnete Volumen machen. Hier kommt somit sogar etwas Analysis mit hinein. Das erscheint insgesamt einem Leistungskurs angemessen.

Beim erhöhten Niveau 2011 haben wir die „Konzerthalle“ als Geometrie-Aufgabe. Teil (a) besteht nur aus dem Einzeichnen von vier in Koordinaten gegebenen Punkten, in Teil (b) ist die Ebenengleichung zu bestimmen, die die vier Punkte erfüllen. Auch dafür gibt es zusammen 25 Punkte, aber mathematisch scheint das einfacher zu sein als 2005. Man kann die Gleichung sogar recht einfach erhalten, denn an den speziellen Koordinaten ist zu sehen, dass die zweite Koordinate keinen Einfluss haben kann. Gesucht ist also eine Gleichung vom Typ $ax_1 + cx_3 = d$. Konkret kommt $x_1 - 16x_3 = -160$ heraus. Vektorrechnung kann, muss aber dafür nicht investiert werden. Damit hätte man in wenigen Minuten bereits 25 Punkte „auf erhöhtem Niveau“. In Teil (c) soll man nachweisen, dass eine bestimmte Gerade g in dieser Ebene liegt. 2005 gab es dasselbe für eine ganze Ebenenschar. Das ist wohl als einfacher als 2005 einzustufen. In Teil (d) geht es nur darum, dass zwei Teilstrecken in den Geraden g und h sich nicht schneiden. Das ist eigentlich ein lineares Gleichungssystem, Teil (d) darf aber auch in der mitgelieferten Grafik rein zeichnerisch gelöst werden. Somit ist auch das recht einfach und erfordert kaum vertiefte geometrische Kenntnisse. Zusammen gibt es für (a), (b), (c), (d) bereits 65 Punkte, und von einem LK-Niveau ist kaum etwas zu sehen. Mit 90 Punkten ist die Klausur bestanden. Das ist offensichtlich unter dem Niveau von 2005, auch wenn man die Bearbeitungszeit berücksichtigt.

Im Jahr 2013 haben wir die Aufgabe „Bauernhaus mit Photovoltaikanlage“. In Teil (a) soll man vier gegebene Punkte als Eckpunkte eines Rechtecks nachweisen und dann die Abmessungen mit denen der Photovoltaik-Elemente vergleichen („Wieviele kleine Rechtecke passen in ein großes Rechteck?“). Dann soll in Teil (b) die Gleichung der Ebene dieses Rechtecks berechnet werden. Diese Ebenengleichung ist „zur Kontrolle“ bereits angegeben, was die Rechnung natürlich sehr erleichtert. Vektorrechnung kann, muss aber nicht verwendet werden. Man kann das als lineares Gleichungssystem für die Koeffizienten der Ebenengleichung auffassen. Diese beiden Teile entsprechen wörtlich den Teilen (b) und (c2) der Aufgabe II.1 beim grundlegenden Niveau, und bei beiden gibt es 30 Punkte dafür. Auch die Teile (c), (d) beim erhöhten Niveau entsprechen wörtlich den Teilen (d), (e1) beim grundlegenden Niveau (mit jeweils 25 Punkten). Dabei ist ein Winkel unter Verwendung des Skalarprodukts zu berechnen, und ein Fehler der Musterlösung ist wörtlich bei beiden Niveaus zu finden: Der Nenner für $\cos\alpha$ ist nicht korrekt angegeben. Weil man diese vier Teile auch dem grundlegenden Niveau zumutet, stellt sich die Frage: *Was soll hier erhöht sein gegenüber dem grundlegenden Niveau?* Teil (e) ist recht ähnlich zu einigen Teilen in (e) und (f) beim grundlegenden Niveau. Da bleibt allenfalls der Teil (f) beim erhöhten Niveau, der gewissermaßen den Teil (a) zum reinen Einzeichnen beim grundlegenden Niveau ersetzt. Zum Bestehen ist Teil (f) aber entbehrlich. Die vier wörtlich gleichen Aufgabenteile (a), (b), (c), (d) [bzw. (b), (c2), (d), (e1)] bringen bei beiden Niveaus 55 Punkte. Zusammen mit den identischen Teilen von I.1 haben wir 110 [bzw. 115] Punkte, was jeweils zu 7 Notenpunkten führt (also klar bestanden ist).

Im Vergleich von 2013 zu 2005 fällt zudem auf, dass jetzt die Bearbeitungszeit (inkl. Lesezeit) mit 330 Minuten wieder dieselbe ist, aber für nur noch zwei Aufgaben 2013 statt drei Aufgaben 2005, wobei jede Aufgabe gleichermaßen mit 100 Punkten bewertet war.

5 Fazit: Von 2005 bis 2013 gibt es einen klaren Abstieg in den Anforderungen

Die Aufgaben sind nicht schwieriger, sondern eher leichter geworden, es sind nur noch zwei statt drei Aufgaben zu bearbeiten, und die zur Verfügung stehende Zeit von 270 (bzw. 330) Minuten ist dieselbe (einschließlich der Aufteilung in Lese- und Bearbeitungszeit). Dass die Aufgaben im Jahr 2013 „komplexer“ waren als 2005 (wie in einer Presseerklärung von der Hamburger Behörde behauptet wurde), ist nicht zu erkennen. Man kann höchstens feststellen, dass bei einigen Aufgaben ein zusätzlicher Teil (f) bzw. (g) vorkam, allerdings nur bei I.2 und II.2, nicht bei I.1, II.1, III.1, III.2. Dies alleine begründet noch keine höhere Komplexität, denn die hinteren Teile waren zum Bestehen nicht notwendig, und letztlich entscheidet die Gesamtzahl der Aufgabenteile: Drei mal 5 (bzw. 6) Teile sind immer noch mehr als zwei mal 6 (bzw. 7) Teile. Wie oben ausgeführt, waren 90 Punkte 2013 jedenfalls erheblich leichter einzusammeln als 135 Punkte 2005. Entsprechendes gilt dann auch für die besseren Noten wie „befriedigend“ oder „gut“.

Selbst ein dem grundlegenden Niveau gegenüber tatsächlich erhöhtes Anspruchsniveau kann man allenfalls für die hinteren Aufgabenteile bescheinigen, meist (e) und (f). Im Klartext heißt das, dass 2013 eine gute oder sehr gute Note beim erhöhten Niveau wohl tatsächlich schwieriger erreichbar war als beim grundlegenden Niveau.

> Aber das bloße Bestehen der Klausur mit einer bescheidenen Note war beim grundlegenden und erhöhten Niveau annähernd äquivalent. Das wurde 2013 durch wörtlich gleiche Aufgabenteile bewirkt, deren Punkte in der Summe bereits zum Bestehen ausreichten.

Somit ist das „erhöhte Niveau“ zunehmend nur als eine Worthülse zu betrachten. Die aus KESS 12 abgeleiteten Behauptungen, dass die Leistungen der Abiturienten an Gymnasien 2011 gegenüber denen von 2005 teilweise sogar besser geworden sind, ist für die Mathematik im Widerspruch mit den obigen Betrachtungen zu den Abitur-Aufgaben selbst. Hier wurde das Niveau abgesenkt. Auch in einigen anderen Bundesländern deutet sich diese Entwicklung an. Die Hochschulen müssen dem mit immer zahlreicheren Brückenkursen und einem MINT-Kolleg gegensteuern.[8] Dass G8 die Situation gar noch verbessert hat (wie in Hamburg behauptet wurde), ist wohl nur ein Märchen.

Die erklärte bildungspolitische Absicht „Die Verlagerung von input-orientierten Bildungsstandards (bisherige Lehrpläne, Bildungspläne und Curricula) zu output-orientierten Standards zeigt, dass das Konzept des Qualitätsmanagements und der Qualitätssicherung Eingang ins Bildungswesen hält“[9] zielt offensichtlich nicht auf eine neue Form der „Endkontrolle“, sondern auf eine „Absatzerhöhung“. Der Output, i. e. die Abiturientenquote, soll in Deutschland – auch nach den entsprechenden Forderungen der OECD – deutlich erhöht werden (die angegebene Zahl von 67 % Steigerung bei den Abiturienten der anderen Hamburger Schulformen von 2012 gegenüber den entsprechenden Schulformen von 2005, z. B. Gesamtschulen, belegt, wie erfolgreich man dabei ist), was dann aber mit einer deutlichen Niveauabsenkung einhergeht.

6 Schlussbemerkung

Die Abituraufgaben entfernen sich immer mehr von der modernen Mathematik als Struktur-Wissenschaft und wenden sich – vielleicht im Sinne einer missverstandenen mathematischen Modellierung – in wortreichen Textaufgaben zahlreichen Anwendungen zu, und das mit wachsendem Einsatz des Taschenrechners. Diese Anwendungen werden systematisch als eine Art Vorwand für die Aufgabenstellung genommen, und das ganze wird als „Modellierung“ deklariert. Aber es sieht eher danach aus, als würden umgekehrt die Anwendungen nach der mathematischen Theorie so „modelliert“, dass es gut klingt und kompetenzorientierte Theoretiker zufrieden sind.

Genau an dieser Stelle wird oft ein Bruch zwischen Schul- und Hochschulmathematik empfunden und beklagt:[10] Mathematik ist mehr als Rechnen, und die Begriffe, Prinzipien und Strukturen sowie auch Beweise sind wichtiger als das Rechnen mit komplizierten Zahlen. Dabei würde gerade dies eine klar definierbare Abgrenzung des erhöhten Niveaus zum grundlegenden Niveau ermöglichen.

> Diese Chance zu „Mathematik ist mehr als Rechnen“ wird eindeutig vertan. Man fügt einen Aufgabenteil hinzu, macht die Berechnungen komplizierter, verlängert die Bearbeitungszeit um eine Stunde und meint, damit ein erhöhtes Niveau zu erreichen.

Statt mit mathematischen Problemen müssen die Abiturienten mit Formulierungsproblemen kämpfen. Sie müssen umfangreiche, relativ schwer verständliche und nicht immer eindeutige Texte in Mathematik umsetzen, die dann selbst gar nicht mehr schwierig ist und die von Jahr zu Jahr weiter vereinfacht wird. Damit werden andere als mathematische Fähigkeiten bzw. „Kompetenzen“ benotet. Letztlich wertet diese Praxis mathematisches Verständnis gegenüber anderen „Kompetenzen“ systematisch ab. Auch an den Aufgaben in Schulbüchern und in Testaufgaben bei PISA wird diese Tendenz sichtbar.

Anmerkungen

1. Schlusssatz im Kurzbericht zu KESS 12, siehe http://bit.ly/1kX4gvm
2. http://bit.ly/1txwi18
3. http://bit.ly/1kX4oLk
4. Die unterschiedlichen Stundenzahlen alleine können es kaum sein.
5. http://bit.ly/SlTgN2

6. Typischer Aufgabenteil: „Interpretieren Sie die Matrixeinträge $m_{11} = 0,99$ und $m_{32} = 0,3$ vor dem Hintergrund des Sachkontextes.“

7. Eine andere „Gummi-Aufgabe“ steht beim grundlegenden Niveau in III.1 im Jahr 2011 („Telefonieren am Steuer“). Teil (d) enthält dort den vage formulierten Text: „Beschreiben Sie, auf welches Argument sich die Aussage des Hörers vermutlich stützt ...“

8. Vgl. dazu Astrid Baumann, *Mathe-Lücken und Mathe-Legenden. Einige Bemerkungen zu den mathematischen Fähigkeiten von Studienanfängern*, Die Neue Hochschule (DNH) 5, 24–27 (2013).

9. Laut http://de.wikipedia.org/wiki/Bildungsstandards

10. „Die Präsentation der Mathematik im Unterricht hat sich ... weit von der Hochschule entfernt“, zitiert aus: Horst Weber, *Mathematikunterricht und Hochschule: Wie hängen sie zusammen?* Mitt. DMV 20 (2012), 181–185.

Prof. Dr. Thomas Jahnke, Lehrstuhl für Didaktik der Mathematik, Universität Potsdam. jahnke@uni-potsdam.de
Prof. Dr. Hans Peter Klein, Lehrstuhl für Didaktik der Biowissenschaften, Goethe Universität Frankfurt, h.p.klein@bio.uni-frankfurt.de
Prof. Dr. Wolfgang Kühnel, Institut für Geometrie und Topologie, Universität Stuttgart. kuehnel@mathematik.uni-stuttgart.de
Prof. Dr. Thomas Sonar, Institut Computational Mathematics, TU Braunschweig. t.sonar@tu-bs.de
OStD Markus Spindler, Kreisgymnasium Halle, Neustädter Straße 2, 33790 Halle/Westf. 007spindler@web.de

Thomas Jahnke ist Professor für Didaktik der Mathematik an der Universität Potsdam. Er ist u. a. Autor und Herausgeber von ca. 20 Gymnasialschulbüchern für Mathematik.

Hans Peter Klein ist Professor für Didaktik der Biologie an der Universität Frankfurt (Main), Geschäftsführer und Mitbegründer der Gesellschaft für Bildung und Wissen und Präsident der Gesellschaft für Didaktik der Biowissenschaften.

Wolfgang Kühnel ist Professor für Differentialgeometrie am Fachbereich Mathematik der Universität Stuttgart. Er ist Autor zweier Lehrbücher *Differentialgeometrie* sowie *Matrizen und Lie-Gruppen*.

Thomas Sonar ist Professor für Technomathematik an der TU Braunschweig. Er ist Autor und Herausgeber von 11 Büchern und zahlreichen populärwissenschaftlichen Veröffentlichungen zur Mathematik und Mathematikgeschichte, Mitglied der Braunschweigischen Wissenschaftlichen Gesellschaft, korrespondierendes Mitglied der Hamburger Akademie der Wissenschaften.

Oberstudiendirektor Markus Spindler ist Leiter des Kreisgymnasiums in Halle (Westf). Er lehrte auch an deutschen Schulen in Istanbul und Moskau.